INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250-3638

L'HOMOGENEISATION D'UN PROBLEME NON LINEAIRE

par

Gelu PAŞA

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS
No.49/1980

BUCURESTI

L'HOMOGENEISATION D'UN PROBLEME NON LINEAIRE

par

Gelu PAŞA*)

Octobre 1980

*) Institute National pour la Creation Scientifique et Technique, Bdul Pacii 220, 79622 Bucarest, Roumanie

L'HOMOGENEISATION D'UN PROBLEME NON LINEAIRE

Par Gelu Pasa

Dans ce qui suite on considère une équation elliptique non lineaire, de type Navier-Stokes, dont les coefficients a_{ijkh} sont Yperiodiques, Y etant une parallelepipède de R^3. On fait l'homogeneisation de cette équation et l'on demontre un théorème de convergence, bien que le terme nonlineaire soit présent.

1. Introduction.

On considère l'équation:

$$(1)\quad \begin{cases} u_k \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij} - \sigma_{ij}) = f_i \text{ dans } \Omega \subset R^3 \\ div\, \bar{u} = 0, \quad \bar{u}/\partial\Omega = \bar{0} \end{cases}$$

où $\bar{u}$ est la vitesse, p est la pression, $\sigma_{ij} = a_{ijkh}(x)\varepsilon_{kh}(u)$,

$$\varepsilon_{kh}(\bar{u}) = \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_h}\right), (\exists)\alpha > 0 \text{ et } a_{ijkh}\xi_{ij}\xi_{kh} \geq \alpha\xi_{ij}\xi_{kh}$$

a_{ijkh}=Y-periodiques, $a_{ijkh} \in L_\infty(Y)$, $a_{ijkh} = a_{ijhk} = a_{khij}$

En definissant: $a^{\varepsilon}_{ijkh}(x) = a_{ijkh}(x/\varepsilon)$, (1) se transforme en une famille de problèmes pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ .Alors nous avons le problème ε

$$(2)\quad \begin{cases} u^{\varepsilon}_k \dfrac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_k} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(p^{\varepsilon}\delta_{ij} - \sigma^{\varepsilon}_{ij}) = f_i \text{ dans } \Omega \\ div\, \bar{u}^{\varepsilon} = 0, \quad \bar{u}^{\varepsilon}/\partial\Omega = \bar{0} \end{cases}$$

En definissant $\xi^{\varepsilon}_{ij} = a^{\varepsilon}_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\bar{u}^{\varepsilon})$,(2) devient:

$$(2')\quad \left(u^{\varepsilon}_k \frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_k}, w_i\right) + \left(\xi^{\varepsilon}_{ij}, \varepsilon_{ij}(\bar{w})\right) - \left(p^{\varepsilon}, div\,\bar{w}\right) = (f_i, w_i)$$

$(\forall)$ $\bar{w} \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$,ou (.,.) est le produit scalaire dans $L_2(\Omega)$

Les conditions d'existence et unicité pour (2) sont demontrées dans [3].L'équation homogenisée est obtenue par les procedées clasiques comme dans [2]. On suppose que $\overline{u}^{\varepsilon}$, p^{ε}, $\sigma^{\varepsilon}_{ij}$ ont un developpement de la forme:

$$\overline{u}^{\varepsilon} = \overline{u}^{0}(x,y) + \varepsilon \overline{u}^{1}(x,y) + \ldots.$$
$$p^{\varepsilon} = p^{0}(x,y) + \varepsilon p^{1}(x,y) + \ldots$$
$$\sigma^{\varepsilon}_{ij} = \sigma^{0}_{ij}(x,y) + \varepsilon \sigma^{1}_{ij}(x,y) + \ldots, \quad y = x/\ ,$$

où $\overline{u}^{k}$, p^{k}, σ^{k}_{ij} sont Y periodiques en y.

En identifient les termes en ε^{-2}, ε^{-1}, ε^{0}, on obtient:

(3) $$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{ijkh}\,\varepsilon^{y}_{kh}(\overline{u}_0)\right) = 0\,, \quad \operatorname{div}_x \overline{u}^{0} + \operatorname{div}_y \overline{u}^{1} = 0$$

(4) $$u^{0}_{k}\frac{\partial u^{0}_{i}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial y_j}\left(p^{0}\delta_{ij} - \sigma^{0}_{ij}\right) = 0$$

(5) $$u^{1}_{k}\frac{\partial u^{0}_{i}}{\partial y_k} + u^{0}_{k}\left(\frac{\partial u^{0}_{i}}{\partial x_k} + \frac{\partial u^{1}_{i}}{\partial y_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p^{0}\delta_{ij} - \sigma^{0}_{ij}\right) + \frac{\partial}{\partial y_j}\left(p^{1}\delta_{ij} - \sigma^{1}_{ij}\right) = 0$$

Equation((3) nous montre que $\overline{u}^{0} = \overline{u}^{0}(x)$, donc les termes en $\frac{\partial u^{0}_{i}}{\partial y_k}$ sont disparus. En apliquant l'operateur moyenne dans (5) et en exprimant $\widetilde{\sigma}^{0}_{ij}$ en fonction de $\overline{u}^{0}$ a l'aide de (4) on obtient, avec $\widetilde{\cdot} = [1/(\mu(Y)]\cdot\int_Y \cdot\, d\mu$

(6) $$u^{0}_{k}\frac{\partial u^{0}_{i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \widetilde{p}^{0}}{\partial x_i} + A_{ijkh}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varepsilon_{kh}(\overline{u}^{0})\right) = f_i$$

$$A_{ijkh} = \frac{1}{\mu(Y)}\int_Y \left(a_{ijkh} + a_{ijlm}\,\varepsilon_{lm}(\overline{\rho}^{\,kh})\right)$$

ou $\overline{\rho}^{kh}$ est la solution <u>du problème local</u>

(7) $$\int_Y a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(\overline{\rho}^{\,lm}) = -\int_Y a_{ijkh}\,\varepsilon_{ij}(\overline{w}) \quad (\forall)\,\overline{w} \in V_Y$$

$$V_Y = \{\overline{u} \in W^{1}_{2}(Y),\ \overline{u} = Y \text{ periodique},\ \operatorname{div}\overline{u} = 0\}$$

2. Théorème de convergeance.

Nous allons demontrer le Théorème suivant:

Soit $\overline{u}^{\varepsilon}$, p^{ε} la solution du problème (2), $\overline{u}^{0}$, p^{0} la solution duproblème (6). Alors, pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, et pour $\|f\|_{L_2}$ suffisamment petit, independamment de ε, nous avons:

1) $\overline{u}^{\varepsilon} \rightarrow \overline{u}^{o}$ dans $L_2(\Omega)$ (fortement convergeant)

2) $p^{\varepsilon} \rightarrow \tilde{p}^{o}$ + ct. dans $L_2(\Omega)$ (faiblement convergeant)

Dans (2) prenons le produit scalaire avec $\overline{u}^{\varepsilon}$, dans $L_2(\Omega)$, et en utilisant l'ellipticite de a_{ijkh} et les proprietées de $\overline{u}$, on obtient.

(8) $$\|\overline{u}^{\varepsilon}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)}/\alpha = C \text{ ; donc pour } \varepsilon \rightarrow 0 :$$

$$\overline{u}^{\varepsilon} \longrightarrow \overline{u}^{*} \text{ dans } \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

$$\overline{u}^{\varepsilon} \longrightarrow \overline{u}^{*} \text{ dans } L_2(\Omega),\ \operatorname{div}\overline{u}^{*}=0,\ \overline{u}^{*}/_{\partial\Omega}=\overline{0}.$$

Dans (2) prenons le produit scalaire dans $L_2(\Omega)$ avec $\overline{w} \in W_2^1(\Omega)$:

$$< \nabla p^{\varepsilon}, \overline{w} > \equiv \int_{\Omega} \frac{\partial p^{\varepsilon}}{\partial x_i} w_i \leq \|\overline{w}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \left(\|f\|_{L_2} + C + C^2\right),$$

donc comme dans [2-Appendix] nous avons:

(9) $$p^{\varepsilon} \longrightarrow p^{*} \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ pour } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Puis, (8) et les proprietées de a_{ijkh} nous montre que:

(10) $$\zeta_{ij}^{\varepsilon} \longrightarrow \zeta_{ij}^{*} \text{ dans } L_2(\Omega) \text{ pour } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Montrons maintenant que le terme non lineaire est faiblement convergeant dans $L_2(\Omega)$. Soit $\overline{w} \in C_0^{\infty}(\Omega)$:

$$\left(u_k^{\varepsilon} \frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_k} - u_k^{*} \frac{\partial u_i^{*}}{\partial x_k}, w_i\right) = \int_{\Omega} (u_k^{\varepsilon} - u_k^{*}) \frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_k} w_i + \int_{\Omega} u_k^{*} \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i^{\varepsilon} - u_i^{*}) w_i$$

$$\leq \|u_k^{\varepsilon} - u_k^{*}\|_{L_2} \cdot \|\overline{u}^{\varepsilon}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \cdot \|\overline{w}\|_{L_\infty} - \int_{\Omega} (u_i^{\varepsilon} - u_i^{*}) u_k^{*} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \leq$$

$$\leq \|\overline{u}^{\varepsilon} - \overline{u}^{*}\|_{L_2} \left(\|\overline{u}^{\varepsilon}\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \cdot \|\overline{w}\|_{L_\infty} + \|\overline{u}^{*}\|_{L_2} \cdot \|\nabla \overline{w}\|_{L_\infty}\right)$$

Mais $\overline{w} \in C_0^{\infty}$ et $\|\overline{w}\|_{L_\infty}$ et $\|\nabla w\|_{L_\infty} < \infty$. Donc pour $\varepsilon \rightarrow 0$:

(11) $$\left(u_k^{\varepsilon} \frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_k}, w_i\right) \longrightarrow \left(u_k^{*} \frac{\partial u_i^{*}}{\partial x_k}, w_i\right) \ (\forall)\ \overline{w} \in L_2(\Omega).$$

Le problème locale (7) peut etre ecrite:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ijkh}\,\varepsilon_{kh}(\bar{\rho}^{\,lm})\right) = -\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ijlm}\right) - \frac{\partial q^{lm}}{\partial y_i}$$

q^{lm} etant presente par la decomposition de $L_2(Y)$.
L'équation ci dessus peut etre transformée en une équation globale, en possant $y=x/\varepsilon$, donc $\frac{\partial}{\partial y_i} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$(12) \qquad \int_\Omega a_{ijkh}(x/\varepsilon)\,\varepsilon^x_{kh}\left(\bar{\chi}^{\varepsilon lm}\right)\varepsilon_{ij}(\bar{w}) = \int_\Omega q^{\varepsilon lm}\,\mathrm{div}\,\bar{w} \quad (\forall)\,\bar{w}\in \mathring{W}^1_2(\Omega)$$

ou $q^{\varepsilon lm}(x)=q^{lm}(x/\varepsilon)$, $\bar{\chi}^{\varepsilon lm}(x) = \varepsilon\bar{\rho}^{\,lm}(x/\varepsilon) + \bar{A}^{lm}(x)$,

$\bar{A}^{lm} = (\overset{l}{\overleftrightarrow{0,\ldots,0,}}\ x_m,\ 0,\ldots)$, $\quad \bar{\chi}^{lm} = \bar{\rho}^{\,lm} + \bar{A}^{lm}$

Nous avons:

$$(12') \qquad \bar{\chi}^{\varepsilon lm} \longrightarrow A^{lm} \quad \text{dans } L_2(\Omega) \text{ pour } \varepsilon \to 0$$

<u>Le problème ε</u> sous la forme variationelle s'ecrit

$$(13) \qquad \int_\Omega a^\varepsilon_{ijkh}\cdot\varepsilon^x_{kh}(\bar{u}^\varepsilon)\varepsilon_{ij}(\bar{w}) + \int_\Omega u^\varepsilon_k \frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial x_k} w_i = \int_\Omega p^\varepsilon\,\mathrm{div}\,\bar{w} + \int_\Omega f_i w_i$$

Soit $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, prenons $\bar{w} = \phi\cdot\bar{\chi}^{\varepsilon lm}$ dans (13), $\bar{w}=\phi\bar{u}^\varepsilon$ dans (12) et leur difference nous donne:

$$(14) \qquad \int_\Omega a_{ijkh}\left\{\varepsilon^x_{kh}\left(\bar{\chi}^{\varepsilon lm}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}u^\varepsilon_j + \frac{\partial\phi}{\partial x_j}u^\varepsilon_i\right) - \varepsilon^x_{ij}(\bar{u}^\varepsilon)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\chi^{\varepsilon lm}_h + \frac{\partial\phi}{\partial x_h}\chi^{\varepsilon lm}_k\right)\right\} -$$

$$-\int_\Omega u^\varepsilon_k\frac{\partial u^\varepsilon_i}{\partial x_k}\phi\chi^{\varepsilon lm}_i = \int_\Omega q^{\varepsilon lm}\,\mathrm{div}(\phi\bar{u}^\varepsilon) - \int_\Omega p^\varepsilon\,\mathrm{div}(\phi\bar{\chi}^{\varepsilon lm}) - \int_\Omega f_i(\phi\chi^{\varepsilon lm}_i)$$

Le produit scalaire d'une suite faiblement convergente avec une suite fortement convergente converge vers le produit des limites, donc nous avons :

$$\int_\Omega q^{lm}(x/\varepsilon)\,\mathrm{div}(\phi\bar{u}^\varepsilon) \longrightarrow \int_\Omega (\widetilde{q^{lm}})\frac{\partial\phi}{\partial x_i}u^*_i = 0$$

$$\int_\Omega p^\varepsilon\,\mathrm{div}(\phi\bar{\chi}^{\varepsilon lm}) = \int_\Omega p^\varepsilon\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\chi^{\varepsilon lm}_i + \phi\,\mathrm{div}(\bar{A}^{lm})\right) \longrightarrow \int_\Omega p^*\,\mathrm{div}(\phi\bar{A}^{lm})$$

$$\int_\Omega f_i(\phi \chi_i^{\varepsilon lm}) \longrightarrow \int_\Omega f_i \phi A_i^{lm} = \left(u_k^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k}, \phi A_i^{lm}\right) +$$

$$+\left(\xi_{ij}^*, \varepsilon_{ij}(\phi \bar{A}^{lm})\right) - \left(p^*, \mathrm{div}(\phi \bar{A}^{lm})\right),$$

où nous avons utilisé (8)-(11), (2') et (12'). Donc la limite de la deuxiemme partie de (14) pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ est:

$$(15) \quad -\left(u_k^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k}, \phi A_i^{lm}\right) - \left(\xi_{ij}^*, \varepsilon_{ij}(\phi \bar{A}^{lm})\right)$$

La premiere partie de (14) nous donne, pour $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$(16) \int_\Omega \widetilde{a_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(\bar{\chi}^{\,lm})} \cdot \left(\varepsilon_{ij}(\phi \bar{u}^*) - \phi \varepsilon_{ij}(\bar{u}^*)\right) -$$

$$-\left(\xi_{kh}^*, \varepsilon_{kh}(\phi \bar{A}^{lm})\right) + \left(\xi_{kh}^*, \phi \varepsilon_{kh}(\bar{A}^{lm})\right) - \left(u_k^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k}, \phi A_i^{lm}\right)$$

En comparant (15) et (16) on voit que le terme non lineaire est disparu, et:

$$\int_\Omega A_{ijlm}\, \varepsilon_{ij}(\bar{u}^*) \phi = \left(\xi_{kh}^*\, \varepsilon_{kh}(\bar{A}^{lm}), \Phi\right) ;$$

en utilisant $\xi_{kj}^* = \xi_{jk}^*$ et $\frac{\partial A_k^{lm}}{\partial x_h} = \delta_{km}\delta_{kh}$ on obtienne:

$$(17) \quad \xi_{lm}^* = A_{ijlm}\, \varepsilon_{ij}(\bar{u}^*)$$

Donc la limite de (2') pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ est:

$$(18) \left(u_k^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k}, w_i\right) + \left(A_{ijkh}\, \varepsilon_{kh}(\bar{u}^*), \varepsilon_{ij}(\bar{w})\right) - \left(p^*, \mathrm{div}\,\bar{w}\right) = (f_i, w_i), (\forall)\, \bar{w} \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$$

Or, (18) a une solution unique dans les conditions du theoreme demontré dans [3 ,pp. 164 et pp. 166] . Donc $\bar{u}^* = \bar{u}^0$, et $p^* = \tilde{p}^0$ a une constante aditive pres.

Remarque.

Le theoreme du § 2 peut etre demontré aussi pour une équation de type:

$$(19)\quad -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+b_j\, u^2\frac{\partial u}{\partial x_j}=f \text{ dans } \Omega\subset R^3,\quad u/_{\partial\Omega}=0$$

où $a_{ij}=a_{ji}$, $(\exists)\ \alpha>0$ et $a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\xi_i^2$,

a_{ij}=Y periodiques, $a_{ij}\in L_\infty(Y)$, b_j= constantes.

La famille de problèmes est obtenue en possant:

$a^{\varepsilon}_{ij}(x)=a_{ij}(x/\varepsilon)$

L'existence de la solution du (19) peut etre demontrée comme dans [4] ou [3] en utilisant (20) et (21):

$$(20)\quad 4\int_\Omega b_j\frac{\partial u^3}{\partial x_j}=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_j}(b_j u^4)=0$$

$$(21)\quad u_m\longrightarrow u_* \text{ dans } \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\Rightarrow\left(b_j\frac{\partial u_m^3}{\partial x_j}-b_j\frac{\partial u_*^3}{\partial x_j},\phi\right)\to 0$$
$$(\forall)\ \phi\in C_0^\infty(\Omega).$$

La proprieté (21) peut etre demontre de la façon suivante:

$$\left(b_j\frac{\partial u_m^3}{\partial x_j}-b_j\frac{\partial u_*^3}{\partial x_j},\phi\right)=\int_\Omega b_j(u_m-u_*)(u_m^2+u_m u_*+u_*^2)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}$$

$$\leqslant\|b_j\|_{L_\infty}\cdot\|u_m-u_*\|_{L_2}\cdot\left(\|u_m\|_{L_4}^2+\|u_m\|_{L_4}\cdot\|u_*\|_{L_4}+\|u_*\|_{L_4}^2\right)\cdot\|\nabla\phi\|_{L_\infty}$$

Montrons maintenant que (19) a une solution unique.

Soit $a(u,v)=\displaystyle\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}$, nous avons:

$$(22)\quad a(u,v)+\left(b_j\frac{\partial u^3}{\partial x_j},v\right)=(f,v)\quad(\forall)\ v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

En prenant en (22) v=u, u etant la solution de (19), nous avons

$$\| u \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} \leq \| f \| / \alpha \tag{23}$$

Soit u_1, u_2, solutions de (22). Donc :

$$a(u_1 - u_2, w) + \left(b_j \frac{\partial u_1^3}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial u_2^3}{\partial x_j}, w\right) = 0 \quad (\forall)\, w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{24}$$

Nous avons :

$$\left(b_j \frac{\partial u_1^3}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial u_2^3}{\partial x_j}, u_1 - u_2\right) = \int_\Omega b_j \frac{\partial}{\partial x_j}(u_1^3 - u_2^3)(u_1 - u_2) =$$

$$= \int_\Omega b_j (u_1 - u_2)(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2) \frac{\partial}{\partial x_j}(u_1 - u_2) \leq$$

$$\leq C_1 \| b_j \|_{L_\infty} \| u_1 - u_2 \|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \left(\| u_1 \|^2_{L_6} + \| u_1 \|_{L_6} \| u_2 \|_{L_6} + \| u_2 \|^2_{L_6} \right)$$

Donc, en prennant $w = u_1 - u_2$ dans (24):

$$\| u_1 - u_2 \|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \left(\alpha - \| b_j \|_{L_\infty} \left\{ \| u_1 \|^2_{L_6} + \| u_1 \|_{L_6} \| u_2 \|_{L_6} + \| u_2 \|^2_{L_6} \right\} \right) \leq 0 \tag{25}$$

Mais nous avons (23) et:

$$\| u_i \|_{L_6} \leq K \cdot \| u_i \|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1} \leq K \frac{\| f \|_{L_2}}{\alpha}$$

Donc la condition :

$$3 K^2 \| f \|^2_{L_2} \cdot \| b_j \|_{L_\infty} \leq \alpha^3$$

nous assure l'unicité de la solution de (22).

L'homogeneisation est alors obtenue par les mêmes procedés en utilisant la propriété (21), le fait que l'équation en ε^{-1} qui correspond à (4) est la même que celle du cas lineaire, et l'unicité de la solution du (19).

Bibliographie.

[1] Lions, Benssoussan, Papanicolaou, Asimptotic analysis for periodic structures, North-Holland, 1978

[2] E. Sanchez-Palencia, Non homogenous media and vibration Theory, Lectures notes in Physics, nr. 127

[3] R. Teman, Navier-Stokes Equations, North-Holland, 1977

[4] J.L.Lions, Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires, Dunod, Paris, 1969