INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250-3638

ACTIONS DES GROUPES MOYENNABLES SUR LES ALGÈBRES DE VON NEUMANN

par

Adrian OCNEANU

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS
No.35/1980

BUCURESTI

Submitted at
"Comptes Rendus"

ACTIONS DES GROUPES MOYENNABLES
SUR LES ALGÈBRES DE VON NEUMANN

par

Adrian OCNEANU*)

July 1980

*) Department of Mathematics, National Institute for Scientific and Technical Creation, Bd.Pacii 220, 77538 Bucharest, Romania

On caractérise à une conjugaison cocyclique près les actions des groupes moyennables sur les facteurs de type II hyperfinis.

We characterize up to cocycle conjugacy all actions of amenable groups on hyperfinite type II factors.

Dans l'ouvrage [1] , A.Connes, après avoir montré l'importance du problème pour la classification des facteurs, classifie à une conjugaison extérieure près les automorphismes approximativement intérieurs des facteurs M isomorphes à $M \otimes R$, où R est le facteur hyperfini de type II_1. Dans ce qui suit nous généralisons cette classification aux actions des groupes moyennables.

Soit M une algèbre de von Neumann à prédual séparable, U(M) son groupe d'unitaires, Z(M) son centre, Aut M le groupe de ses automorphismes, Int M et Ct M les sousgroupes des automorphismes intérieurs, respectivement centralement triviaux ([1]) et ε : Aut M $\to$ Out M = Aut M/Int M la projection canonique. Si G est un groupe, une action de G sur M est un homomorphisme α : G $\to$ Aut M et un G-noyau un homorphisme β : G $\to$ Out M.
Deux actions α , α' sont conjuguées cocycliquement si $\alpha'_g = \sigma \mathrm{Ad} v_g \alpha_g \sigma^{-1}$, $g \in G$, où $\sigma \in$ Aut M, et $(v_g)_g \subset U(M)$ est un α-cocycle.
Deux G-noyaux β , β' sont dits conjugués si $\beta'_g = \tau \beta_g \tau^{-1}$, $g \in G$ où $\tau \in$ Out M.

Pour une action α : G $\to$ Aut M, Jones ([2]) a introduit l'invariant caracteristique $N(\alpha) = \alpha^{-1}$(Int M) et $\Lambda(\alpha) \in H^2(N(\alpha), G, U(Z(M)))$, et pour un G-noyau β : G $\to$ Out M, l'obstruction $N(\beta) = \ker \beta$ et $Ob(\beta) \in H^3(N(\beta), U(Z(M)))$, ces invariants étant de nature purement algébrique.

Soit G un groupe discret, moyennable et au plus dennombrable. Soit $\alpha^{(N,\Lambda)}$: G $\to$ Aut R une action modèle à invariant caracteristique N, Λ et $\tilde{\beta}^{(N,Ob)}$: G $\to$ Out R un G-noyau modèle à obstruction

N, Ob; $\tilde{\alpha}^{(0)}$ designera l'action modèle libre.

Nos principaux résultats sont:

THÉORÈME 1. Soit α :G $\to$Aut M une action avec $\alpha(G)\cap(\mathrm{Ct}\ M\setminus\mathrm{Int}\ M)=\emptyset$, où M est un facteur isomorphe à $M\otimes R$.

1°) Si α est libre, alors α est conjugée cocyclique de $\alpha\otimes\tilde{\alpha}^{(0)}\in$ Aut $(M\otimes R)$

2°) Si $\alpha(G)\subset\overline{\mathrm{Int}}\ M$, alors α est conjugée cocyclique de $1\otimes\tilde{\alpha}^{(N(\alpha),\Lambda(\alpha))}\in$ Aut$(M\otimes R)$.

THÉORÈME 2. Soit β: G $\to$Out M un G-noyau avec $\beta(G)\cap\varepsilon(\mathrm{Ct}\ M\setminus\mathrm{Int}\ M)=\emptyset$, où M est un facteur isomorphe à $M\otimes R$.

1°) Si β est libre, alors β est conjugué de $\varepsilon(\bar{\beta}\otimes\tilde{\alpha}^{(0)})\in$Out $(M\otimes R)$, où $\bar{\beta}$: G $\to$Aut M est une section de β .

2°) Si $\beta(G)\subset\varepsilon(\overline{\mathrm{Int}}\ M)$, alors β est conjugué de $1\otimes\tilde{\beta}^{(N,Ob)}\in$Out $(M\otimes R)$.

COROLLAIRE 1. Toute action α: G $\to$Aut R est caractèrisée à une conjugaison cocyclique près par $N(\alpha)$, $\Lambda(\alpha)$, et tout G-noyau β: G $\to$Out R à une conjugaison près par $N(\beta)$, $Ob(\beta)$.

Demonstration: Ct R=Int R et $\overline{\mathrm{Int}}$ R=Aut R.

COROLLAIRE 2. Soit $R_{0,1}$ le facteur II hyperfini. Toute action α : G $\longrightarrow$ Aut $R_{0,1}$ est caractérisée à une conjugaison cocyclique près par $N(\alpha)$, $\Lambda(\alpha)$, mod (α), et tout G-noyau β:G $\to$Out $R_{0,1}$ à une conjugaison près par $N(\beta)$, $Ob(\beta)$, mod$'(\beta)$, où mod: Aut $R_{0,1}\to\mathbb{R}$ defini dans [1] factorise à mod$'$: Out $R_{0,1}\to\mathbb{R}$.

Demonstration: Ct $R_{0,1}$=Int $R_{0,1}$ et $\overline{\mathrm{Int}}\ R_{0,1}$= ker mod.

Pour un ultrafiltre libre ω sur $\mathbb{N}$, la W^*-algèbre M_ω des suites centralisatrices et la trace τ_ω: $M_\omega \rightarrow Z(M)$ sont definies en [1]. Une suite ω- convergente $(\theta_n)_n \in \mathrm{Aut}\, M$ détermine un automorphisme $\theta \in \mathrm{Aut}\, M$, qui sera appelé semi-relevable, par $\theta((x_n)_n)=(\theta_n(x_n))_n$.

Notre principal résultat technique est la généralisation noncommutative suivante du théorème de type Rohlin de Ornstein et Weiss [3].

THÉORÈME 3. Soit $\varepsilon>0$, soient $K_1,\ldots,K_N$ des sousensembles finis de G qui l'ε- pavent au sens de [3], φ un état normal fidèle sur Z(M), α: G $\rightarrow$ Aut M une action croisée libre, semirelevable, qui laisse φ invariant sur $Z(M) \subset M_\omega$. Alors dans le commutant de toute famille dénombrable de M_ω on peut trouver une partition de l'unité $1 = \sum_i \sum_{k \in K_i} E^i_k$ avec:

$$\sum_i (\mathrm{card}\, K_i)^{-1} \sum_{k,l \in K_i} \| \alpha_{lk^{-1}} E^i_k - E^i_l \|_1 \leqslant 5\varepsilon^{1/2}$$

où $\|x\|_1 = \varphi(\tau_\omega(|x|))$ pour $x \in M_\omega$

De plus, on peut aussi contrôler $\|E^i\|_1$, $i=1,\ldots,N$, où $E^i = \sum_{k \in K_i} E^i_k$.

La démonstration utilise la caractérisation donnée dans [1] des automorphismes libres, des techniques combinatoires liées aux pavages dans le groupe, et le théorème ergodique en moyenne pour des actions des groupes moyennables sur les W^*-algèbres.

On construit une structure pavante du groupe G en prenant des sousensembles finis K_i^n et $L_{i,j}^n$; $n \in \mathbb{N}$, $i=1,\ldots,N_n$ $j=1,\ldots,N_{n+1}$, tels que le degré d'invariance approximative de K_i^n croit rapidement, et tels que (K_i^n) pavent approximativement $(K_j^{n+1})_j$ avec $(L_{i,j}^n)_{i,j}$ comme centres de pavage (au sens de[3]).

Avec le théorème de type Rohlin, on peut demontrer dans le cadre envisagé l'annulation de la cohomologie nonabelienne 1 et 2 dimensionelle sur M . En utilisant de plus le fait que dans chaque classe de 2-cohomologie il y a un 2-cocycle $(u_{g,h})_{g,h}$ " presque periodique " en h par rapport à la structure de pavage construite, on obtient:

THÉORÈME 4. Soit M un facteur, $\alpha : G \to \mathrm{Aut}\, M$ une action croisée par un 2-cocycle qui est centralement libre. Alors le 2-cocycle est une 2-cofrontière, i.e. si $\alpha_{gh} = \mathrm{Ad}u_{g,h}\alpha_g\alpha_h$, avec u cocycle, il existent $(v_g)_g \subset U(M)$, $v_1 = 1$ avec $G \ni g \mapsto \mathrm{Ad}v_g\alpha_g$ action.

On démontre aussi une extension aux nonfacteurs et en plus on donne des estimations pour v par rapport à u.

Ce théorème repond a un problème ouvert pose par Sutherland en[4].

Pour démontrer le théorème 1 on peut, en vue du théorème 4, se restreindre au cas où α est libre. Pour ce cas, le modèle $\alpha^{(0)}$ d'action sur R est construit considerant la structure pavante (K_i^n), $(L_{i,j}^n)$ comme le diagramme de Bratteli d'une AF-algébre A, qu'on peut supposer simple. On identifie, comme en [5], A à un système topologique dynamique (X,Γ). Utilisant la moyennabilité de Γ on choisit une trace factorielle, obtenant ainsi un facteur $\bar{A}$. Les K_i^n

étant de plus en plus invariants, on a approximativement des actions de G sur les K_i^n, lesquelles, d'une mannière analogue à la représentation régulière gauche, donnent une action unitaire de G sur $\bar{A}$; on appelle $\bar{A}$ le sous modèle. Tensorisant un nombre dénombrable de fois le sousmodèle on obtient le modèle.

Pour α libre donné, on retrouve dans M le modèle en alternant des techniques du type du théorème de Rohlin avec des methodes cohomologiques pour obtenir une forme approximative du sousmodèle sur une sousalgèbre de dimension finie. On compléte ensuite celle-ci en un AF-algèbre en faisant une suite de tensorisations avec des sousfacteurs finis de M provenant de M_ω et presque invariés par α , suivies d'un passage a une sousalgèbre de l'algèbre produit; tout cela utilisant des techniques combinatoires. On répète le procédé pour chaque copie du sousmodèle, s'assurant que le modèle ainsi obtenu decompose M en produit tensoriel. _

Le théorème 2 est demontré de même façon.

B I B L I O G R A P H I E

[1] A.CONNES. Outer conjugacy classes of automorphisms of factors. Ann.Sci.Ec.Norm.Sup.4-ème série, t.8(1975).

[2] V.F.R. JONES. An invariant for group actions in "Algèbres d'opérateurs". Springer Lecture Notes in Math., no.725 (1980).

[3] D.ORNSTEIN and B.WEISS. Ergodic theory of amenable group actions. Bull.AMS vol.2, no.1 (1980).

[4] C.SUTHERLAND. Cohomology and extensions of operator algebras. Preprint (1976).

[5] S.STRATILA and D.VOICULESCU. Representations of AF-algebras and of the group $U(\infty)$. Springer Lecture Notes in Math., no.486 (1975).