

INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250 3638

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉOREME D'OMISSION DES TYPES
DANS LES ALGÈBRES POLYADIQUES

par

George GEORGESCU

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No.101/1981

BUCURESTI

Med 17898

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉOREME D'OMISSION DES TYPES
DANS LES ALGÈBRES POLYADIQUES

par
George GEORGESCU*)

Novembre 1981

*) Institut de Mathématiques, Str. Academiei 14, Bucarest,
Roumanie.

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME D'OMISSION DES TYPES
DANS LES ALGÈBRES POLYADIQUES

George Georgescu

Le théorème d'omission des types pour les algèbres cylindriques est démontré en [7]. Une démonstration du théorème d'omission des types formulé dans les algèbres polyadiques est donnée en [3]. Le but de ce papier est de généraliser le résultat de [3]. Il en résulte, comme un cas particulier, un théorème d'omission des types pour les modèles booléens. Pour les définitions et les résultats sur les algèbres polyadiques, voir [2] et [4].

Toutes les algèbres polyadiques de ce papier seront localement finies, de degré infini.

Soit $(A, I, S, \exists, E)$ une algèbre polyadique avec égalité.

Pour tout $p \in A$ nous noterons par J_p le support minimal de p . On sait [2] que l'ensemble

$$E(A) = \{p \in A \mid J_p = \emptyset\}$$

est une algèbre de Boole. Un ensemble $\Gamma \subset E(A)$ est dit consistant si le filtre de l'algèbre de Boole $E(A)$ engendré par Γ est propre.

Nous allons généraliser cette notion dans la manière suivante: si B est une algèbre de Boole complète alors une fonction partielle $f: \text{dom}(f) \subseteq E(A) \rightarrow B$ est dit consistante (en A) s'il existe un morphisme booléen $g: E(A) \rightarrow B$ tel que $g|_{\text{dom}(f)} = f$.

Remarque. Si A est l'algèbre de Lindenbaum-Tarski d'un langage du premier ordre avec égalité nous retrouvons la notion

de fonction partielle consistante dans la théorie des modèles booléennes (voir [6],[9]).

Un élément p de $E(A)$ est consistant avec la fonction partielle f si la fonction partielle $g: \text{dom}(f) \cup \{p\} \rightarrow B$ donnée par $g|_{\text{dom}(f)} = f$ et $g(p) = 1$ est consistante.

Nous utiliserons le résultat suivant de Shor (voir [6],[9]):

Lemme 1. Soient B, C deux algèbres de Boole, B complète et $f: \text{dom}(f) \subseteq C \rightarrow B$ une fonction partielle. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) il existe un morphisme booléen $g: C \rightarrow B$ tel que

$$g|_{\text{dom}(f)} = f.$$

(b) pour tous $p_1, \dots, p_n \in \text{dom}(f)$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ nous avons

$$\bigwedge_{t=1}^n \varepsilon_t \cdot p_t = 0 \Rightarrow \bigwedge_{t=1}^n \varepsilon_t \cdot f(p_t) = 0.$$

Remarque. Si $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, alors $\varepsilon p = p$ si $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon p = \neg p$ si $\varepsilon = -1$.

Lemme 2. Soient A, A' deux algèbres polyadiques avec égalité tel que A est une sous-algèbre de A' et B une algèbre de Boole complète. Si $f: \text{dom}(f) \subseteq E(A) \rightarrow B$ est une fonction partielle, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) f est consistante en A .

(b) f est consistante en A' .

Preuve. On applique le résultat bien connu: une algèbre de Boole complète est injective dans la catégorie des algèbres de Boole [5].

Un type de l'algèbre polyadique A est un sous-ensemble

$\Sigma(i)$ de A tel que chaque élément p de $\Sigma(i)$ a son support minimal $J_p = \{i\}$.

Une fonction partielle f consistante en A omet le type

(1) si nous avons

(*) pour tout $p \in A$, $J_p \subseteq \{i\}$, tel que $\exists(i)p$ est consistant avec f , il existe $q \in \Sigma(i)$ tel que $\exists(i)(p \wedge \neg q)$ est consistant avec f .

Si $X \neq \emptyset$, considérons l'algèbre polyadique $F(X^I, B)$ des fonctions $p: X^I \rightarrow B$. Rappelons la définition des opérations de $F(X^I, B)$ (voir [5]):

$$\exists(J) p(x) = \bigvee \{p(y) \mid y|_{I-J} = x|_{I-J}\}$$

$$\exists(\sigma) p(x) = p(x\sigma),$$

pour tout $p \in F(X^I, B)$, $J \subseteq I$, $\sigma \in I^I$ et $x \in X^I$. L'égalité canonique E_0 de $F(X^I, B)$ est donné par

$$E_0(i, j)(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i = x_j \\ 0, & \text{si } x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Un morphisme polyadique $\Phi: A \rightarrow F(X^I, B)$ sera nommé

B-représentation. Une B-représentation Φ omet le type

$\Sigma(i)$ si pour tout $u \in X$ et $x \in X^I$ avec $x_i = u$, il existe $q \in \Sigma(i)$, tel que $\Phi(\neg q)(x) = 1$.

Théorème 1. Soit $(A, I, S, \exists, E)$ une algèbre polyadique tel que $\text{card}(A) = \text{card}(I) = \omega_0$, B une algèbre de Boole complète, $f: \text{dom}(f) \subseteq E(A) \rightarrow B$ une fonction partielle consistante et $\Sigma(i)$ un type de A . Si f omet le type $\Sigma(i)$ alors il existe un B-représentation $\Phi: A \rightarrow F(X^I, B)$ tel que

(i) Φ omet le type $\Sigma(i)$

(ii) $\Phi(p)(x) = f(p)$ pour tout $p \in \text{dom}(f)$ et $x \in X^I$.

Preuve. Considérons une extension libre $A(K)$ de A (voir [2], p.93), où K est dénombrable. Alors $A(K)$ est aussi dénombrable. Nous allons démontrer la propriété suivante:

(***) Pour tout $r \in A(K)$, $J_r = \emptyset$ et $p \in A(K)$, $J_p \subseteq \{i\}$, si $r \wedge \exists(i)p$ est consistant avec f en $A(K)$, alors il existe $q \in \Sigma(i)$ tel que $r \wedge \exists(i)(p \wedge \neg q)$ est consistant avec f en $A(K)$.

Soit $s = r \wedge p$, donc $r \wedge \exists(i) p = \exists(i) s$. Rappelons que s a la forme $p = S(\tau) t$, avec $t \in A$, où est la bijection $(k_1, i_1) \circ \dots \circ (k_n, i_n)$ et s indépendant de $\{i_1, \dots, i_n\}$ (voir [2], p.87). De même, nous avons $s = k_1(i_1) \dots k_n(i_n) t$. D'après l'inégalité (voir [5])

$$\exists(i) s = \exists(i) k_1(i_1) \dots k_n(i_n) t \leq \exists(i) \exists(i_1, \dots, i_n) t$$

il résulte que $\exists(i) \exists(i_1, \dots, i_n) t$ est consistant avec f en $A(K)$. Mais $t \in A$, donc il existe $q \in \Sigma(i)$ tel que

$\exists(i) (\exists(i_1, \dots, i_n) t \wedge \neg q)$ est consistant avec f en A .

Si $\exists(i) (s \wedge \neg q)$ n'est pas consistant avec f en $A(K)$, alors la fonction $g: \text{dom}(f) \cup \{ \exists(i) (s \wedge \neg q) \} \rightarrow B$ définie par $g|_{\text{dom}(f)} = f$ et $g(\exists(i) (s \wedge \neg q)) = 1$ n'est pas consistante. Par le lemme 1, on peut trouver $u_1, \dots, u_m \in \text{dom}(f)$ tel que

$$\exists(i) (s \wedge \neg q) \wedge \exists_1 u_1 \wedge \dots \wedge \exists_m u_m = 0$$

$$\exists_1 f(u_1) \wedge \dots \wedge \exists_m f(u_m) \neq 0.$$

De la première relation on obtient

$$\exists(i) (s \wedge \neg q \wedge \exists_1 u_1 \wedge \dots \wedge \exists_m u_m) = 0,$$

donc $s \wedge \neg q \wedge \exists_1 u_1 \wedge \dots \wedge \exists_m u_m = 0$. Mais $t \neq S(\tau) s$ (voir [2], p.87), donc

$$t \wedge \neg q \wedge \exists_1 u_1 \wedge \dots \wedge \exists_m u_m = S(\tau) (s \wedge \neg q \wedge \exists_1 u_1 \wedge \dots \wedge \exists_m u_m) = 0.$$

On obtient

$$\exists(i) (\exists(i_1, \dots, i_n) t \wedge \neg q) \wedge \exists_1 u_1 \wedge \dots \wedge \exists_m u_m =$$

$$= \exists(i) \exists(i_1, \dots, i_n) (t \wedge \neg q \wedge \exists_1 u_1 \wedge \dots \wedge \exists_m u_m) = 0.$$

$\exists(i) (\exists(i_1, \dots, i_n) t \wedge \neg q)$ est consistant avec f en A , donc, en appliquant le lemme 1 pour la fonction

$$h: \text{dom}(f) \cup \{ \exists(i) (\exists(i_1, \dots, i_n) t \wedge \neg q) \} \rightarrow B$$

$$h|_{\text{dom}(f)} = f; h(\exists(i) (\exists(i_1, \dots, i_n) t \wedge \neg q)) = 1$$

il résulte $\sum_1 u_1 \wedge \dots \wedge \sum_m u_m = 0$. Cette contradiction implique la consistance de $r \wedge \exists(i)(p \wedge \neg q) = \exists(i)(s \wedge \neg q)$ avec f en $A(K)$. La propriété $(\pi \pi)$ est démontrée.

On peut déduire qu'il existe une extension riche et dénombrable A^π de A tel que A^π vérifie la condition $(\pi \pi)$. Cette affirmation est donnée par l'observation que la construction de Halmos pour les extensions riches preserve la condition $(\pi \pi)$.

Considérons un ensemble dénombrable $K = \{k_1, k_1, \dots\}$ des constantes de A^π tel que chaque élément de A^π a un témoin ([2], p.104) $J \subset K$. Par le lemme 2, f est consistante en A^π . Nous allons définir par l'induction suite croissante des fonctions partielles $f_0 = f \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, consistantes (en A^π).

Nous avons $\exists(i) E(i, k_1) = 1$ (voir [2], 10.15), donc

$\exists(i)E(i, k_1)$ est consistant avec f_0 . En utilisant $(\pi \pi)$, il existe $q_1 \in \Sigma(i)$, tel que $\exists(i)(E(i, k_1) \wedge \neg q_1)$ est consistant avec f_0 .

Mais $k_1(i_1) \neg q_1 = \exists(i)(\neg q_1 \wedge E(i, k_1))$ (voir [2], 10.18), donc il existe $f_1: \text{dom}(f_0) \cup \{k_1(i_1) \neg q_1\} \rightarrow B$, $f_1|_{\text{dom}(f_0)} = f$ et $f_1(k_1(i_1) \neg q_1) = 1$ tel que f_1 est consistante.

Supposons qu'il existent $q_1, \dots, q_n \in \Sigma(i)$ tel que la fonction partielle

$$f_n: \text{dom}(f) \cup \{k_1(i_1) \neg q_1, \dots, k_n(i_n) \neg q_n\} \rightarrow B$$

$$f_n|_{\text{dom}(f_n)} = f; f_n(k_t(i) \neg q_t) = 1, t = 1, \dots, n$$

est consistante. En appliquant $(\pi \pi)$ il existe $q_{n+1} \in \Sigma(i)$, tel que $\bigwedge_{t=1}^n k_t(i) \neg q_t \wedge \exists(i)(E(i, k_{n+1}) \wedge \neg q_{n+1})$ est consistant avec f . Il en résulte l'existence d'une fonction partielle consistante

$$f_{n+1}: \text{dom}(f_n) \cup \{k_{n+1}(i) \neg q_{n+1}\} \rightarrow B$$

tel que $f_{n+1}|_{\text{dom}(f_n)} = f_n$ et $f_{n+1}(k_{n+1}(i) \neg q_{n+1}) = 1$.

Considérons la fonction partielle $g = \bigcup_{n < \omega} f_n$. Par le lemme 1 il résulte que g est consistante, donc il existe un morphisme $h : E(A^\pi) \rightarrow B$ tel que $h|_{\text{dom}(g)} = g$. Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur K :

$$k \sim k' \iff h(E(k, k')) = 1.$$

$X = K/\sim$ et $\hat{k}$ la classe d'équivalence de $k \in K$. Pour tout $x \in K^I$ nous désignerons par $\hat{x}$ la fonction $I \rightarrow X$ définie par $i \mapsto \hat{x}(i)$.

Soit $\Psi : A^\pi \rightarrow F(X^I, B)$ la fonction donnée par

$$\Psi(p)(\hat{x}) = h(x_{i_1}(i_1) \dots x_{i_n}(i_n)p),$$

où $p \in A^\pi$, $x \in X^I$ et $\{i_1, \dots, i_n\}$ est un support de p . Nous allons montrer que cette définition est correcte. Il suffit de voir que:

$$k, k' \in K, h(E(k, k')) = 1 \implies h(k(i)p) = h(k'(i)p).$$

En effet, nous avons par le lemme 10.18 de [2]:

$$\begin{aligned} k(i)p \wedge E(k, k') &= k(i)(p \wedge E(i, k')) \\ &= \exists(i)(p \wedge E(i, k) \wedge E(i, k')) \\ &= k'(i)p \wedge E(k, k') \end{aligned}$$

En appliquant le morphisme h on obtient $h(k(i)p) = h(k'(i)p)$.

Il est évidemment que Ψ est un morphisme booléen. Nous allons montrer que Ψ preserve les opérations polyadiques.

Soit $p \in A^\pi$, $\sigma \in I^I$ et $x \in X^I$. Si $\{i_1, \dots, i_n\}$ est un support de p nous avons par [2], p.103 :

$$\begin{aligned} \Psi(S(\sigma)p)(\hat{x}) &= h(x_{\sigma(i_1)}(\sigma(i_1)) \dots x_{\sigma(i_n)}(\sigma(i_n))p) \\ &= h((x\sigma)_{i_1}(i_1) \dots (x\sigma)_{i_n}(i_n)p) \\ &= \Psi(p)(\hat{x\sigma}) = S(\sigma)\Psi(p)(\hat{x}). \end{aligned}$$

Supposons que $\{i, i_1, \dots, i_n\}$ est un support de p . En utilisant la régularité des constantes et la richesse de A^π on obtient

$$\begin{aligned}\Psi(\exists(i)p)(x) &= h(x_{i_1}(i_1) \dots x_{i_n}(i_n) \exists(i)p) \\ &= h(\exists(i) x_{i_1}(i_1) \dots x_{i_n}(i_n)p) \\ &= \bigvee \{h(y(i) x_{i_1}(i_1) \dots x_{i_n}(i_n)p) \mid y \in K^I, y|_{I-\{i\}} = x|_{I-\{i\}}\} \\ &= x|_{I-\{i\}} \\ &= \bigvee \{\Psi(p)(\hat{y}) \mid \hat{y}|_{I-\{i\}} = \hat{x}|_{I-\{i\}}\} = \exists(i)\Psi(p)(\hat{x}).\end{aligned}$$

Pour $i, j \in I$, $\hat{x} \in X^I$ nous avons

$$\Psi(E(i, j))(\hat{x}) = h(x_i(i) x_j(j) E(i, j)) = h(E(x_i, x_j))$$

donc

$$E_0(i, j)(\hat{x}) = 1 \iff \hat{x}_i = \hat{x}_j \iff h(E(x_i, x_j)) = 1 \iff \Psi(E(i, j))(\hat{x}) = 1$$

Il résulte que Ψ preserve l'égalité. Soit maintenant

$\Phi = \Psi|_A$. Pour tout $n < \omega$ et $\hat{x} \in X^I$ tel que $\hat{x}_i = \hat{k}_n$ nous avons

$$\Phi(\neg q_n)(\hat{x}) = h(k_n(i) \neg q_n) = 1$$

donc Φ omet le type $\sum(i)$. Si $p \in \text{dom}(f) \subseteq E(A^\pi)$, alors $\Phi(p)(\hat{x}) = h(p) = f(p)$ pour tout $\hat{x} \in X^I$.

Q.E.D.

Soit L un langage dénombrable du calcul des prédicats du premier ordre avec égalité ayant un ensemble non-vide des constantes. Dans tout ce qui suit, T désigne une théorie de L et A_T l'algèbre de Lindenbaum-Tarski de L (modulo T).

Si $\sum(x)$ est un type du langage et B une algèbre de Boole complète, alors un modèle B -valué M omet le type $\sum(x)$ si pour tout $a \in M$ il existe $\varphi(x) \in \sum(x)$ tel que $\|\neg\varphi(a)\|_M = 1$. Un type $\sum(x)$ de L donne un type $\sum(x)$ de A_T .

Corollaire 1. Soit $f: \text{dom}(f) \subseteq E(A_T) \longrightarrow B$ une fonction partielle consistante qui omet $\sum(x)$. Alors il existe un modèle B-valué M tel que

- (i) M omet le type $\sum(x)$
- (ii) $\models \varphi \models_M = f(\varphi^*)$, pour tout $\varphi^* \in \text{dom}(f)$.

Remarques. 1. Pour $B = \{0,1\}$ on obtient le théorème d'omission de types formulé dans les algèbres polyadiques [3].

2. En utilisant la démonstration du théorème 1 il en résulte une forme polyadique du théorème de complétude de Shor (pour les modèles booléens) ([6],[9]).

Corollaire 2. Soit $(A,I,S,\exists,E)$ une algèbre polyadique localement finie, de degré infini, B une algèbre de Boole complète et $f: \text{dom}(f) \subseteq E(A) \longrightarrow B$ une fonction partielle consistante.

Alors il existe une B-représentation $\Phi: A \rightarrow F(X^I, B)$ tel que $\Phi(p)(x) = f(p)$ pour tout $p \in \text{dom}(f)$ et $x \in X^I$.

Bibliographie

- [1]. C.C.Chang, H.J.Keisler, Model theory, North-Holland, 1973.
- [2]. A.Daigneault, Théorie des modèles en logique mathématique, Les Presses de l'Université de Montréal, 1967.
- [3]. G.Georgescu, Asupra unei versiuni poliadice a teoremei de omite a tipurilor, St.Cerc.Mat., 32,5,1980, 505-515.
- [4]. P.R.Halmos, Algebraic logic, Chelsea, 1962.
- [5]. P.R.Halmos, Lectures on Boolean algebras, Van-Nostrand, 1963.
- [6]. G.Loullis, Sheaves and Boolean valued model theory, J.Symb. Logic, vol. 44,3, 1979, 153-183.
- [7]. J.D.Monk, Omitting types algebraically, Ann.Sci.Univ.Clermont, Fasc.16, 1978, 101-105.
- [8]. J.D.Monk, Some problems in algebraic logic, Colloque international de logique de Clermont-Ferrand, Éditions de CNRS, 1977.

- [9] A. Shorb, Contributions to Boolean valued model theory,
Ph.D. Thesis, Univ. of Minnesota, 1969.

Institut de Mathématiques

Str. Academiei 14

Bucarest, Roumanie.

