

INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250-3638

SUR LA SOUS-CATEGORIE LOCALISANT ASSOCIE, A UN
IDEAL BILATERAL PREMIER DANS UN ANNEAU NOETHERIAN

(A DROITE)

par

Nicolae POPESCU

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No. 8/1980

libra 46626

BUCURESTI

SUR LA SOUS-CATÉGORIE LOCALISANT ASSOCIÉE, À UN
IDÉAL BILATÉRAL PREMIER DANS UN ANNEAU NOÉTHÉRIEN
(À DROITE)

par
Nicolae POPESCU*)

Février 1980

*) Département de Mathématiques, l'Institut National de Création
Scientifique et Technique, Bd. Păcii 220, 77538 Bucarest,
Romania

SUR LA SOUS-CATÉGORIE LOCALISANT ASSOCIÉE, À UN
IDÉAL BILATÉRAL PREMIER DANS UN ANNEAU NOETHÉRIEN

(À DROITE)

par Popescu Nicolae

INTRODUCTION

Dans leur ouvrage 6 Lambek et Michler ont caractérisé de système localisant (voir [2], [9]) à droite F associé à un idéal premier $\underline{p}$ d'un anneau noethérien à droite, comme le système localisant associé au système multiplicatif $\mathcal{C}(\underline{p}) = \{a \in R \text{ ainsi que } xa \in \underline{p} \Rightarrow x \in \underline{p}\}$. Dans note [10] nous avons signaler quelques conditions nécessaires et suffisantes ainsi que $R_{\underline{p}}$ l'anneau des quotients de R que rapport à F , soit un anneau de fractions de R par rapport à $\mathcal{C}(\underline{p})$. Dans une lettre, A. Hudry m'a signalé que note [10] contient quelques fautes, mais que ne sont pas que d'importance secondaire.

Dans ce travail nous donnons une autre formulation des résultats de [10] avec la démonstration. Notre but est d'initier une étude intrinsèque de quelques classes des anneaux noethériens à droite, de point de vue de la localisation.

1. Quelques notations et définitions usuelles

Dans tout ce qui suit, R désigne un anneau unitaire mais pas nécessairement commutatif et $\text{Mod } R$, la catégorie des R -modules à droite unitaires. Le lecteur voudra bien se reporter à [2].

au bien $\mathcal{F}$ pour les notions comme: sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$, système localisant d'idéaux à droite de R (au bien ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite de R). Il est bien connue qu'il existe une correspondance biunivoque entre les sous-catégories localisantes de $\text{Mod } R$ et les systèmes localisants des idéaux à droite de R (voir [2] ou bien [9]). Si $\mathcal{F}$ est une sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$, notons par F le système localisant associé à $\mathcal{F}$ par la correspondance ci-dessous. Nous rappelons qu'un idéal à droite a de R sera dans F si et seulement si $R/a \in \mathcal{F}$.

Si X est un objet de $\text{Mod } R$, notons par $E(X)$ l'enveloppe injective de X , de même, par $\mathcal{F}_X$ notons la sous-catégorie localisante constitué par tous les R -modules Y ainsi que $\text{Hom}_R(Y, E(X)) = 0$.

Sait $\mathcal{F}$ une sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$, notons:

- $\text{Mod } R/\mathcal{F}$ la catégorie quotient de $\text{Mod } R$ relativement à $\mathcal{F}$, $T: \text{Mod } R \longrightarrow \text{Mod } R/\mathcal{F}$ le foncteur canonique et S un adjoint à droite de T (cf. [2] au bien [9]). T est un foncteur exact et S pleinement fidèle.

- si X est un objet de $\text{Mod } R$, X_F sera le module des quotients de X , au localisation de X , par rapport à F (cf. [1], [2], [9]). Particulièrement R_F est un anneau (anneau des quotients, au l'anneau de localisation de R par rapport à F) et on a toujours un morphisme d'anneau $u: R \rightarrow R_F$ et le suivant diagramme des catégories et foncteurs

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Mod } R & \xrightleftharpoons[u_*]{u^*} & \text{Mod } R_F \\ & \searrow T \quad \swarrow S' & \\ & \text{Mod } R/\mathcal{F} & \end{array}$$

$\swarrow S \quad \searrow T'$

où u_* est foncteur restriction relativement à u , u^* la tensorisa-

tion avec R_F , S' adjoint à droite de T' . De même T' est un foncteur exact et S' est pleinement fidele. On a:

$$\mathcal{M}_* S' \simeq S.$$

Une sous-catégorie localisante $\mathcal{F}$ de $\text{Mod } R$ s'appellerait parfaite si et seulement si les foncteurs S' et T' dans le diagramme (1) donnent une équivalence des catégories.

Il est facile de voir que si R est par exemple un anneau dedekindienne (voire [9]) alors toute sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$ est parfaite.

2. Sous-catégories localisantes première

Une sous-catégorie localisante $\mathcal{F}$ de $\text{Mod } R$ s'appellerait première si et seulement si la catégorie quotient

$$\mathcal{C} = \text{Mod } R/\mathcal{F}$$

contient un objet simple U dont l'enveloppe injective est un cogénérateur de $\mathcal{C}$. Nous voulons donner quelques caractérisations des sous-catégories localisantes premières.

Soit $\mathcal{F}$ une sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$. Un R -module X s'appellerait $\mathcal{F}$ -critique si X est non nul, X ne contient pas des sous-modules non-nuls de $\mathcal{F}$ et pour tout sous-module X' de X , $X' \neq 0$, on a $X/X' \in \mathcal{F}$. Il est facile de voir que X est $\mathcal{F}$ -critique si et seulement si l'objet $T(X)$ de la catégorie $\text{Mod } R/\mathcal{F}$ est simple. Evidemment tout objet $\mathcal{F}$ -critique est irréductible (voir [8] ou [9]). Un idéal à droite a de R s'appellerait $\mathcal{F}$ -cocritique si et seulement si R/a est un objet $\mathcal{F}$ -critique.

Si a est un idéal à droite de R , notons par F_a la sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$ formée par tous les R -modules X tels que $\text{hom}_R(X, E(R/a)) = 0$. Il est facile de voir qu'un idéal à droite b de R appartient à F_a (le système localisante associé à F_a) si et seulement pour tout deux éléments $x_1, x_2 \in R$, tels que $x_1 \notin a$ il existe un élément $y \in R$ ainsi que $x_1 y \in a$ et $x_2 y \in b$.

Soit I un objet injectif indecomposable de $\text{Mod } R$. D'après [7] on appelle coeur de I et l'on désigne par $C(I)$ l'intersection $C = \bigcap \text{Ker } f$ des noyaux $\text{Ker } f$ des endomorphismes f de I tels que $\text{Ker } f \neq 0$. D'après [7] on voit qu'un élément $0 \neq x \in I$ appartient à $C(I)$ si et seulement si l'idéal à droite

$$\text{Ann}(x) = \{a \in R / xa = 0\}$$

annulateur de x est maximal parmi les annulateurs des éléments non nuls de I .

On a le résultat suivant

Théorème 2.1. Soit $\mathcal{F}$ une sous-catégorie localisante $\text{Mod } R$.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1) $\mathcal{F}$ est une sous-catégorie localisante première
- 2) Il existe un idéal à droite a de R ; $\mathcal{F}$ -cocritique ainsi que $\mathcal{F} = F_a$.
- 3) Il existe un R -module Y , $\mathcal{F}$ -critique, ainsi que $\mathcal{F} = F_Y$
- 4) Il existe un objet injectif et indecomposable, I dont le coeur est non-nul, ainsi que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_I$.

Preuve 1) $\Rightarrow$ 4) Soient U un objet simple de $\mathcal{C} = \text{Mod } R/\mathcal{F}$ et $Q = E(U)$, l'enveloppe injective de U dans $\mathcal{C}$. Nous utiliserons le diagramme (1)). Il est bien connue (voir [2], [9]) que $I = S(Q)$ est

un objet injectif indecomposable de $\text{Mod } R$; l'objet $V=S(U)$ est le coeur de I . En effet, si X est un sous objet non nul de V , on déduit que $T(V/X) = 0$, c'est-à-dire $V/X \in \mathcal{F}$. Donc si $x \in V$ alors xR est un sous-objet de V , tels que pour chaque sous-objet $X \subset xR$, $X \neq 0$, on a

$$xR/X \subset V/X$$

donc $xR/X \in \mathcal{F}$.

Maintenant, si $0 \neq x \in V$, et $\text{Ann}(x)$ n'est pas maximal parmi les annulateurs des éléments non-nuls de V on déduit que $\text{Ann}(x) \subset \text{Ann}(y)$ avec $0 \neq y \in V$. Alors l'application

$$xR \rightsquigarrow yR$$

définit une homomorphism de R -modules $f: xR \rightarrow yR$ dont noyau n'est pas nul. Alors on voit que $yR = xR / \text{Ker } f \in \mathcal{F}$, ce qui est absurde, V étant un objet $\mathcal{F}$ -fermée (voir [2] ou [9]).

D'autre part maintenant il est facile de voir que le coeur de I n'est pas nul et il coïncident avec V . L'égalité $\mathcal{F} = \mathcal{F}_I$ résulterait, parce que $T(I) = 0$ est un cogénérateur injectif de $\mathcal{E}$.

Les autres implications sont évidents (voir [9]).

Soit $\mathcal{F}$ une sous-catégorie localisante première de $\text{Mod } R$; un objet injectif indecomposable I tels que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_I$ s'appellerait un injectif indecomposable de définition pour $\mathcal{F}$. Il est facile de voir que I est unique à un isomorphisme près

Corollaire 2.2. Soit I un objet injectif indecomposable

de $\text{Mod } R$ dont le coeur n'est pas nul.

Alors $\mathcal{F}_I$ est une sous-catégorie localisante première de $\text{Mod } R$, et toute sous-catégorie localisante première est de tel façon.

Corollaire 2.3. Soit R un anneau noethérien à droite.

Les sous-catégories localisantes premières de $\text{Mod } R$ sont en correspondance biunivoque avec les types des objets injectifs indecomposables de $\text{Mod } R$.

En effet d'après la définition du coeur on voit tout objet injectif indecomposable de $\text{Mod } R$, R noetherien à droite, a son coeur non-nul.

Corollaire 2.4. Soit R un anneau. Dans la catégorie

$\text{Mod } R$ existe toujours des sous-catégories localisantes premières:

En effet si $\underline{m}$ est un idéal à droite maximale de R , $E(R/\underline{m})$ est un objet injectif indecomposable dont le coeur n'est pas nul.

Corollaire 2.5. Soit R un anneau commutatif. Un objet

injectif indécomposable I de $\text{Mod } R$ a le coeur non-nul si et seulement si I est l'enveloppe injective d'un module $R/\underline{p}$ ou $\underline{p}$ est un idéal premier de R . Particulièrement les idéaux premiers de R sont en correspondance biunivoque avec les sous-catégories localisantes premières de $\text{Mod } R$.

Il est bien connue que si R est un anneau commutatif et $\underline{p}$ un idéal premier de R , alors la sous-catégorie localisante (première) $\mathcal{F}$ associée à $\underline{p}$ est parfaite. Cette affirmation n'est pas toujours valable pour les anneaux noncommutatifs. Il est intéressant de savoir qu'il y a des anneaux R tels que toute sous-catégorie

localisante première de $\text{Mod } R$ est parfaite. Dans ce qui suit nous essayerons de faire quelques contributions à ce problème.

Théorème 2.6. Soient R un anneau artinien à droite, $\mathcal{F}$ une sous-catégorie localisante première de $\text{Mod } R$, I un objet injectif indecomposable de définition pour $\mathcal{F}$, et U le coeur de I . Notons par R_F l'anneau de quotients de R relativement à $\mathcal{F}$ et par $\mu: R \rightarrow R_F$ le morphisme canoniques des anneaux. I et U sont de façon canoniques des R_F -modules à droites. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1) $\mathcal{F}$ est une sous-catégorie localisante parfaite

2) U est canoniquement un R_F -module simple.

Preuve. Considerons le diagramme (1).

1) $\Rightarrow$ 2) d'après la définition d'une sous-catégorie localisante parfaite et la théorème 2.1.

2) $\Rightarrow$ 1) De l'isomorphisme fonctoriel:

$$(2) \quad \mu_* s' \simeq s$$

on voit que $S'T(U) = U'$ est un R_F -module dont restriction des scalaires à R est isomorphe à U ; U' est la structure de U comme R_F -module. Nous supposons que U' est un R_F -module simple.

De l'isomorphisme (2) on voit que $R_F \simeq S'T(R)$.

L'objet $T(R)$ de $\text{Mod } R/\mathcal{F}$ est artinien (voir [2] ou [9]), donc il a une suite de composition:

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = T(R)$$

dont tous les facteurs de composition sont isomorphes à $T(U)$, le

seul type des objets simple de $\text{Mod } R/\mathcal{F}$. Il est facile de voir que les sous-objets

$$0 = S'(x_0) \subset S'(x_1) \subset \dots \subset S'(x_n) = S'T(R) \subseteq R_F$$

donnent une suite de composition de R_F , dont tous les facteurs de composition sont isomorphes à $S'T(U) = U'$. D'ici on déduit que pour tout idéal à droite $\underline{a}$ de R_F , le module $R_F/\underline{a}$ a une suite de composition dont les facteurs de compositions sont isomorphes à U' , c'est-à-dire $T'(R_F/\underline{a}) \neq 0$. Donc T' est un foncteur fidèle et il établit une équivalence de catégories. Finalement $\mathcal{F}$ est une sous-catégorie localisante parfaite.

Nous ne savons pas si le Théorème 2.6 est valable pour les anneaux noethériens à droite.

3. Systèmes multiplicatifs dans un anneau

Soient R un anneau et C un système multiplicatif de R .

On dit que C est permutable à droite si pour tous deux éléments $x \in R$, $s \in C$, il existe deux éléments $x' \in R$, $s' \in C$ ainsi que

$$sx' = xs'$$

On dit que C' est simplifiable à droite si pour tous deux éléments $x \in R$, $s \in C$ ainsi que $sx = 0$, il existe un élément $s' \in C$ tel que $xs' = 0$.

Un système multiplicatif C de R qui est en même temps permutable et simplifiable à droite s'appellerait système Ore à droite.

Si $y \in R$, notons

$$(0:y) = \{x/x \in R, \text{ ainsi que } yx=0\}$$

$(0:y)$ s'appellerait l'annulateur à droite de y .

Proposition 3.1. (Goldie[3]). Soient R un anneau et C un système multiplicatif et permutable à droite de R . On suppose que R vérifie la condition suivante: toute chaîne ascendante des annulateurs à droite des éléments de C , est stationnaire. Alors C est aussi un système simplifiable à droite.

Preuve. Soient $x \in R$ et $s \in C$ ainsi que $sx=0$. Selon l'hypothèse, pour tout nombre naturel $k \geq 1$, il existe deux éléments $x_k \in R$, $s_k \in C$ ainsi que

$$s^k x_k = x \wedge_k$$

On voit que $s^{k+1} x_k = s x \wedge_k = 0$. C'est-à-dire $x_k \in (0:s^{k+1})$. D'après l'hypothèse, il existe un nombre naturel n tel que

$$(0:s^n) = (0:s^{n+1}) = \dots$$

$$\text{Donc on a } x_n \in (0:s^n), \text{ i.e. } s^n x_n = x \wedge_n = 0$$

Donc C est simplifiable à droite.

Corollaire 3.2. Soit R un anneau noethérien à droite. Alors tout système multiplicatif de R , permutable à droite, est de même simplifiable à droite, c'est-à-dire un système Ore à droite.

4. La sous-catégorie localisante première associée à un idéal bilatéral premier dans un anneau noethérien à droite

Dans ce qui suit R sera un anneau noethérien à droite et $\underline{p}$ sera un idéal premier bilatéral de R . On sait alors (voir [2] au bien [9]) que l'enveloppe injective $E(R/\underline{p})$ est une somme directe finie des injectives indecomposables isomorphes entre eux. Donc on voit que $\mathcal{F}_{\underline{p}} = \mathcal{F}$ est une sous-catégorie localisante première de $\text{Mod } R$.

Notons:

$\mathcal{C}(\underline{p}) = \{x/x \in R \text{ tel que la condition } ex \in \underline{p} \text{ implierait } x \in \underline{p}\}$

On voit que $\mathcal{C}(\underline{p})$ est un système multiplicatif d'éléments de R . D'après le théorème de Goldie (voir [2], [3], au bien [9]) un élément $c \in R$ appartient à $\mathcal{C}(\underline{p})$ si et seulement si l'image de c dans les anneaux quotient $R/\underline{p}$ est un élément régulier. D'ici on déduit que pour tout élément $c \in \mathcal{C}(\underline{p})$ on a de même:

si $x \in R$ et $xc \in \underline{p}$ alors $x \in \underline{p}$.

Soit $F = F_{\underline{p}}$ le système localisant des idéaux à droite de R , associé à $\mathcal{F}_{\underline{p}}$. Dans leur ouvrage [6], Lambek et Michler ont montré le résultat suivant:

Théorème 4.1. Un idéal à droite $\underline{a}$ de R appartient à F si et seulement si pour tout $x \in R$ il existe $c \in \mathcal{C}(\underline{p})$ tel que $xca \in \underline{a}$.
Si $\underline{a}$ est un idéal à droite de R est $x \in R$, notons:

$$(\underline{a}:x) = \{y/y \in R \text{ tel que } xy \in \underline{a}\}$$

D'après le théorème 4.1 résulte que $\underline{a} \in F$ si et seulement si pour tout élément $x \in R$ on a

$$(\underline{a}:x) \cap \mathcal{C}(\underline{p}) \neq \emptyset$$

Soient $R_F = R_{F_R}$ l'anneau des quotients de R par rapport à F et $u: R \rightarrow R_F$ l'homomorphisme canonique des anneaux. Si $\underline{a}$ est un idéal à droite de R notons:

$$\underline{a}_F = \{y/y \in R_F \text{ tel que il existe un idéal } \underline{b} \in F$$

ainsi que $y \underline{b} \subseteq u(\underline{a})$

$\underline{a}_F$ est un idéal à droite de R_F ; on voit facilement que $\underline{a} \in F$ si et seulement si $\underline{a}_F = R_F$.

Soit $\underline{a}$ un idéal à droite de R . Le résultat suivant contient des conditions nécessaires et suffisantes ainsi que l'anneau R_F , l'anneau des quotients de R par rapport à F est un anneau classique des fractions à droite de R par rapport à $\mathcal{C}(\underline{p})$ (voir [2], ou bien [9]) pour la notion des anneaux classique des fractions à droite), au qui est la même chose, $\mathcal{C}(\underline{p})$ est un système Ore à droite. Notons que d'autres résultats sur le même sujet sont exposés dans [6].

Théorème 4.2. Soient $\underline{p}$ un idéal bilatéral premier de R , I un injectif indecomposable contenue dans l'enveloppe injective de $R/\underline{p}$, U le coeur de I et R_F l'anneau des quotients de R par rapport à $F = F_R$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1) Chaque idéal à droite de R , $\mathcal{F}$ -cocritique contient $\underline{p}$.
- 2) $\underline{p}$ est contenue dans l'annulateur du U .
- 3) Chaque idéal à droite de R , $\mathcal{F}$ -cocritique est premier
- 4) $\mathcal{C}(p)$ est un système multiplicatif permutable à droite.

5) $\mathcal{F}$ est une sous-catégorie localisante parfaite et $\underline{p}_F$ est un idéal bilatéral de R_F .

6) U est un R_F -module simple et $\underline{p}_F$ est un idéal bilatéral de R_F .

Preuve. L'équivalence $1) \Rightarrow 2)$ est évidente parce que les idéaux à droite $\mathcal{F}$ -cocritique sont exactement les annulateurs des éléments non-nuls de U .

$1) \Rightarrow 3)$. Soit $\underline{a}$ un idéal à droite $\mathcal{F}$ -cocritique; alors $\underline{a} \subseteq \underline{p}$. Soit $x, y \in R$ tel que $xRy \subseteq \underline{a}$; si $x \notin \underline{a}$ alors $\bar{x}$ l'image de x dans le module $R/\underline{a}$ est un élément non-nul, et y sera un annulateur de sous-module xR du $R/\underline{a}$. Évidemment $\underline{p}$ est le plus grand idéal bilatéral du R qui est l'annulateur d'une sous-module de U . D'ici on voit que $y \in \text{Ann}(xR) \subseteq \underline{p}$, donc $y \in \underline{a}$, parce que $\underline{p} \subseteq \underline{a}$ d'après l'hypothèse. En conclusion $\underline{a}$ est un idéal à droite première.

$3) \Rightarrow 4)$. D'abord nous montrons que pour chaque élément $c \in \mathcal{C}(p)$, l'idéal à droite cR appartient à $\mathcal{F}$. Pour cela soit $c \in \mathcal{C}(p)$; supposons par contraire que $cR \notin \mathcal{F}$. Alors il y a un idéal à droite $\underline{a}$ de R , ainsi que $cR \subseteq \underline{a}$ et $\underline{a}$ est maximal parmi les idéaux à droite de R qui n'appartient pas à $\mathcal{F}$. Évidemment $\underline{a}$ sera $\mathcal{F}$ -cocritique et d'après l'hypothèse, $\underline{a}$ est première. Parce que $\underline{a}$ est $\mathcal{F}$ -cocritique on voit que $\underline{a}$ est irréductible et $E(R/\underline{a})$ est isomorphe à I . Nous identifierons $R/\underline{a}$ avec son image par un isomorphisme $E(R/\underline{a}) \cong I$. D'après la définition du I il existe des éléments $x \in U$ ainsi que $\text{Ann}(x) \supseteq \underline{p}$. $\forall u$ que I est coirréductible il y a des éléments non-nuls $y \in R/\underline{a}$ tels que $\text{Ann}(y) \supseteq \underline{p}$.

Soit r un élément de R dont image dans $R/\underline{a}$ est un élément y tel que $\text{Ann}(y) \not\supseteq \underline{p}$. Alors

$$(3) \quad \text{Ann}(y) = (a:r) \not\supseteq \underline{p}$$

L'égalité (3) montre que $rp \subseteq a$, or équivalent pour tout $t \in \underline{p}$ on a : $rRt \subseteq a$. Voit que $r \notin a$ on déduit que $t \notin a$ pour tout $t \in \underline{p}$, a étant première. Donc $p \subseteq a$ et $a \cap \mathcal{C}(\underline{p}) \neq \emptyset$.

D'ici résulterait que $\underline{a} \in F$. En effet si $s \in R$, il y a des éléments $s' \in R$ et $c \in \mathcal{C}(\underline{p})$ ainsi que $sc' - cs' \in \underline{p}$. Voit que $cs' \in p \subseteq a$, on déduit que $sc' \in a$, c'est-à-dire $(a:s) \cap \mathcal{C}(\underline{p}) \neq \emptyset$. Donc $\underline{a} \in F$, en contradiction avec la définition de $\underline{a}$. Par suite l'hypothèse que pour $c \in \mathcal{C}(\underline{p})$, $cR \not\subseteq F$ est false. Donc $cR \subseteq F$ pour tout $c \in \mathcal{C}(\underline{p})$.

Maintenant, nous prouvons que $\mathcal{C}(\underline{p})$ est un système permutable à droite, et d'après le Proposition 3.1 $\mathcal{C}(\underline{p})$ sera un système Ore à droite. En effet si $c \in \mathcal{C}(\underline{p})$ et $x \in R$, alors $(cR:x) \subseteq F$, donc $(cR:x) \cap \mathcal{C}(\underline{p}) \neq \emptyset$ c'est-à-dire il existe un élément $c' \in \mathcal{C}(\underline{p})$ ainsi que $xc' = cx' \in cR$.

4) $\Rightarrow$ 5) D'après le Corollaire 3.2 on voit que $\mathcal{C}(\underline{p})$ est un système Ore à droite de R . Alors, d'après [2] or [9] on déduit que R_F l'anneau des quotients de R par rapport à F est un anneau classique des fractions de R par rapport à $\mathcal{C}(\underline{p})$, le morphisme canonique $u: R \rightarrow R_F$ est un epimorphisme plat à droite et F est parfaite. Dans ce cas, un idéal à droite $\underline{a}$ de R appartient à F si et seulement si $\mu(\underline{a})R_F = R_F$. Montrons que $\underline{p}_F$ est un idéal bilatéral de R_F . Soit, pour cela $x \in \underline{p}_F$, $y \in R_F$, voit que R_F est un anneau classique des fractions à droite de R par rapport à $\mathcal{C}(\underline{p})$, on a:

$$x = \mu(a)\mu(c)^{-1}$$

$$y = \mu(b)\mu(d)^{-1}$$

$$c, d \in \mathcal{C}(\underline{p}), a, b \in R.$$

L'appartenance $x \in \underline{p}_F$, montre que $a \in \underline{p}$. On a :

$$yx = u(b)u(d)^{-1} \cdot u(a)u(c)^{-1}$$

Voit que $\mathcal{C}(p)$ est permutable à droite on voit qu'il existe des éléments $a' \in R$, $c' \in \mathcal{C}(\underline{p})$ ainsi que

$$u(d)^{-1}u(a) = u(a')u(c')^{-1}$$

D'ici on déduit que $a' \in \underline{p}$, et on a

$$yx = u(b)u(a')u(c')^{-1}u(c) = u(ba')u(cc')^{-1}$$

Evidement, $ba' \in \underline{p}$ et necessairement $yx \in \underline{p}_F$. En conclusion $\underline{p}_F$ est de même un idéal à droite de R , c'est-à-dire un idéal bilatéral.

5) $\Rightarrow$ 6) D'après la définition d'une sous-catégorie localisante parfaite et d'après le Théorème 2.1, on voit que U , le coeur du I est un R_F -module simple.

6) $\Rightarrow$ 2). D'abord nous voulons montrer qu'il existe des éléments non-nuls $x \in U$ ainsi que $x \underline{p}_F = 0$, c'est-à-dire l'annulateur du x dans l'anneau R_F contient $\underline{p}_F$. En effet, d'après la définition du U , il existe des éléments non-nuls $x \in U$, ainsi que $x \underline{p} = 0$. Soient x un tel élément de U et α un élément de $\underline{p}_F$. Supposons par absurd que $x\alpha \neq 0$. Alors pour tout $\beta \in R_F$ on voit que $\alpha\beta \in \underline{p}_F$ et il existe un élément $c \in \mathcal{C}(p)$ ainsi que $\alpha\beta u(c) \in \underline{p}$, ou comme d'habitude $u: R \rightarrow R_F$ est le morphisme canonique. Mais alors $x\alpha\beta u(c) = 0$. Donc, on veut que $x\alpha$ est un élément de U , dont annulateur dans R appartient à F (voit le théorème 4.1), contradiction avec la définition du U . Par consequence, si $x \in U$, est tel que $x \underline{p} = 0$, alors $x \underline{p}_F = 0$.

Maintenant considérons les sous-ensembles U' de U forme par les éléments x , ainsi que $x p_F = 0$. D'après ci-dessus, on veut que $U' \neq 0$ et d'après l'hypothèse que p_F est bilatéral on déduit que U' est un R_F -sous-module de U . Voit que U est simple par l'hypothèse on déduit que $U' = U$, c'est-à-dire pour tout élément $x \in U$, on a $x p_F = 0$. D'ici on déduit facilement que p est contenue dans l'annulateur de U .

5. Le cas des anneaux artiniens

Dans le qui suite R sera un anneau artinian à droite.

On sait que R est aussi un anneau noethérien à droite et il existe une correspondance biunivoque entre ensemble (fini) des R -modules simple (deux à deux non-isomorphiques) et ensemble des idéaux premiers bilatères de R (voir [2] or bien [9]). Le théorème 4.2 se particularisent dans ce cas sous la forme suivante

Théorème 5.1. Soient p un idéal bilatéral premier de R , I un injectif indecomposable contenu dans l'enveloppe injective de R/p , U le coeur de I , K l'unique module simple contenu dans I (et donc dans U) et R_F l'anneau des quotients de R par rapport à $F = F_p$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1) L'inclusion canonique $K \subseteq U$ est un isomorphisme
- 2) p est l'annulateur de U
- 3) Chaque idéal à droite de R , F -cocritique est maximal.
- 4) Chaque sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$ qui contient K , contient de même U .
- 5) Chaque sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$ qui contient K , contient de même l'enveloppe injective de K .

Preuve. L'implication $1) \Rightarrow 2)$ est évidente.

Voit que chaque idéal à droite de R , F -cocritique est l'annulateur d'un élément de U , résulte équivalence $1) \Leftrightarrow 3)$.

$2) \Rightarrow 3)$. Soit $\underline{a}$ un idéal à droite, F -cocritique de R ; voit que $\underline{a}$ est l'annulateur d'un élément de U , on a l'inclusion

$$\underline{p} \subseteq \underline{a}.$$

D'autre part, $\underline{p}$ étant l'annulateur de K , on voit que $\underline{p}$ est l'intersection d'un nombre finie d'annulateur des éléments de K , donc on a

$$\underline{p} = \bigcap_{i=1}^n \underline{m}_i.$$

$\underline{m}_i$, $\underline{m}_i$ étant idéaux maximaux à droite de R . On déduit que $R/\underline{p}$ est contenue comme sous-module dans le module $\bigoplus_{i=1}^n R/\underline{m}_i$, donc $R/\underline{p}$ est un module semi-simple. Par conséquence, $R/\underline{a}$ est de même semi-simple. Mais tout idéal à droite F -cocritique est coiréductible ce qui montre que $R/\underline{a}$ est nécessairement simple, donc $\underline{a}$ est maximal.

L'implication $1) \Rightarrow 4)$ est évidente.

$4) \Rightarrow 1)$ Soit $\mathcal{A}$ la sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$ engendré par K (voir [9]) ($\mathcal{A}$ sera la plus petite sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$ qui contient K).

D'après la Théorème 2.1 on sait que U/K est un objet de $\mathcal{F}$, et d'après l'hypothèse 4) il est de même un objet de $\mathcal{A}$, qui est une contradiction si $K \neq U$. Donc nécessairement $K=U$.

$1) \Rightarrow 5)$ $\mathcal{F}$ étant une sous-catégorie localisante première de $\text{Mod } R$ on sait que $\text{Mod } R/\mathcal{F}$ a un seul type des objets simples. En utilisant la diagramme (1) on voit que $T(K)$ est un objet simple

de $\text{Mod } R/\mathcal{F}$ et d'après 1) on a l'isomorphisme canonique:

$$K \cong \text{ST}(K)$$

De même I est canoniquement isomorphe avec $\text{ST}(I)$.

$\text{Mod } R/\mathcal{F}$ étant une catégorie artinienne, on déduit que $T(I)$ a une suite Loewy, c'est-à-dire une famille croissante $\{N_\alpha\}_\alpha$ de objects, indexes par les nombres ordinaux, tels que

$\bigcup_\alpha N_\alpha = T(I)$ et $N_{\alpha+1}/N_\alpha$ est nul au isomorphe avec $T(K)$. D'ici on déduit que I a de même une famille croissante $\{M_\alpha\}_\alpha$ de sous-modules tels que $\bigcup_\alpha M_\alpha = I$, et $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ est nul au isomorphe avec K .

Maintenant soit $\mathcal{A}$ une sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$ qui contient K . Soit M le plus grand sous-object de I contenue dans $\mathcal{A}$. Nous montrons que $M=I$. En effet si $M \neq I$ soit α le plus grand a nombre ordinal tel que $M_\alpha \subseteq M$. Voir que M_α est maximal dans $M_{\alpha+1}$ on déduit que $M \cap M_{\alpha+1} = M_\alpha$. Donc on a:

$$M + M_{\alpha+1}/M \cong M_{\alpha+1}/M_{\alpha+1} \cap M \cong M_{\alpha+1}/M_\alpha \cong K$$

Mais $M + M_{\alpha+1}/M$ est canoniquement contenue comme sous-module dans I/M , ce qui est une contradiction. Donc nécessairement $M=I$ et 1) $\Rightarrow$ 5).

D'autres implications sont évidents

q.e.d.

Un anneau R s'appellerait local à droite si la catégorie $\text{Mod } R$ est une catégorie locale, c'est-à-dire $\text{Mod } R$ a un seul type des modules simples (dont enveloppe injective est un cogénérateur de $\text{Mod } R$). Un idéal à droite $\underline{a}$ de R s'appellerait cocritique si la sous-catégorie localisante $\mathcal{F}_{\underline{a}}$ (associa a système localisante $\mathcal{F}_{\underline{a}}$) est premier à droite (dans ce cas $\underline{a}$ est $\mathcal{F}_{\underline{a}}$ -cocritique).

Mod 46626

En utilisant des résultats ci-dessus nous pouvons donner une caractérisation à une classe des anneaux artiniens à droite.

Théorème 5.2. Soit R un anneau artinien à droite.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1) R est un produit direct des anneaux locaux à droite.
- 2) Toute sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$ est stable aux enveloppes injectives.
- 3) Tout idéal à droite cocritique de R est maximal.

Preuve. L'équivalence $1) \Leftrightarrow 2)$ est une conséquence d'un théorème plus générale (voir [9], Ch.V, Théorème 6.9).

L'équivalence $2) \Leftrightarrow 3)$ résulte d'après Théorème 5.1 et d'après le fait que toute sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$ est engendrée par tous les objets simples qu'elle contient.

Corollaire 5.3. Tout anneau artinien commutatif est un produit direct des anneaux locaux.

Preuve. En effet on voit que dans un anneau commutatif tout idéal cocritique est premier, et tout anneau local à droite, commutatif est local.

INCREST

Edul Păcii 220, București, sect. 7
Cod 77538

B I B L I O G R A P H I E

- [1] Bourbaki, N., Algèbre commutative, Ch.3-4, Hermann, Paris 1961.
- [2] Gabriel, P., Des catégories abéliennes, Bull.Soc.Math.France 90(1962), pp.323-448.
- [3] Goldie A.W., The structure of noethérian rings. Lecture Notes in Math.Vol.246(1972), pp.213-321.
- [4] Goldman, O., Rings and modules of quotients. J.Algebra 13 (1969), 10-48.
- [5] Jacobson, N., Structure of rings A.M.S. Coll.Publications. Vol.37, 1956. Vol.37 1956.
- [6] Lambek, J.; Michler, G., The Torsion theory at a prime idéal of a right noethérian Ring. J.Algebra 25(1973), 364-389.
- [7] Lesieur, L., Croisat, R., Coeur d'un module Journ.de Math. tome 42(1963), pp.367-407.
- [8] Popescu, N., Le spectre à gauche d'un anneau. J.Algebra 18(1971), pp.213-228.
- [9] Popescu, N., Abelian categories with Applications to rings and modules C.M.S.Monographs, Academic Press 1973.
- [10] Sur l'anneau des quotients d'un anneau noethérien (à droite) par rapport au système localisant associé à un idéal bilatéral premier. C.R.Acad.Sci.Paris tom 283 (1976) pp. 967-969.

