

INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250-3638

INFLUENCE DU SOUFFLAGE SUR LA COUCHE
LIMITE NONSTATIONNAIRE COMPRESIBLE

par

Maria BUCUR

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No .56/1980

Med 17000

BUCURESTI

INFLUENCE DU SOUFFLAGE SUR LA COUCHE
LIMITE NONSTATIONNAIRE COMPRESIBLE

par

Maria BUCUR*)

October 1980

*) Institute National pour la Creation Scientifique et Technique,
Lab. de Couche Limite et Turbulence, Bdul Pacii 220, 79622 Bucarest
Roumanie

INFLUENCE DU SOUFFLAGE SUR LA COUCHE

LIMITE NONSTATIONNAIRE COMPRESSIBLE

Bucur Maria

INTRODUCTION

L'étude présent constitue une généralisation au cas d'un fluide compressible de la note [1] qui traite l'influence du fort soufflage sur la couche limite nonstationnaire qui se forme autour du point de la partie antérieure d'une plaque infinie située dans un fluide incompressible qui commence à se déplacer brusquement de repos.

Avec la transformation de Stewartson les équations de la couche limite nonstationnaire compressible sont écrites sur une forme semblable aux équations de la couche limite nonstationnaire incompressible.

Les équations obtenues sont résolues numériquement et les solutions sont représentées graphiquement et comparées avec les résultats obtenus dans [1].

1. LE MODÈLE MATHÉMATIQUE

Le mouvement nonstationnaire du fluide compressible dans la couche limite est décrit par le système d'équations

$$\rho \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial t} - u \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.4)$$

avec l'équation d'état,

$$p = \rho R T$$

et les conditions au limites,

$$\begin{aligned} y=0 & \quad u=0, \quad v=V_\infty (\text{const.}), \quad T=T_w \\ y=\infty & \quad u=U_\infty, \quad T=T_\infty \end{aligned} \quad (2.6)$$

où μ est le coefficient de viscosité dynamique, ρ la masse volumique, k la conductivité thermique et c_p la chaleur spécifique pour la pression constante. Pour résoudre le problème énoncé sont nécessaires les hypothèses [2]:

- a) L'effet de la compressibilité se fait senti dans la couche limite, le courant extérieur restant incompressible.
- b) Le mouvement extérieur est donné par $U(x) = \frac{U_0}{\ell} x$ où ℓ représente une longueur caractéristique, U_0 étant une constante positive.
- c) Le nombre de Prandtl est égal à 1.
- d) Le coefficient de la chaleur spécifique c_p est constante.
- e) La viscosité est proportionnelle avec la température absolue $\mu \sim T$ ($\rho \mu = \rho_0 \mu_0$).
- f) La dissipation visqueuse est négligeable dans l'équation de l'énergie.
- g) Le nombre de Mach du courant extérieur est petit.
- h) Le fluide occupe un domaine semi-infinie, bordé par une plaque.
- i) Après le mouvement brusque du fluide autour de la plaque, les conditions sur la frontière extérieure de la couche limite sont stationnaires. Ça implique le fait que la pression est constante dans la direction transversale, donc $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$.
- j) La température de la plaque s'élève à T_∞ et est maintenue à cette valeur.

3. LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS

Les équations (2.1) - (2.6) sont réduits à la forme incompressible en utilisant la transformation de Stewartson [3]

$$\Psi = \frac{a_\infty}{a_0 \sqrt{V_0}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy \quad (3.1)$$

$$\rho u = \rho_0 \sqrt{V_0} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_{x,t} \quad (3.2)$$

où le suffixe 0 se réfère à un état standard dans le courant extérieur, courant considéré stationnaire.

En introduisant la fonction de température S par la définition [3]

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{T_0}{T_\infty} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right) S + \frac{\gamma-1}{2 a_\infty^2} (U_\infty^2 - u^2) \quad (3.3)$$

avec les hypothèses antérieurs la transformation (3.1) - (3.2) conduise au système d'équations:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} + U \frac{dU}{dx} (1+S) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \quad (3.5)$$

avec les conditions au limites

$$y=0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\sqrt{V_w}, \quad S = \frac{T_w}{T_\infty} - 1 \quad (3.6)$$

$$y=\infty, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_\infty, \quad S = 0$$

La relation (3.3) qui définit S se réduit à la $\frac{T}{T_\infty} = 1 + S$ où T_∞ est la température constante du courant extérieur.

L'effet de la viscosité est de modifier la variation des variables du mouvement sur la direction de x constante.

Ça suggère chercher des solutions similaires ainsi 1

$$\Psi = \sqrt{\frac{U_0 l}{1+\lambda t}} \frac{x}{l} f(\eta) \quad (3.8)$$

$$\eta = \frac{y}{l} \sqrt{\frac{U_0 l}{1+\lambda t}} \quad (3.9)$$

et pour la fonction de température

$$S(x, y, t) = g(\eta) \quad (3.10)$$

Avec (3.8) - (3.10) on obtienne

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} \lambda \frac{x}{l^2} \frac{U_0 l}{(1+\lambda t)^2} \sqrt{\eta} (2f' + \eta f'')$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = \frac{x}{l^4} f'^2 \left(\frac{U_0 l}{1+\lambda t} \right)^2$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{x}{l^4} f f'' \left(\frac{U_0 l}{1+\lambda t} \right)^2$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{x}{l^4} \left(\frac{U_0 l}{1+\lambda t} \right)^2 \sqrt{\eta} f'''$$

$$U \frac{dU}{dx} = \frac{U_0^2}{l^2} x$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \lambda \eta \frac{1}{1+\lambda t} g'$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{U_0 l}{1+\lambda t}} g' \quad ; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{1}{l^2} \frac{U_0 l}{1+\lambda t} g''$$

qui introduites dans (3.4) et (3.5) conduisent à

$$f''' + ff'' - f'^2 + (1+\lambda t)^2(1+g) + \frac{1}{2}\alpha(2f' + \gamma f'') = 0 \quad (3.12)$$

$$g'' + \left(\frac{\gamma}{2}\alpha + f\right)g' = 0 \quad (3.13)$$

où $\alpha = \lambda \frac{e}{v_0}$ est paramètre d'accélération et γ est pris en calcul égal à 1. Les conditions au limites sont:

$$\eta = 0, f(0) = -\frac{V_{\infty} \sqrt{Re}}{v_0}, f'(0) = 0, g(0) = \frac{T_{\infty}}{T_0} - 1 \quad (3.14)$$

$$\eta = \infty, f'(\infty) = 1, g(\infty) = 0 \quad (3.15)$$

En rapportant le temps à t/v_0 on obtienne

$$t^* = t/v_0, t = \frac{v_0}{e} t^* \quad \text{et le terme } 1+\lambda t \text{ devienne } 1+\alpha t^*.$$

En considérant $C = \frac{V_{\infty} \sqrt{Re}}{v_0}$ le paramètre de soufflage, pour le soufflage fort on cherchera des solutions asymptotiques pour les équations (3.12), (3.13) au voisinage de la plaque pour les valeurs grandes de C.

Les variables caractéristiques du région voisine de la plaque où le soufflage est fort sont

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{C}, \bar{f} = \frac{f}{C}, \bar{g} = \frac{g}{C}.$$

En introduisant ces variables dans (3.12), (3.13) et en négligeant (-) on obtiennent dans le voisinage de la plaque les équations

$$\frac{f'''}{C^2} + f\bar{f}'' - \bar{f}'^2 + (1+\alpha t^*)^2(1+\bar{g}) + \frac{1}{2}\alpha(2\bar{f}' + \gamma \bar{f}'') = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{g''}{C^2} + \left(\bar{f} + \frac{\alpha}{2}\bar{\eta}\right)\bar{g}' = 0 \quad (3.17)$$

et les conditions au limites

$$\eta = 0, \bar{f} = -1, \bar{f}' = 0, \bar{g} = \frac{1}{C} \left(\frac{T_{\infty}}{T_0} - 1 \right) \quad (3.18)$$

$$\eta = \infty, \bar{f}' = 1, \bar{g} = 0 \quad (3.19)$$

4. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

Les équations (3.16), (3.17) sont des équations différentielles et les dérivées d'ordre supérieur sont multipliés par un paramètre petit $\varepsilon = \frac{1}{C^2}$ quand $C \rightarrow \infty$.

On voit que le problème (3.16) - (3.19) est un problème de perturbations singulières. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$ les équations résultantes sont

$$ff'' - f'^2 + (1 + \alpha t^*)^2 (1 + g) + \frac{1}{2} \alpha (2f' + \eta f'') = 0 \quad (4.1)$$

$$(f + \frac{\alpha}{2} \eta) g' = 0 \quad (4.2)$$

et les conditions au limite

$$\eta = 0, f = -1, f' = 0, g = \frac{1}{C} \left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1 \right) \quad (4.3)$$

Les conditions à l'infini (3.15) seront négligés parce que les équations (4.1), (4.2) sont valables seulement au voisinage de la plaque et leur ordre se diminue avec un unité.

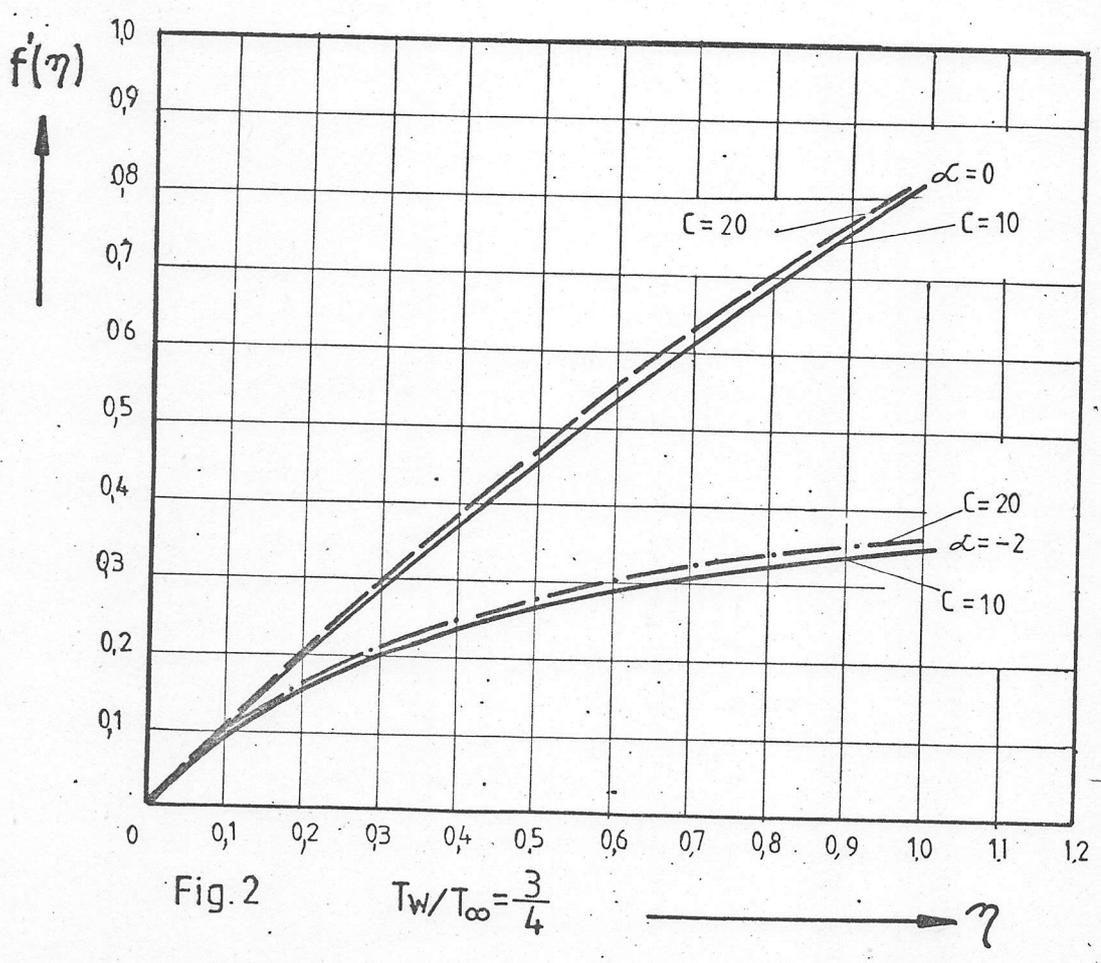
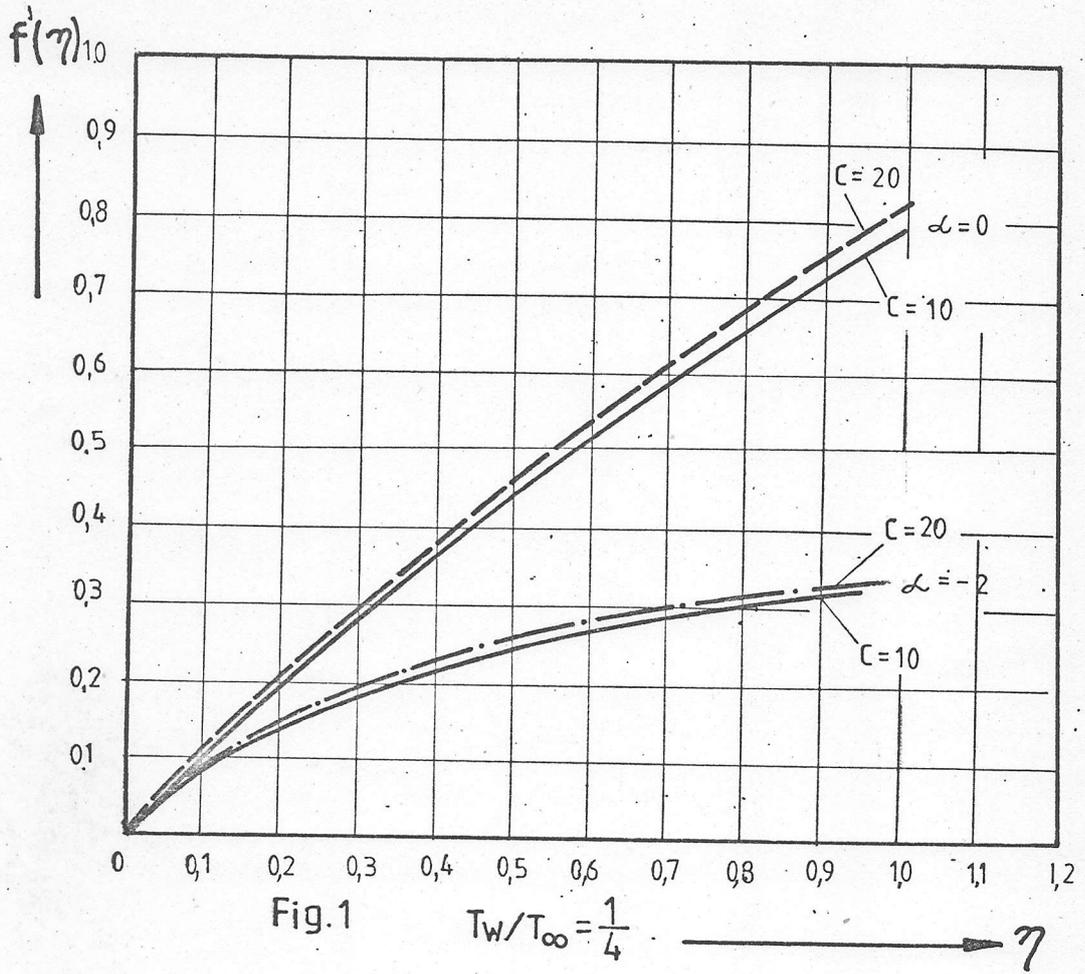
De l'équation (4.2) on obtienne $g' = 0$ d'où $g = \text{const.}$ et comme on travaille dans le voisinage de la plaque où

$$g(0) = \frac{1}{C} \left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1 \right) \text{ on considerera } g = g(0).$$

L'équation (4.1) sera résolu numériquement pour les cas $C = 10, C = 20, \frac{T_w}{T_\infty} = \frac{1}{4}, \frac{T_w}{T_\infty} = \frac{3}{4}$ et pour $\alpha = -2, 0$.

On observe que l'augmentation de la vitesse de soufflage produise l'augmentation de la vitesse u et aussi la croissance du rapport $\frac{T_w}{T_\infty}$ cause la croissance de la vitesse v .

Ces résultats sont représentés dans les figures 1 et 2.



BIBLIOGRAPHIE

- [1] RAJAPPA, N.R., - Nonsteady Plane Stagnation Point Flow with Hard Blowing. ZAMM 59, 471-473 (1979)
- [2] POP I., KATAGIRI, M., - Unsteady Heat Transfer on Boundary Layer Growth at the Forward Stagnation Point. ACTA MECHANICA, 28, 185-198 (1978)
- [3] BROWN, S.N. - The Effect of Heat Transfer on Boundary-Layer Growth. Proc.Camb.Phil.Soc. 59, 789 (1963).
