

INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250-3638

QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES MODULES Δ -INJECTIFS

par

Constantin NĂSTĂSESCU

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No.57/1980

BUCURESTI

Mea 17001

QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES MODULES Δ -INJECTIFS

par

Constantin NĂSTĂSESCU*)

Novembre 1980

*) Université de Bucarest, Faculté de Mathématique, rue Academiei 14,
Bucarest, Roumanie

QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES MODULES Δ -INJECTIFS

Constantin Năstăsescu

Universitatea Bucureşti
Facultatea de Matematică
Str. Academiei 14
70109 Bucharest 1, Romania

INTRODUCTION

La notion de module Δ -injectif a été introduite par Faith dans le travail [3], l'étude de ces modules étant ultérieurement développée dans beaucoup de travaux (voir par exemple [11], [13], [14]).

La notion duale de module Δ^* -projectif a été introduite dans le travail [11].

Dans les travaux [3], [11] on a montré que l'étude des modules Δ -injectifs sur un anneau arbitraire est équivalente à l'étude des modules Δ -injectifs sur un anneau semi-primaire.

Par la suite, dans le paragraphe 1 on met en évidence la liaison entre les modules Δ -injectifs et les modules Δ^* -projectifs.

En utilisant le théorème 1.1 du paragraphe 1, dans le paragraphe 2 on démontre que toute catégorie de Grothendieck ayant un générateur artinien est équivalente avec une catégorie de modules sur un anneau artinien à droite (théorème 2.1). Dans la démonstration du théorème 2.1 ont été utilisés le théorème de Hopkins-Levitzki pour une catégorie de Grothendieck et aussi le théorème de Gabriel-Popescu. (Il est bien connu que le théorème de Hopkins-Levitzki est lié à l'étude des modules Δ -injectifs [11], [14].)

Dans le paragraphe 3 sont donnés de nouveaux résultats sur les $\Sigma(\Delta)$ -anneaux.

Dans le paragraphe 4 est étudiée la décomposition primaire au sens de R. Gordon [5] des Δ -anneaux. On obtient en particulier quelques résultats de Lenagan et Moss [9].

1. MODULES Δ -INJECTIFS ET MODULES Δ^* -PROJECTIFS SUR UN ANNEAU SEMI-PRIMAIRE

Dans ce travail R désignera toujours un anneau unitaire et $\text{Mod } R$ la catégorie des R -modules à droite unitaires.

Soit F une topologie additive sur R [16]; un module M est F -de torsion si $\text{Ann}_R(x) \in F$ pour tout $x \in M$; si pour tout $x \in M, x \neq 0, \text{Ann}_R(x) \notin F$, M s'appelle F -sans torsion. Soit $L \subset M$ un sous-module de M et $x \in M$, alors nous notons:

$(L:x) = \{ \lambda \in R / x\lambda \in M \}$ et $L^\sim = \{ x \in M / (L:x) \in F \}$.

Il est clair que si L, L' sont deux sous-modules de M , alors $(L \cap L')^\sim = L^\sim \cap L'^\sim$.

Désignons par $C_F(M)$ l'ensemble $C_F(M) = \{ L \subseteq M / L^\sim = L \}$.

Il est clair que $L^\sim = L \iff M/L$ est un module F -sans torsion.

$C_F(M)$ est un treillis modulaire complet pour la relation d'ordre d'inclusion [2], [16].

Si $M = R_R$ nous avons le treillis $C_F(R) = \{ I \text{ idéal à droite} / I^\sim = I \}$. On voit que si I est un idéal bilatère de R , alors $I^\sim$ est un idéal bilatère.

Nous dirons que $M \in \text{Mod } R$ est F -artinien (F -noethérien) si $C_F(M)$ est un treillis artinien (noethérien).

On sait [2] que si R est F -artinien (F -noethérien) et M est un module de type fini alors M est F -artinien (F -noethérien).

Soit Q_R un R -module injectif ; l'ensemble $F_Q = \{ I \text{ idéal à droite} / \text{Hom}(R/I, Q) = 0 \}$ est une topologie additive sur R qui s'appelle la topologie co-engendrée de Q . Dans ce cas si $M \in \text{Mod } R$, on dénote plus simplement le treillis $C_{F_Q}(M)$ par $C_Q(M)$.

Il est bien connu [2], [16] que $N \in C_Q(M)$ si et seulement si il existe un ensemble non-vidé Λ tel que $0 \longrightarrow M/N \longrightarrow Q^\Lambda$.

Le module injectif Q s'appelle Σ (resp. Δ)-injectif [3], [11] si le treillis $C_Q(R)$ est noethérien (resp. artinien).

Il est bien connu que si Q est Δ -injectif, alors Q est Σ -injectif (voir [3], [11]).

Si Q est un injectif alors Q est Δ -injectif $\Leftrightarrow Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$, où Q_i est un module Δ -injectif indécomposable pour tout $i \in I$ (voir [11], le corollaire 4.7 et le théorème 4.8).

Si $\Lambda = \text{End}_R(Q)$ est l'anneau d'endomorphismes de Q , on dénote par $\text{Biend}(Q)$ l'anneau des biendomorphismes de Q , c'est-à-dire $\text{Biend}(Q) = \text{End}_\Lambda(Q)$. On sait [3], [11] que si Q est un injectif, alors Q est Δ -injectif $\Leftrightarrow Q$ est un Δ -injectif sur l'anneau $\text{Biend}(Q)$; de plus, $\text{Biend}(Q)$ est un anneau semi-primaire.

D'ici on voit que l'étude des modules Δ -injectifs sur l'anneau R est équivalente à l'étude des modules Δ -injectifs sur un anneau semi-primaire (nous rappelons qu'un anneau A est semi-primaire si A/J est un anneau semi-simple artinien et J est nilpotent, où J est le radical de Jacobson de A).

Aussi il est bien connu [3], [11] qu'un module Σ -injectif sur un anneau semi-primaire est un module Δ -injectif.

Soit maintenant P_R un R -module projectif; l'ensemble $F_P = \{I \text{ idéal à droite} / \text{Hom}_R(P, R/I) = 0\}$ est une topologie additive sur l'anneau R . Le module P s'appelle Σ^* (resp. Δ^*)-projectif [11] si le treillis $C_{F_P}^*(R)$ est noethérien (resp. artinien). Si P est un module projectif

de type fini, d'après le théorème 2.7 [10], P est Δ^* -projectif $\iff P = \bigoplus_{i \in I} P_i$, où P_i est un module Δ^* -projectif indécomposable pour tout $i \in I$.

Aussi, si P est un module Σ^* -projectif sur un anneau semi-primaire, alors P est Δ^* -projectif.

Dans ce paragraphe on met en évidence la liaison entre les modules Δ -injectifs et les modules Δ^* -projectifs sur un anneau semi-primaire.

Théorème 1.1 Soit R un anneau semi-primaire. Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des types des modules Δ -injectifs indécomposables et l'ensemble des types des modules Δ^* -projectifs indécomposables de type fini.

Démonstration Soit Q un module Δ -injectif indécomposable. Alors le socle $S_0 Q = S$ est un module simple. Soit $P_Q \xrightarrow{\alpha} S \longrightarrow 0$ l'enveloppe projective de S [1]. Nous démontrons que $F_Q = F_{P_Q}$. Pour cela nous montrons que si $M \in \text{Mod } R$, alors $\text{Hom}(M, Q) = 0 \iff \text{Hom}(P_Q, M) = 0$. En effet, nous supposons que $\text{Hom}(M, Q) = 0$. Si $M \neq 0$, nous définissons sur M la filtration

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n \supset \dots$$

où $M_k = J^k M$ (J étant le radical de Jacobson de R).

Comme R est semi-primaire, M_k/M_{k+1} est un module semi-simple pour tout $k \geq 0$. De plus, comme J est nilpotent, il existe un nombre naturel n tel que $M_n = 0$.

Maintenant si $\text{Hom}(P_Q, M) \neq 0$ alors il existe un nombre naturel i tel que $\text{Hom}(P_Q, M_i/M_{i+1}) \neq 0$ et par suite il existe un module simple $S' \subset M_i/M_{i+1}$ tel que $\text{Hom}(P_Q, S') \neq 0$. Soit $f \in \text{Hom}(P_Q, S')$, $f \neq 0$; alors $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } \alpha$ sont deux sous-modules maximaux de P_Q . Si $\text{Ker } f \neq \text{Ker } \alpha$, alors $\text{Ker } \alpha + \text{Ker } f = P_Q$ et comme $\text{Ker } \alpha$ est un sous-module "small" de P_Q [1], on obtient que $\text{Ker } f = P_Q$ et par suite $f = 0$, contradiction. Donc $\text{Ker } f = \text{Ker } \alpha$ et par suite $S' \simeq S$. D'autre part, comme $\text{Hom}(M, Q) = 0$ et comme Q est injectif, alors $\text{Hom}(M_i/M_{i+1}, Q) = 0$ pour tout $i \geq 0$ et donc $\text{Hom}(S, Q) \simeq \text{Hom}(S', Q) = 0$, contradiction.

Par suite $\text{Hom}(M, Q) = 0 \implies \text{Hom}(P_Q, M) = 0$.

De la même façon on démontre que $\text{Hom}(P_Q, M) = 0 \implies \text{Hom}(M, Q) = 0$. Par suite, comme Q est Δ -injectif, alors R est artinien par rapport à la topologie additive $F_{P_Q} = F_Q$. Donc P_Q est un module Δ^* -projectif indécomposable de type fini.

Réciproquement, si P est un module Δ^* -projectif indécomposable, alors d'après le théorème 27.11 [1], $P \simeq eR$ où e est un élément idempotent primitif et de plus $eR/eJ = S$ est un module simple. Si on pose $Q_P = E(S)$ et comme P est l'enveloppe projective de S , on a $F_P = F_{Q_P}$. Donc Q_P est un module Δ -injectif. D'ici on voit que les applications $Q \longrightarrow P_Q$ et $P \longrightarrow Q_P$ sont inverses l'une de l'autre.

Corollaire 1.2 Soient R un anneau semi-primaire et Q_R un

module Δ -injectif indécomposable. Alors il existe un élément idempotent et primitif $e \in R$ tel que

$$\text{Biend}(Q) \simeq \text{End}_{eRe}(eR)$$

Démonstration Soit P le module Δ^* -projectif associé à Q . Alors il existe un élément idempotent et primitif $e \in R$ tel que $P \simeq eR$. On dénote par $F = F_Q = F_P$. D'après le lemme 2.7 [11], l'anneau de quotients R_F de R par rapport à F est égal à $\text{Biend}(Q)$ et aussi d'après le corollaire 3.6 [11], $R_F \simeq \text{Biend}(P_Q^*)$ (P_Q^* est le module "dual" de P_Q , c'est-à-dire $P_Q^* = \text{Hom}(P_Q, R)$). Comme $P_Q^* \simeq eR$ et $\text{End}(P_Q^*) \simeq eRe$, alors $\text{Biend}(Q) \simeq \text{End}_{eRe}(eR)$.

2. DES CATÉGORIES DE GROTHENDIECK LOCALEMENT ARTINIENNES

Une catégorie de Grothendieck $\mathcal{C}$ s'appelle localement artinienne (resp. noethérienne) si elle a une famille $(U_i)_{i \in I}$, $U_i \in \mathcal{C}$, de générateurs artiniens (resp. noethériens).

On peut mettre la question suivante: une catégorie localement artinienne est localement noethérienne? Dans le travail [15] J.E. Roos a construit un exemple par lequel il donne une réponse négative à cette question.

En échange si la famille $(U_i)_{i \in I}$ des générateurs artiniens est finie, alors $U = \bigoplus_{i \in I} U_i$ est un générateur artinien de $\mathcal{C}$ et d'après le théorème d'Hopkins-Levitzki pour une catégorie (voir [10], [12]) on déduit que U est

objet noethérien et par suite $\mathcal{C}$ est une catégorie localement noethérienne.

Nous démontrerons dans ce paragraphe un résultat plus fort:

Théorème 2.1 Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de Grothendieck ayant une famille finie $(U_i)_{i \in I}$ de générateurs artiniens. Alors $\mathcal{C}$ est équivalente à une catégorie des modules sur un anneau artinien (à droite).

Démonstration $U = \bigoplus_{i \in I} U_i$ est un générateur artinien de $\mathcal{C}$. D'après le théorème d'Hopkins-Levitzki [10], [12], U est un objet de longueur finie et par suite l'anneau

$\Lambda = \text{End}_{\mathcal{C}}(U)$ est semi-primaire. D'après le théorème de Gabriel-Popescu [7], il existe une sous-catégorie localisante $\mathcal{A} \subset \text{Mod } \Lambda$ [4] tel que $\mathcal{C}$ est équivalente

avec la catégorie quotient $\text{Mod } \Lambda / \mathcal{A}$. Si $T: \text{Mod } \Lambda \rightarrow \mathcal{C}$ est le foncteur canonique, alors $T(\Lambda) = U$ et par suite

Λ est un anneau artinien par rapport à la sous-catégorie localisante $\mathcal{A}$. Il existe un module injectif Q

tel que $\mathcal{A} = \{M \in \text{Mod } \Lambda / \text{Hom}(M, Q) = 0\}$. Par suite Q est un module Δ -injectif. D'après le corollaire 4.7

[11] $Q = \bigoplus_{\alpha \in A} Q_{\alpha}$ où Q_{α} est un module Δ -injectif indécomposable pour tout $\alpha \in A$. De plus, il existe un

nombre fini d'injectifs $Q_{\alpha_1}, Q_{\alpha_2}, \dots, Q_{\alpha_n}$ tel que tout injectif Q_{α} ($\alpha \in A$) est isomorphe à un injectif de la famille $\{Q_{\alpha_1}, Q_{\alpha_2}, \dots, Q_{\alpha_n}\}$.

Si on dénote par $Q' = \bigoplus_{i=1}^n Q_{\alpha_i}$, alors $\mathcal{K} = \{ M \in \text{Mod } \Lambda \mid \text{Hom}(M, Q') = 0 \}$. Soit $S_{\alpha_i} = s_0(Q_{\alpha_i})$ ($1 \leq i \leq n$); S_{α_i} sont des modules simples. Si $P_{\alpha_i} \longrightarrow S_{\alpha_i} \longrightarrow 0$ est l'enveloppe projective de S_{α_i} alors d'après le théorème 1.1, $P = \bigoplus_{i=1}^n P_{\alpha_i}$ est un module Δ^* -projectif de type fini. Si on note $\mathcal{K}_P = \{ M \in \text{Mod } \Lambda \mid \text{Hom}(P, M) = 0 \}$, alors $\mathcal{K}_P$ est une sous-catégorie localisante de $\text{Mod } \Lambda$. En utilisant le théorème 1.1 nous avons que $\mathcal{K}_P = \mathcal{A}$. D'après le corollaire 3.3 [11], les propositions 2.3 et 2.5 [10], l'objet $V = T(P)$ de $\mathcal{C}$ est un générateur projectif artinien. D'après le corollaire 1.4 [10], la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des A-modules à droite $\text{Mod } A$ où $A = \text{End}(V)$.

Remarque Dans le travail [10] il a été démontré le théorème d'Hopkins-Levitzki pour une catégorie de Grothendieck $\mathcal{C}$: si U est un générateur artinien de $\mathcal{C}$, alors U est un objet noethérien. (Une démonstration très simple de ce théorème est donné dans le travail [12].)

D'après le théorème 2.1 on déduit que le théorème d'Hopkins-Levitzki pour une catégorie de Grothendieck est équivalent au théorème d'Hopkins-Levitzki classique: tout artinien à droite est noethérien à droite. Mais nous avons vu que pour démontrer ce résultat (c'est-à-dire le théorème 2.1) on a utilisé le théorème d'Hopkins-Levitzki pour une catégorie.

3. $\Sigma(\Delta)$ -ANNEAUX

Un anneau R s'appelle $\Sigma(\Delta)$ -anneau [3] si $E(R_R)$ est un module Σ (resp. Δ)-injectif. On sait [3],[11] que tout Δ -anneau est un Σ -anneau.

Dans le travail [13] on a démontré que R est un $\Sigma(\Delta)$ -anneau $\iff$ l'anneau de polynômes $R[X]$ est un $\Sigma(\Delta)$ -anneau. Aussi, si Q est un module Σ (resp. Δ)-injectif et $I \in C_Q(R)$ est un idéal bilatère, alors R/I est un Σ (resp. Δ)-anneau.

Dans ce paragraphe nous montrerons que R est un $\Sigma(\Delta)$ -anneau $\iff$ l'anneau des matrices $M_n(R)$ est un $\Sigma(\Delta)$ -anneau.

Lemme 3.1 Soit $T: \text{Mod } R \longrightarrow \text{Mod } S$ une équivalence de catégories. Si Q_R est un R -module, alors Q_R est $\Sigma(\Delta)$ -injectif $\iff T(Q)$ est un S -module $\Sigma(\Delta)$ -injectif.

Démonstration Supposons que $\bar{Q} = T(Q)$ est un module $\Sigma(\Delta)$ -injectif. Si on dénote par $U = T(R_R)$, U est un générateur projectif de type fini (voir [1], théorème 22.1). Si $F_{\bar{Q}}$ est la topologie additive co-engendré du module injectif $\bar{Q}$, alors le treillis $C_{\bar{Q}}(S)$ est noethérien (resp. artinien). Comme U est un S -module de type fini, alors le treillis $C_{\bar{Q}}(U)$ est noethérien (resp. artinien). Soit $I \in C_Q(R)$; alors il existe un ensemble Λ tel que $0 \longrightarrow R/I \longrightarrow Q^\Lambda$. Comme le foncteur T est une équivalence, alors on a la suite exacte $0 \longrightarrow T(R)/T(I) \longrightarrow T(Q)^\Lambda$ et par suite $T(I) \in C_{\bar{Q}}(U)$.

Si $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$ est une chaîne croissante (resp. décroissante) d'éléments de $C_Q(R)$, alors $T(I_1) \subseteq T(I_2) \subseteq \dots$ est une chaîne croissante (resp. décroissante) d'éléments de $C_Q(U)$. Comme $C_Q(U)$ est un treillis noethérien (resp. artinien), alors il existe un nombre naturel n tel que $T(I_n) = T(I_{n+1}) = \dots$ d'où on obtient que $I_n = I_{n+1} = \dots$. Par suite $C_Q(R)$ est un treillis noethérien (resp. artinien) et donc Q est un module Σ (Δ) -injectif. Réciproquement, si Q est un module Σ (Δ) -injectif, soit $F: \text{Mod } S \longrightarrow \text{Mod } R$ le foncteur avec la propriété que $F \circ T \simeq 1_{\text{Mod } R}$ et $T \circ F \simeq 1_{\text{Mod } S}$. D'ici on obtient que $Q \simeq F(T(Q))$. Comme F est une équivalence, alors $T(Q)$ est un module Σ (Δ) -injectif.

Corollaire 3.2 Supposons que les anneaux R et S sont équivalents au sens de Morita. Alors R est un Σ (Δ) -anneau $\iff S$ est un Σ (Δ) -anneau.

Démonstration Soit $T: \text{Mod } R \longrightarrow \text{Mod } S$ une équivalence de catégories. Supposons que R est un Σ (Δ) -anneau. Alors $T(E(R_R))$ est un S -module Σ (Δ) -injectif. Comme $U = T(R_R)$ est générateur projectif de type fini, il existe un nombre naturel n tel que $U^n = S_S \oplus U'$. Comme nous avons les suites exactes $0 \longrightarrow S_S \longrightarrow U^n$ et $0 \longrightarrow U \longrightarrow T(E(R_R))$, alors on a la suite exacte $0 \longrightarrow E(S_S) \longrightarrow T(E(R_R))^n$ d'où on obtient que $E(S_S)$ est un S -module Σ (Δ) -injectif.

Corollaire 3.3 Rest un $\Sigma(\Delta)$ -anneau $\Longleftrightarrow M_n(R)$ est un $\Sigma(\Delta)$ -anneau.

4. DÉCOMPOSITIONS PRIMAIRES POUR Δ -ANNEAUX

Dans le travail [5] Gordon a présenté une version pour les décompositions primaires utilisant la définition suivante pour la notion d'idéal primaire. Un idéal premier bilatère de R est associé à M_R s'il existe un sous-module non-nul $M' \subset M$ tel que $p = \text{Ann}_R(M'')$ pour tout sous-module $M'' \subset M'$, $M'' \neq 0$. On note par $\text{Ass}(M)$ l'ensemble des idéaux premiers associés à M . Un module M est dit primaire si $\text{Ass}(M)$ a un unique élément. L'anneau R s'appelle primaire si R_R est un R -module à droite primaire; un idéal bilatère I de R s'appelle idéal primaire si R/I est un anneau primaire. L'anneau R a une décomposition primaire (au sens de Gordon [5]) s'il existe des idéaux primaires bilatères $I_1, I_2, \dots, I_n$ de R tel que $\bigcap_{k=1}^n I_k = 0$. On ne sait pas si un anneau noethérien à gauche et à droite quelconque a une décomposition primaire. Un anneau R est dit irréductible si pour tout idéaux bilatères I, J de R , $I \neq 0, J \neq 0$, on a $I \cap J \neq 0$.

Lemme 4.1 Soit R un $\Sigma(\Delta)$ -anneau (à droite). Alors il existe les idéaux bilatères $I_1, I_2, \dots, I_n$ tel que $\bigcap_{k=1}^n I_k = 0$. R/I_k est un $\Sigma(\Delta)$ -anneau irréductible pour tout $1 \leq k \leq n$.

Démonstration Le treillis $C_{E(R)}(R)$ est noethérien.

Soit $\mathcal{L} = \{I \in C_{E(R)}(R), I \text{ idéal bilatère} / \exists I_1, I_2, \dots, I_p \in C_{E(R)}(R) \text{ des idéaux bilatères tel que } I = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_p \text{ et } R/I_k \text{ est un anneau irréductible pour tout } 1 \leq k \leq p\}$.

Si $C_{E(R)}(R) - \mathcal{L} \neq \emptyset$, alors $C_{E(R)}(R) - \mathcal{L}$ contient un élément maximal I . Comme $I \notin \mathcal{L}$, alors R/I n'est pas un anneau irréductible et par suite il existe deux idéaux bilatères I_1 et I_2 tel que $I = I_1 \cap I_2$ et $I \neq I_1, I \neq I_2$. D'ici on déduit que $I = \tilde{I} = (I_1 \cap I_2)^{\sim} = \tilde{I}_1 \cap \tilde{I}_2$. Si on note $J_1 = \tilde{I}_1$ et $J_2 = \tilde{I}_2$, alors J_1, J_2 sont idéaux bilatères et $J_1, J_2 \in C_{E(R)}(R)$. Comme $J_1 \neq I$ et $J_2 \neq I$, alors $J_1, J_2 \notin \mathcal{L}$ et par suite $J_1 = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p$, $J_2 = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_r$ où $A_i, B_j \in C_{E(R)}(R)$, R/A_i et R/B_j sont des anneaux primaires. Comme $I = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p \cap B_1 \cap \dots \cap B_r$ on obtient une contradiction. Donc $\mathcal{L} = \emptyset$.

Lemme 4.2 Si R est un Δ -anneau irréductible, alors R est un anneau primaire.

Démonstration Soit $p, p' \in \text{Ass}(R_R)$. Alors il existe deux idéaux à droite U, V tel que $p = \text{Ann}(U)$ et $p' = \text{Ann}(V)$. Comme $(RU) \cap (RV) \neq 0$, alors d'après le lemme 4.1 [11], $\text{Ass}((RU) \cap (RV)) \neq \emptyset$. Soit $q \in \text{Ass}(RU \cap RV)$. Il existe un idéal à gauche $0 \neq W \subset RU \cap RV$ tel que $q = \text{Ann}(W)$. Comme $(RU)p = 0$, alors $Wp = 0$ et par suite $p \subset q$. De la même façon on obtient que $p' \subset q$. D'après la proposition 4.5 [11], $p = q$ et $p' = q$ et donc $p = p'$.

Théorème 4.3 Si R est un Δ -anneau à droite, alors R a une décomposition primaire.

Démonstration On applique les lemmes 4.1 et 4.2.

Un anneau R à dimension de Krull (à droite) [6] s'appelle K -homogène si pour tout idéal à droite $I \subset R$, $I \neq 0$, $K.\dim I = K.\dim R$.

Corollaire 4.4 ([9], corollaire 14) Si R est un anneau avec la dimension de Krull (à droite) et K -homogène, alors R a une décomposition primaire.

Démonstration D'après le corollaire 2.4 [14], R est un Δ -anneau à droite.

Remarque Dans le travail [9] le corollaire 14 est donné quand R est noethérien à droite et K -homogène.

Corollaire 4.5 Si R est un order dans un anneau artien, alors R a une décomposition primaire.

Démonstration En effet R est un Δ -anneau à droite (voir [13], le théorème 2.4).

- Remarque Le corollaire 4.5 est plus fort que le théorème 16 de [9].

15

BIBLIOGRAPHIE

1. F.Anderson and K.Fuller, Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag New York-Heidelberg-Berlin 1973.
2. T.Albu et C.Năstăsescu, Décompositions primaires dans les catégories de Grothendieck commutatives I, Journal für die reine angew.Math. 1976,280, 172-193.
3. C.Faith, Injective modules over Levitzki Rings (à paraître, Lecture Notes,Marcel-Dekker)
4. P.Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull.Soc.Math. France,1962,90,323-448.
5. R.Gordon, Primary decomposition in right noetherian rings,Comm.in Algebra,2(1974),491-524.
6. R.Gordon and J.Robson, Krull dimension, Mem.Amer.Math. Soc.133(1974)
7. P.Gabriel et N.Popescu, Caractérisation de catégories abéliennes avec générateurs et limites exactes, C.R.Acad.Sci.Paris,1964,258, 4188-4190.
8. C.Hopkins, Rings with minimal condition for left ideals, Ann.Math.,1939,40,712-730.
9. T.H.Lenagan and P.B.Moss, ∞ -symmetric rings (preprint)
10. C.Năstăsescu, Conditions de finitude pour les modules, Revue Roum.Math.Pures et Appl.tomeXXIV,nr.5 1979, 745-758.

11. C.Năstăsescu, Conditions de finitude pour les modules II,
Revue Roum.Math.Pures et Appl.tome XXV,nr.4
(1980),615-630.
12. C.Năstăsescu, Théorème de Hopkins pour les catégories de
Grothendieck, Ring Theory,Antwerp 1980,88-93
Lecture Notes in Math.825,Springer Verlag.
13. C.Năstăsescu, Anneaux de quotients et modules $\Sigma(\Delta)$ -
injectifs, (à paraître,Comm.in Algebra).
14. C.Năstăsescu, Modules Δ -injectifs sur les anneaux à
dimension de Krull,(à paraître,Comm.in Alg.)
15. J.E.Roos, Locally noetherian categories and generalized
strictly linearly compact rings, Lecture
Notes in Math.,92,197-227,Springer Verlag.
16. Bo Stenström, Rings of Quotients,An Introduction to
Methods of Ring Theory, Springer Verlag,1975