

INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250-3638

SUR L'ECOULEMENT DU FLUIDE RIGIDE-VISCOPLASTIQUE

DE BINGHAM

par

Mircea SOFONEA

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No.51/1980

Mod 16935

BUCURESTI

SUR L'ÉCOULEMENT DU FLUIDE RIGIDE-VISCOPLASTIQUE
DE BINGHAM

par

Mircea SOFONEA*)

Octobre 1980

*) Université de Bucarest, Faculté de Mathématique, 14, Rue Academiei,
Bucarest, Romania

MIRCEA SOFONEA

SUR L'ÉCOULEMENT DU FLUIDE RIGIDE-VISCOPLASTIQUE DE BINGHAM

On considère le problème d'écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide rigide-viscoplastique de Bingham dans une conduite cylindrique. Dans l'article on étudie une propriété de l'inéquation variationnelle qui décrit ce phénomène et on interprète physiquement les résultats obtenus.

1. NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Soit $Ox_1x_2x_3$ un système d'axes orthonormés et soit une conduite cylindrique ayant la section droite Ω et les génératrices parallèles à Ox_3 (fig. 1.). Nous supposons que Ω est un ouvert borné de R^2 dont la frontière Γ est une variété unidimensionnelle de classe C^1 , Ω étant localement d'un seul côté de Γ .

Nous étudierons le problème de l'écoulement d'un fluide de Bingham (pour la présentation des équations constitutives de ce modèle nous recommandons [1]) dans la conduite cylindrique, entre les sections $x_3 = 0$ et $x_3 = L$ ($L > 0$), à la cause d'une chute de pression. En supposant l'écoulement stationnaire et laminaire, notons $\vec{v} = (0, 0, u)$ le vecteur vitesse et p la pression dans le fluide. À partir du système général d'équations

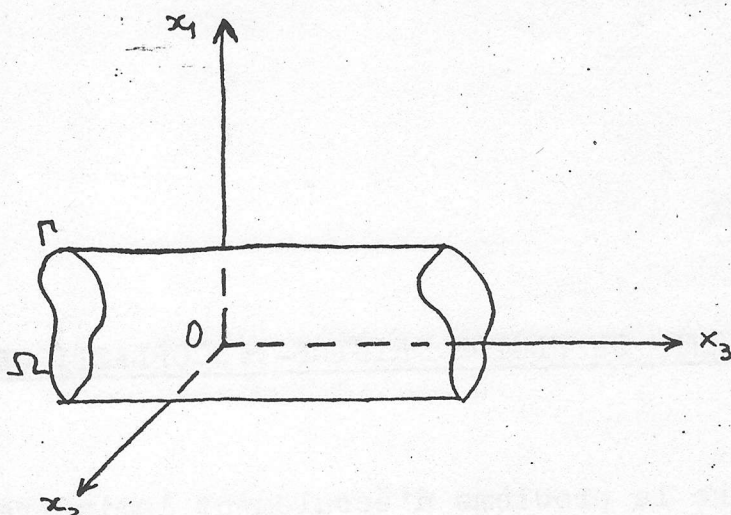


Fig. 1.

qui décrit l'écoulement (les équations du mouvement, les équations constitutives et la condition d'incompressibilité pour le champs des vitesses) et des conditions aux limite

$$\vec{v} = \vec{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma \times [0, L]$$

$$p(x_3)|_{x_3=0} = 0$$

$$p(x_3)|_{x_3=L} = -cL \quad (c \in \mathbb{R})$$

on a le résultat suivant (d'après [2]) :

THÉOREME 1.1. Si u est un champ de vitesses qui est solution classique du problème d'écoulement, alors u satisfait à l'inéquation variationnelle :

$$(1) \quad \mu a(u, v-u) + g j(v) - g j(u) \geq (c, v-u), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où on a considéré les suivantes notations :

μ - la viscosité du fluide ($\mu \in \mathbb{R}, \mu > 0$),

g - le seuil de plasticité du fluide ($g \in \mathbb{R}, g \geq 0$),

$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid \gamma(u) = 0 \}$ où $H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur $L^2(\Omega)$ et $\gamma: H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ est la "trace" sur Γ ,

$$a: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx,$$

$$j: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad j(v) = \int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 \, dx,$$

(,) - le produit scalaire sur l'espace $L^2(\Omega)$.

REMARQUE 1.1. L'inéquation (1) peut être généralisé par l'inéquation

$$(2) \quad \mu a(u, v-u) + gj(v) - gj(u) \geq (f, v-u), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

où on a considéré $f \in L^2(\Omega)$. Pour le cas particulier $f = c \in \mathbb{R}$ on obtient l'inéquation (1) qui modèle l'écoulement dans une conduite cylindrique du fluide de Bingham ; en ce cas, c s'appelle chute linéique de pression.

On peut aussi démontrer ([2], [3]) :

THEOREME 1.2. $\exists ! u \in H_0^1(\Omega)$ solution de l'inéquation (2) et u est caractérisé par la condition :

$$J_g(u) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J_g(v),$$

$$\text{où } J_g: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad J_g(v) = \frac{\mu}{2} a(v, v) + gj(v) - (f, v).$$

2. UNE PROPRIÉTÉ DES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES DE TYPE BINGHAM

Nous considérons des inéquations variationnelles de type (2) (appelés aussi des inéquations de type Bingham) ; nous supposons

$\mu > 0$ fixé ; pour $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in \mathbb{R}_+$, soit $u(f, g) \in H_0^1(\Omega)$ la solution de l'inéquation (2) .

LEMME 2.1. $(f, g) \longmapsto u(f, g) : L^2(\Omega) \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ est une fonction continue .

DÉMONSTRATION Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$, $g_1, g_2 \in \mathbb{R}_+$ et $u_1 = u(f_1, g_1)$, $u_2 = u(f_2, g_2)$; on obtient :

$$\mu a(u_1, v - u_1) + g_1 j(v) - g_1 j(u_1) \geq (f_1, v - u_1), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$\mu a(u_2, v - u_2) + g_2 j(v) - g_2 j(u_2) \geq (f_2, v - u_2), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Si l'on fait $v = u_2$ dans la première inéquation et $v = u_1$ dans la deuxième on trouve :

$$\mu a(u_2 - u_1, u_1 - u_2) + (g_1 - g_2)(j(u_2) - j(u_1)) \geq (f_2 - f_1, u_1 - u_2), \quad \text{donc}$$

$$(3) \quad \mu a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2) + (g_1 - g_2)(j(u_2) - j(u_1))$$

Mais

$$(4) \quad (f_1 - f_2, u_1 - u_2) \leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\text{et } (g_1 - g_2)(j(u_2) - j(u_1)) \leq |g_1 - g_2| |j(u_1) - j(u_2)| =$$

$$= |g_1 - g_2| \left| \int_{\Omega} (|\text{grad } u_1| - |\text{grad } u_2|) dx \right| \leq$$

$$\leq |g_1 - g_2| \left(\int_{\Omega} |\text{grad } u_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_{\Omega} |\text{grad } u_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq |g_1 - g_2| \int_{\Omega} |\text{grad}(u_1 - u_2)| dx \leq$$

$$\leq |g_1 - g_2| \left(\int_{\Omega} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\text{grad}(u_1 - u_2)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2}} |g_1 - g_2| a(u_1 - u_2, u_1 - u_2)^{\frac{1}{2}},$$

où $\text{mes } \Omega$ signifie la mesure de Lebesgue de Ω . Mais

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \text{grad}(u_1 - u_2) \text{grad}(u_1 - u_2) dx \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_{\Omega} |\text{grad}(u_1 - u_2)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \text{donc on a trouvé :}$$

$$(5) \quad (g_1 - g_2)(j(u_2) - j(u_1)) \leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2}} |g_1 - g_2| \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

A partir de (3) , (4) et (5) , on en déduit :

$$\mu a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} + (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2}} |g_1 - g_2| \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Mais a est une forme coercive (il existe $\alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$) et par conséquent

$$\mu \alpha \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq (\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} + (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2}} |g_1 - g_2|) \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} ;$$

pour $u_1 \neq u_2$ on trouve

$$\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\mu \alpha} (\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} + (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2}} |g_1 - g_2|) ,$$

ce qui finit la démonstration.

LEMME 2.2. Soit $(f_1, g_1) \in L^2(\Omega) \times \mathbb{R}_+$, $(f_2, g_2) \in L^2(\Omega) \times \mathbb{R}_+$ et $(f, g) \in [(f_1, g_1), (f_2, g_2)]$, où par $[(f_1, g_1), (f_2, g_2)]$ on a noté le segment déterminé par les points (f_1, g_1) et (f_2, g_2) dans l'espace produit $L^2(\Omega) \times \mathbb{R}$. Si $u(f_1, g_1) = u(f_2, g_2) = u_0$ p.p. dans Ω , alors $u(f, g) = u_0$ p.p. dans Ω .

DÉMONSTRATION. A partir de (2) nous pouvons écrire :

$$\mu a(u_0, v - u_0) + g_1 j(v) - g_1 j(u_0) \geq (f_1, v - u_0) , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ et }$$

$$\mu a(u_0, v - u_0) + g_2 j(v) - g_2 j(u_0) \geq (f_2, v - u_0) , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) .$$

En ajoutant les dernières inéquations on obtient

$$\mu a(u_0, v - u_0) + \frac{1}{2}(g_1 + g_2) j(v) - \frac{1}{2}(g_1 + g_2) j(u_0) \geq (\frac{1}{2}(f_1 + f_2), v - u_0) ,$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ et d'après le théorème 1.2. on en déduit que u_0 est

la solution de l'inéquation (2) pour $g = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ et $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$.

Mais $(f, g) \in [(f_1, g_1), (f_2, g_2)]$ et alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $(f, g) = (1 - \lambda)(f_1, g_1) + \lambda(f_2, g_2)$. On a deux possibilités :

$$a) \quad \lambda \in [0, \frac{1}{2}] \quad \text{et} \quad b) \quad \lambda \in [\frac{1}{2}, 1] .$$

Pour a) on a $(f, g) \in [(f_1, g_1), (\frac{1}{2}(f_1 + f_2), \frac{1}{2}(g_1 + g_2))]$ et pour b)

on a $(f, g) \in [(\frac{1}{2}(f_1 + f_2), \frac{1}{2}(g_1 + g_2)), (f_2, g_2)]$. Soit $[(f_1^{(1)}, g_1^{(1)}), (f_2^{(1)}, g_2^{(1)})]$

l'un de ces deux soussegments mentionnés plus haut qui contient le point (f, g) . On a :

$$(f, g) \in [(f_1^{(1)}, g_1^{(1)}), (f_2^{(1)}, g_2^{(1)})] ,$$

$$u(f_1^{(1)}, g_1^{(1)}) = u(f_2^{(1)}, g_2^{(1)}) \underset{\text{not}}{=} u_1 \text{ p.p. dans } \Omega ,$$

$$u_1 = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega .$$

Pour uniformiser les notations soit $f_1 = f_1^{(0)}$, $g_1 = g_1^{(0)}$, $f_2 = f_2^{(0)}$, $g_2 = g_2^{(0)}$; en continuant ce procédé on trouve les suites de points $(f_1^{(n)}, g_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega) \times \mathbb{R}_+$, $(f_2^{(n)}, g_2^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega) \times \mathbb{R}_+$ et la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$, avec les propriétés suivantes :

$$(6) \quad (f, g) \in [(f_1^{(n)}, g_1^{(n)}), (f_2^{(n)}, g_2^{(n)})] , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(7) \quad u(f_1^{(n)}, g_1^{(n)}) = u(f_2^{(n)}, g_2^{(n)}) \underset{\text{not}}{=} u_n \text{ p.p. } , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(8) \quad u_n = u_{n+1} \text{ p.p. } , \forall n \in \mathbb{N} .$$

$$\text{Soit } A_n = \{x \in \Omega \mid u_n(x) \neq u_{n+1}(x)\} = (u_n - u_{n+1})^{-1}(R - \{0\}) .$$

A_n est mesurable Lebesgue et $\text{mes } A_n = 0$, à partir de (8). Soit

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n ; A \text{ est mesurable Lebesgue et on a}$$

$$(9) \quad \text{mes } A = \text{mes} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \text{mes}(A_n) = 0 .$$

$$\text{Soit } x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \Rightarrow x \in A_n , \forall n \in \mathbb{N} , \text{ donc}$$

$$u_n(x) = u_{n-1}(x) = \dots = u_0(x) , \text{ c'est à dire } u_n(x) = u_0(x) ,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} . \text{ Par conséquent } \{x \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_n(x) \neq u_0(x)\} \subset A$$

$$\text{et (9) conduit à } \text{mes} \{x \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_n(x) \neq u_0(x)\} = 0 ,$$

donc

$$(10) \quad u_n = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega , \forall n \in \mathbb{N} .$$

La relation (6) conduit à :

$$\begin{aligned} \|f - f_1^{(n)}\|_{L^2(\Omega)} &= \|(1-\lambda)f_1^{(n)} + \lambda f_2^{(n)} - f_1^{(n)}\|_{L^2(\Omega)} = \\ &= \lambda \|f_2^{(n)} - f_1^{(n)}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_2^{(n)} - f_1^{(n)}\|_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \|f_2^{(n-1)} - f_1^{(n-1)}\|_{L^2(\Omega)} = \\ &= 1/2^n \|f_2^{(0)} - f_1^{(0)}\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{et de même } |g - g_1^{(n)}| \leq 1/2^n |g_2^{(0)} - g_1^{(0)}|, \end{aligned}$$

donc $(f_1^{(n)}, g_1^{(n)}) \xrightarrow{n} (f, g)$ dans la topologie induite sur l'espace produit $L^2(\Omega) \times \mathbb{R}_+$. De même $(f_2^{(n)}, g_2^{(n)}) \xrightarrow{n} (f, g)$ dans la même topologie. Mais (10) et le lemme 2.1. conduisent aux égalités : $u(f, g) = \lim_n u(f_1^{(n)}, g_1^{(n)}) = \lim_n u(f_2^{(n)}, g_2^{(n)}) = \lim_n u_n = u_0$, donc $u(f, g) = u_0$ p.p. dans Ω .

COROLLAIRE 2.1. Soit $f_1 = f_2 = f \in L^2(\Omega)$ fixé et pour $g \in \mathbb{R}_+$ soit $u(g)$ la solution de l'inéquation (2). À partir du lemme précédent on trouve : $u(g_1) = u(g_2)$ et $g_1 \leq g_2 \Rightarrow u(g) = u(g_1) = u(g_2)$ p.p. dans Ω , $\forall g \in [g_1, g_2]$.

REMARQUE 2.1. Dans le cas particulier $f_1 = f_2 = c \in \mathbb{R}$ le corollaire 2.1. affirme : si on a deux écoulements identiques pour deux fluides de Bingham ayant les seuils de plasticité g_1 et respectivement g_2 ($g_1 \leq g_2$), alors on aura le même écoulement (c'est à dire le même champ de vitesses) pour tout fluide de Bingham ayant le seuil de plasticité $g \in [g_1, g_2]$.

THEOREME 2.1. Soit $f \in L^2(\Omega)$ fixé et soit $\mu > 0$ fixé. Pour $g \in \mathbb{R}_+$ soit $u(g)$ la solution de l'inéquation (2). Alors il existe $g^* \geq 0$ tel que $g \mapsto u(g) : \mathbb{R}_+ \rightarrow H_0^1(\Omega)$ est injective pour $g \in [0, g^*)$ et $u(g) = 0$ pour $g \in [g^*, +\infty)$.

DÉMONSTRATION. On a d'après l'inégalité de Nirenberg et Strauss ([2]):

$$|(f, v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{L^1(\Omega)} \leq c_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} j(v),$$

$\forall f \in L^2(\Omega)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, où $c_1 > 0$ ne dépend que de Ω . Soit $g_c = c_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}$; pour $g \geq g_c$ on a $g \cdot j(v) \geq g_c j(v) = c_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} j(v) \geq |(f, v)|$, donc $gj(v) \geq (f, v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ et par conséquent $u = 0$ satisfait à l'inéquation (2). En appliquant le théorème 1.2. on obtient :

$$(11) \quad g \geq g_c \Rightarrow u(g) = 0.$$

Soit $B = \{g \geq 0 \mid u(g) = 0\}$. D'après les considérations de plus haut $g_c \in B$ et donc $B \neq \emptyset$. $B \subset \mathbb{R}$ est un ensemble minoré et donc il existe $g^* = \inf B$. On va montrer que :

$$(12) \quad g \geq g^* \Rightarrow u(g) = 0.$$

Vraiment, si $g^* = g_c$, le résultat est obtenu dans la relation (11).

Si $g \neq g_c$, on doit considérer les deux cas suivants :

$$a) \quad g^* > g_c \quad \text{et} \quad b) \quad g^* < g_c.$$

a) est impossible car $u(g_c) = 0$ à partir de (11) et donc $g_c \in B$, contradiction avec la définition de g^* .

b) Si $g^* < g_c$, soit par absurde que (12) n'est pas vraie, c'est à dire

$$(13) \quad \text{il existe } g \geq g^* \text{ tel que } u(g) \neq 0.$$

Compte tenu de (11) $g \leq g_c$. Donc $g \in [g^*, g_c]$. Mais $g^* = \inf B$, donc il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g_n \in B$ telle que $g_n \xrightarrow{n} g^*$; mais $g \mapsto u(g) : R_+ \rightarrow H_0^1(\Omega)$ est une fonction continue (lemme 2.1.) et donc on a obtenu $u(g^*) = \lim_n u(g_n) = 0$. Par conséquent $u(g^*) = u(g_c) = 0$ et en appliquant le corrolaire 2.1., $u(g) = 0$, relation qui contraindrait (13). (12) est donc justifiée.

Soit $g_1, g_2 \in [0, g^*)$ tel que $u(g_1) = u(g_2) \stackrel{\text{not}}{=} u$. À partir de la définition de g^* on a :

$$(14) \quad u \neq 0$$

Si l'on fait $v = 0$ puis $v = 2u$ dans l'inéquation (2) on trouve $\mu a(u, u) + g_j(u) = (f, u)$ et donc $J_{g_1}(u) = \frac{\mu}{2} a(u, u) + g_1 j(u) - (f, u) = -\frac{\mu}{2} a(u, u)$ et de même manière $J_{g_2}(u) = -\frac{\mu}{2} a(u, u)$. Alors $J_{g_1}(u) = J_{g_2}(u) \Leftrightarrow \frac{\mu}{2} a(u, u) + g_1 j(u) - (f, u) = \frac{\mu}{2} a(u, u) + g_2 j(u) - (f, u) \Leftrightarrow (g_1 - g_2)(j(u)) = 0$. Mais $j(u) = \int_{\Omega} |\text{grad } u| dx = 0 \Leftrightarrow |\text{grad } u| = 0 \Leftrightarrow u = \text{constante} \in H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow u = 0$, égalité qui contraindrait (14); il en résulte qu'on doit avoir $g_1 = g_2$ et donc on a démontré que $u(g_1) = u(g_2) \Rightarrow g_1 = g_2$, c'est à dire l'injectivité de la fonction $g \mapsto u(g)$ pour $g \in [0, g^*)$.

REMARQUE 2.2. Le théorème précédent possède les suivantes interprétations physiques (pour le cas $f = c \in \mathbb{R}$) : on n'a pas des déplacements des fluides dans le cylindre que pour des seuils de plasticité $g < g^*$; en ce cas les écoulements sont distinctes ($g \mapsto u(g)$ est injective); pour des seuils de plasticité $g \geq g^*$, $u(g) = 0$, donc l'écoulement est bloqué; g^* peut être interprété comme un seuil de plasticité critique qui peut dépendre de Ω, f et μ . On peut pourtant démontrer :

LEMME 2.3. g^* ne dépend pas de μ .

DÉMONSTRATION. Pour $f \in L^2(\Omega)$, $g \in R_+$, $\mu > 0$, soit $u(f, g, \mu)$ la solution de l'inéquation (2). On voit que $u(f, g, \mu) = 0 \iff gj(v) \geq (f, v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega) \iff gj(v) \geq |(f, v)|$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ et par conséquent $g^*(f, \mu) = \inf \{ g \geq 0 \mid u(f, g, \mu) = 0 \} = \inf \{ g \geq 0 \mid gj(v) \geq (f, v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \} = g^*(f)$, ne dépend pas de μ .

Pour Ω fixé, nous sommes donc conduits à considérer la fonctionnelle $f \mapsto g^*(f): L^2(\Omega) \longrightarrow R_+$; nous étudierons quelques propriétés de cette fonctionnelle.

LEMME 2.4. $f \mapsto g^*(f)$ est une fonctionnelle convexe.

DÉMONSTRATION. Soit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$. On a (théorème 2.1.): $u(f_1, g^*(f_1)) = u(f_2, g^*(f_2)) = 0$ et en appliquant le lemme 2.2. sur le segment $[(f_1, g^*(f_1)), (f_2, g^*(f_2))]$ on trouve: $\forall \lambda \in [0, 1]$, $u((1-\lambda)f_1 + \lambda f_2, (1-\lambda)g^*(f_1) + \lambda g^*(f_2)) = 0$. Mais d'après la définition de g^* , il en résulte:

$$g^*((1-\lambda)f_1 + \lambda f_2) \leq (1-\lambda)g^*(f_1) + \lambda g^*(f_2).$$

THÉOREME 2.2. $f \mapsto g^*(f)$ est une norme continue sur $L^2(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. D'après les démonstrations du théorème 2.1. et du lemme 2.3. on a: $g^*(f) = \inf \{ g \geq 0 \mid u(f, g) = 0 \} = \inf \{ g \geq 0 \mid gj(v) \geq (f, v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \} = \inf \{ g \geq 0 \mid gj(v) \geq |(f, v)|, \forall v \in H_0^1(\Omega) \}$

Soit $f = 0$; alors $g = 0$ vérifie l'inégalité $gj(v) \geq (f, v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ donc $g^*(0) = 0$. Soit $g^*(f) = 0$. Alors $g^*(f)j(v) = 0 \geq |(f, v)|$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, donc $(f, v) = 0$, $\forall v \in H_0^1(\Omega) \implies f = 0$

($H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$) . Par conséquent ,

$$(15) \quad g^*(f) = 0 \iff f = 0 .$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} g^*(\alpha f) &= \inf \{ g \geq 0 \mid g j(v) \geq |(\alpha f, v)| , \forall v \in H_0^1(\Omega) \} = \\ &= \inf \{ g \geq 0 \mid \frac{g}{|\alpha|} j(v) \geq |(f, v)| , \forall v \in H_0^1(\Omega) \} = \\ &= |\alpha| \inf \{ \bar{g} \geq 0 \mid \bar{g} j(v) \geq |(f, v)| , \forall v \in H_0^1(\Omega) \} = |\alpha| g^*(f) . \end{aligned}$$

Par conséquent ,

$$(16) \quad g^*(\alpha f) = |\alpha| g^*(f) , \forall \alpha \in \mathbb{R} , \forall f \in L^2(\Omega) .$$

À partir du lemme 2.4. il en résulte :

$$g^*((1-\lambda)f_1 + \lambda f_2) \leq (1-\lambda)g^*(f_1) + \lambda g^*(f_2) , \forall f_1, f_2 \in L^2(\Omega) , \\ \forall \lambda \in [0,1] . \text{ Pour } \lambda = \frac{1}{2} , \text{ en appliquant (16) on trouve:}$$

$$(17) \quad g^*(f_1 + f_2) \leq g^*(f_1) + g^*(f_2) , \forall f_1, f_2 \in L^2(\Omega) .$$

(15),(16),(17) $\implies f \longmapsto g^*(f)$ est une norme sur l'espace $L^2(\Omega)$. À partir de la démonstration du théorème 2.1. il en résulte $g^*(f) \leq g_c(f) = c_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$ ($c_1 > 0$ dépende de Ω) , donc g^* est une norme continue sur l'espace $L^2(\Omega)$.

REMARQUE 2.4. g n'est pas une norme équivalente à la norme de $L^2(\Omega)$; vraiment , s'il existe $c_2 > 0$ tel que

$$(18) \quad c_2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq g^*(f) , \forall f \in L^2(\Omega) ,$$

pour $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base orthonormée dans l'espace $L^2(\Omega)$ on a :

$\|f_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $(f_n, v) \xrightarrow{n} 0$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ($(f_n, v)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les coefficients de Fourier de $v \in H_0^1(\Omega)$ pour la base orthonormée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \neq 0$. Alors $j(v) \neq 0$ et donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|\frac{(f_n, v)}{j(v)}| \leq \varepsilon \Rightarrow |(f_n, v)| \leq \varepsilon j(v)$, donc $g^*(f_n) = \inf \{ g \geq 0 \mid gj(v) \geq |(f_n, v)|, \forall v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0 \} \leq \varepsilon$. Alors il en résulte que $g^*(f_n) \xrightarrow{n} 0$ et par conséquent (18) n'est pas vraie.

3. INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Dans le cas particulier $f = c \in \mathbb{R}$, l'égalité (16) devient : $g^*(c) = g^*(1 \cdot c) = c g(1) = a|c|$ où $a = g^*(1) \neq 0$ (voir (15)) dépend seulement de Ω .

Nous considérons un fluide de Bingham ayant le seuil de plasticité $g \geq 0$ qui est soumis dans le cylindre à une chute linéique de pression c ; le graphique de la fonction $c \mapsto g^*(c) = a|c|$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ admet les suivantes interprétations physiques (voir fig. 2.):

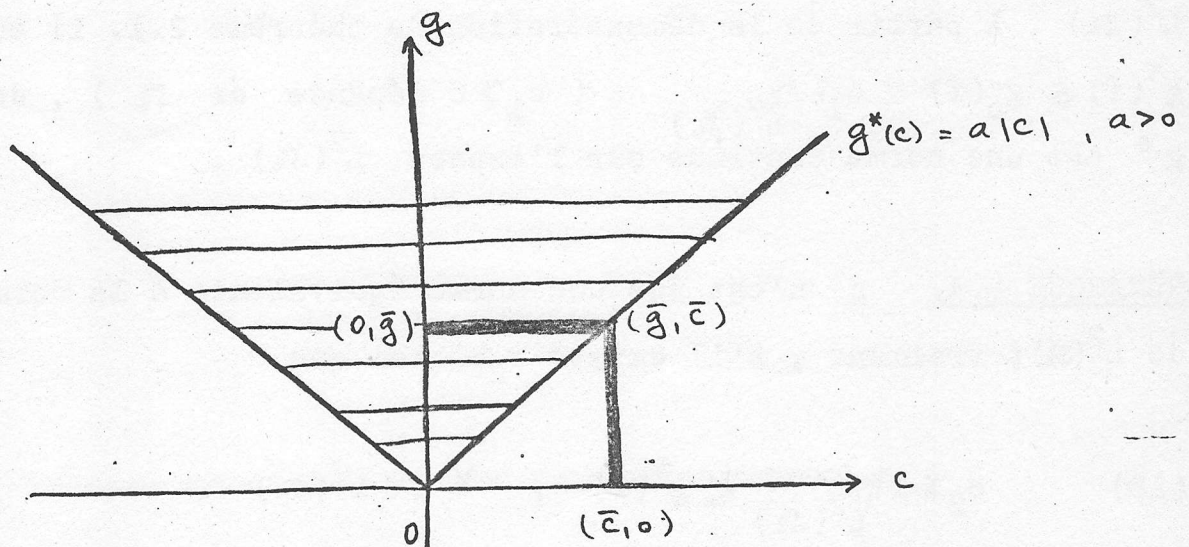


Fig. 2.

- a) pour les points $(c, g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ avec $g \geq g^*(c)$ (la zone hachurée), le fluide de Bingham ne se déplace pas dans le cylindre.
- b) pour les points $(c, g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ avec $g < g^*(c)$, le fluide de Bingham se déplace dans le cylindre.
- c) étant donné $\bar{g} \geq 0$, pour les chutes linéiques de pression $c > \bar{c} = \frac{\bar{g}}{a}$ les fluides de Bingham ayant le seuil de plasticité $\bar{g}$ se déplacent dans le cylindre et pour les chutes linéiques de pression $0 \leq c \leq \bar{c} = \frac{\bar{g}}{a}$ les fluides de Bingham ayant le seuil de plasticité $\bar{g}$ sont bloqués dans le cylindre.
- d) étant donné $\bar{c} \geq 0$, les fluides de Bingham ayant le seuil de plasticité g tel que $g < \bar{g} = a|\bar{c}|$ se déplacent sous l'action de la chute linéique de pression $\bar{c}$ et les fluides de Bingham ayant le seuil de plasticité g tel que $g \geq \bar{g} = a|\bar{c}|$ ne se déplacent pas sous l'action de la chute linéique de pression $\bar{c}$.
- e) pour $\bar{c} \leq 0$ le commentaire de d) peut être répété à la cause de la symétrie de l'écoulement du fluide : $u(-f) = u(f)$, $\forall f \in L^2(\Omega)$ où $u(f)$ est la solution de l'inéquation (2) pour g et μ fixés.
- f) les résultats et les interprétations de a), b), c), d), e) sont indépendents de la viscosité μ (voir lemme 2.3.).

BIBLIOGRAPHIE

1. CRISTESCU, N., SULICIU, I. : Viscoplasticitatea. Ed. tehnică, București, (1976).
2. DUVAUT, G., LIONS, J.L. : Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, (1972).
3. GLOWINSKI, R., LIONS, J.L., TRÉMOLIERES, R., : Analyse numérique des inéquations variationnelles. Tome I, II, Dunod, Paris, (1976).

