

INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250 3638

SURFACES DE RIEMANN NON ORIENTABLES

par

Ilie BÂRZA

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No.21/1981

libr 17443

BUCURESTI

SURFACES DE RIEMANN NON ORIENTABLES

par

Ilie BÂRZA*)

March 1981

*) Université de Bucarest, Faculté des Mathématiques,
Str. Academiei 14, Bucarest, Roumanie.

INTRODUCTION

Le but principal de ce travail est d'indiquer une théorie naturelle des fonctions et des formes différentielles sur les surfaces de Riemann non orientables.

Exceptant le théorème de Riemann-Roch sur les surfaces de Riemann non orientables compactes, présenté dans le dernier paragraphe, toutes les autres questions font partie de la thèse de l'auteur, soutenue le 17 Janvier, 1981, à Bucarest.

A la différence du cas classique des surfaces de Riemann orientables, qui a formé l'objet d'une vaste littérature et s'est cristallisé par l'œuvre de H.Weyl comme un premier exemple de variété dotée avec une structure analytique complexe, le cas des surfaces non orientables a été étudié beaucoup moins.

Mentionné par Felix Klein, il a été rigoureusement défini par O. Teichmüller ([19] , p.7) et considéré par D.Spencer et M. Schiffer ([14]). Une première monographie concernant ce cas est publiée par N.L.Alling et N.Greenleaf ([3]) qui introduisent les termes "carte dianalytique", "atlas dianalytique" et le concept de surface de Klein. Petit à petit ce domaine est devenu de nouveau actuel. On doit remarquer que S.Stoïlow, le parent du concept de surface de Riemann de recouvrement, a consacré au cas non orientable l'un de ses derniers travaux, soulignant l'importance de la considération dans une théorie globale des deux cas : orientable et nonorientable.

Les questions présentées dans ce travail s'encadrent dans cette direction.

N.L.Alling et N.Greenleaf définissent dans la monographie citée les notions de fonction méromorphe et différentielle méromorphe sur les surfaces de Klein. A ces notions on peut faire les objections suivantes:

- les fonctions méromorphes ne sont plus de fonctions dans le sens usuel du mot, mais des classes d'équivalence de familles de fonctions attachées aux atlas dianalytiques.
- les fonctions constantes sont des fonctions méromorphes si et seulement si les constantes sont réelles.
- les formes différentielles méromorphes ne sont plus de formes dans le sens accepté dans la géométrie différentielle (c'est-à-dire d'applications définies sur la surface et ayant les valeurs dans les espaces cotangents complexifiés), mais, pareils aux fonctions, elles sont des classes d'équivalence de familles de fonctions, vérifiant quelques relations de cohérence, attachées aux atlas dianalytiques.
- les différentielles méromorphes ne sont pas intégrables sur les courbes de la surface; l'intégrale curviligne d'une telle forme peut être définie si et seulement si la surface est orientable.

Ayant en vue ces choses, il paraît que dans le cas non orientable le concept de méromorphe n'est plus un concept naturel (au moins du point de vue de la théorie des fonctions analytiques).

Dans ce travail on indique des fonctions et des formes différentielles qui ont un comportement naturel et qui imitent très bien les fonctions et les formes méromorphes du cas orientable. Dans le premier paragraphe sont présentées les questions fondamentales nécessaires dans le travail.

Ensuite, dans le deuxième paragraphe, on classe d'abord les surfaces de Riemann non orientables en trois catégories - elliptiques, paraboliques et hyperboliques - d'après leurs revêtements universels et, après ça, on étudie en détail les surfaces elliptiques et paraboliques, donnant aussi un théorème qui caractérise les tores susceptibles d'être de revêtements dianalytiques à deux feuilles pour de bouteilles de Klein.

Dans le troisième paragraphe on introduit et étudie le concept de fonction de type méromorphe sur les surfaces de Riemann non orientables. Dans l'ensemble de ces fonctions, on introduit une structure naturelle de corps, corps qui contient un sous corps isomorphe au corps des nombres complexes et qui, lui aussi, est isomorphe au corps de fonctions méromorphes sur le revêtement double orientable de la surface en étude. Ce sont deux faits pour lesquels le concept introduit est naturel.

Dans le quatrième paragraphe, on introduit le concept de forme différentielle de type méromorphe et on définit l'intégrale des formes différentielles de classe C^0 sur les courbes différentiables par morceaux.

Une nouvelle définition pour les fonctions de type méromorphe est donnée et on établit l'équivalence des deux définitions. Ensuite, l'ensemble des formes de type méromorphe est organisé comme espace vectoriel sur le corps des fonctions de type méromorphe; cet espace a la dimension 1.

Ensuite on définit l'ordre d'une différentielle de type méromorphe dans un point, on établit une formule de type Cauchy pour le calcul des résidus ($\text{Rez}(\omega; P) = a_{-1} - b_{-1}$) et, finalement, on donne le théorème global de Cauchy des résidus, et ses conséquences.

Dans le dernier paragraphe, on donne le théorème de Riemann-

Roch pour les surfaces de Riemann non orientables compactes.

M^{me} Prof. Cabiria Andreian Cazacu, mon maître de doctorat, m'a introduit dans ce domaine d'activité et a surveillé jusqu'à présent toute mon activité de recherche. Je lui présente, à cette occasion, mes remerciements les plus profonds.

Les professeurs N. Boboc, K. Telemen (de l'Université de Bucarest) et P. Caraman (de l'Université "Al. Ioan-Cuza" Iassy) ont eu l'amabilité de lire ce travail, ils ont fait les corrections nécessaires et m'ont donné des suggestions très importantes concernant le contenu et le mode de présentation.

Je remercie vivement tous ceux qui m'ont conseillé et qui ont été à côté de moi.

Bucarest, 17 Mars, 1981

Ilie Bârză

1. SURFACES DE RIEMANN, SURFACES DE KLEIN

1.1. Soit X une surface. Une carte sur X est un triplet (U, φ, ψ) où $U =$ ouvert de X , $V =$ ouvert du plan complexe \mathbb{C} et $\varphi : U \longrightarrow V$ est un homéomorphisme.

Si $P \in U$ et si $\varphi(P) = z$, on va dire que (U, φ, ψ) est une carte autour de P ; z est nommé paramètre local ou coordonnée locale autour de P .

Si (U, φ, ψ) est une carte telle que $V = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$, alors elle est nommée disque paramétrique centré dans $P_0 = \varphi^{-1}(z_0)$.

1.2. Une famille $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ de cartes sur X est nommée atlas sur X si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Deux cartes $(U_1, \varphi_1, \psi_1), (U_2, \varphi_2, \psi_2)$ sont appelées analytiquement cohérentes si: a) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou bien b) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ et $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ est analytique.

Deux cartes $(U_1, \varphi_1, \psi_1), (U_2, \varphi_2, \psi_2)$ sont appelées dianalytiquement cohérentes si: a) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou bien b) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ et $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ est analytique ou antianalytique sur chaque composante connexe de $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$.

L'atlas \mathcal{A} s'appelle atlas analytique (respectivement dianalytique) si chaque paire de cartes de \mathcal{A} est formée par des cartes analytiquement (respectivement dianalytiquement) cohérentes

([3] , page 5).

Donc, conformément à cette définition, un atlas analytique est un cas particulier d'atlas dianalytique. Pour marquer ce fait, un atlas dianalytique qui n'est pas analytique sera nommé atlas dianalytique effectif.

Soit \mathcal{A} un atlas dianalytique sur X . La paire (X, \mathcal{A}) sera nommée prévariété (ou présurface) de Riemann à deux dimensions.

Une partie \mathcal{A}_1 de \mathcal{A} est nommée sousatlas si \mathcal{A}_1 est encore un atlas sur X .

La prévariété de Riemann (X, \mathcal{A}) s'appelle orientable s'il existe \mathcal{A}_1 un sousatlas analytique de \mathcal{A} . Sinon, (X, \mathcal{A}) s'appelle prévariété non orientable.

1.3. Soit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ des atlas sur X . On va dire que \mathcal{A}_1 est analytiquement équivalent à \mathcal{A}_2 et on va noter $\mathcal{A}_1 \sim_a \mathcal{A}_2$ si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est analytique. Evidemment, dans ce cas \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont d'atlas analytiques.

Analogiquement, deux atlas \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont nommés dianalytiquement équivalents et on note $\mathcal{A}_1 \sim_d \mathcal{A}_2$ si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est atlas dianalytique. Si $\mathcal{A}_1 \sim_a \mathcal{A}_2$ il résulte $\mathcal{A}_1 \sim_d \mathcal{A}_2$.

Les relations \sim_a et \sim_d sont des relations d'équivalence dans l'ensemble des atlas sur X .

Si \mathcal{A} est un atlas analytique (resp. dianalytique), on note $\hat{\mathcal{A}}^a$ la classe d'équivalence de \mathcal{A} par rapport à \sim_a :

$$\hat{\mathcal{A}}^a = \{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \sim_a \mathcal{A} \}$$

De même façon, $\hat{\mathcal{A}}^d = \{ \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \sim_d \mathcal{A} \}$ est la classe d'équivalence par rapport à \sim_d de \mathcal{A} .

Si \mathcal{A} est atlas analytique, $\hat{\mathcal{A}}^a$ et $\hat{\mathcal{A}}^d$ existe toutes les deux, mais, si \mathcal{A} est atlas dianalytique effectif, $\hat{\mathcal{A}}^a$ n'a

pas de sens. Dans ce cas on va considérer $\hat{\mathcal{A}}^a = \emptyset$. Donc, dans toutes les deux situations, $\hat{\mathcal{A}}^a \subset \hat{\mathcal{A}}^d$.

1.4. Soit \mathcal{A} un atlas dianalytique sur X et soit $\hat{\mathcal{A}}^d = \bigcup_{\mathcal{A}_1 \in \hat{\mathcal{A}}^d} \mathcal{A}_1$. $\hat{\mathcal{A}}^d$ est atlas dianalytique maximal sur X , dianalytiquement équivalent à \mathcal{A} ; plus exactement, $\hat{\mathcal{A}}^d \sim_d \mathcal{A}$ et pour chaque $\mathcal{A}_1 \in \hat{\mathcal{A}}^d$ on a $\mathcal{A}_1 \subset \hat{\mathcal{A}}^d$.

$\hat{\mathcal{A}}^d$ est l'unique atlas dianalytique maximal qui contient l'atlas \mathcal{A} .

Définition. La prévariété de Riemann (X, \mathcal{A}) s'appelle surface de Klein si \mathcal{A} est un atlas dianalytique maximal sur X .

1.5. Soit \mathcal{A} un atlas analytique sur X et soit $\hat{\mathcal{A}}^a = \bigcup_{\mathcal{A}_1 \in \hat{\mathcal{A}}^a} \mathcal{A}_1$. $\hat{\mathcal{A}}^a$ est un atlas analytique maximal qui contient l'atlas \mathcal{A} . De même, $\hat{\mathcal{A}}^a$ est l'unique atlas analytique qui contient l'atlas \mathcal{A} .

Définition. La prévariété de Riemann (X, \mathcal{A}) s'appelle surface de Riemann si \mathcal{A} est un atlas analytique maximal sur X .

1.6. Définition. (Teichmüller). La prévariété de Riemann (X, \mathcal{A}) s'appelle surface de Riemann non orientable si \mathcal{A} est un atlas dianalytique effectif et maximal sur X .

En conformité avec cette terminologie, les surfaces de Riemann (la définition du 1.5) doivent évidemment être nommées surfaces de Riemann orientables; tout de même, on va utiliser généralement le nom classique de surface de Riemann.

1.6. Soit (U, φ, V) une carte sur X . On note par \bar{V} l'ensemble $\{\bar{z} \mid z \in V\}$, où \bar{z} est le conjugué du z , et par $\bar{\varphi}$ la fonction conjuguée de φ : $\bar{\varphi}(p) = \overline{\varphi(p)}$.

$\bar{\varphi}: U \longrightarrow \bar{V}$ est, évidemment un homéomorphisme et, par conséquent, $(U, \bar{\varphi}, \bar{V})$ est une carte sur X .

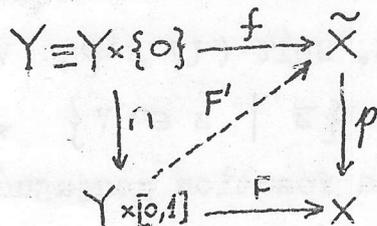
On va nommer $(U, \bar{\varphi}, \bar{v})$, la carte conjuguée à (U, φ, v) . Ces deux cartes sont, évidemment, dianalytiquement cohérentes. Si \mathcal{A} est l'atlas $\{(U_i, \varphi_i, v_i)\}_{i \in I}$, on note par $\bar{\mathcal{A}}$ l'atlas $\{(U_i, \bar{\varphi}_i, \bar{v}_i)\}_{i \in I}$. Evidemment, $\mathcal{A} \sim_d \bar{\mathcal{A}}$ mais $\mathcal{A} \not\sim_a \bar{\mathcal{A}}$.

1.7. Soit (X, \mathcal{A}) une prévariété orientable et supposons que \mathcal{A} est atlas analytique. Dans ce cas, évidemment, $\bar{\mathcal{A}}$ est aussi un atlas analytique. En particulier, si \mathcal{A} est un atlas maximal, $\bar{\mathcal{A}}$ est aussi un atlas maximal. Donc (X, \mathcal{A}) et $(X, \bar{\mathcal{A}})$ sont des surfaces de Riemann. Les deux surfaces de Riemann (X, \mathcal{A}) , $(X, \bar{\mathcal{A}})$ sont les deux orientations possibles de la surface X . La surface de Riemann (X, \mathcal{A}) (ou bien $(X, \bar{\mathcal{A}})$) sera nommée la surface de Riemann sous-jacente, de la surface de Klein (X, \mathcal{A}^d) . Evidemment $\mathcal{A} \cup \bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}^d$.

1.8. Soit les surfaces \tilde{X} , X et $p : \tilde{X} \rightarrow X$ une fonction continue. Cette fonction s'appelle projection de recouvrement ou revêtement si quelque soit le point $x \in X$, il existe U_x un voisinage ouvert de x tel que $p^{-1}(U_x)$ est une réunion disjointe d'ensembles ouverts \tilde{U}_x et $p|_{\tilde{U}_x} : \tilde{U}_x \rightarrow U_x$ est homéomorphisme. On dit que U_x est régulièrement recouvert par p .

1.9. L'application continue $p : \tilde{X} \rightarrow X$ s'appelle fibration si pour n'importe quelles fonctions continues

$f : Y \rightarrow \tilde{X}$, $F : Y \times [0,1] \rightarrow X$
 (Y étant un espace topologique)
 telles que $(p \circ f)(y) = F(y,0) \forall y \in Y$,
 il existe $F' : Y \times [0,1] \rightarrow \tilde{X}$



continue telle que $F = p \circ F'$ et $F'(y, 0) = f(y) \forall y \in Y$.

1.10. La fibration $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ s'appelle fibration avec relèvement unique des chemins si pour chaque chemins

$\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 : I \longrightarrow \tilde{X}$, $\tilde{\omega}_1(0) = \tilde{\omega}_2(0)$ et $p \circ \tilde{\omega}_1 = p \circ \tilde{\omega}_2$ on a $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$.

Dans le cas des surfaces, a lieu le théorème suivant:

Théorème: $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ est une projection de recouvrement si et uniquement si elle est une fibration avec relèvement unique des chemins.

Les fibrations avec relèvement unique des chemins sont caractérisées par le fait qu'il n'existe pas de fibres contenant de chemins non constants.

1.11. Si $x_0 \in X$, on note $\pi(X, x_0)$ le groupe fondamental de X en x_0 . Si $\omega : [0, 1] \longrightarrow X$ est un chemin tel que $\omega(0) = \omega(1) = x_0$, on note $[\omega]$ la classe d'homotopie de ω .

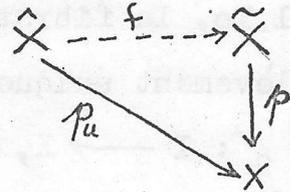
Si $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ est une projection de recouvrement et si $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, on note $p_{\#}$ l'homomorphisme naturel $p_{\#} : \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \pi(X, x_0)$ défini par $p_{\#}([\delta]) = [p \circ \delta]$.

On sait que $p_{\#}$ est un homomorphisme injectif. En particulier

$\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ est isomorphe à $p_{\#} \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

1.12. Soit la surface X , $x_0 \in X$ et soit H un sous-groupe de $\pi(X, x_0)$. Dans ce cas, il existe une surface \tilde{X} et une projection de revêtement $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ telle que $p_{\#} \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$ ($p(\tilde{x}_0) = x_0$). En particulier, si H est le groupe nul, on note par \hat{X} la surface correspondante. \hat{X} est nommée la surface universelle de recouvrement de X .

Avec ces notations, quelle que soit la projection de recouvrement $p : \tilde{X} \rightarrow X$, il existe une projection de recouvrement $f : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ telle que $p_u = p \circ f$ où $p_u : \hat{X} \rightarrow X$ est le revêtement universel de X .



1.13. Soit p une projection de recouvrement, $G(\tilde{X} | X) = \{ f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \mid f \text{ homéomorphisme, } p \circ f = p \}$.

Les éléments de $G(\tilde{X} | X)$ sont nommés des transformations de revêtement de p . Si deux éléments de $G(\tilde{X} | X)$ ont la même valeur dans un point $\tilde{x} \in \tilde{X}$, elles sont identiques. Donc, la correspondance $f \rightarrow f(\tilde{x}_0)$ est une injection entre $G(\tilde{X} | X)$ et $p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$.

Théorème. $G(\hat{X} | X)$ est isomorphe au groupe fondamental de X .

Pour les propriétés des revêtements, énoncées plus haut, le lecteur peut consulter [19], le 2^{ème} chapitre.

1.14. Soit \tilde{X}, X des surfaces, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement et \mathcal{A}_1 un atlas dianalytique sur X . Si $x \in X$ et si U_x est un voisinage ouvert de x régulièrement recouvert par p , évidemment, chaque autre voisinage ouvert W_x de x , $W_x \subseteq U_x$, est encore régulièrement recouvert par p . En utilisant cette observation, on va indiquer sur X un atlas dianalytique \mathcal{A} tel que $\mathcal{A} \sim_d \mathcal{A}_1$ et \mathcal{A} est formé par des disques paramétriques (U, φ, V) où chaque U est régulièrement recouvert par p .

Soit $P_0 \in X$ et (U, φ, V) une carte de \mathcal{A}_1 , autour de P_0 .

Soit U' un voisinage ouvert de P_0 , régulièrement recouvert par p .

Donc $W = U \cap U'$ est un voisinage ouvert de P_0 , régulièrement recouvert par p . Si $\varphi(P) = z$ ($\varphi(P_0) = z_0 \in V$) est paramètre local autour de P_0 , il existe $r_{P_0} > 0$ tel que $V_{P_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r_{P_0}\} \subseteq V \cap \varphi(W) = \varphi(W)$.

Soit $U_{P_0} = \varphi^{-1}(V_{P_0})$. Evidemment, $(U_{P_0}, \varphi|_{U_{P_0}}, V_{P_0})$ est un disque paramétrique centré dans le point P_0 , U_{P_0} est régulièrement recouvert par p et

$$(*) \mathcal{A}_1 \sim_d \mathcal{A}_1 \cup \{(U_{P_0}, \varphi|_{U_{P_0}}, V_{P_0})\}.$$

Nous faisons la construction précédente pour chaque point $P \in X$ et on obtient l'atlas $\mathcal{A} = \{(U_P, \varphi|_{U_P} = \varphi_P, V_P)\}_{P \in X}$ qui est, à cause de (*), dianalytiquement équivalent à \mathcal{A}_1 .

En particulier, si \mathcal{A}_1 est un atlas analytique alors \mathcal{A} est un atlas analytique.

1.15. Considérons maintenant l'atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i, V_i)\}_{i \in I}$ où chaque U_i est régulièrement recouvert par p . (En particulier, les cartes (U_i, φ_i, V_i) peuvent être supposées des disques paramétriques).

Soit $\tilde{P} \in \tilde{X}$, $P = p(\tilde{P})$, $(U, \varphi, V) \in \mathcal{A}$ une carte autour de P . Soit \tilde{U} un sous ensemble ouvert du $p^{-1}(U)$ qui contient le point \tilde{P} et $p|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \longrightarrow U$ est un homéomorphisme. Soit $\psi = \varphi \circ p|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \longrightarrow V = \varphi(p(\tilde{U}))$. Evidemment (\tilde{U}, ψ, V) est une carte sur \tilde{X} autour de \tilde{P} . Soit

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{U}, \psi, V)\} \cup \{(U, \varphi, V) \in \mathcal{A}\}.$$

On va démontrer que $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas dianalytique sur \tilde{X} et, donc, $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}})$ est une prévariété de Riemann.

(Soit, après cela, $\tilde{\mathcal{B}}$ l'atlas dianalytique maximal qui contient $\tilde{\mathcal{A}}$; $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}})$ est une surface de Klein et on va nommer $\tilde{\mathcal{B}}$ la structure soulevée sur \tilde{X} par p^{-1}).

Soit $(\tilde{U}_1, \psi_1, \nu_1), (\tilde{U}_2, \psi_2, \nu_2) \in \tilde{\mathcal{A}}$. si $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$, les deux cartes sont dianalytiquement cohérentes. Supposons donc $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 \neq \emptyset$. (Fig.1).

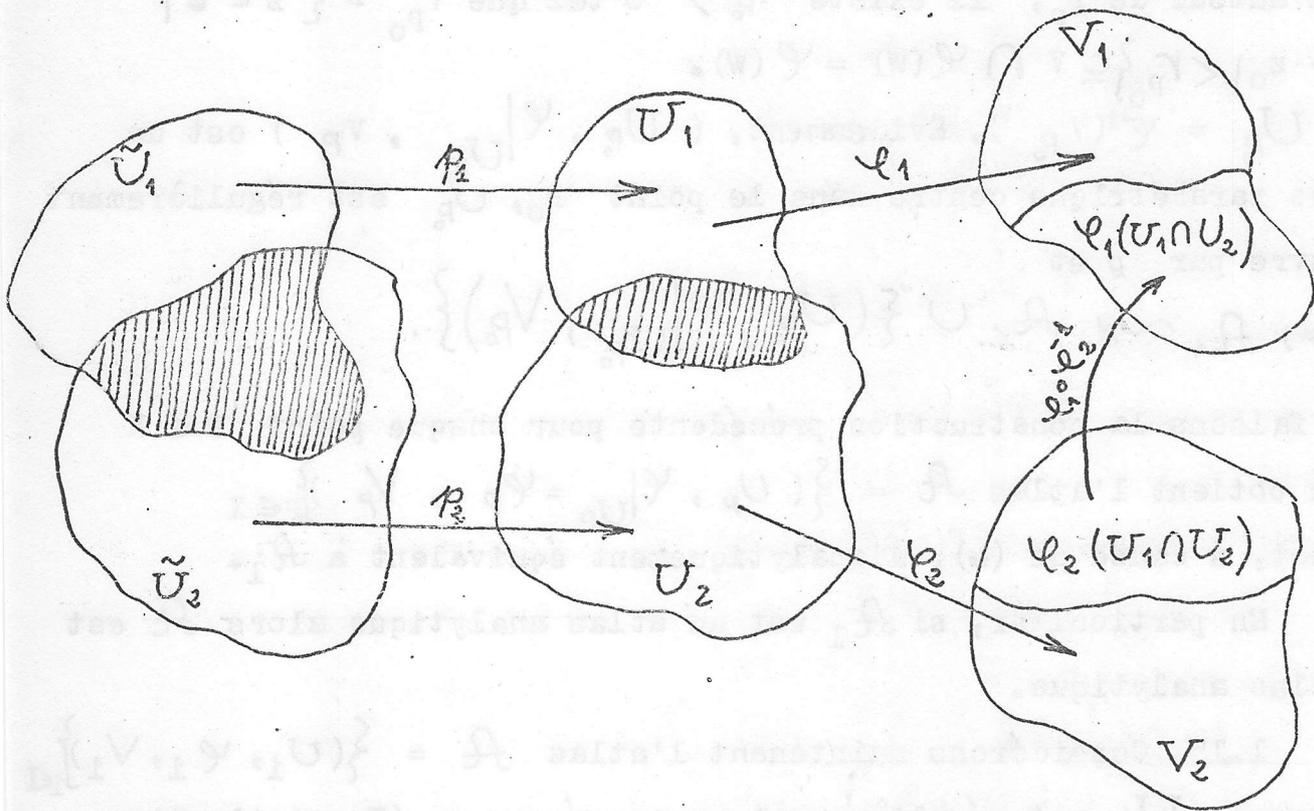


Fig.1.

Pour $k = 1, 2$, soit $p_k = p|_{\tilde{U}_k} : \tilde{U}_k \rightarrow U_k$, $\psi_k = \psi_k \circ p_k : \tilde{U}_k \rightarrow V_k$

Soit \tilde{U} une composante connexe de $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ et soit $U = p(\tilde{U}) (= p_1(\tilde{U}) = p_2(\tilde{U}) \subseteq U_1 \cap U_2)$. U est une composante connexe de $U_1 \cap U_2$. $\psi_k(\tilde{U}) = (\psi_k \circ p_k)(\tilde{U}) = \psi_k(U)$

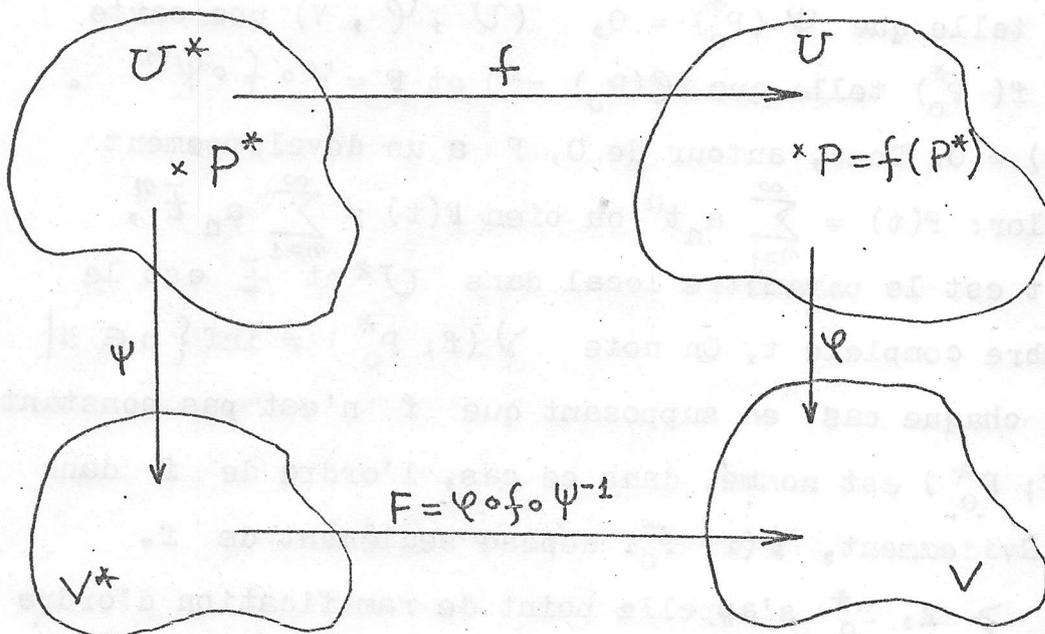
$$\begin{aligned} \psi_1 \circ \psi_2^{-1} \Big|_{\psi_2(\tilde{U})} &= (\varphi_1 \circ \rho \Big|_{\tilde{U}_1}) \circ (\varphi_2 \circ \rho \Big|_{\tilde{U}_2})^{-1} \Big|_{\psi_2(\tilde{U})} = \\ &= (\varphi_1 \circ \rho \Big|_{\tilde{U}_1}) \circ (\rho^{-1} \circ \varphi_2^{-1}) \Big|_{\varphi_2(U)} = \varphi_1 \circ (\rho \Big|_{\tilde{U}_1} \circ \rho^{-1}) \circ \varphi_2^{-1} \Big|_{\varphi_2(U)} = \\ &= \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \Big|_{\varphi_2(U)} \end{aligned}$$

Mais, $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \Big|_{\varphi_2(U)} : \varphi_2(U) \rightarrow \varphi_1(U)$ est conforme ou anticonforme.

Donc, $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ est conforme ou anticonforme sur chaque composante connexe du $\psi_2(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2)$; par conséquent, les deux cartes $(\tilde{U}_1, \psi_1, V_1), (\tilde{U}_2, \psi_2, V_2)$ sont dianalytiquement cohérentes.

1.16. Soit $(Y, \mathcal{B}), (X, \mathcal{A})$ des surfaces de Klein.

L'application continue $f : Y \rightarrow X$ s'appelle morphisme de surfaces



de Klein (ou bien revêtement riemannéen) si quelque soit $P^* \in Y,$

(U^*, ψ, v^*) une carte autour de P^* et (U, φ, V) une carte autour de P , l'application $F = \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ est une application dianalytique c'est-à-dire elle est analytique ou antianalytique sur chaque composante connexe de son ensemble de définition.

(En particulier, si l'ensemble de définition de F est connexe, F doit être analytique ou antianalytique).

Observation. La fonction précédente F doit être entendue en effet la fonction suivante:

$$F = \varphi \Big|_{U \cap f(U^*)} \circ f \Big|_{U^* \cap f^{-1}(U)} \circ \psi^{-1} \Big|_{\psi(U^* \cap f^{-1}(U))}$$

Toutefois, on va accepter la première forme pour l'écriture de F .

1.17. Si (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) sont des surfaces de Klein et si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme, on va noter ce fait par $f : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$.

Soit, dans ce contexte, $P_0^* \in Y$, (U^*, ψ, v^*) une carte autour de P_0^* telle que $\psi(P_0^*) = 0$, (U, φ, V) une carte autour de $P_0 = f(P_0^*)$ telle que $\varphi(P_0) = 0$ et $F = \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$.

Evidemment, $F(0) = 0$. Donc, autour de 0, F a un développement en série de Taylor: $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ ou bien $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{t}^n$,

où $\psi(P^*) = t$ est le paramètre local dans U^* et \bar{t} est le conjugué du nombre complexe t . On note $\nu(f; P_0^*) = \inf \{ n \in \mathbb{N} \mid$

$\{ a_n \neq 0 \}$ dans chaque cas; en supposant que f n'est pas constante

Le nombre $\nu(f; P_0^*)$ est nommé, dans ce cas, l'ordre de f dans le point P_0^* . Evidemment, $\nu(f; P_0^*)$ dépend seulement de f .

Si $\nu(f; P_0^*) \geq 2$, P_0^* s'appelle point de ramification d'ordre

$\nu(f; P_0^*) - 1$ de f . L'ensemble des points de ramification de f

est formé par des points isolés. Si $\nu(f; P_0^*) = 1$, il existe un voisinage U_0^* de P_0^* tel que la restriction de f à U_0^* est un homéomorphisme.

1.18. Deux surfaces de Klein (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) sont dites isomorphes ou dianalytiquement équivalentes s'il existe un homéomorphisme $f: Y \rightarrow X$ tel que f est un morphisme. Dans ce cas, f^{-1} est aussi un morphisme.

1.19. Un exemple de morphisme de surfaces de Klein.

Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement, \mathcal{A} un atlas dianalytique sur X et $\tilde{\mathcal{A}}$ l'atlas correspondant à \mathcal{A} , décrit à 1.15.

Soit $\tilde{P} \in \tilde{X}$, $P = p(\tilde{P})$, (U, φ, ν) une carte de \mathcal{A} autour de P , \tilde{U} un voisinage ouvert de \tilde{P} tel que $p|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$ est un homéomorphisme et U est régulièrement recouvert par p .

Soit $(\tilde{U}_1, \varphi_1 \circ p|_{\tilde{U}_1}, \nu_1) \in \tilde{\mathcal{A}}$; $F = \varphi \circ p \circ (\varphi_1 \circ p|_{\tilde{U}_1})^{-1} = \varphi \circ p \circ p|_{\tilde{U}_1}^{-1} \circ \varphi_1^{-1} = \varphi \circ \varphi_1^{-1} =$ représentation dianalytique. Donc $p: (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ est un morphisme de surfaces de Klein.

Observation. Dans cet exemple les atlas \mathcal{A} et $\tilde{\mathcal{A}}$ n'ont pas été des atlas maximaux. Mais cela n'affecte pas l'affirmation concernant p .

1.20. Deuxième exemple de morphisme de surfaces de Klein.

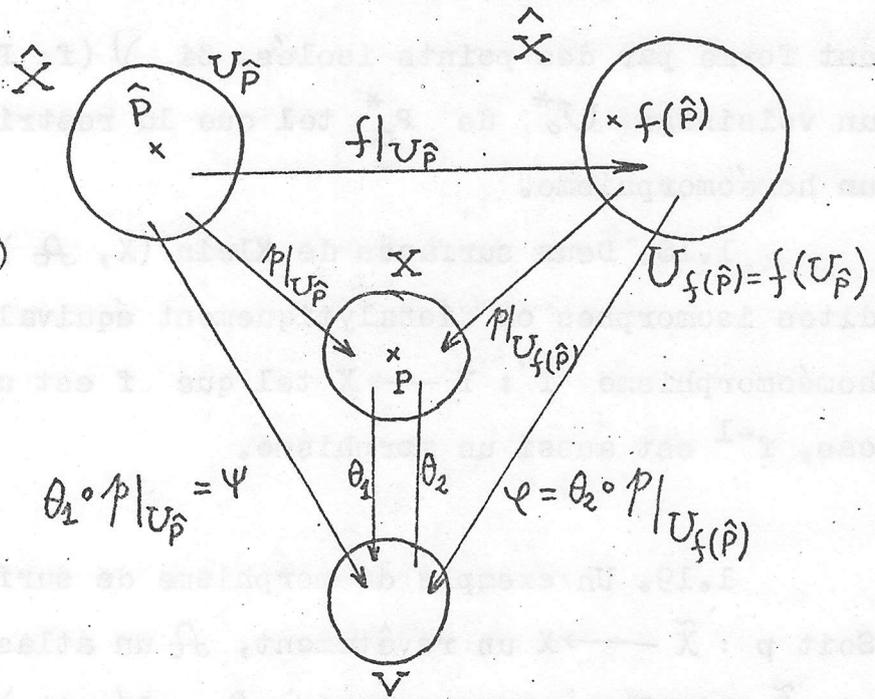
Soit $p: \hat{X} \rightarrow X$ le revêtement universel de X . Soit \mathcal{A} un atlas dianalytique sur X et $\hat{\mathcal{A}}$ l'atlas correspondant à \mathcal{A} , comme dans 1.15.

On sait que \hat{X} est simplement connexe et que sur \hat{X} il existe une seule structure dianalytique, abstraction faite d'une équivalence dianalytique.

Soit $f \in G(\hat{X} | X)$.

On vérifie facilement que $f: (\hat{X}, \hat{A}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{A})$ est un isomorphisme de surfaces de Klein.

(Voir la figure).



1.21. Dans le contexte précédente, (\hat{X}, \hat{A}) est isomorphe soit à la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, soit au plan complexe \mathbb{C} ou bien au demi-plan supérieur H_+ . Dans chaque cas on considère (\hat{X}, \hat{A}) identique avec le type conforme standard mentionné.

Si (\hat{X}, \hat{A}) est la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ et si $f \in G(\hat{X} | X)$ alors f a la forme: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ou $f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$.

Si (\hat{X}, \hat{A}) est le plan complexe \mathbb{C} alors $f(z) = az+b$ ou $f(z) = a\bar{z} + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Si (\hat{X}, \hat{A}) est le demi-plan supérieur H_+ alors $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$ ou $f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc < 0$.

Si \mathcal{A} est un atlas analytique sur X , alors chaque $f \in G(\hat{X} | X)$ est une fonction analytique.

2. SURFACES DE RIEMANN NON ORIENTABLES

ELLIPTIQUES ET PARABOLIQUES

2.1. Dans le cas des surfaces de Riemann (orientables), les surfaces simplement connexes sont classifiées en trois catégories ([15] , p.225):

- elliptiques, si elles sont conformément équivalentes à la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
- paraboliques, si elles sont conformément équivalentes au plan complexe \mathbb{C} .
- hyperboliques, si elles sont conformément équivalentes au demi-plan supérieur H_+ (ou bien, au disque unité).

Ayant en vue cette classification, dans tout ce qui suit, les surfaces de Riemann non orientables seraient nommées elliptiques, paraboliques ou hyperboliques, si leurs surfaces universelles de recouvrement sont, respectivement, elliptiques, paraboliques ou hyperboliques.

En respectant cette nomenclature, dans ce paragraphe nous allons indiquer les surfaces de Riemann non orientables elliptiques et paraboliques en déterminant les groupes discontinus de représentations conformes ou anticonformes sans points fixes de la sphère de Riemann ou du plan complexe, étant connu le fait que chaque surface est isomorphe à la factorisation de sa surface universelle de recouvrement par rapport à la relation d'équivalence donnée par son groupe des transformations de recouvrement.

2.2. Théorème 1. Chaque surface de Riemann non orientable elliptique est isomorphe au plan projectif réel P^2 .

Démonstration. Parce qu'on veut identifier les surfaces elliptiques non orientables, on détermine les sous-groupes \mathcal{H} de

$$\mathcal{C}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\} \text{ tel que les éléments}$$

de \mathcal{H} , différents d'identité, n'ont pas de points fixes et \mathcal{H} contient des éléments anticonformes. Il en résultera aussi que \mathcal{H} est discontinu.

Soit $f \in \mathcal{H}$, $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Sur la sphère, f a au moins un point fixe (solution de l'équation $f(z) = z$); donc f doit être l'identité $1_{\hat{\mathbb{C}}}$ de $\hat{\mathbb{C}}$. Le seul élément conforme de \mathcal{H} est donc $1_{\hat{\mathbb{C}}}$.

Soit $h \in \mathcal{H}$, $h(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$. Parce que $h \circ h$ est élément conforme de \mathcal{H} il résulte que $h^2 = 1_{\hat{\mathbb{C}}}$ c'est-à-dire $h = h^{-1}$.

Si h_1 est un autre élément conforme de \mathcal{H} , $h \circ h_1$ est aussi $1_{\hat{\mathbb{C}}}$. Donc $h_1 = h^{-1} = h$. En conclusion \mathcal{H} contient au plus un élément anticonforme de $\mathcal{C}(\hat{\mathbb{C}})$. Parce que \mathcal{H} est un groupe fini, il est discontinu.

Donc, pour déterminer complètement les sous-groupes \mathcal{H} , on doit trouver tous les éléments anticonformes d'ordre 2 et sans points fixes, f , de $\mathcal{C}(\hat{\mathbb{C}})$.

Si $f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$, $ad - bc = 1$ est tel que $f^2 = 1_{\hat{\mathbb{C}}}$ et l'équation $f(z) = z$ n'a pas de solutions dans $\hat{\mathbb{C}}$, un calcul simple conduit à la conclusion : $d = -\bar{a}$ et $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Donc, $f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{cz - a}$ où $|a|^2 + bc = -1$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

Chaque triplet (a, b, c) de nombres de type précédent détermine un sous-groupe \mathcal{H} .

$$\text{Soit } \mathcal{H}_{(a,b,c)} = \left\{ 1_{\hat{\mathbb{C}}} ; z \longmapsto \frac{a\bar{z} + b}{cz - a} \right\}.$$

Pour terminer la démonstration du théorème 1, on va montrer que

$\mathcal{H}_{(a,b,c)}$ est conjugué, dans $\mathcal{C}(\hat{\mathbb{C}})$ au sous-groupe

$$\mathcal{H}_{(0,-1,1)} = \left\{ 1_{\hat{\mathbb{C}}} ; z \longmapsto -\frac{1}{z} \right\}.$$

Soit $\psi \in \mathcal{C}(\hat{\mathbb{C}})$, $\psi(z) = cz - a$. On vérifie facilement que

$$\psi \mathcal{H}_{(a,b,c)} \psi^{-1} = \mathcal{H}_{(0,-1,1)}.$$

Parce que les groupes $\mathcal{H}_{(a,b,c)}$ et $\mathcal{H}_{(0,-1,1)}$ sont conjugués dans $\mathcal{C}(\hat{\mathbb{C}})$, les surfaces de Riemann (non orientables) $\hat{\mathbb{C}}/\mathcal{H}_{(a,b,c)}$ et $\hat{\mathbb{C}}/\mathcal{H}_{(0,-1,1)}$ sont isomorphes. Mais, sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, les points z et $-\frac{1}{z}$ sont diamétralement opposés et donc $\hat{\mathbb{C}}/\mathcal{H}_{(0,-1,1)}$ est exactement le plan projectif réel \mathbb{P}^2 .

Le théorème est démontré.

2.3. Il existe trois classes de surfaces de Riemann (orientables) ayant la surface universelle de recouvrement parabolique:

- les surfaces conformément équivalentes au plan complexe (= la sphère de Riemann pointée).
- les surfaces conformément équivalentes au plan complexe pointé (= la sphère de Riemann doublement pointée).
- le tore.

Une surface orientable se trouve dans l'une de ces classes selon le groupe des transformations de recouvrement est le groupe nul, un groupe cyclique engendré par une transformation f , $f(z) = z + \omega$, $\omega \neq 0$, et, respectivement, un groupe engendré par deux transformations f_1 et f_2 , $f_1(z) = z + \omega_1$, $f_2(z) = z + \omega_2$, $\Im \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0$.

Pour les surfaces de Riemann nonorientables, on va démontrer le théorème suivant:

Théorème 2. Les surfaces de Riemann nonorientables paraboliques sont: - les surfaces isomorphes au plan projectif réel pointé $P^2 \setminus \{\hat{1}\}$.
- les surfaces isomorphes aux bouteilles de Klein.

On va démontrer en détail ce théorème.

2.3.1. On sait que le groupe des transformations conforme ou anticonformes du plan complexe \mathbb{C} est $\mathcal{C}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az+b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\} \cup \{z \mapsto a\bar{z}+b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$.

Nous rappelons que le sous-groupe $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(\mathbb{C})$ s'appelle discontinu si pour chaque $z \in \mathbb{C}$, l'ensemble $\{h(z) \mid h \in \mathcal{H}\}$ n'a aucun point

d'accumulation dans \mathbb{C} .

On sait que les trois affirmations suivantes sont équivalentes:

- a) \mathcal{G} est discontinu
- b) Il n'existe dans \mathcal{G} aucune suite d'éléments deux-à-deux distincts, qui converge vers l'identité $1_{\mathbb{C}}$.
- c) Il n'existe dans \mathcal{G} aucune suite d'éléments deux-à-deux distincts, qui converge dans \mathbb{C} .

Dans la suite, on va déterminer les sous-groupes \mathcal{G} de $\mathcal{C}(\mathbb{C})$, discontinus et formés par d'éléments sans de points fixes.

Parce qu'on veut identifier les surfaces non orientables paraboliques, supposons que \mathcal{G} contient au moins une transformation anticonforme de \mathbb{C} .

- 2.3.2. Proposition. (i) $f \in \mathcal{G}$, $f(z) = az + b \implies a = 1$.
(ii) $f \in \mathcal{G}$, $f(z) = \alpha \bar{z} + \beta \implies |\alpha| = 1$
et $\omega = \alpha \bar{\beta} + \beta \neq 0$.

Démonstration. (i) Si $a \neq 1$, $z_0 = \frac{b}{1-a}$ est point fixe pour f .
(ii) L'équation $\alpha \bar{z} + \beta = z$ écrite avec les inconnues x et y ($z = x + iy$) est équivalente à un système linéaire

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \quad \text{où le déterminant } \Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

est égal à $1 - |\alpha|^2$. Si $|\alpha| \neq 1$, ce système a une solution et donc f a point fixe. Donc $|\alpha| = 1$.

Pour démontrer que $\omega \neq 0$ on raisonne par absurde. Supposons donc

$$\omega = \alpha \bar{\beta} + \beta = 0. \text{ Soit } z_0 = \frac{\beta}{2}.$$

$f(z_0) = \frac{\alpha\bar{\beta}}{2} + \beta = \frac{\omega + \beta}{2} = \frac{\beta}{2} = z_0$; donc z_0 est point fixe pour f . Mais \mathcal{H} ne contient pas d'éléments avec de points fixes.

Proposition 2. $f, g \in \mathcal{H}$, $f(z) = \alpha_1 \bar{z} + \beta_1$, $g(z) = \alpha_2 \bar{z} + \beta_2$
 $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

Démonstration: Soit $h = f \circ g$. $h(z) = \alpha_1 \overline{\alpha_2 z + \beta_2} + \beta_1$.
Conformément à la proposition 1, $\alpha_1 \overline{\alpha_2} = 1$; donc $\alpha_1 = \alpha_2$
(parce que $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$).

Corollaire. Au sous-groupe \mathcal{H} il correspond un seul nombre α tel que tous ses éléments anticonformes ont la forme $z \mapsto \alpha \bar{z} + \beta$.

Proposition 3. $f \in \mathcal{H}$, $f \circ f = \text{Id} \Rightarrow f = \text{Id}$.

Démonstration: Si $f(z) = z + b$, $f^2(z) = z + 2b$; donc $b = 0$ et, par conséquent, $f = \text{Id}$.

Si $f(z) = \alpha \bar{z} + \beta$, $f^2(z) = z + \omega \neq \text{Id}$ (ω étant non nul).

Proposition 4. Si $f \in \mathcal{H}$, $f(z) = \alpha z + \beta$ alors:

$$f^{-1}(z) = \alpha \bar{z} - \alpha \bar{\beta}$$

$$f^{2n}(z) = z + n(\alpha\bar{\beta} + \beta) = z + n\omega$$

$$f^{2n+1}(z) = \alpha \bar{z} + n\omega + \beta \quad \text{quel que soit } n \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration: Par induction.

Proposition 5. Soit $f \in \mathcal{H}$, $f(z) = \alpha \bar{z} + \beta$, $\alpha = e^{i\theta}$,

$0 \leq \theta < 2\pi$, $\omega = \alpha\bar{\beta} + \beta$, $\varphi = \arg \omega$. Dans ces conditions, $e^{2i\varphi} = e^{i\theta} = \alpha$.

Démonstration. Si $\beta = u + iv$, on trouve facilement:

$$\omega = 2(u \cos \frac{\theta}{2} + v \sin \frac{\theta}{2}) (\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}).$$

Donc, $|\omega| = 2 \left| u \cos \frac{\theta}{2} + v \sin \frac{\theta}{2} \right|$ et $\varphi = \frac{\theta}{2}$ si $u \cos \frac{\theta}{2} + v \sin \frac{\theta}{2}$ est positif ou $\varphi = \frac{\theta}{2} + \pi$ si $u \cos \frac{\theta}{2} + v \sin \frac{\theta}{2}$ est négatif.

Il résulte aussi que $\frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{2} + i s$ où $s = \frac{-u \sin \frac{\theta}{2} + v \cos \frac{\theta}{2}}{2(u \cos \frac{\theta}{2} + v \sin \frac{\theta}{2})}$

une relation qui sera utilisée dans ce qui suit.

2.3.3. Il est utile, dans la suite, dans l'étude d'un domaine fondamental de \mathcal{G} , la décomposition suivante (dans $\mathcal{C}(\mathbb{C})$, pas dans \mathcal{G} !) de f : $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$ où $f_4(z) = z e^{-i\varphi}$, $f_3(z) = \bar{z}$, $f_2(z) = z + \beta e^{-i\varphi}$, $f_1(z) = f_4^{-1}(z)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ étant l'argument de ω .

2.3.4. Soit $A = \{ |\gamma| \mid (\exists) h \in \mathcal{G}, h(z) = \alpha \bar{z} + \gamma \}$ et soit $r = \inf A$. Parce que \mathcal{G} est discontinu, il existe $f \in \mathcal{G}$, $f(z) = \alpha \bar{z} + \beta$ et $|\beta| = r$.

Partout dans ce paragraphe f et β auront les significations précédentes et seront fixées. Le groupe \mathcal{G} peut se trouver seulement dans l'une des deux situations suivantes:

(S₁) $\mathcal{G} = \{ f^k \mid k \in \mathbb{Z} \} = \mathcal{G}_f =$ le groupe cyclique engendré par f .

(S₂) $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_f \neq \emptyset$.

On va étudier séparément les deux cas.

2.3.5. Le cas (S₁)

Proposition 6. Un ensemble fondamental de \mathcal{G} est le ruban borné par les perpendiculaires dans 0 et $\frac{\omega}{2}$ au segment $\overline{0\omega}$ réuni à l'une de ces deux perpendiculaires. (Fig.1).

Démonstration. Soit D_1 l'ensemble mentionné et soit D le ruban borné par la perpendiculaire dans 0 et ω au segment $\overline{0\omega}$ reuni à l'une d'entre elles. Parce que $f^2(z) = z + \omega$, évidemment chaque point du plan \mathbb{C} a un \mathcal{H} -équivalent dans D . La perpendiculaire en $\frac{\omega}{2}$ au segment $\overline{0\omega}$ engendre deux demi-rubans, un demi-ruban étant exactement D_1 . Soit D_2 le deuxième demi-ruban. En utilisant la décomposition mentionnée au 2.3.3 et en suivant la figure 1, on voit que chaque point intérieur de D_1 a exactement un équivalent à l'intérieur de D_2 .

Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$ situé sur la perpendiculaire, dans 0 au segment $\overline{0\omega}$. Dans ce cas $z = \pm i |z| e^{i\varphi}$. Soit $z^* = f(z) = \alpha \bar{z} + \beta = \mp i \alpha |z| e^{-i\varphi} + \beta$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(z + z^*) &= \frac{1}{2}(\pm i |z| e^{i\varphi} \mp i \alpha |z| e^{-i\varphi}) + \frac{\beta}{2} = \\ &= \frac{\pm i |z| e^{-i\varphi}}{2} (e^{2i\varphi} - \alpha) + \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Mais, conformément à la proposition 5, $e^{2i\varphi} = \alpha$ et donc, on a la relation:

$$(1) \quad \frac{z + z^*}{2} = \frac{0 + \beta}{2}$$

Cette relation exprime le fait que les points $0, z, \beta, z^*$ sont les sommets d'un parallélogramme. En outre, z^* se trouve sur la perpendiculaire en $\frac{\omega}{2}$ au segment $\overline{0\omega}$. D_1 est donc un ensemble fondamental pour \mathcal{H} . Un modèle topologique de la surface \mathbb{C}/\mathcal{H} est donc \bar{D}_1 où les points z et z^* plus haut mentionnés s'identifient. Dans la surface \mathbb{C}/\mathcal{H} , le segment $\overline{0\beta}$ devient une courbe fermée (0 et β étant \mathcal{H} -équivalents); parce que z et z^* sont

(conformément à (1)) des points symétriques par rapport au point $\frac{\beta}{2}$, il résulte que $\overline{O\beta}$ est une courbe unilatère et, du point de vue topologique, \mathbb{C}/ω est un ruban de Möbius.

On considère la succession suivante de représentations conformes:

$$D_1 \xrightarrow{g_3} B = \left\{ z \mid 0 \leq \operatorname{Re} z < \frac{1}{2} \right\} \xrightarrow{g_2} H_+^* = \left\{ z \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \right\} \setminus \left\{ z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0 \right\}$$

$$\xrightarrow{g_1} D^*(0;1) = \left\{ z \mid |z| \leq 1 \right\} \setminus \left\{ z \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0 \right\} \quad \text{où}$$

$$g_3(z) = \frac{z}{\omega}, \quad g_2(z) = \exp(2\pi i z) = \exp(-2\pi y) (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)$$

$$g_1(z) = \frac{z - i \exp(-\pi s)}{z + i \exp(-\pi s)} \quad \text{avec} \quad \frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{2} + is \quad (\text{conformément au fait mentionné dans la proposition 5}).$$

Soit $g = g_1 \circ g_2 \circ g_3$ et soit z sur la perpendiculaire en O au segment $\overline{O\omega}$. Nous suivons la manière dans laquelle se transforme z par les trois représentations.

$$z = \pm i |z| e^{i\varphi} \implies g_3(z) = \pm i \frac{|z| e^{i\varphi}}{\omega} = \pm i \frac{|z|}{|\omega|}$$

$$z + z^* = \beta \implies z^* = \beta - z \quad ; \quad g_3(z^*) = \frac{\beta - z}{\omega} = \frac{1}{2} + is - \left(\pm i \frac{|z|}{|\omega|} \right)$$

$$(g_2 \circ g_3)(z) = e^{-2\pi \frac{\pm |z|}{|\omega|}} \quad ; \quad (g_2 \circ g_3)(z^*) = \exp \left[-2\pi \left(s \mp \frac{|z|}{|\omega|} \right) \right]$$

$$\cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\text{Donc, } (g_2 \circ g_3)(z) \cdot (g_2 \circ g_3)(z^*) = -\exp(-2\pi s).$$

Il résulte qu'un modèle conforme pour la surface \mathbb{C}/ω peut être considérée l'adhérence dans \mathbb{C} de H_+^* où les points réels ayant le produit $-\exp(-2\pi s)$ s'identifient et, après, éloignant 0 .

$$g(z) = (g_1 \circ g_2 \circ g_3)(z) = \frac{\exp(-2\pi \frac{\pm|z|}{|\omega|}) - i \exp(-\pi s)}{\exp(-2\pi \frac{\pm|z|}{|\omega|}) + i \exp(-\pi s)}$$

$$g(z^*) = \frac{-\exp[-2\pi(s \mp \frac{|z|}{|\omega|}) - i \exp(-\pi s)]}{-\exp[-2\pi(s \mp \frac{|z|}{|\omega|}) + i \exp(-\pi s)]} = -g(z)$$

Donc, $g(z)$ et $g(z^*)$ sont de points diamétralement opposés dans le disque fermé $\overline{D(0;1)}$; \mathbb{C}/\mathcal{G} est donc $\overline{D(0;1)}$ avec les points diamétralement opposés identifiés et avec les points -1 et 1 éloignés. Mais, ceci est exactement le plan projectif réel P^2 pointé dans $\hat{1}$, où $\hat{1} = \{1; -1\}$.

En conclusion, si \mathcal{G} est le groupe cyclique engendré par f , la surface \mathbb{C}/\mathcal{G} est conformément équivalente au plan projectif réel pointé $P^2 \setminus \{\hat{1}\}$.

2.3.6. Le cas (S_2)

Evidemment, l'ensemble \mathcal{G}_1 contient des éléments conformes. Soit \mathcal{H}_1 le sous-groupe contenant tous les éléments conformes de \mathcal{G} . Parce que \mathcal{G} est discontinu, \mathcal{H}_1 est engendré par deux éléments.

Soit g_1 et g_2 des générateurs du \mathcal{H}_1 vérifiant les conditions suivantes: $g_1(z) = z + \omega_1$, $g_2(z) = z + \omega_2$,

$$|\omega_1| = \inf \{ |\delta| \mid (\exists) g \in \mathcal{H}_1, g(z) = z + \delta, \delta \neq 0 \}$$

$$|\omega_2| = \inf \{ |\delta| \mid (\exists) g \in \mathcal{H}_1, g(z) = z + \delta, g \neq g_1^k(\forall) k \in \mathbb{Z} \}$$

On note $\mathcal{G}_1 = \{g_1; g_2\}$ et par Σ le réseau: $\{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 7. Si $\delta \in \Sigma$ et s'il se trouve sur la droite $(0, \omega)$ alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\delta = q\omega$. (Donc ω et $-\omega$ sont les points de modul minim de Σ situés sur la droite $(0, \omega)$).

Démonstration. Soit δ un tel point et soit $h(z) = z + \delta$. Evidemment $h \in \mathcal{G}$ et $\operatorname{Re} \frac{\delta}{\omega} = 0$. Donc $\delta = r\omega$ où r est un nombre réel. Si r est irrationnel, conformément à un théorème de Dirichlet, l'ensemble $A = \{m\delta + n\omega \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ (qui est, évidemment, contenu dans la classe des points \mathcal{G} -équivalents à 0) a un point d'accumulation à la distance finie. Dans ce cas \mathcal{G} n'est pas discontinu. Donc, r doit être un nombre rationnel, c'est-à-dire $\frac{\delta}{\omega} = \frac{p_1}{q_1}$, $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}$, ou bien $p_1\omega - q_1\delta = 0$. Dans ce cas, le réseau A engendré par ω et δ est reductible, c'est-à-dire il existe $\tilde{\omega}$ tel que $A = \{k\tilde{\omega} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. En particulier, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = p\tilde{\omega}$, $\delta = q\tilde{\omega}$ et il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{\omega} = m\omega + n\delta$. Soit $\tilde{g}(z) = z + \tilde{\omega}$; donc $\tilde{g} = f^{2m} \circ h^n \in \mathcal{G}$.

Remplaçant éventuellement f par f^{-1} , on peut supposer les nombres précédents p et q ayant le même signe; par exemple, on peut supposer $p, q \geq 1$.

Soit $\ell = f \circ g^{-1}$.

$$\ell(z) = \alpha \overline{z - \tilde{\omega}} + \beta = \alpha \bar{z} + \beta - \alpha \bar{\tilde{\omega}}$$

Mais, parce que $\alpha \bar{\omega} = \omega$ et $\tilde{\omega} = \frac{1}{p}\omega$, il résulte: $\alpha \bar{\tilde{\omega}} = \tilde{\omega}$.

Donc $\ell(z) = \alpha \bar{z} + \beta - \tilde{\omega}$.

Soit $\beta_\ell = \beta - \tilde{\omega}$. Utilisant les notations de la proposition 5,

$$\begin{aligned} \text{il résulte: } \beta_e &= u + iv - \frac{2}{p}(u \cos \frac{\theta}{2} + v \sin \frac{\theta}{2}) (\cos \frac{\theta}{2} + \\ &+ i \sin \frac{\theta}{2}) = u - \frac{2}{p}(u \cos \frac{\theta}{2} + v \sin \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} + \\ &+ i \left[v - \frac{2}{p}(u \cos \frac{\theta}{2} + v \sin \frac{\theta}{2}) \sin \frac{\theta}{2} \right] . \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } |\beta_e|^2 = |\beta|^2 + \frac{|\omega|^2}{p^2} - \frac{|\omega|^2}{p} = |\beta|^2 + \frac{|\omega|^2}{p^2} (1-p) .$$

La minimalité de $|\beta|$ donne l'inégalité:

$$|\beta_e|^2 = |\beta|^2 + \frac{|\omega|^2}{p^2} (1-p) \geq |\beta|^2 .$$

Donc, $p \leq 1$ et, par conséquent, $p = 1$.

Il résulte $\tilde{\omega} = \omega$ et, finalement, $\gamma = q\omega$.

Proposition 8. Avec les notations antérieures, le groupe \mathcal{G}_B est engendré par g_2 et f ou bien par g_1 et f , c'est-à-dire:
 $\mathcal{G}_B = \{g_2; f\}$ ou $\mathcal{G}_B = \{g_1; f\}$.
 (\mathcal{G}_B est un groupe non commutatif à deux générateurs).

Démonstration. On suppose tout d'abord que $|\omega_1| < |\omega_2|$. Un petit calcul donne: $(f \circ g_1 \circ f^{-1})(z) = z + \alpha \bar{\omega}_1$.
 Parce que $f \circ g_1 \circ f^{-1} \in \mathcal{G}_B$, $\alpha \bar{\omega}_1$ est un point du réseau Σ plus haut considéré.

$$|\alpha \bar{\omega}_1| = |\omega_1|$$

(par hypothèse)

Utilisant les définitions de ω_1 et ω_2 il résulte qu'il existe seulement deux possibilités:

$$(i) \alpha \bar{\omega}_1 = \omega_1 \quad \text{et} \quad (ii) \alpha \bar{\omega}_1 = -\omega_1 .$$

On va analyser séparément ces deux cas.

$$(i) \alpha \bar{\omega}_1 = \omega_1 \implies \arg \alpha - \arg \omega_1 \pmod{2\pi} = \arg \omega_1.$$

Donc, $\arg \omega_1 \pmod{\pi} = \frac{1}{2} \arg \alpha = \arg \omega \pmod{\pi}$ (conformément à la proposition 5). Donc, les points $0, \omega, \omega_1$ sont sur la même droite et, de la proposition 7 il résulte qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega_1 = q\omega$.

On a : $|\omega_1| \geq \frac{1}{|q|} |\omega_1| = |\omega|$. Utilisant de nouveau la définition de ω_1 , il résulte que $|\omega| = |\omega_1|$, donc $q = \pm 1$; par conséquent

$$\omega_1 = \pm \omega, \text{ c'est-à-dire } g_1 = f^2 \text{ ou } f^{-2}.$$

Soit maintenant $h \in \mathcal{H}$. Si $h \in \mathcal{H}_1$, il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tel que $h(z) = z + m\omega_1 + n\omega_2$. Donc $h = f^{2m} \circ g_2^n$ ou bien $h = f^{-2m} \circ g_2^n$. Dans tous les deux cas, $h \in \{g_2; f\}$. Soit $h \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_1$. Alors, $h \circ f \in \mathcal{H}_1$; $h \circ f = g_2^n \circ f^{2m}$

$$(f^2 \circ g_2 = g_2 \circ f^2 !). \text{ Donc } h = g_2^n \circ f^{2m-1} \in \{g_2; f\}.$$

Par conséquent $\mathcal{H} \subseteq \{g_2; f\}$ c'est-à-dire $\mathcal{H} = \{g_2; f\}$

$$(ii) \alpha \bar{\omega}_1 = -\omega_1 \implies \arg \alpha - \arg \omega_1 \pmod{2\pi} = \pi + \arg \omega_1 \pmod{2\pi}$$

$\arg \alpha = \pi + 2 \arg \omega_1 \pmod{2\pi}$. Donc, $\arg \omega = (\frac{\pi}{2} + \arg \omega) \pmod{\pi}$. Cette dernière égalité exprime le fait que les vecteurs $\overrightarrow{O\omega_1}$ et $\overrightarrow{O\omega}$ sont perpendiculaires.

Soit (Δ_1) la médiatrice du segment de droite $\overline{O\omega_1}$, (Δ_2) la médiatrice du $\overline{O, -\omega_1}$ et D le domaine borné par ces deux droites. Soit $\bar{D} = D \cup (\Delta_1) \cup (\Delta_2)$. (Fig.2).

Parce que $|\omega_2| \leq |\omega_2 - \omega_1|$, $|\omega_2 + \omega_1|$ il résulte que $\omega_2 \in \bar{D}$. La largeur du \bar{D} étant $|\omega_1|$, parmi les points $\omega_2 + k\omega_1$, $k \in \mathbb{Z}$, du \sum , \bar{D} peut encore contenir au plus $\omega_2 + \omega_1$ ou bien $\omega_2 - \omega_1$ (en fonction de l'angle d'entre les vecteurs $\overrightarrow{O\omega_1}$ et $\overrightarrow{O\omega_2}$). Si D contient un tel point alors $\omega_2 \in (\Delta_1) \cup (\Delta_2)$.

On considère le système d'axes orthogonales $X O Y$ tel que OX est sur le vecteur $\overrightarrow{O\omega_1}$. Donc OY contient le vecteur $\overrightarrow{O\omega}$.

Remplaçant éventuellement f par f^{-1} , on peut supposer ω et ω_2 situés de même côté de OX .

Soit (Δ_3) la médiatrice du $\overrightarrow{O\omega_2}$, (Δ_4) la médiatrice du $\overrightarrow{O, -\omega_2}$ et E le domaine d'entre elles. Soit $\bar{E} = E \cup (\Delta_3) \cup (\Delta_4)$.

Utilisant le même raisonnement que pour ω_2 , il résulte $\omega_1 \in \bar{E}$.

Parce que $g_1 \circ f, g_1^{-1} \circ f, g_2 \circ f, g_2^{-1} \circ f \in \mathcal{G}$, la minimalité du $|\beta|$ donne les inégalités :

$$|\beta| \leq |\beta - \omega_1|, |\beta + \omega_1|, |\beta - \omega_2|, |\beta + \omega_2|$$

Donc, $\beta \in \bar{D} \cap \bar{E}$.

Analogiquement $|\alpha\bar{\beta}| = |\beta| \leq |\alpha\bar{\beta} + \omega_1|, |\alpha\bar{\beta} - \omega_1|, |\alpha\bar{\beta} + \omega_2|, |\alpha\bar{\beta} - \omega_2|$

parce que $g_1^{-1} \circ f^{-1}, g_1 \circ f^{-1}, g_2^{-1} \circ f^{-1}, g_2 \circ f^{-1} \in \mathcal{G}$.

Donc, $\alpha\bar{\beta} \in \bar{D} \cap \bar{E}$.

Evidemment, $\bar{D} \cap \bar{E}$ est un parallélogramme.

Soit $X = a, Y = b$ les coordonnées du ω_2 .

$$|a| \leq \frac{|\omega_1|}{2} \quad (\text{Egalité, pour } \omega_2 \in (\Delta_1) \cup (\Delta_2)).$$

ω_2 étant extérieur au disque $\mathcal{U}(0; |\omega_1|) = \{z \mid |z| < |\omega_1|\}$, il résulte que $b \geq \frac{|\omega_1| \sqrt{3}}{2}$. (Egalité, pour $\omega_2 = \omega_1 e^{i\pi/3}$ ou $\omega_1 e^{2\pi i/3}$).

(Δ_3) a l'équation : $Y = \frac{b}{2} - \frac{a}{b} (X - \frac{a}{2})$.

Soit S l'intersection de (Δ_3) avec OY . On trouve facilement

$$Y_S = \frac{b}{2} + \frac{a^2}{2b} = \frac{a^2 + b^2}{2b}$$

Mais, parce que $|a| \leq \frac{|\omega_1|}{2}$ et $|\omega_1| \leq \frac{2b}{\sqrt{3}}$, on a :

$$Y_S \leq \frac{1}{2b} \left(\frac{|\omega_1|^2}{4} + b^2 \right) \leq \frac{1}{2b} \left(\frac{b^2}{3} + b^2 \right) = \frac{2b}{3}$$

L'ensemble $\bar{D} \cap \bar{E}$ étant convexe et $\beta, \alpha\beta \in \bar{D} \cap \bar{E}$, il résulte que $\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{\omega}{2} \in \bar{D} \cap \bar{E}$ (dans tous les cas !).

Evidemment $\frac{\omega}{2}$ se trouve aussi sur OY et $Y_{\frac{\omega}{2}} = \frac{|\omega|}{2} \leq Y_S$ c'est-à-dire $\frac{|\omega|}{2} \leq \frac{2b}{3}$, quelle que soit la position du ω_2 dans \bar{D} (même dans le cas où $|\omega_2| = |\omega_1|$).

Donc, $|\omega| \leq \frac{4b}{3} < 2b$. Il en résulte que ω se trouve sur la droite qui contient les points $\omega_2 + k\omega_1$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais, parce que $\omega \in D$, il résulte: $\omega = \omega_2$.

Evidemment $\mathcal{H}_1 = \{g_1; f^2\} \subset \{g_1; f\}$.

Soit $h \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_1$. $h \circ f \in \mathcal{H}_1$ donc, il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tel que $h \circ f = g_1^m \circ f^{2n}$ et donc $h = g_1^m \circ f^{2n-1} \in \{g_1; f\}$ d'où, finalement, $\mathcal{H} = \{g_1; f\}$.

Dans le théorème 3 de ce paragraphe, on aura besoin du nombre

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Evidemment, dans le cas (ii), $\tau = ik$ ou k est un nombre dans l'intervalle ouvert $(1, +\infty)$.

Il nous reste à étudier le cas dans lequel $|\omega_1| = |\omega_2|$.

Ce cas, aussi, sera traité en deux étapes:

(j) $\omega_2 \in D$ (c'est-à-dire $X_{\omega_2} = a \in \left(-\frac{|\omega_1|}{2}, \frac{|\omega_1|}{2}\right)$) et

(jj) $\omega_2 \in (\Delta_1) \cup (\Delta_2)$ (c'est-à-dire $\omega_2 = \omega_1 e^{i\pi/3}$ ou $\omega_1 e^{2\pi i/3}$).

(j) Si $\omega_2 \in D$, on a les inégalités:

$$|\omega_2| < |\omega_1 + \omega_2|, |\omega_1 - \omega_2|$$

Donc, le réseau Σ a exactement quatre points sur le cercle

$$|z| = |\omega_1| : \pm \omega_1 \text{ et } \pm \omega_2.$$

$$(f \circ g_k \circ f^{-1})(z) = z + \alpha \bar{\omega}_k, \quad k = 1 \text{ et } 2.$$

$$\alpha \omega_k \in \Sigma \text{ et } |\alpha \omega_k| = |\omega_1| = |\omega_2|.$$

Donc, $\alpha \bar{\omega}_1, \alpha \bar{\omega}_2 \in \{\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2\}$.

(j₁) Si $\alpha \bar{\omega}_1 = \omega_1$, exactement comme dans le cas (i) considéré plus haut, il résulte $\omega = \omega_1$; donc $\mathcal{G} = \{g_2; f\}$ et $\mathcal{G}_1 = \{g_2; f^2\}$.

(j₂) Si $\alpha \bar{\omega}_1 = -\omega_1$, comme dans le cas (ii), il résulte: $\omega = \omega_2$; donc $\mathcal{G} = \{g_1; f\}$ et $\mathcal{G}_1 = \{g_1; f^2\}$.

Dans ce cas, le nombre $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ est, évidemment, $i = \sqrt{-1}$.

(j₃) Si on a $\alpha \bar{\omega}_1 = \omega_2$ il résulte aussi $\alpha \bar{\omega}_2 = \omega_1$ (parce que $\alpha \bar{\alpha} = 1$).
Donc $\alpha \bar{\omega}_1 = \omega_2 \implies \alpha (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) = \omega_1 + \omega_2$.

Si on note $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, on a: $\alpha \bar{\omega}_3 = \omega_3$. Donc $\arg \omega_3 =$

$= \arg \omega \pmod{\pi}$ c'est-à-dire les points $0, \omega$ et ω_3 se trouvent sur la même droite. D'après la proposition 7, il résulte que

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

L'abscisse X_ω du ω est, évidemment:

$$X_\omega = X_{\omega_1} + X_{\omega_2} = |\omega_1| + a. \text{ Donc, l'abscisse du } \frac{\omega}{2} \text{ est}$$

$$X_{\frac{\omega}{2}} = \frac{|\omega_1|}{2} + \frac{a}{2}. \text{ Si } a > 0 \text{ il résulte que } X_{\frac{\omega}{2}} > \frac{|\omega_1|}{2} \text{ c'est-à-dire } \frac{\omega}{2} \notin \bar{D} \cap \bar{E}. \text{ Absurde !}$$

Donc $a \leq 0$ ou, également, $\omega_2 = \omega_1 e^{it}$, où $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right)$.

$$\text{Evidemment } \mathcal{G}_1 = \{g_1; r^2\} \text{ et } \mathcal{G} = \{g_1; r\}.$$

Dans ce cas le nombre τ est: $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = e^{it}$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right)$.

(j₄) Le cas $\alpha \bar{\omega}_1 = -\omega_2$ peut être réduit au cas (j₃) remplaçant

$$g_2 \text{ (} g_2(z) = z + \omega_2 \text{)} \text{ par } g_2^{-1}.$$

(jj) On étudie maintenant le cas $\omega_2 = \omega_1 e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\omega_1 e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Le problème se réduit à l'étude du premier cas, parce que si

$$\omega_2 = \omega_1 e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ on remplace } g_2 \text{ par } g_2 \circ g_1; (g_2 \circ g_1)(z) = z + \omega_3$$

$$\text{où } \omega_3 = \omega_1 e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$\text{Soit, donc, } \omega_2 = \omega_1 e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Dans ce cas le réseau Σ contient six points sur le cercle

$$|z| = |\omega_1| : \omega_1, \omega_2, \omega_2 - \omega_1, -\omega_1, -\omega_2, -\omega_2 + \omega_1.$$

Comme dans le cas (j), les points $\alpha \bar{\omega}_1$ et $\alpha \bar{\omega}_2$ se trouvent parmi les six points mentionnés.

(jj₁) Si $\alpha \bar{\omega}_1 = \omega_1$, comme dans le cas (i), il résulte $\omega = \omega_1$, et $\mathcal{G} = \{g_2; r\}$, $\mathcal{G}_1 = \{g_2; r^2\}$. Dans ce cas, $\tau = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(jj₂) Si $\alpha \bar{\omega}_1 = -\omega_1$, les vecteurs $\overrightarrow{O\omega_1}$ et $\overrightarrow{O\omega}$ sont perpendiculaires. Parce que $\omega \in \Sigma$ il résulte: $\omega = 2\omega_2 - \omega_1$. Mais, dans cette situation $\frac{\omega}{2} \notin \bar{D} \cap \bar{E}$. Absurde !. Donc, $\alpha \bar{\omega}_1 \neq -\omega_1$.

(jj₃) Si $\alpha \bar{\omega}_1 = \omega_2$, de nouveau $\frac{\omega}{2} \notin \bar{D} \cap \bar{E}$ et donc ni ce cas ne peut pas apparaître.

(jj₄) $\alpha \bar{\omega}_1 = -\omega_2$. Cette égalité donne: $\arg \omega = \frac{2\pi}{3} + \arg \omega_1 \pmod{\pi}$. D'après la proposition 7, il résulte $\omega = \omega_2 - \omega_1$. Dans ce cas $\mathcal{H}_1 = \{g_1; f^2\} = \{g_2; f^2\}$ et $\mathcal{H} = \{g_1; f\} = \{g_2; f\}$.

(jj₅) Si $\alpha \bar{\omega}_1 = \omega_2 - \omega_1 = \omega_1 e^{\frac{2i\pi}{3}}$ on a: $\arg \omega = \frac{\pi}{3} + \arg \omega_1 \pmod{\pi}$.

Donc les points $0, \omega$ et ω_2 se trouvent sur la même droite; il résulte $\omega = \omega_2$. $\mathcal{H}_1 = \{g_1; f^2\}$ et $\mathcal{H} = \{g_1; f\}$.

(jj₆) Si $\alpha \bar{\omega}_1 = -\omega_2 + \omega_1 = \omega_1 e^{\frac{5i\pi}{3}}$ on trouve:

$\arg \omega = \frac{5\pi}{6} + \arg \omega_1 \pmod{\pi}$ et, de nouveau, $\frac{\omega}{2} \notin \bar{D} \cap \bar{E}$.

Donc, ce cas ne peut pas apparaître.

La proposition 8 est complètement démontrée.

Soit $g(z) = z + \delta$ où $|\delta| = \inf\{|\delta| \mid (\exists) h \in \mathcal{H}_1, h(z) = z + \delta, h \neq f^{2k} \ (\forall) k \in \mathbb{Z}\}$.

Ayant en vue la démonstration de la proposition 8, on a, évidemment: $\mathcal{H} = \{f; g\}$ et $\mathcal{H}_1 = \{f^2; g\}$.

Dans la suite g aura toujours cette signification.

Proposition 9. Il existe un nombre entier n tel que $\alpha \bar{\delta} + \delta = n\omega$. Plus que ça, n peut prendre seulement les valeurs $0, 1$ et -1 .

Démonstration. Pratiquement, la démonstration de cette proposition est presque contenue dans la démonstration de la

proposition 8 mais, une démonstration directe est préférable.

Ensuite, on pourra calculer le nombre $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ dans le cas (1) de la proposition 8.

On vérifie, comme dans la proposition 5, que

$$\arg(\alpha\bar{\delta} + \delta) = \arg \omega \pmod{\pi}.$$

Conformément à la proposition 7, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\alpha\bar{\delta} + \delta = n\omega.$$

Remplaçant éventuellement g par g^{-1} , on peut supposer $n \geq 0$.

Supposons que $n \geq 2$. (Dans la figure 3 est présentée la situation $n = 3$).

La quadrilatère ayant les sommets $o, \alpha\bar{\delta}, \alpha\bar{\delta} + \delta = n\omega, \delta$ est un rhombe. Donc $|\omega| \leq |\delta|$.

Dans le cercle $|z| = |\delta|$, les points δ et $-\delta$ sont diamétralement opposés et les segments de droite ayant les extrémités $-\delta, \alpha\bar{\delta}$ et $\delta, \alpha\bar{\delta}$ sont orthogonaux.

Les points $-\delta + \omega, -\delta + 2\omega, \dots, -\delta + (n-1)\omega$ ont, évidemment, leurs moduls strictement inférieurs à $|\delta|$.

Soit $\eta_j = -\delta + j\omega$, $1 \leq j \leq n-1$ et soit $h_j(z) = z + \eta_j$.

Evidemment $h_j \in \mathcal{H}_f$. Le fait que $|\eta_j| < |\delta|$ contredit la minimalité du $|\delta|$. Donc $n = 0$ ou 1 .

Observation. Dans le cas (1) de la proposition 8, supposons que ω_2 se trouve sur (Δ_1) . (Il peut se trouver la-bas!). Dans ce cas le nombre n donné par la proposition 9 est $n = 1$.

Les coordonnées du ω_2 sont: $X = \frac{|\omega_1|}{2}$ et $Y = b$ ou $b \in (\frac{|\omega_1|\sqrt{3}}{2}, \infty)$

Le point $\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}$ se trouve sur l'axe OY et a l'ordonnée $Y_0 = b$.

Donc, $\omega_2 - \frac{\omega_1}{2} = b i e^{i \arg \omega_1}$. On a, successivement, avec
 $\zeta = \frac{\omega_2}{\omega_1}$:

$$\frac{\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}}{\omega_1} = \zeta - \frac{1}{2} = \frac{b i e^{i \arg \omega_1}}{|\omega_1| e^{i \arg \omega_1}} = \frac{b}{|\omega_1|} i .$$

Donc $\zeta = \frac{1}{2} + k i$ où $k = \frac{b}{|\omega_1|} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right)$.

On va analyser dans la suite les situations $n = 0$ et $n = 1$ séparément, trouvant chaque fois un domaine fondamental pour \mathcal{G} , un fait qui va permettre de conclure que la surface \mathbb{C}/\mathcal{G} est une bouteille de Klein.

La situation dans laquelle $n = 0$ est présentée dans la figure 4.

Proposition 10. Un ensemble fondamental pour \mathcal{G} dans le cas $n = 0$ est le parallélogramme P ayant les sommets $0, \beta, \delta + \beta, \delta$ auquel on ajoute le point 0 , l'intérieur du segment $\overline{0\beta}$ et l'intérieur du segment $\overline{0\delta}$, et la surface \mathbb{C}/\mathcal{G} a le symbole $a b a^{-1} b$ où a (respectivement b) est le segment orienté ayant les extrémités 0 et β (respectivement δ et 0).

Démonstration. On a vu, dans la proposition 6, que chaque point du \mathbb{C} est \mathcal{G} -équivalent (par un f^{2k} , $k \in \mathbb{Z}$) à un point situé dans le ruban infini borné par les perpendiculaires (Δ_1) en 0 et (Δ_2) en $\frac{\omega}{2}$ à la droite $(O\omega)$ à laquelle on ajoute (Δ_1) .

Soit D_1 cet ensemble. On sait que les vecteurs $\overrightarrow{0\omega}$ et $\overrightarrow{0\gamma}$ sont perpendiculaires.

Soit u sur le segment $\overline{0\gamma}$. On sait que $f(z)$ est le symétrique de z par rapport au $\frac{\beta}{2}$; donc, $z^* = (g \circ f)(z) = \alpha \bar{z} + \beta + \gamma$ se trouve sur le segment $\overline{\beta, \gamma + \beta}$.

On vérifie facilement que

$$\frac{1}{2}(z + z^*) = \frac{1}{2}(\gamma + \beta);$$
 donc, z et z^* sont symétriques par rapport au point d'intersection des diagonales du parallélogramme P .

Evidemment, chaque point du D_1 a un équivalent (par un g^k , $k \in \mathbb{Z}$) situé dans l'adhérence \bar{P} du P .

Dès maintenant, le fait que l'ensemble mentionné dans le texte de la proposition est un ensemble fondamental pour \mathcal{H} est évident.

L'image, par g , du segment $\overline{0\beta}$ est le segment (orienté) d'extrémités γ et $\gamma + \beta$. Ayant en vue aussi la symétrie des z et z^* par rapport au $\frac{1}{2}(\gamma + \beta)$ il résulte que le symbole de la surface \mathbb{C}/\mathcal{H} est $a b a^{-1} b$; elle est donc une bouteille de Klein. La proposition est démontrée.

Observation. L'hexagone ayant les sommets $0, \beta, \omega, \omega + \gamma, \gamma + \beta$ et γ ensemble à une partie de sa frontière est un ensemble fondamental pour le sous-groupe \mathcal{H}_1 de \mathcal{H} . Evidemment l'aire de cet ensemble est deux fois l'aire du domaine fondamental de \mathcal{H} .

L'image par g du triangle $0, \beta, \gamma$ est le triangle ayant les sommets $\gamma, \gamma + \beta$ et $\omega + \gamma$. Mais, le rectangle ayant les sommets $0, \omega, \omega + \gamma, \omega$ ensemble à 0 et à les intérieurs des segments $\overline{0\omega}$ et $\overline{0\gamma}$ est un ensemble fondamental pour \mathcal{H}_1 .

Comme on va voir dans le paragraphe suivant, la surface \mathbb{C}/\mathcal{G}_1 (qui est un tore) est le revêtement double orientable de la surface \mathbb{C}/\mathcal{G} .

Proposition 11. Un ensemble fondamental pour \mathcal{G} dans le cas $n = 1$ est le parallélogramme P ayant les sommets $0, \beta, \gamma + \frac{1}{2}(\beta - \alpha\bar{\beta}), \gamma - \frac{\omega}{2}$ auquel on ajoute le point 0 et les intérieurs des segments $(0, \beta)$, respectivement $(0, \gamma - \frac{\omega}{2})$ et la surface \mathbb{C}/\mathcal{G} a, de nouveau, un symbole $a b a^{-1} b$. (Fig. 5).

Démonstration. Analogue à la démonstration précédente. Les points de la frontière du P s'identifient de la même manière. Donc, dans ce cas aussi, la surface \mathbb{C}/\mathcal{G} est une bouteille de Klein.

Le théorème 2 est complètement démontré.

Observation. Dans les ouvrages [14] et [19] les auteurs D. Spencer et M. Schiffer, respectivement O. Teichmüller indiquent comme groupe des transformations de recouvrement pour la bouteille de Klein le groupe engendré par les transformations $z \mapsto \bar{z} + \frac{1}{2}$ et $z \mapsto z + iw$ où $w > 0$. Cette situation correspond à la situation $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$ et $n = 0$ (dans la proposition 9). Donc, celles-ci représentent seulement une partie des bouteilles de Klein.

2.3.7. Si T est un tore et si B est une bouteille de Klein il existe toujours un homéomorphisme locale $h : T \rightarrow B$ de degré 2. Du point de vue analytique, on va voir dans la suite que le problème est essentiellement un autre.

On va indiquer maintenant tous les tores qui sont de revêtements (dianalytiques) à deux feuilles pour des bouteilles de Klein.

On va d'abord souligner les valeurs du nombre \mathcal{Z} , trouvées dans les propositions 8 et 9.

a) $\mathcal{Z} = ik$, où $k \in [1, \infty)$. (Les cas (ii) et (j₁) de la proposition 8).

b) $\mathcal{Z} = e^{it}$, ou $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$. (Le cas (j₃) de la proposition 8).

c) $\mathcal{Z} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ (Le cas (jj₁) de la proposition 8).

d) $\mathcal{Z} = \frac{1}{2} + ik$, ou $k \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$. (Le cas (i) de la proposition 8 mentionné dans l'observation qui suit après la proposition 9).

Soit M le groupe modulaire:

$$M = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

Un domaine fondamental pour M est:

$$D = \left\{ z \mid \operatorname{Im} z > 0, \left| \operatorname{Re} z \right| < \frac{1}{2}, |z| > 0 \right\} \text{ et un ensemble fondamental est}$$

$$D \cup \left\{ z \mid z = \frac{1}{2} + ik, k \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \cup \left\{ z \mid z = e^{i\theta}, \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \right\} = D^*$$

(Voir, par exemple, "Lectures on Modular Forms" par R.C. Gunning, Princeton University Press, 1962).

Les transformations

$$T: z \mapsto z + 1 \quad \text{et}$$

$$S: z \mapsto -\frac{1}{z}$$

engendrent le groupe modulaire.

$$\text{Soit } \tau = e^{it}, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right).$$

$$S\tau = -\frac{1}{e^{it}} = e^{i(\pi-t)}.$$

Evidemment, $\pi - t \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$.

$$\text{Soit } A = \left\{ ik \mid k \in [1, \infty) \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} + ik \mid k \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty \right) \right\} \cup \left\{ e^{i\theta} \mid \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

On sait que D^* donne une paramétrisation pour l'ensemble des tores non isomorphes. Soit T et T' deux tores correspondants aux réseaux de points du plan \mathbb{C} :

$$\Sigma = \left\{ m_1 w_1 + m_2 w_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im} \frac{w_1}{w_2} > 0 \right\} \quad \text{et,}$$

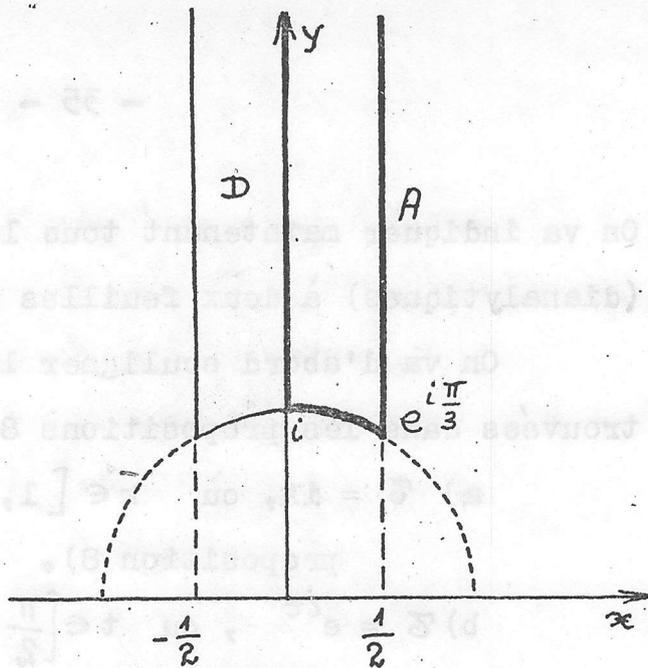
respectivement,

$$\Sigma' = \left\{ m_1 w'_1 + m_2 w'_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im} \frac{w'_1}{w'_2} > 0 \right\}.$$

On sait que T et T' sont isomorphes si et seulement si les nombres complexes $\frac{w_1}{w_2}$ et $\frac{w'_1}{w'_2}$ sont équivalents par rapport au groupe modulaire; c'est-à-dire, il existe $h \in M$ tel que

$$\frac{w_1}{w_2} = h \left(\frac{w'_1}{w'_2} \right).$$

D^* étant un ensemble fondamental pour M , il résulte que, aux points distincts de D^* correspondent de tores non isomorphes. Ayant en vue les valeurs trouvées pour le nombre τ , on a une première conclusion importante: les tores correspondants aux nombres du $D^* \setminus A$ ne sont pas de revêtements dianalytiques



à deux feuilles pour des bouteilles de Klein.

Les tores qui sont des revêtements dianalytiques pour des bouteilles de Klein correspondent aux points τ appartenant à A . On va montrer dans la suite que tous les points de A représentent des tores qui sont des revêtements dianalytiques à deux feuilles pour des bouteilles de Klein.

Alors, il va résulter le théorème suivant:

Théorème 3. Le tore correspondant au réseau

$\Sigma = \left\{ m_1 w_1 + m_2 w_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im} \frac{w_1}{w_2} > 0 \right\}$ est un revêtement dianalytique à deux feuilles pour une bouteille de Klein si et seulement si le nombre complexe $\frac{w_1}{w_2}$ a un équivalent par rapport au groupe modulaire dans l'ensemble A .

(L'ensemble A représente donc une paramétrisation pour les tores non isomorphes qui sont des revêtements dianalytiques à deux feuilles pour des bouteilles de Klein).

Démonstration. On a déjà vu que pour les bouteilles de Klein, les nombres τ correspondants sont dans A . Il reste à démontrer la réciproque du théorème. On doit étudier trois cas:

(1) $\tau = ik, \quad k \in [1, \infty)$

(2) $\tau = \frac{1}{2} + ik, \quad k \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty \right)$

(3) $\tau = e^{it}, \quad t \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$ ou bien $\tau = e^{it}, \quad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right)$

(1) Soit $\Sigma = \left\{ m_1 w_1 + m_2 w_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \right\}$. On peut supposer que w_1 et w_2 ont les propriétés de minimalité utilisées dans les propositions 7 et 8. D'après une rotation de \mathbb{C} , on peut supposer $w_1 > 0$. Supposons donc $\tau = ik = \frac{w_2}{w_1}$ ou $k \in [1, \infty)$.

Soit $g_1(z) = z + w_1$, $g_2(z) = z + w_2$ et $\mathcal{G} = \{g_1; g_2\} =$ le groupe engendré par g_1 et g_2 . Le tore en discussion est \mathbb{C}/\mathcal{G} .

Soit $f(z) = \bar{z} + \frac{1}{2} w_1$. On a :

$$(f \circ f)(z) = \overline{\bar{z} + \frac{1}{2} w_1} + \frac{1}{2} w_1 = z + w_1 = g_1(z), \text{ c'est-à-dire } f^2 = g_1.$$

Les nombres antérieurs α et β sont 1 et, respectivement $\frac{1}{2} w_1$. Dans ce cas $\alpha \bar{\beta} + \beta = w_1 \neq 0$. Donc le groupe $\mathcal{H} = \{f; g_2\}$ engendre une bouteille de Klein. Le sous-groupe conforme \mathcal{H}_1 de \mathcal{H} est, évidemment, \mathcal{G} . Donc le tore \mathbb{C}/\mathcal{G} est un revêtement dianalytique à deux feuilles pour \mathbb{C}/\mathcal{H} .

(2) Supposons maintenant $\tau = \frac{1}{2} + i k$, $k \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, et on fait les mêmes hypothèses que dans le cas précédent.

$$\tau = \frac{w_2}{w_1} \Rightarrow w_2 = (1 + i k) w_1 + \frac{1}{2} w_1.$$

Soit $f(z) = \bar{z} + \frac{1}{2} w_1$. De nouveau $f^2 = g_1$. Dans ce cas aussi $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2} w_1$. Donc $\alpha \bar{\beta} + \beta = w_1 \neq 0$. Le groupe

$\mathcal{H} = \{f; g_2\}$ engendre une bouteille de Klein et le sous-groupe conforme de \mathcal{H} est engendré par f^2 et g_2 ; donc $\mathcal{H}_1 = \mathcal{G}$ et, en conséquence, le tore \mathbb{C}/\mathcal{G} est un revêtement dianalytique pour la bouteille de Klein \mathbb{C}/\mathcal{H} .

(3) Soit $\tau = e^{it}$, $w_1 \in \mathbb{R}$ ($w_1 > 0$), $w_2 = w_1 e^{it}$, $\beta = \frac{w_1 + w_2}{2}$

et $\alpha = e^{2i \arg \beta}$. (Voir le cas (j₃) de la proposition 8).

Soit $f(z) = \alpha \bar{z} + \beta$.

$$\omega = \alpha \bar{\beta} + \beta = e^{2i \arg \beta} |\beta| e^{-i \arg \beta} + \beta = 2\beta = w_1 + w_2 \neq 0$$

Donc le groupe $\mathcal{G} = \{f; g_1\}$ engendre une bouteille de Klein. Evidemment $\mathcal{G}_1 = \{f^2; g_1\} = \{g_2; g_1\} = \mathcal{G}$ et, de nouveau, \mathbb{C}/\mathcal{G} est un revêtement à deux feuilles pour la bouteille de Klein \mathbb{C}/\mathcal{G} . Le théorème est démontré.

2.3.8. Soit X une surface (topologique) non orientable compacte de genre g . Soit Y son revêtement orientable de degré 2. Utilisant la formule de Hurwitz-Kerékjártó concernant l'ordre total de ramification d'une transformation intérieure on obtient le genre g_Y de Y : $g_Y = g - 1$.

Le théorème 3 suggère un problème plus général.

Soit $\mathcal{T}_g^{\text{no}}$ l'espace de Teichmüller des surfaces non orientables X de genre g et soit $\mathcal{T}_{g-1}^{\circ}$ l'espace de Teichmüller des surfaces orientables Y de genre $g - 1$.

Problème: Trouvez le sous-ensemble de $\mathcal{T}_{g-1}^{\circ}$ formé par des points qui représentent des surfaces de Riemann qui sont de revêtements dianalytiques à deux feuilles pour les points du $\mathcal{T}_g^{\text{no}}$.

Observation. Soit ρ le nombre des paramètres réels indépendants du groupes des automorphismes dianalytiques d'une surface de Riemann nonorientable sur elle même. Dans le livre cité de M. Schiffer et D. Spencer, parce que les auteurs considèrent seulement un sous-ensemble des bouteilles de Klein, on indique dans ce cas-là $\rho = 1$. (À voir le livre cité, p.84-85, théorème 3.7.2.). Si on considère toutes les bouteilles de Klein, on a $\rho = 2$, comme on peut ^(voir) du théorème 2, les propositions 8 et 9, et du théorème 3.

3. FONCTIONS DE TYPE MÉROMORPHE SUR DES SURFACES DE RIEMANN NON ORIENTABLES

3.1. Avant d'introduire la notion de fonction de type méromorphe sur les surfaces de Riemann non orientables, on va mettre en évidence une liaison entre la surface en étude et son revêtement double orientable, au moyen des groupes de recouvrements correspondants.

Soit (X, \mathcal{R}) une surface de Riemann non orientable, \mathcal{G} son groupe des transformations de recouvrement, \mathcal{G}_1 le sous-groupe de \mathcal{G} , formé par tous les éléments conformes de \mathcal{G} et \hat{X} le revêtement universel de X .

Si T_1, \dots, T_n, \dots sont des éléments conformes de \mathcal{G} , S_1, \dots, S_n, \dots sont des éléments anticonformes de \mathcal{G} et l'ensemble $\{S_1, \dots, S_n, \dots, T_1, \dots, T_n, \dots\}$ engendre \mathcal{G} , alors, pour $A \in \mathcal{G}$ il existe des nombres entiers $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ tels que $A = T_{i_1}^{a_1} \circ S_{j_1}^{b_1} \circ \dots \circ T_{i_k}^{a_k} \circ S_{j_k}^{b_k}$. Dans ces conditions, $A \in \mathcal{G}_1$ si et seulement si $b_1 + b_2 + \dots + b_k \equiv 0 \pmod{2}$.

Théorème 4. La surface $Y = \hat{X}/\mathcal{G}_1$ est le revêtement double orientable de la surface X .

Démonstration. Parce que \mathcal{G}_1 est formé par d'automorphismes conformes de X , la surface Y est une surface de Riemann orientable ([15], le chapitre Uniformisation).

Soit $\pi^1(X)$ et $\pi^1(Y)$ les groupes fondamentaux de X , respectivement de Y . On sait que $\pi^1(X)$ est isomorphe à \mathcal{G} et $\pi^1(Y)$ est isomorphe à \mathcal{G}_1 . Donc $\pi^1(Y)$ est isomorphe à un sous-groupe de $\pi^1(X)$; Y est, par conséquent, un revêtement de X . Le nombre de feuilles de Y au-dessus de X est égal à l'index de $\pi^1(Y)$ dans $\pi^1(X)$ c'est-à-dire à l'index de \mathcal{G}_1 dans \mathcal{G} . Mais l'index de \mathcal{G}_1 dans \mathcal{G} est 2. Le théorème est démontré.

Observation. Le théorème précédent contient implicitement l'affirmation concernant l'existence du revêtement double orientable pour chaque surface (de Riemann) non orientable.

3.2. Dans la suite on note les deux éléments qui engendrent le groupe des transformations de recouvrement de la bouteille de Klein par T et S : $Tz = z + \omega_1$, $Sz = \alpha \bar{z} + \beta$ où α, β et ω_1 ont les significations du paragraphe précédent (mentionnées après la proposition 8).

$$\mathcal{G} = \{T; S\} = \text{le groupe engendré par } T \text{ et } S.$$

$$\mathcal{G}_1 = \{T; S^2\} = \text{le groupe engendré par } T \text{ et } S^2.$$

$$S^2z = z + \omega \quad \text{ou} \quad \omega = \alpha \bar{\beta} + \beta.$$

Donc, le revêtement double orientable de la bouteille de Klein \mathbb{C}/\mathcal{G} est le tore \mathbb{C}/\mathcal{G}_1 déjà mentionné.

Pour le plan projectif réel pointé, $\mathcal{G} = \{S\} =$ le groupe cyclique engendré par S , $Sz = \alpha \bar{z} + \beta$, et $\mathcal{G}_1 = \{S^2\}$.

Donc, le revêtement double orientable de $P^2 \setminus \{\hat{1}\}$ est la sphère de Riemann doublement pointée. Evidemment, le revêtement double orientable du plan projectif réel P^2 est la sphère de Riemann \hat{C} .

3.3 Fonctions sur la bouteille de Klein

Soit $f_1, f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \hat{C}$, f_1 méromorphe et f_2 antiméromorphe.

Définition. La paire de fonctions (f_1, f_2) s'appelle une paire conjuguée par rapport au groupe $\mathcal{H} = \{S, T\}$ si les deux conditions suivantes sont remplies:

$$(1) \quad \begin{cases} f_1 \circ T = f_1 \\ f_2 \circ T = f_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (2) \quad \begin{cases} f_1 \circ S = f_2 \\ f_2 \circ S = f_1 \end{cases}$$

Soit la fonction $f: \mathbb{C} \rightarrow \hat{C}$ définie par $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$. En utilisant (1) et (2) on vérifie facilement que: $f \circ S = f$ et $f \circ T = f$ et donc, le groupe \mathcal{H} étant engendré par S et T , f est une fonction automorphe par rapport au groupe \mathcal{H} ; elle est donc une fonction sur la bouteille de Klein \mathbb{C}/\mathcal{H} . Plus exactement, f s'identifie avec la fonction $\tilde{f}: \mathbb{C}/\mathcal{H} \rightarrow \hat{C}$ définie par $\tilde{f}(\hat{z}) = f(z)$, \hat{z} étant la classe des points \mathcal{H} -équivalents au point z . (on va voir plus loin que la correspondance $f \leftrightarrow \tilde{f}$ est un isomorphisme de corps).

Analogiquement, la fonction $g: \mathbb{C} \rightarrow \hat{C}$ définie par $g(z) = f_1(z) f_2(z)$ est une fonction automorphe par rapport au \mathcal{H} et donc, g est aussi (dans la même manière) une fonction sur la bouteille de Klein \mathbb{C}/\mathcal{H} .

3.4. Un exemple de paire de fonctions conjuguées

Soit $\mathcal{P}(z; \omega_1, \omega)$ la fonction \mathcal{P} de Weierstrass correspondante au réseau $\{n_1 \omega_1 + n \omega \mid n, n_1 \in \mathbb{Z}\}$:

$$\mathcal{P}(z; \omega_1, \omega) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(n_1, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\}} \left[\frac{1}{(z - n_1 \omega_1 - n \omega)^2} - \frac{1}{(n_1 \omega_1 + n \omega)^2} \right]$$

Soit $f_1(z) = \mathcal{P}(z; \omega_1, \omega)$ et $f_2(z) = \mathcal{P}(\alpha \bar{z} + \beta; \omega_1, \omega)$

On vérifie facilement que (f_1, f_2) est une paire conjuguée par rapport au groupe \mathcal{H} . Dans la vérification de la relation $f_2 \circ T = f_1$ on utilise le fait (établi dans le paragraphe précédent) que $\alpha \bar{\omega}_1$ est un point du réseau de \mathcal{P} .

En utilisant les relations (1) et (2) il résulte que si (f_1, f_2) est un paire conjuguée, chaque f_k , $k = 1, 2$ est une fonction automorphe par rapport au sous-groupe \mathcal{H}_1 ; donc, chaque f_k est une fonction sur le revêtement double orientable de \mathbb{C}/\mathcal{H} : la première est méromorphe et la deuxième est antiméromorphe sur le tore \mathbb{C}/\mathcal{H}_1 .

3.5. Un corps de fonctions sur la bouteille de Klein

Soit (f_1, f_2) une paire de fonctions non constantes, conjuguées par rapport au groupe \mathcal{H} .

Soit $\Sigma[X_1, X_2]$ l'anneau des polynômes symétriques à coefficients dans \mathbb{C} , à deux indéterminées X_1 et X_2 et soit $\text{Aut}(\mathcal{H})$ le corps des fonctions automorphes par rapport à \mathcal{H} , définies sur des ouverts denses du \mathbb{C} à valeurs dans \mathbb{C} et analytiques des variables réelles x et y dans leur domaine de définition.

On peut définir une application canonique $\phi : \Sigma[X_1, X_2] \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H})$ par $\phi(P)(z) = P(f_1(z), f_2(z))$. Evidemment, ϕ est un homomorphisme d'anneaux.

Proposition. L'application ϕ est injective.

Démonstration. Il nous faut démontrer que, si $P \in \Sigma[X_1, X_2]$ et $P(f_1(z), f_2(z)) = 0$ quel que soit z dans un ouvert dense, alors $P \equiv 0$.

On ordonne l'équation $P(f_1(z), f_2(z)) = 0$ d'après $f_2(z)$:

$$[f_2(z)]^n a_n(f_1(z)) + [f_2(z)]^{n-1} a_{n-1}(f_1(z)) + \dots + a_0(f_1(z)) = 0$$

où les a_k sont de polynômes à coefficients dans \mathbb{C} . Si $n \geq 1$, il résulte que $f_2(z)$ est une solution de l'équation

$$w^n a_n(f_1(z)) + w^{n-1} a_{n-1}(f_1(z)) + \dots + a_0(f_1(z)) = 0$$

Mais, on sait que chaque telle solution est une fonction analytique de $f_1(z)$ et donc de z .

Donc $n = 0$. Parce que le degré de P par rapport à $f_1(z)$ est égal au degré par rapport à $f_2(z)$; il résulte que P est une constante; donc $P \equiv 0$.

Soit $\Sigma(X_1, X_2)$ le corps des fractions de l'anneau intègre $\Sigma[X_1, X_2]$. On a un diagramme comutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma[X_1, X_2] & \xrightarrow{\phi} & \text{Aut}(\mathcal{H}) \\ \downarrow i & \nearrow \phi' & \\ \Sigma(X_1, X_2) & & \end{array}$$

où i est l'inclusion canonique et ϕ' est l'application naturelle définie par $\phi'\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{\phi(P)}{\phi(Q)}$.

ϕ' est injective parce que ϕ' est un homomorphisme d'anneaux et $\Sigma(X_1, X_2)$ est un corps.

On note $\mathcal{K}(f_1, f_2) = \phi'(\Sigma(X_1, X_2)) \subseteq \text{Aut}(\quad)$. Donc

$$\mathcal{K}(f_1, f_2) = \left\{ z \longmapsto \frac{F(f_1(z), f_2(z))}{G(f_1(z), f_2(z))} \mid F, G \in \Sigma[X_1, X_2], G \neq 0 \right\}$$

Nous retenons que $\Sigma(X_1, X_2)$ et $\mathcal{K}(f_1, f_2)$ sont isomorphes.

Un théorème concernant les polynômes symétriques affirme que

$$\Sigma[X_1, X_2] = \mathbb{C}[X_1 + X_2, X_1 X_2].$$

Donc, la \mathbb{C} -algèbre $\Sigma[X_1, X_2]$ est engendrée par $X_1 + X_2$ et $X_1 X_2$; donc son corps de fractions

$\Sigma(X_1, X_2)$ est engendré, sur son sous-corps \mathbb{C} , par $X_1 + X_2$ et $X_1 X_2$.

Donc, $\mathcal{K}(f_1, f_2)$ est engendré sur \mathbb{C} par $f_1 + f_2$ et $f_1 f_2$ (comme extension de corps).

On va montrer que $f_1 + f_2$ et $f_1 f_2$ sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{C} . Alors, il en résulte:

Theoreme 5. $\mathcal{K}(f_1, f_2)$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}(Y, Z)$ où

Y et Z sont indéterminées sur \mathbb{C} . A démontrer que $f_1 + f_2$ et $f_1 f_2$ sont algébriquement indépendantes revient à démontrer que $X_1 + X_2$ et $X_1 X_2$

$\in \mathbb{C}(X_1, X_2)$ sont algébriquement indépendantes sur \mathbb{C} . Soit F le

sous-corps engendré sur \mathbb{C} par $X_1 + X_2$ et $X_1 X_2$.

Alors $\mathbb{C}(X_1, X_2) \supseteq F$ est une extension algébrique, parce que X_1 et X_2

engendrent $\mathbb{C}(X_1, X_2)$ sur F et ils sont des solutions pour l'équation

algébrique dans z : $z^2 - (X_1 + X_2)z + X_1 X_2 = 0$. Donc, le degré de

transcendance de F sur \mathbb{C} est égal au degré de transcendance de

$\mathbb{C}(X_1, X_2)$ sur \mathbb{C} , c'est-à-dire 2. Mais F ayant le degré de transcen-

dence 2 et étant engendré par $X_1 + X_2$ et $X_1 X_2$ il en résulte que

$X_1 + X_2$ et $X_1 X_2$ sont algébriquement indépendantes.

3.6. La notion de fonction de type méromorphe sur la bouteille de Klein

Soit (f_1, f_2) une paire de fonctions conjuguée par rapport au groupe $\mathcal{G} = \{T; S\}$. Evidemment, toutes les deux fonctions f_1 et f_2 sont des fonctions harmoniques. Toutefois, le produit $f_1 f_2$ n'est plus, généralement, une fonction harmonique; donc, du point de vue de la théorie des fonctions analytiques, probablement le corps $\mathcal{K}(f_1, f_2)$ n'est pas tout à fait intéressant, ses éléments perdant la propriété d'harmonicité.

Soit $\mathcal{M} = \{f_1 + f_2 \mid (f_1, f_2) \text{ paire conjuguée par rapport au } \mathcal{G}\}$. Evidemment, les éléments de \mathcal{M} sont des fonctions harmoniques et elles ont des propriétés proches de celles des fonctions méromorphes; parce que $f_1 + f_2 = f_1 + f_1 \circ S$ les propriétés de $f_1 + f_2$ sont déterminées par celles de f_1 .

On va nommer les éléments de \mathcal{M} , fonctions de type méromorphe. Evidemment, \mathcal{M} est un \mathbb{C} -espace vectoriel. On va voir au 3.10 que \mathcal{M} admet une structure naturelle de corps.

Théorème 6. L'espace vectoriel des fonctions de type méromorphe sur la bouteille de Klein \mathbb{C}/\mathcal{G} est:

$$\mathcal{M} = \left\{ z \mapsto \frac{R_1(\mathcal{P}(z)) + \mathcal{P}'(z) R_2(\mathcal{P}(z))}{R_3(\mathcal{P}(z)) + \mathcal{P}'(z) R_4(\mathcal{P}(z))} + \frac{R_1(\mathcal{P}(\alpha \bar{z} + \beta)) + \mathcal{P}'(\alpha \bar{z} + \beta) R_2(\mathcal{P}(\alpha \bar{z} + \beta))}{R_3(\mathcal{P}(\alpha \bar{z} + \beta)) + \mathcal{P}'(\alpha \bar{z} + \beta) R_4(\mathcal{P}(\alpha \bar{z} + \beta))} \right\}$$

où R_1, \dots, R_4 sont des fonctions rationnelles et $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(z; \omega_1, \omega)$ est la fonction de Weierstrass admettant les périodes ω_1 et $\omega = \alpha\bar{\beta} + \beta$.

Démonstration. Les relations (1) et (2) donnent:

$f_1 \circ T = f_1$ et $f_1 \circ S^2 = f_2 \circ S = f_1$; donc, f_1 est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , doublement périodique. D'après un théorème de Hermite, il existe des fonctions rationnelles R_k telle que

$$f_1(z) = \frac{R_1(\mathcal{P}(z)) + \mathcal{P}'(z) R_2(\mathcal{P}(z))}{R_3(\mathcal{P}(z)) + \mathcal{P}'(z) R_4(\mathcal{P}(z))} \quad \bullet \text{ L'égalité}$$

$f_2(z) = (f_1 \circ S)(z) = f_1(\alpha\bar{z} + \beta)$ implique l'affirmation du théorème.

Evidemment, l'ensemble des fonctions constantes forme un sous-espace de \mathcal{M} .

3.7. Fonctions de type méromorphe sur le plan

projectif réel pointé

Dans ce cas, $\mathcal{H} = \{S\}$ = le groupe cyclique engendré par S , $Sz = \alpha\bar{z} + \beta$, et $\mathcal{H}_1 = \{S^2\}$ = le groupe engendré par S^2 . Le revêtement universel, dans ce cas, est aussi \mathbb{C} et le revêtement double orientable est $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$.

Comme dans le cas de la bouteille de Klein, la paire de fonctions

(f_1, f_2) s'appelle conjuguée par rapport au groupe \mathcal{G} si: f_1 est méromorphe et f_2 antiméromorphe sur \mathbb{C} et elles vérifient les conditions

$$(3) \quad \begin{cases} f_1 \circ S = f_2 \\ f_2 \circ S = f_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (4) \quad \begin{cases} f_1 \circ S^2 = f_1 \\ f_2 \circ S^2 = f_2 \end{cases}$$

Evidemment, les relations (4) sont, dans ce cas, des conséquences de (3).

La fonction $f = f_1 + f_2$ est une fonction automorphe par rapport au \mathcal{G} ; elle est donc une fonction sur le plan projectif réel pointé $\mathbb{C}/\mathcal{G} \equiv \mathbb{P}^2 \setminus \{\hat{1}\}$. Les fonctions de ce type sont nommées fonctions de type méromorphe sur $\mathbb{P}^2 \setminus \{\hat{1}\}$.

Soit $f_1(z) = \exp \frac{2\pi i z}{\omega}$, $f_2(z) = \exp \frac{2\pi i (\alpha \bar{z} + \beta)}{\omega}$. La paire (f_1, f_2) est une paire conjuguée par rapport au \mathcal{G} .

Parce que $f_1 \circ S^2 = f_1$, f_1 est une fonction automorphe par rapport au \mathcal{G}_1 ; elle est, donc, une fonction sur $\mathbb{C}/\mathcal{G}_1 \equiv \mathbb{C}^*$. Donc, il existe des fonctions entières G_1, G_2, G_3, G_4 telles que

$$f_1(z) = \frac{G_1(\exp \frac{2\pi i z}{\omega})}{G_2(\exp \frac{2\pi i z}{\omega})} + \frac{G_3(\exp \frac{-2\pi i z}{\omega})}{G_4(\exp \frac{-2\pi i z}{\omega})} \quad ([16], \text{ p.195})$$

et, par conséquent,

$\mathcal{M} = \left\{ z \mapsto f_1(z) + f_1(\alpha \bar{z} + \beta) \right\}$ (ou f_1 a la forme précédente) est l'espace des fonctions de type méromorphe sur $\mathbb{P}^2 \setminus \{\hat{1}\}$.

3.8. Fonctions de type méromorphe sur les surfaces de Riemann non orientables elliptiques

Dans ce cas, $\mathcal{G} = \left\{ z \mapsto z; z \mapsto S.z = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}-a} \right\}$ où

$$|a|^2 + bc = -1, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ et } \mathcal{G}_1 = \{1, \hat{C}\}.$$

Le revêtement universel étant la sphère de Riemann \hat{C} , la paire de fonctions (f_1, f_2) s'appelle conjuguée par rapport au \mathcal{G} si f_1 est méromorphe sur \hat{C} , f_2 est antiméromorphe et la relation suivante est remplie: $f_1 \circ S = f_2$.

f_1 étant méromorphe sur \hat{C} , est une fonction rationnelle.

Les éléments de l'ensemble $\mathcal{M} = \left\{ z \mapsto R(z) + R\left(\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}-a}\right) \mid R \text{ rationnelle} \right\}$ sont appelés fonctions de type méromorphe sur la surface \hat{C}/\mathcal{G} . En particulier, pour $a = 0, b = -1, c = 1$, on obtient le cas du plan projectif réel P^2 . Dans ce cas, $\mathcal{M} = \left\{ z \mapsto R(z) + R\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) \mid R \text{ rationnelle} \right\}$.

3.9. Fonctions de type méromorphe sur les surfaces de Riemann non orientables hyperboliques

Soit X une surface de Riemann, non orientable hyperbolique. Son revêtement universel est le demi-plan supérieur H_+ (ou le disque unité) et le groupe des transformations de recouvrement est un sous-groupe discontinu formé par d'éléments sans points fixes dans H_+ du groupe Γ des représentations conformes au anticonformes de H_+ sur lui-même.

$$\Gamma = \left\{ z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc = 1 \right\} \cup \left\{ z \rightarrow \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc = -1 \right\}.$$

Soit $f_1, f_2 : \mathbb{H}_+ \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, f_1 méromorphe et f_2 antiméromorphe.

Définition. La paire (f_1, f_2) s'appelle une paire conjuguée par rapport au groupe \mathcal{G} si les conditions suivantes sont remplies:

$$(5) \begin{cases} f_1 \circ T = f_1 \\ f_2 \circ T = f_2 \end{cases} \text{ pour } T \in \mathcal{G}_1 \text{ et } (6) \begin{cases} f_1 \circ S = f_2 \\ f_2 \circ S = f_1 \end{cases} \text{ pour } S \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_1$$

Définition. On va nommer fonction de type méromorphe sur la surface $X = \mathbb{H}_+/\mathcal{G}$ chaque élément de l'ensemble $\mathcal{M} = \{f_1 + f_2 \mid (f_1, f_2) \text{ paire conjuguée par rapport au } \mathcal{G}\}$.

En sommant les définitions antérieures on donne maintenant les définitions générales.

Soit X une surface de Riemann non orientable, \hat{X} le revêtement universel de X , \mathcal{G} le groupe des transformations de recouvrements de X et \mathcal{G}_1 le sous-groupe de \mathcal{G} formé par toutes les représentations conformes.

Soit $f_1, f_2 : \hat{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, f_1 méromorphe et f_2 antiméromorphe.

Définition. La paire (f_1, f_2) s'appelle paire conjuguée par rapport au groupe \mathcal{G} si les conditions suivantes sont remplies:

$$(7) \quad \begin{cases} f_1 \circ T = f_1 \\ f_2 \circ T = f_2 \end{cases} \quad \text{quel que soit } T \in \mathcal{H}_1 \text{ et}$$

$$(8) \quad \begin{cases} f_1 \circ S = f_2 \\ f_2 \circ S = f_1 \end{cases} \quad \text{quel que soit } S \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_1.$$

Définition. Une fonction $f : \hat{X} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ s'appelle fonction de type méromorphe sur X s'il existe (f_1, f_2) une paire conjuguée par rapport au \mathcal{H} tel que $f = f_1 + f_2$.

3.10. Le corps des fonctions de type méromorphe sur une surface de Riemann non orientable

Théorème 7. Soit S un élément fixé du $\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_1$. L'espace des fonctions de type méromorphe sur X est $\mathcal{M} = \{ f + f \circ S \mid f \text{ méromorphe sur } X \text{ et automorphe par rapport au } \mathcal{H}_1 \}$.

Démonstration. Il suffit pour cela de démontrer que $f \circ S_1 = f \circ S_2$ si f est automorphe par rapport au \mathcal{H}_1 et $S_1, S_2 \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_1$. Mais, $S_1 \circ S_2^{-1} \in \mathcal{H}_1$; donc, $f \circ S_1 \circ S_2^{-1} = f_1$ et, par conséquent, $f \circ S_1 = f \circ S_2$.

On va définir maintenant sur l'ensemble \mathcal{M} une multiplication naturelle " \ast " tel que le triplet $(\mathcal{M}, +, \ast)$ devient un corps commutatif.

Soit S un élément fixé dans $\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_1$.

Pour simplifier les notations, on note par \mathcal{A} , ou bien par

$\mathcal{A}(\hat{X}, \mathcal{H}_1)$, l'ensemble des fonctions méromorphes sur \hat{X} et automorphes par rapport au \mathcal{H}_1 . Le corps $(\mathcal{A}(\hat{X}, \mathcal{H}_1), +, \cdot)$ est, pratiquement, le corps des fonctions méromorphe sur la surface de Riemann $Y = \hat{X}/\mathcal{H}_1$ ([11], p. 211).

Soit $f + f \circ S, g + g \circ S \in \mathcal{M}$. On va définir l'opération algébrique $\ast : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ par la loi $(f + f \circ S) \ast (g + g \circ S) = fg + (fg) \circ S$.

Evidemment, cette opération est bien définie.

Théorème 8. $(\mathcal{M}, +, \ast)$ est un corps commutatif et contient un sous-corps isomorphe au corps complexe $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Démonstration. On sait déjà que $(\mathcal{M}, +)$ est un groupe abélien et, évidemment, \ast est commutative.

Soit $f + f \circ S, g + g \circ S, h + h \circ S \in \mathcal{M}$.

$$\begin{aligned} (f + f \circ S) \ast [(g + g \circ S) + (h + h \circ S)] &= (f + f \circ S) \ast [(g+h) + \\ &+ (g+h) \circ S] = f(g+h) + [f(g+h)] \circ S = (fg + fh) + \\ &+ (fg) \circ S + (fh) \circ S = [fg + (fg) \circ S] + [fh + (fh) \circ S] = \\ &= (f + f \circ S) \ast (g + g \circ S) + (f + f \circ S) \ast (h + h \circ S) \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{M}, +, \ast)$ est un anneau commutatif.

Soit $\mathbb{1}_{\mathcal{M}} = 1 + 1$ ou 1 est la fonction constante égale à 1 et soit $f + f \circ S \in \mathcal{M}$.

$$(f + f \circ S) \ast \mathbb{1}_{\mathcal{M}} = (f \cdot 1) + (f \cdot 1) \circ S = f + f \circ S.$$

Donc $\mathbb{1}_M$ est l'unité de \mathcal{M} par rapport à "+" . Pour compléter la démonstration, on va montrer que $f + f \circ S = 0_M \iff f = 0$.

$$f + f \circ S = 0 \iff f(z) + f(S(z)) = 0 \quad (\forall) z \in \hat{X} \iff$$

$$\iff f(z) = -f(S(z)) \quad (\forall) z \in \hat{X} .$$

Mais, f étant méromorphe et $f \circ S$ étant antiméromorphe, l'égalité précédente est possible si et seulement si f est une constante:

$$f(z) = c \text{ pour chaque } z \in \hat{X} .$$

$$\text{Donc, } 0 = f(z) + f(S(z)) = c + c = 2c \text{ c'est-à-dire, } c = 0 .$$

Soit, maintenant, $f + f \circ S \in \mathcal{M} \setminus \{0_M\}$.

$$\text{C'est clair que } \frac{1}{f} + \frac{1}{f} \circ S \in \mathcal{M} \text{ et } \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f} \circ S \right) * (f + f \circ S) =$$

$$= 1 + 1 = \mathbb{1}_M .$$

Donc $(\mathcal{M}, +, *)$ est un corps commutatif.

$$\text{Soit } \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0(\hat{X}, \mathcal{H}_1) = \{ f : \hat{X} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ constante} \} .$$

Evidemment $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un sous-corps de $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ isomorphe au corps des nombres complexes $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

$$\text{Soit } \mathcal{M}_0 = \{ f + f \circ S \mid f \in \mathcal{A}_0 \} = \{ c + c \mid c \in \mathbb{C} \} .$$

$(\mathcal{M}_0, +, *)$ est un sous-corps de $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ et la fonction

$$F : (\mathcal{M}_0, +, *) \rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$$

$$c + c \longmapsto F(c + c) = c \text{ est un isomorphisme.}$$

Le théorème est complètement démontré.

Théorème 9. Le corps des fonctions de type méromorphe sur la surface non orientable X est isomorphe au corps des fonctions

méromorphes sur le revêtement double orientable Y de X .

Démonstration. Soit $F : (A, +, \cdot) \longrightarrow (M, +, *)$
définie par $F(f) = f + f \circ S$. Même par la définition de M ,
l'application F est surjective.

Soit $f, g \in M$. $F(f+g) = (f+g) + (f+g) \circ S = (f+f \circ S) + (g+g \circ S) =$
 $= F(f) + F(g)$.

$$F(fg) = fg + (fg) \circ S = (f + f \circ S) * (g + g \circ S) = F(f) * F(g)$$

Dans la démonstration du théorème 8 on a vu que $\text{Ker } F = \{0\}$.

Donc F est un isomorphisme de corps.

4. FORMES DIFFÉRENTIELLES DE TYPE MÉROMORPHE
SUR DE SURFACES DE RIEMANN NON ORIENTABLES

4.1. 1-Formes différentielles

Soit la surface de Klein (X, \mathcal{A}) , $P_0 \in X$ et (U, φ) une carte de \mathcal{A} , autour de P_0 , (en particulier, un disque paramétrique centré en P_0), $\varphi(P) = z = x + iy$ un paramètre local.

Si $T^*(X, P_0)$ est l'espace cotangent complexifié, en P_0 à X , $\{dx, dy\}$ constitue une base sur \mathbb{C} de lui (la base canonique); de même, $\{dz; d\bar{z}\}$, où $dz = dx + i dy$, $d\bar{z} = dx - i dy$, est une base de $T^*(X, P_0)$ (la base canonique complexe).

Si $D \subseteq X$, une 1-forme différentielle sur D est une fonction $\omega : D \rightarrow \bigcup_{P \in X} T^*(X, P)$ tel que, si $P \in D$ alors $\omega(P) \in T^*(X, P)$.

Si (U, φ) est la carte considérée et si $P \in U$, la forme ω peut être écrite comme suit :

$\omega(P) = \omega(\varphi^{-1}(z)) = A(x, y)dx + B(x, y)dy = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$, où les fonctions $A, B, f, g : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ vérifient les relations:

$$(1) \quad \begin{cases} A = f + g \\ B = i(f - g) \end{cases} \quad \text{ou} \quad (1') \quad \begin{cases} f = \frac{1}{2}(A - iB) \\ g = \frac{1}{2}(A + iB) \end{cases}$$

4.2. Sur l'intégrale curviligne.

On considère dans la suite seulement des formes différentielle de classe C^0 .

Si $\omega : D \rightarrow \bigcup_{P \in X} T(X, P)$ est une telle forme, si $(U, \varphi), (V, \psi)$ sont de cartes sur X tel que $U \cap V \cap D \neq \emptyset$, $\varphi(P) = z$, $\psi(P) = w$ et si, en fonction de z et w , ω s'écrit (dans $U \cap D$, respectivement dans $V \cap D$),

$$\omega(P) = f(z) dz + g(z) d\bar{z}, \quad \omega(P) = (\omega \circ \psi^{-1})(w) = \tilde{f}(w) dw + \tilde{g}(w) d\bar{w},$$

alors, pour $z = z(w) = (\varphi \circ \psi^{-1})(w)$, les fonctions $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$ vérifient les relations de cohérence suivantes:

$$(2) \quad \begin{cases} \tilde{f}(w) = f(z(w)) \frac{\partial z}{\partial w}(w) + g(z(w)) \frac{\partial \bar{z}}{\partial w}(w) \\ \tilde{g}(w) = f(z(w)) \frac{\partial z}{\partial \bar{w}}(w) + g(z(w)) \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}}(w) \end{cases}$$

Soit $I = [0, 1]$, $\alpha : I \rightarrow X$ continue. La courbe $C = (\alpha, I)$ s'appelle différentiable si pour chaque carte (U, φ) telle que $\alpha(I) \cap U \neq \emptyset$ la fonction $\varphi \circ \alpha : \alpha^{-1}(U \cap \alpha(I)) \rightarrow \mathbb{C}$ est différentiable.

On suppose d'abord que C est une courbe différentiable et se trouve dans un seul disque paramétrique (U, φ) , c'est-à-dire $\alpha(I) \subset U$.

$$(3) \int_C \omega \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\varphi(C)} f(z)dz + g(z)d\bar{z} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^1 \left[f(z(t)) \frac{dz}{dt}(t) + g(z(t)) \frac{d\bar{z}}{dt}(t) \right] dt, \quad \varphi(C) \text{ étant la courbe plane } (\varphi \circ \alpha, I),$$

où $z(t) = x(t) + i y(t) = \varphi(\alpha(t))$.

Si α se trouve de même dans le disque (V, ψ) (où $\omega(P) = \tilde{f}(w)dw + \tilde{g}(w)d\bar{w}$), à cause des relations de cohérence (2),

$\int_{\psi(C)} \tilde{f}(w)dw + \tilde{g}(w)d\bar{w} = \int_{\varphi(C)} f(z)dz + g(z)d\bar{z}$ et, en conséquence, la définition de $\int_C \omega$ ne dépend pas du paramètre local utilisé;

elle est donc consistante. Ensuite, l'extension de la définition de l'intégrale sur de courbes différentiables par morceaux et, après ça, sur de telles courbes mais, situées en dehors d'un seul disque, se fait exactement comme dans le cas des surfaces de Riemann (orientables). ([15], p.153).

De même, l'intégrale des formes différentielles fermées sur de courbes arbitraires se définit exactement comme dans le cas orientable.

Nous remarquons aussi que l'intégrale d'une telle forme dépend seulement de la classe d'homotopie de la courbe C (même seulement de la classe d'homologie).

Observation. Si on écrit ω en fonction de bases $\{dx; dy\}$ des espaces $T^*(X, P)$, les relations (2) sont exactement les relations de cohérence du cas des surfaces orientables ([15], p. 152). Ce fait est parfaitement naturel parce que, du point de vue local, l'orientabilité ne joue aucun rôle: l'orientabilité d'une variété est une propriété globale pas locale.

4.3. Formes différentielles de type holomorphe
et de type méromorphe

Soit ω une 1-forme différentielle définie sur l'ensemble ouvert $D \subseteq X$ et soit $(U, \varphi), (V, \psi)$ des cartes sur X tel que $U \cap V \cap D \neq \emptyset$.

Sur les composantes connexes du $U \cap V$ où $z = (\varphi \circ \psi^{-1})(w) = z(w)$ est analytique, les relations (2) deviennent

$$(2') \quad \begin{cases} \tilde{f}(w) = f(z(w)) \frac{dz}{dw}(w) \\ \tilde{g}(w) = g(z(w)) \overline{\frac{dz}{dw}}(w) \end{cases}$$

et sur les composantes connexes où $z = z(w)$ est antianalytique, les mêmes relations deviennent

$$(2'') \quad \begin{cases} \tilde{f}(w) = g(z(w)) \frac{d\bar{z}}{dw}(w) \\ \tilde{g}(w) = f(z(w)) \overline{\frac{d\bar{z}}{dw}}(w) \end{cases}$$

En écrivant les formes différentielles ω en fonction des bases $\{dz, d\bar{z}\}$ des espaces $T^*(X, P)$, au moyen des relations (2') et (2''), on identifie des formes différentielles d'une nature particulière, formes qui prennent pour les surfaces de Riemann non orientables le rôle joué par les formes analytiques dans le cas des surfaces de Riemann orientables. Plus exactement, on a :

Définition 1: La forme différentielle $\omega : D \rightarrow \bigcup_{P \in X} T^*(X, P)$ s'appelle différentielle de type méromorphe (resp. de type holomorphe) si pour chaque carte (U, φ) , $\varphi(P) = z$, $U \cap D \neq \emptyset$, ω s'écrit $\omega(P) = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$ ou $f : \varphi(U \cap D) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est méromorphe (resp. holomorphe) et $g : \varphi(U \cap D) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est antiméromorphe (resp. antiholomorphe).

Proposition 1. La définition précédente est consistante (c'est-à-dire, la propriété de ω d'être forme de type holomorphe ou méromorphe ne dépend pas de son expression en fonction de divers paramètres locaux utilisés).

Démonstration. Supposons $z = z(w) = (\psi \circ \psi^{-1})(w)$ analytique. Alors, $\omega(P) = (\omega \circ \psi^{-1})(w) = f(z(w)) \frac{dz}{dw}(w) dw + g(z(w)) \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}(w) d\bar{w}$ et, évidemment, le coefficient du dw est une fonction holomorphe (méromorphe) et celui du $d\bar{w}$ est une fonction antiholomorphe (antiméromorphe).

Si $z = z(w)$ est antianalytique, (conformément à (2'))

$\omega(P) = g(z(w)) \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}(w) d\bar{w} + f(z(w)) \frac{dz}{dw}(w) dw$ et, de nouveau, le coefficient du dw est une fonction holomorphe (méromorphe) et celui du $d\bar{w}$ est antiholomorphe (antiméromorphe).

Définition 2. La fonction $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ s'appelle fonction de type méromorphe (resp. holomorphe) si elle vérifie les deux conditions suivantes:

a) Quelle ^(que) soit la carte (U, φ) tel que $U \cap D \neq \emptyset$, \Rightarrow
 $f|_{U \cap D} = f_1 + f_2$ où $f_1 \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap D)} : \varphi(U \cap D) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$
 est méromorphe (resp. holomorphe) et $f_2 \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap D)} : \varphi(U \cap D) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est anti-méromorphe (resp. antiholomorphe).

b) Si $(U, \varphi), (V, \psi)$ sont de cartes sur X tel que $U \cap V \cap D \neq \emptyset$ alors, quelles que soient les décompositions $f|_{U \cap D} = f_1 + f_2, f|_{V \cap D} = f_1' + f_2'$ qui vérifient la condition a), les restrictions à $U \cap V \cap D$ des fonctions f_1, f_2, f_1', f_2' vérifient les conditions de cohérence (b_1) et (b_2) :

$$(b_1) \quad \begin{cases} (f_1 \circ \varphi^{-1})(z(w)) = (f_1' \circ \psi^{-1})(w) \\ (f_2 \circ \varphi^{-1})(z(w)) = (f_2' \circ \psi^{-1})(w) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur les composantes} \\ \text{connexes du } \Psi(U \cap V \cap D) \end{array}$$

où $z = z(w) = (\varphi \circ \psi^{-1})(w)$ est analytique.

$$(b_2) \quad \begin{cases} (f_1 \circ \varphi^{-1})(z(w)) = (f_2' \circ \psi^{-1})(w) \\ (f_2 \circ \varphi^{-1})(z(w)) = (f_1' \circ \psi^{-1})(w) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur les composantes} \\ \text{connexes du } \Psi(U \cap V \cap D) \end{array}$$

où $z = z(w) = (\varphi \circ \psi^{-1})(w)$ est antianalytique.

Proposition 2. La fonction de type méromorphe $f : D \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est nulle si et seulement si les deux composantes de f (f_1 méromorphe et f_2 antiméromorphe) sont nulles.

Démonstration. D étant un ensemble ouvert, il peut être recouvert par de disques paramétriques. Soit, donc, (U, φ) un disque paramétrique tel que $U \subseteq D$. A cause de la maximalité de l'atlas \mathcal{R} , on peut supposer $\varphi(U) = \{z \mid |z| < 1\}$. Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que pour le disque (arbitraire) (U, φ) précédent, si $f|_U = f_1 + f_2 = 0$ alors $f_1 = f_2 = 0$. On a successivement:

$$0 = f(p) = (f \circ \varphi^{-1})(z) = (f_1 \circ \varphi^{-1})(z) + (f_2 \circ \varphi^{-1})(z)$$

$$\text{donc, } (f_1 \circ \varphi^{-1})(z) = - (f_2 \circ \varphi^{-1})(z)$$

pour chaque $z, |z| < 1$. Mais, $f_1 \circ \varphi^{-1}$ étant méromorphe et $f_2 \circ \varphi^{-1}$ antiméromorphe, les deux fonctions doivent être

de constantes: $f_1(P) = c, f_2(P) = -c$ quel que soit $P \in U$. Considérons encore une fois le même disque (U, φ) et la décomposition particulière $f|_U = f'_1 + f'_2$ où $f'_1 = f'_2 = 0$.

On a : $c = f_1(P) = (f_1 \circ \varphi^{-1})(z) = (f_1 \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ \varphi^{-1})(z)) \stackrel{(b_1)}{=} (f'_1 \circ \varphi^{-1})(z) = 0$.

Donc, finalement, $f_1 = f_2 = 0$.

Corollaire: Si f et g sont de fonctions de type méromorphe et si elles ont les décompositions locales $f = f_1 + f_2, g = g_1 + g_2$ alors, $f = g$ si et seulement si $f_1 = g_1$ et $f_2 = g_2$.

4.4. Le corps des fonctions de type méromorphe

(connexe et)

Soit $D \subseteq X$ un ensemble ouvert. On note par $\mathcal{M}(D)$

l'ensemble des fonctions de type méromorphe, définies sur D .

L'ensemble $\mathcal{M}(D)$ admet une structure naturelle de corps. L'addition "+" est celle habituelle et la multiplication "*" est

définie comme il suit. Si $f, g \in \mathcal{M}(D)$ et si localement $f = f_1 + f_2, g = g_1 + g_2$ (f_1 étant la composante méromorphe de f , etc), alors

$$f * g \stackrel{\text{def}}{=} f_1 g_1 + f_2 g_2.$$

Evidemment l'opération algébrique * est bien définie.

Théorème 10. $(\mathcal{M}(D), +, *)$ est un corps commutatif qui

contient un sous-corps isomorphe au corps des nombres complexes.

La démonstration de ce théorème est élémentaire. On note seule-

ment que $\mathbb{1}_{\mathcal{M}(D)} = 1 + 1$ est l'élément unité et que si $f = f_1 + f_2 \neq$

$\neq 0_{\mathcal{M}(D)}$ alors l'invers par rapport à * de f est $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ qui

est, évidemment, un élément du $\mathcal{M}(D)$. (Voir aussi le théorème 8).

Soit $(\mathcal{M}, +, *)$ le corps des fonctions de type méromorphe au sens de la définition du paragraphe précédent et soit $(\mathcal{M}(X), +, *)$ le corps

des fonctions de type méromorphe au sens de la définition 2.

Théorème 11. Les corps $(\mathcal{M}, +, *)$ et $(\mathcal{M}(X), +, *)$ sont canoniquement isomorphes.

Il s'agit de l'isomorphisme naturel analogue à celui décrit pour le cas des surfaces de Riemann orientables dans [11], p.211. La démonstration est complètement "parallèle" à celle donnée là-bas.

Conclusion: Les deux définitions données pour le concept de fonction de type méromorphe sont équivalentes.

4.5. Le $\mathcal{M}(X)$ -espace vectoriel des formes de type méromorphe

Proposition 3. Soit $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$, $\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$ (où f_2 et g_2 ne sont pas identiquement nulles), des formes de type méromorphe sur l'ensemble ouvert $D \subseteq X$. Alors, la fonction

$\frac{f_1}{f_2} + \frac{g_1}{g_2}$ est une fonction de type méromorphe sur l'ensemble D . (On va noter cette fonction par $\frac{\omega_1}{\omega_2}$).

Démonstration. Soit (U, φ) , (V, ψ) des cartes sur X tel que $U \cap V \cap D \neq \emptyset$. Soit $\varphi(P) = z$, $\psi(P) = w$ les paramètres locaux correspondants. Pour $k = 1, 2$ ω_k s'écrit dans U , respectivement dans V , de la façon suivante:

$$\omega_k(P) = f_k(z) dz + g_k(z) d\bar{z}, \text{ respectivement}$$

$$\omega_k(P) = \tilde{f}_k(w) dw + \tilde{g}_k(w) d\bar{w}$$

Parce que, pour $P \in U \cap V$, $P = \varphi^{-1}(z) = \psi^{-1}(w)$, il résulte:

$$\omega_k(P) = (f_k \circ \varphi)(P) dz + (g_k \circ \varphi)(P) d\bar{z}, \text{ respectivement}$$

$$\omega_k(P) = (\tilde{f}_k \circ \psi)(P) dw + (\tilde{g}_k \circ \psi)(P) d\bar{w}$$

La démonstration de la proposition revient à montrer que:

$$(3) \frac{(f_1 \circ \varphi)(P)}{(f_2 \circ \varphi)(P)} + \frac{(g_1 \circ \varphi)(P)}{(g_2 \circ \varphi)(P)} = \frac{(\tilde{f}_1 \circ \psi)(P)}{(\tilde{f}_2 \circ \psi)(P)} + \frac{(\tilde{g}_1 \circ \psi)(P)}{(\tilde{g}_2 \circ \psi)(P)}$$

On suppose d'abord que $z = z(w) = (\varphi \circ \psi^{-1})(w)$ est analytique.

On a successivement:

$$\frac{(\tilde{f}_1 \circ \psi)(P)}{(\tilde{f}_2 \circ \psi)(P)} + \frac{(\tilde{g}_1 \circ \psi)(P)}{(\tilde{g}_2 \circ \psi)(P)} = \frac{\tilde{f}_1(w)}{\tilde{f}_2(w)} + \frac{\tilde{g}_1(w)}{\tilde{g}_2(w)} \quad (2')$$

$$= \frac{f_1(z(w)) \frac{dz}{dw}(w)}{f_2(z(w)) \frac{dz}{dw}(w)} + \frac{g_1(z(w)) \frac{dz}{dw}(w)}{g_2(z(w)) \frac{dz}{dw}(w)} = \frac{f_1(z(w))}{f_2(z(w))} + \frac{g_1(z(w))}{g_2(z(w))} =$$

$$= \frac{(f_1 \circ \varphi \circ \psi^{-1})(w)}{(f_2 \circ \varphi \circ \psi^{-1})(w)} + \frac{(g_1 \circ \varphi \circ \psi^{-1})(w)}{(g_2 \circ \varphi \circ \psi^{-1})(w)} =$$

$$= \frac{(f_1 \circ \varphi)(P)}{(f_2 \circ \varphi)(P)} + \frac{(g_1 \circ \varphi)(P)}{(g_2 \circ \varphi)(P)}$$

c'est-à-dire l'égalité (3).

Supposons maintenant $z = z(w)$ antianalytique. Alors:

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{f}_1 \circ \psi)(P)}{(\tilde{f}_2 \circ \psi)(P)} + \frac{(\tilde{g}_1 \circ \psi)(P)}{(\tilde{g}_2 \circ \psi)(P)} &= \frac{\tilde{f}_1(w)}{\tilde{f}_2(w)} + \frac{\tilde{g}_1(w)}{\tilde{g}_2(w)} \quad (2'') \\ &= \frac{g_1(z(w)) \frac{d\bar{z}}{dw}(w)}{g_2(z(w)) \frac{d\bar{z}}{dw}(w)} + \frac{f_1(z(w)) \frac{d\bar{z}}{dw}(w)}{f_2(z(w)) \frac{d\bar{z}}{dw}(w)} = \\ &= \frac{g_1(z(w))}{g_2(z(w))} + \frac{f_1(z(w))}{f_2(z(w))} = \frac{(g_1 \circ \psi)(P)}{(g_2 \circ \psi)(P)} + \frac{(f_1 \circ \psi)(P)}{(f_2 \circ \psi)(P)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, de nouveau on a l'égalité (3).

Soit \mathcal{F} l'ensemble des formes de type méromorphe sur X . Evidemment, l'ensemble \mathcal{F} doté avec l'addition usuelle forme un groupe abélien.

Soit $f = f_1 + f_2 \in \mathcal{M}(X)$ et $\omega = g_1 dz + g_2 d\bar{z} \in \mathcal{F}$.

On va définir le produit $f * \omega$ par:

$$f * \omega \stackrel{\text{déf}}{=} (f_1 g_1) dz + (f_2 g_2) d\bar{z}.$$

Proposition 4. Dans le contexte précédent, $f * \omega \in \mathcal{F}$.

La démonstration est identique à la précédente.

Théorème 12. Le triplet $(\mathcal{F}, +, *)$ est un espace vectoriel à une dimension sur le corps $(\mathcal{M}(X), +, *)$.

Démonstration: On vérifie facilement que $(\mathcal{F}, +, *)$ est un espace vectoriel sur $(\mathcal{M}(X), +, *)$.

Il reste à trouver sa dimension. Soit ω_0 un élément non nul fixé dans \mathcal{F} . Soit $\omega \in \mathcal{F}$. Dans la proposition 3 on a démontré que $\frac{\omega}{\omega_0} \in \mathcal{M}(X)$. Evidemment $\omega = \frac{\omega}{\omega_0} * \omega_0$; donc l'ensemble $\{\omega_0\}$ forme une base pour $(\mathcal{F}, +, *)$ sur le corps $(\mathcal{M}(X), +, *)$. Le théorème est démontré.

Observation. Soit la surface ^(de) Klein orientable (X, \mathcal{A}) et soit \mathcal{A}_1 un sous-atlas analytique (et maximal) du \mathcal{A} . Soit D un sous-ensemble ouvert de X . Considérons D comme sous-ensemble de la surface de Riemann (X, \mathcal{A}_1) . Soit ω_2 une forme méromorphe non nulle sur D et soit $\omega_1 = f_1 dz$ une autre forme méromorphe. Dans ces conditions, $\omega_1 + 0 d\bar{z}$ et $\omega_2 + 1 d\bar{z}$ sont des formes différentielles de type méromorphe sur D ($D \subseteq (X, \mathcal{A}_1)$!). Dans ce contexte, la proposition 3 devient le théorème 6-11 du [15] (p.175), un théorème qui contient en dedans le fait que l'ensemble des formes méromorphes sur une surface de Riemann orientable forme un espace vectoriel à dimension 1 sur le corps des fonctions méromorphes sur cette surface.

4.6. L'ordre d'une forme différentielle de type méromorphe, dans un point. Résidu

Soit ω une forme différentielle de type méromorphe définie sur l'ensemble ouvert $D \subseteq X$ et soit (U, φ) une carte sur X , $\varphi(P) = z$, $U \cap D \neq \emptyset$.

En fonction de z , sur $U \cap D$, ω s'écrit: $\omega(P) = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$.

Soit $z_0 \in \mathcal{U}(U \cap D)$ et $\rho > 0$ tel que $\{z \mid |z - z_0| < \rho\} \subseteq \mathcal{U}(U \cap D)$.

On suppose que $f(z) = \sum_{n=\mu}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n=\lambda}^{\infty} b_n(\bar{z}-\bar{z}_0)^n$,
 $a_\mu \neq 0$, $b_\lambda \neq 0$.

On dit, dans ce cas, que P_0 est un pôle pour la forme ω si
 $\mu < 0$ ou $\lambda < 0$.

On note $\nu(f; z_0) = \mu$, $\nu(g; z_0) = \lambda$.

Le nombre $\nu(\omega; P_0) = \frac{1}{2} [\nu(f; z_0) + \nu(g; z_0)]$ est un invariant par rapport au changement du paramètre local. Ce nombre s'appelle l'ordre de ω dans le point P_0 .

Si \mathcal{A} est un atlas dianalytique effectif, à cause des relations (2), $\nu(f; z_0) = \nu(g; z_0)$ parce que si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ alors $(U, \bar{\varphi}) \in \mathcal{A}$; dans ce cas, $\nu(\omega; P_0) = \nu(f; z_0) = \nu(g; z_0)$ et on va dire que ω a un pôle d'ordre $-\nu(\omega; P_0)$ en P_0 si $\nu(\omega; P_0) < 0$ et un zero d'ordre $\nu(\omega; P_0)$ si $\nu(\omega; P_0) > 0$.

Si (X, \mathcal{A}) est orientable et si \mathcal{A}_1 est un sous-atlas analytique (maximal) de \mathcal{A} alors, pour la surface de Riemann (X, \mathcal{A}_1) les relations (2'') n'interviennent pas. La somme des deux formes, l'une méromorphe et l'autre antiméromorphe sur $D(D \subseteq (X, \mathcal{A}_1))$ est une forme de type méromorphe. Dans ce cas $\nu(f; z_0)$ et $\nu(g; z_0)$ peuvent être différentes et $\nu(\omega; P_0)$ n'est plus, généralement, un nombre entier; $\nu(\omega; P_0)$ a la forme $\frac{k}{2}$ ou $k \in \mathbb{Z}$.

Evidemment, l'ensemble des pôles de la forme ω est formé par des points isolés.

Soit $P_0 \in D$ un pôle pour ω et soit (U, φ) un disque paramétrique autour de P_0 :

$\varphi: U \longrightarrow \{z \mid |z - z_0| < 1\}$, $\varphi(P_0) = z_0$. Soit $C = (\alpha, I)$ une courbe de Jordan sur X bornant le domaine $\mathcal{D} \subseteq U \cap D$, $P_0 \in \mathcal{D}$ et tel que l'index de z_0 par rapport à la courbe $(\varphi \circ \alpha, I)$ du plan (z) soit 1. En particulier C peut être la pré-image par φ de la courbe

$$\lambda_r: t \longrightarrow r e^{2\pi i t} + z_0 \quad \text{où } 0 < r < 1, t \in I.$$

On définit le résidu de ω dans le point P_0 par:

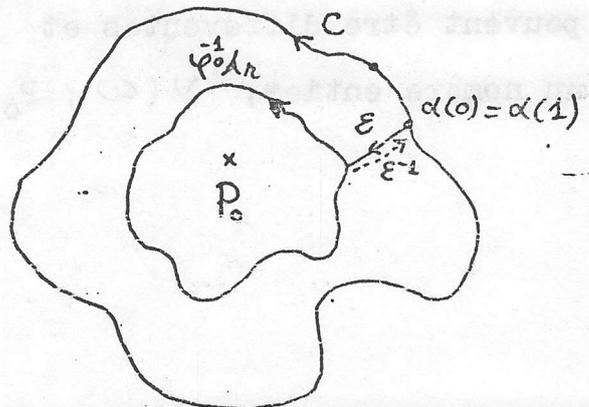
$$(4) \operatorname{Res}(\omega; P_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(C)} (\omega \circ \varphi^{-1})(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \omega, \quad C$$

étant la courbe précédente.

Parce que ω est une forme fermée et la courbe C est homotope à une courbe de la forme $[\varepsilon * (\varphi^{-1} \circ \lambda_r)] * \varepsilon^{-1}$ (voir la figure), $\int_C \omega$ dépend seulement de ω . On a noté par $*$ la composition habituelle des chemins et par ε^{-1} l'invers du chemin ε .

Soit G un domaine du plan (z) et $\lambda: [a, b] \rightarrow G$ une fonction différentiable par morceaux.

Si $h: \lambda([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ est



continue, on vérifie facilement que

$$\int_{\lambda} \overline{h(z)} d\bar{z} = \overline{\int_{\lambda} h(z) dz}$$

En utilisant ce fait, on va calculer le résidu de ω en P_0 en fonction des résidus de f et g dans le point z_0 :

$$\begin{aligned} \operatorname{Rez}(\omega, P_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_r} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_r} g(z) d\bar{z} = \\ &= a_{-1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_r} \overline{g(z)} d\bar{z} = a_{-1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_r} \overline{g(z)} dz = \\ &= a_{-1} + \frac{1}{2\pi i} \overline{2\pi i b_{-1}} = a_{-1} - b_{-1}. \end{aligned}$$

Soit (V, ψ) une autre carte autour de P_0 , $\psi(P) = w$, $\psi(P_0) = w_0$, $\omega(P) = \tilde{f}(w) dw + \tilde{g}(w) d\bar{w}$, où

$$\tilde{f}(w) = \sum_{n=k}^{\infty} \tilde{a}_n (w - w_0)^n \quad \text{et} \quad \tilde{g}(w) = \sum_{n=l}^{\infty} \tilde{b}_n (\bar{w} - \bar{w}_0)^n$$

(k et l étant les nombres antérieurs λ et μ).

Théorème 13. Avec les notations antérieures, les nombres complexes a_{-1} , b_{-1} , \tilde{a}_{-1} , \tilde{b}_{-1} vérifient les relations:

$$(1) \quad \begin{cases} \tilde{a}_{-1} = a_{-1} \\ \tilde{b}_{-1} = b_{-1} \end{cases} \quad \text{si } \varphi \circ \psi^{-1} \text{ est analytique;}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \tilde{a}_{-1} = b_{-1} \\ \tilde{b}_{-1} = a_{-1} \end{cases} \quad \text{si } \varphi \circ \psi \text{ est antianalytique.}$$

Démonstration. On suppose $z_0 = 0, w_0 = 0$. Si $\varphi \circ \psi^{-1}$ est analytique, le résultat est bien connu. Supposons donc $\varphi \circ \psi^{-1}$ antianalytique. Si γ est une courbe différentiable par morceaux ayant l'image contenue dans l'ensemble ouvert D du plan complexe (w) et si $\ell: D \rightarrow \Delta$ (= ensemble ouvert du plan complexe (z)) est une fonction holomorphe alors, en notant $\Gamma = \ell \circ \gamma$, on a la relation:

$$\int_{\Gamma} h(z) dz = \int_{\gamma} h(\ell(w)) \ell'(w) dw \quad ([7], p. 76).$$

On va noter par k la fonction $z \rightarrow k(z) = \bar{z}$.

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{f}(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z(w)) \frac{d\bar{z}}{dw}(w) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (g \circ k)(\bar{z}(w)) \frac{d\bar{z}}{dw}(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (g \circ k)(z) d\bar{z} = \\ &= I(\Gamma; 0) \operatorname{Rez}(g \circ k; 0) = \operatorname{Rez}(g \circ k; 0) = b_{-1}. \end{aligned}$$

On a noté par γ le chemin $t \rightarrow e^{2\pi it}$, $t \in I$, Γ le chemin $(\varphi \circ \psi^{-1}) \circ \gamma$, $I(\Gamma; 0)$ l'index du 0 par rapport à Γ . De la même manière on démontre que $\tilde{b}_{-1} = a_{-1}$. Donc, dans le cas (ii) on a : $a_{-1} - b_{-1} = - [a_{-1} - b_{-1}]$.

Par conséquent, $\text{Rez}(\omega; P_0)$ est bien défini jusqu'à un changement de signe. On va voir plus loin que c'est un fait naturel.

4.7. Le théorème de Cauchy des résidus

On sait que si X est une surface topologique compacte, elle peut être représentée topologiquement sur un polygone plan Π tel que les côtés de la frontière $\partial\Pi$ du Π sont identifiés en paires et $\partial\Pi$ a le symbole

$$(*) \sum = A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_{g_2} B_{g_2} A_{g_2}^{-1} B_{g_2}^{-1} C_1 C_1 \dots C_{g_1} C_{g_1}$$

Si $g_1 = 0$ on obtient le symbole connu du tore généralisé ayant g_2 trous. Dans ce cas, la surface X est orientable et le nombre $g = g_2$ s'appelle le genre de X . Si $g_1 \neq 0$, la surface X est non orientable et le nombre $g = 2g_2 + g_1$ est un invariant topologique de la surface X nommé aussi le genre de X .

Dans le cas $g_1 \neq 0$, les nombres g_1 et g_2 ne sont pas d'invariants topologiques. Par exemple, Π peut être remplacé par un polygone Π tel que le symbole correspondant a les nombres analogues g_1' et g_2' respectivement $g_1 + 2$ et $g_2 - 1$, ou bien par un polygone Π'' tel que son symbole (pour $\partial\Pi''$) est

$$\Sigma'' = D_1 D_1 \dots D_g D_g, \text{ où } g = 2g_2 + g_1.$$

Soit X une surface non orientable ayant le genre g . Si g est un nombre pair on peut prendre $g_2 = \frac{g-2}{2}$ et $g_1 = 2$. Si g est un nombre impair on peut prendre $g_2 = \frac{g-1}{2}$ et $g_1 = 1$. (Pour les considérations concernant la topologie des surfaces, on peut consulter [10], p.76-80). Nous utiliserons, en général, la forme $(*)$ pour le symbole Σ parce que cette forme contient tous les deux cas de surfaces (orientable et non orientable) et elle marque le fait que les surfaces de Klein (compactes) sont plus générales que les surfaces de Riemann (compactes).

Soit a_k, b_k, c_ℓ les courbes de X qui correspondent aux A_k, B_k, C_ℓ par la représentation de X sur le polygone Π . L'ensemble $\{a_1, \dots, a_{g_2}; b_1, \dots, b_{g_2}; c_1, \dots, c_{g_1}\}$ est une base du groupe d'homologie $H^1(X)$. Nous disons que $\{c_1, \dots, c_{g_1}\}$ est un système complet de cycles unilatéraux indépendants d'une base du $H^1(X)$.

Soit X_{g_2} la surface (évidemment ouverte) obtenue en éloignant de X les courbes c_1, c_2, \dots, c_{g_1} .

X_{g_2} est une surface orientable ($X_{g_2} = X$ si $g_1 = 0$) ayant le genre g_2 et la frontière idéale formée par un seul élément.

Si $g_1 \neq 0$ et $g_2 = \frac{g-2}{2}$ ou $\frac{g-1}{2}$ (pour g nombre pair respectivement impair), nous disons que X_{g_2} la sous-surface maximale orientable de X .

Soit $\mathcal{A} = \{(U_i; \varphi_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ un atlas dianalytique maximal sur X .

Soit $\mathcal{A}_{g_2} = \{(U_i \cap X_{g_2}, \varphi_i|_{U_i \cap X_{g_2}}, \varphi_i(U_i \cap X_{g_2}))\}_{i \in I}$

X_{g_2} étant orientable, \mathcal{A}_{g_2} contient deux sous-atlas analytiques maximaux $\mathcal{A}_{g_2}^1$ et $\mathcal{A}_{g_2}^2$ (correspondants aux deux orientations possibles de X_{g_2}).

Choisir $\mathcal{A}_{g_2}^1$ ou $\mathcal{A}_{g_2}^2$ comme structure sur X_{g_2} est équivalent à choisir un sens pour parcourir la frontière $\partial\pi$ de π .

Soit ω une forme différentielle de type méromorphe sur X , P_0 un pôle de ω extérieur aux courbes C_k , $1 \leq k \leq g_1$. Si on utilise dans la relation (4) seulement des cartes du $\mathcal{A}_{g_2}^1$ (ou bien seulement des cartes du $\mathcal{A}_{g_2}^2$), alors $\text{Rez}(\omega; P_0)$ est invariantement défini.

Le changement de signe mentionné à la fin du théorème 13 correspond au changement entre $\mathcal{A}_{g_2}^1$ et $\mathcal{A}_{g_2}^2$.

Ce phénomène a lieu aussi dans le cas des surfaces orientables.

Soit X une surface orientable et soit \mathcal{A} un atlas dianalytique maximale sur X . Soit \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 les deux sous-atlas analytiques du \mathcal{A} . (X, \mathcal{A}_1) et (X, \mathcal{A}_2) sont des surfaces de Riemann orientables. Soit ω une forme méromorphe sur (X, \mathcal{A}_1) ayant

le pôle P_0 et $\text{Rez}(\omega ; P_0) = k$. Sur la surface (X, \mathcal{R}_2) ω devient une forme antiméromorphe et ici son résidu en P_0 est $\text{Rez}(\omega ; P_0) = -k$.

Donc, le fait que $\text{Rez}(\omega ; P_0)$ est bien défini seulement jusqu'à un changement de signe, mentionné à la fin du théorème 13, est un fait naturel.

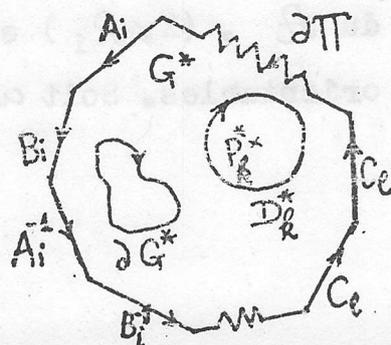
Soit $G \subseteq X$ un domaine ayant la frontière formée par un nombre fini de courbes de Jordan tel que $X \setminus \bar{G}$ a un nombre fini de domaines simplement connexes et tel que les courbes a_k, b_k, c_ℓ ne rencontrent pas l'ensemble ∂G . On va fixer dans $X_{\mathcal{E}_2}$ une des deux orientations, par exemple celle donnée par $\mathcal{R}_{\mathcal{G}_2}^1$ et on oriente ∂G avec l'orientation standard donnée par la surface de Riemann $(X, \mathcal{R}_{\mathcal{G}_2}^1)$.

(Dans la figure est présentée l'image dans le plan du \mathbb{T} des phénomènes qui ont lieu sur X). Soit, sur la surface X , une triangulation Δ ayant les propriétés suivantes:

- a) Chaque courbe a_k, b_k, c_ℓ est une succession de côtés de Δ ;
- b) Les courbes du ∂G sont des successions de côtés de Δ ;
- c) Chaque triangle de Δ est contenu dans un seul disque paramétrique ([15], pag.106). On peut maintenant énoncer le théorème de Cauchy.

Théorème 14. Soit ω une forme de type méromorphe sur \bar{G} et ayant les pôles $P_1, P_2, \dots, P_m \in G$ et n'ayant pas de singularités sur ∂G . Alors,

$$\int_{\partial G} \omega = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Rez}(\omega ; P_k) - 2 \sum_{\ell=1}^{g_1} \int_{c_\ell} \omega .$$



(Les résidus sont calculés dans la surface de Riemann $(X, \mathcal{R}_{g_2}^1)$ et les orientations de c_k sont celles données par le sens fixé dans $\partial\mathbb{T}$).

Démonstration. Comme d'habitude, ω s'appelle forme de type méromorphe sur \bar{G} si elle est de type méromorphe sur un ouvert V tel que $\bar{G} \subset V$. Pour chaque $k, 1 \leq k \leq m$, on considère D_k un disque paramétrique centré en P_k , tel que:

- $\bar{D}_k \subset G$ quel que soit k ;
- $k_1 \neq k_2 \Rightarrow \bar{D}_{k_1} \cap \bar{D}_{k_2} = \emptyset$.

(Dans la figure, G^* est l'image de G , ∂G^* est l'image de ∂G , P_k^* est l'image de P_k et D_k^* l'image de D_k , dans le plan du polygone \mathbb{T}).

On peut supposer, modifiant éventuellement la triangulation Δ , que ∂D_k est formé par des côtés du Δ .

Si s^2 est un triangle du Δ , situé dans $G' = \bar{G} \setminus \bigcup_{k=1}^m D_k$, ω étant une forme de type holomorphe sur G' , conformément au lemme de Goursat, $\int_{\partial s^2} \omega = 0$.

Soit $\Delta' = \{s^2 \in \Delta \mid s^2 \subset G'\}$. On a, successivement:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s^2 \in \Delta'} \int_{\partial s^2} \omega = \int_{(\partial G') \cup (\partial \mathbb{T}')} \omega \\ &= \int_{\partial G} \omega + \int_{\partial \mathbb{T}'} \omega - \sum_{k=1}^m \int_{\partial D_k} \omega \end{aligned}$$

(On a noté par \mathbb{T}' la pré-image de \mathbb{T} dans X par la représentation de X sur \mathbb{T}).

$$\text{Donc: } (*) \int_{\partial G} \omega = \sum_{k=1}^m \int_{\partial D_k} \omega - \int_{\partial \Pi'} \omega .$$

$$(**) \int_{\partial D_k} \omega = 2\pi i \operatorname{Res}(\omega; P_k)$$

$$(***) \int_{\partial \Pi'} \omega = \sum_{l=1}^{g_2} \int_{a_l b_l a_l^{-1} b_l^{-1}} \omega + \sum_{l=1}^{g_1} \int_{c_l c_l} \omega = 2 \sum_{l=1}^{g_1} \int_{c_l} \omega$$

Les égalités (*), (**) et (***) impliquent l'affirmation du théorème.

Conséquences du Théorème de Cauchy

1) Comme on a déjà vu, les deux nombres g_1 et g_2 ne sont pas d'invariants de la surface X . Toutefois, on peut formuler le théorème suivant:

Théorème 15: Dans le contexte du théorème de Cauchy, quel que soit $\{c_1, c_2, \dots, c_{g_1}\}$ un système complet de cycles unilatéraux indépendants d'une base du $H^1(X)$, le nombre $\sum_{l=1}^{g_1} \int_{c_l} \omega$ est invariant jusqu'à un changement de signe. (Le changement correspond au remplacement du $\mathcal{A}_{g_2}^1$ par $\mathcal{A}_{g_2}^2$).

2) Soient (X, \mathcal{A}) une surface de Klein orientable et \mathcal{A}_1 un sous-atlas analytique maximal du \mathcal{A} . Sur la surface de Riemann (X, \mathcal{A}_1) , soit ω_1 une forme méromorphe et ω_2 une forme antiméromorphe. Alors, $\omega = \omega_1 + \omega_2$ est une forme de type méromorphe sur (X, \mathcal{A}_1) et le théorème de Cauchy prend la forme (parce que $g_1 = 0$):

$$\int_{\partial G} \omega = 2\pi i \sum_{P \in G} \operatorname{Res}(\omega_1; P) - 2\pi i \sum_{P \in G} \operatorname{Res}(\omega_2; P)$$

En particulier, si ω_2 est la forme nulle, la relation précédente se réduit à :

$$\int_{\partial G} \omega = 2\pi i \sum_{P \in G} \operatorname{Res}(\omega; P), \text{ c'est-à-dire la forme classique du théorème de Cauchy sur les surfaces de Riemann orientables.}$$

3) Supposons maintenant la situation $G = X$. Dans ce cas, $\partial G = \emptyset$ et, donc, $\int_{\partial G} \omega = 0$. Le théorème de Cauchy implique l'égalité :

$$\sum_{P \in X} \operatorname{Res}(\omega; P) = \frac{1}{\pi i} \sum_{\ell=1}^{g_1} \int_{C_\ell} \omega$$

c'est-à-dire, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 16: La somme des résidus d'une différentielle de type méromorphe sur une surface de Riemann non orientable compacte est $\frac{1}{\pi i}$ fois la somme des intégrales de ω sur un système complet de cycles unilatéraux indépendants d'une base du groupe $H^1(X)$.

4) Soit (X, \mathcal{A}) une surface de Klein compacte orientable et \mathcal{A}_1 un sous-atlas analytique du \mathcal{A} . Soit ω une forme de type méromorphe sur (X, \mathcal{A}) . Dans ce cas, la somme des résidus de ω est zero. Plus particulièrement, si ω est une forme méromorphe sur la surface de Riemann (X, \mathcal{A}_1) , alors la somme des résidus de ω est zero, de nouveau un résultat classique de la théorie des surfaces orientables.

5) Soit ω une forme de type holomorphe sur la surface de Riemann non orientable (X, \mathcal{A}) . Le théorème 16 conduit au théorème suivant:

Théorème 17: La somme des intégrales d'une forme de type holomorphe sur un système complet de cycles unilatéraux indépendants d'une base du groupe $H^1(X)$ est zero:
$$\sum_{\ell=1}^{g_1} \int_{C_\ell} \omega = 0.$$

4.8. Une conclusion concernant les questions présentées dans les paragraphes 3 et 4

Soit (X, \mathcal{A}) une surface de Riemann non orientable. Soit \tilde{X} le revêtement double orientable de X et $\tilde{\mathcal{A}}$ la structure dianalytique induite sur \tilde{X} par \mathcal{A} . Soit $\tilde{\mathcal{A}}_1$ et $\tilde{\mathcal{A}}_2$ les deux sous-atlas analytiques de $\tilde{\mathcal{A}}$. Soit $\tilde{X}_1 = (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}_1)$ et $\tilde{X}_2 = (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}}_2)$.

Ayant en vue les questions étudiées dans les paragraphes 3 et 4, on observe une-forte liaison entre ces questions et les problèmes naturels qui se posent sur la variété Y , Y étant la diagonale du produit cartésien $X_1 \times X_2$. Voir de nouveau le corps $\mathcal{K}(i_1, i_2)$, (corps qui subsiste aussi dans le cas général !) étudié dans le paragraphe précédent, (le théorème 5).

5. LE THÉOREME DE RIEMANN-ROCH SUR DES SURFACES DE RIEMANN NON ORIENTABLES

Soit (X, \mathcal{A}) une surface de Riemann non orientable et (Y, \mathcal{B}) une surface de Klein.

Soit $f: (Y, \mathcal{B}) \longrightarrow (X, \mathcal{A})$ un morphisme de degré n . Si r est l'ordre total de ramification de f , il est donné par la formule de Hurwitz-Kerékjártó ([12], p.160):

$$r = g_{1Y} + 2g_{2Y} - 2 - n(g_{1X} + 2g_{2X} - 2)$$

Si Y est orientable et si f est un revêtement de degré $n = 2$, on a : $g_{1Y} = r = 0$. Donc, $g_{2Y} = g_Y$ est le genre de Y . La formule précédente conduit à :

$$(1) \quad g_Y = g_X - 1,$$

une égalité déjà mentionnée à la fin du paragraphe 3.

Dans la suite $f: (Y, \mathcal{B}) \longrightarrow (X, \mathcal{A})$ sera le revêtement orientable, de degré 2, \mathcal{B} étant un atlas analytique.

Soit $\alpha = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_m}$ un diviseur sur X . On a :

$$f^{-1}(P_k) = \{ \tilde{P}_{k1}, \tilde{P}_{k2} \} \quad \text{où} \quad \tilde{P}_{k1} \neq \tilde{P}_{k2} \quad \text{quel que soit } k.$$

On définit le diviseur $f^{-1}(\alpha)$, sur Y , par l'égalité :

$$f^{-1}(\alpha) = \tilde{P}_{11}^{\alpha_1} \tilde{P}_{12}^{\alpha_1} \tilde{P}_{21}^{\alpha_2} \tilde{P}_{22}^{\alpha_2} \dots \tilde{P}_{n1}^{\alpha_m} \tilde{P}_{n2}^{\alpha_m}.$$

Si $d[\alpha] = \sum_1^m \alpha_k$ est le degré de α , évidemment, le degré $d[f^{-1}(\alpha)]$ vérifie :

$$(2) \quad d[f^{-1}(\alpha)] = 2d[\alpha].$$

Soit $(\mathcal{M}(X), +, *)$ le corps des fonctions de type méromorphe, défini dans le paragraphe précédent.

Soit $g = g_1 + g_2 \in \mathcal{M}(X)$, g_1 étant la composante (locale) méromorphe de g . Si $P_0 \in X$ et si (U, φ) est une carte autour de P_0 , $\varphi(P) = z$, $\varphi(P_0) = z_0$, alors, pour P assez voisin de P_0 , on a :

$$g_1(P) = (g_1 \circ \varphi^{-1})(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{et}$$

$$g_2(P) = (g_2 \circ \varphi)(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

\mathcal{A} étant maximal $(U, \bar{\varphi}) \in \mathcal{A}$ et, à cause des relations de cohérence de la définition 2, § 4, on a : $n_0 = n_1$.

On note ce nombre par $\nu(g; P_0)$ et il s'appelle l'ordre de g en P_0 . Evidemment, $\nu(g; P_0)$ est indépendant de (U, φ) .

En supposant $g \not\equiv 0$, on définit le diviseur (g) de g par :

$$(g) = \prod_{P \in X} P^{\nu(g; P)}$$

De la même façon, si ω est une forme différentielle de type méromorphe, $\omega \not\equiv 0$, on définit le diviseur (ω) de ω , par :

$$(\omega) = \prod_{P \in X} P^{\nu(\omega; P)}$$

Soit $M(Y)$ le corps des fonctions méromorphes sur la surface (Y, \mathcal{B}) .

Soit : $L(\alpha) = \{ g \in \mathcal{M}(X) \mid (g) = ab, b = \text{diviseur entier} \}$

$\tilde{L}(f^{-1}(\alpha)) = \{ h \in \mathcal{M}(Y) \mid (h) = f^{-1}(\alpha) \tilde{c}, \tilde{c} = \text{diviseur entier} \}$

$\Omega(\alpha) = \{ \omega \mid (\omega) = ab, b = \text{diviseur entier} \}$

$\tilde{\Omega}(f^{-1}(\alpha)) = \{ \delta \mid \delta = \text{forme différentielle méromorphe} \}$
 et $(\delta) = f^{-1}(\alpha) \tilde{c},$

$\tilde{c} = \text{diviseur entier} \}$

Théorème 1. Les \mathbb{C} -espaces vectoriels $L(\alpha)$ et $\tilde{L}(f^{-1}(\alpha))$ sont canoniquement isomorphes.

Démonstration. Il s'agit de l'isomorphisme naturel $f_{\#}$ induit par f :

$$f_{\#} : (\mathcal{M}(X), +, \cdot) \rightarrow (\mathcal{M}(Y), +, \cdot)$$

$$g = g_1 + g_2 \longmapsto f_{\#}(g) \stackrel{\text{déf}}{=} g_1 \circ f$$

On vérifie facilement que $f_{\#}(g+h) = f_{\#}(g) + f_{\#}(h)$ et $f_{\#}(g \cdot h) = f_{\#}(g) \cdot f_{\#}(h)$ quelles que soient g et h dans $\mathcal{M}(X)$.

Soit $g \in \text{Ker } f_{\#}$. Parce que f est surjective, $g_1 = 0$. D'après la proposition 2, § 4, il en résulte que $g_2 = 0$; donc $g = 0$ et, finalement, $\text{Ker } f_{\#} = \{0_{\mathcal{M}(X)}\}$.

Démontrons maintenant la surjectivité du morphisme $f_{\#}$. Donner une fonction de type méromorphe sur X s'est donner un recouvrement ouvert $\{U\}$ de X et d'une famille de fonctions $\{g^U\}$ où chaque g^U est une fonction de type méromorphe sur la sous-variété U de X et tel que, si $U_1, U_2 \in \{U\}$ et $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ alors, les restrictions de g^{U_1} et g^{U_2} à $U_1 \cap U_2$ sont

égales:

$$g^{U_1}|_{U_1 \cap U_2} = g^{U_2}|_{U_1 \cap U_2}.$$

En utilisant cette observation, on démontre la surjectivité de $f_{\#}$.
 A étant maximal, il contient un sous-atlas \mathcal{C} formé par des disques paramétriques (U, φ) tel que U est régulièrement recouvert par f et $\varphi(U) = \{z \mid |z| < 1\}$. Si, pour $P \in U$, $\varphi(P) = z$, on note $\bar{P} = \varphi^{-1}(\bar{z})$ où \bar{z} est le conjugué complexe de z .

Soit, maintenant, $h \in M(Y)$. Soit \tilde{U} une (des deux !) composante connexe de l'ensemble $f^{-1}(U)$.

$f_{\tilde{U}} = f|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ est un homéomorphisme dianalityque

On définit la fonction g_h^U par:

$$g_h^U(P) = (h \circ f_{\tilde{U}}^{-1})(P) + (h \circ f_{\tilde{U}}^{-1})(\bar{P})$$

Evidemment, g_h^U est une fonction de type méromorphe sur U . Le paramètre local induit dans \tilde{U} par φ est $\psi_{\tilde{U}} = \varphi \circ f_{\tilde{U}}$.

$$(**) \quad (h \circ \psi_{\tilde{U}}^{-1})(z) = (h \circ f_{\tilde{U}}^{-1})(\varphi^{-1}(z)) = (h \circ f_{\tilde{U}}^{-1})(P)$$

Donc, la composante méromorphe de g est $h \circ f_{\tilde{U}}^{-1}$.

La famille $\{g_h^U\}_{(U, \varphi) \in \mathcal{C}}$ est une famille comme on l'a plus haut mentionné; donc, elle définit une fonction de type méromorphe sur X .

A cause de (**), on a:

$$f_{\#}(g_h) = (h \circ f_{\tilde{U}}^{-1}) \circ f = h|_{\tilde{U}}$$

Donc $f_{\#}$ est une fonction surjective.

En conséquence, $f_{\#}$ est un isomorphisme.

Soit $g \in \mathcal{M}(X)$. Si $\tilde{P} \in Y$, on vérifie facilement que
$$\mathcal{V}(g; f(\tilde{P})) = \mathcal{V}(f_{\#}(g); \tilde{P})$$

Donc, la restriction de $f_{\#}$ à l'espace $L(\alpha)$ est un isomorphisme de ceci sur $\tilde{L}(f^{-1}(\alpha))$.

Corollaire: Si $r[\alpha]$ est la dimension de l'espace $L(\alpha)$ alors, on a:

$$(3) \quad r[\alpha] = \dim L(\alpha) = \dim \tilde{L}(f^{-1}(\alpha)).$$

Théorème 2. Les \mathbb{C} -espaces vectoriels $\Omega(\alpha)$ et $\tilde{\Omega}(f^{-1}(\alpha))$ sont canoniquement isomorphes.

La démonstration de ce théorème est tout-à-fait analogue à la précédente.

Donc, si $i[\alpha]$ est la dimension de l'espace $\Omega(\alpha)$, on a :

$$(4) \quad i[\alpha] = \dim \Omega(\alpha) = \dim \tilde{\Omega}(f^{-1}(\alpha))$$

On peut maintenant énoncer le théorème de Riemann-Roch.

Théorème 3 (Riemann-Roch).

Si X est une surface de Riemann non orientable compacte de genre g et si α est un diviseur de degré $d[\alpha]$ alors, la dimension $r\left[\frac{1}{\alpha}\right]$ de l'espace $L\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ est:

$$r\left[\frac{1}{a}\right] = 2d[a] + i[a] - g + 2$$

Démonstration: Sur la surface de Riemann (orientable) (Y, \mathcal{B}) , on applique le théorème de Riemann-Roch ([15], p.264) aux diviseurs $\frac{1}{f^{-1}(a)}$ et $f^{-1}(a)$ et aux espaces

$$\tilde{L}\left(\frac{1}{f^{-1}(a)}\right) \text{ et } \tilde{\Omega}(f^{-1}(a)) :$$

$$r\left[\frac{1}{f^{-1}(a)}\right] = d[f^{-1}(a)] + i[f^{-1}(a)] - g_Y + 1$$

D'après les égalités (1)-(4), on a :

$$r\left[\frac{1}{a}\right] = 2d[a] + i[a] - g + 2$$

Le théorème est démontré.

Corollaire(l'inégalité de Riemann).

$$r\left[\frac{1}{a}\right] \geq 2d[a] - g + 2$$

—//—

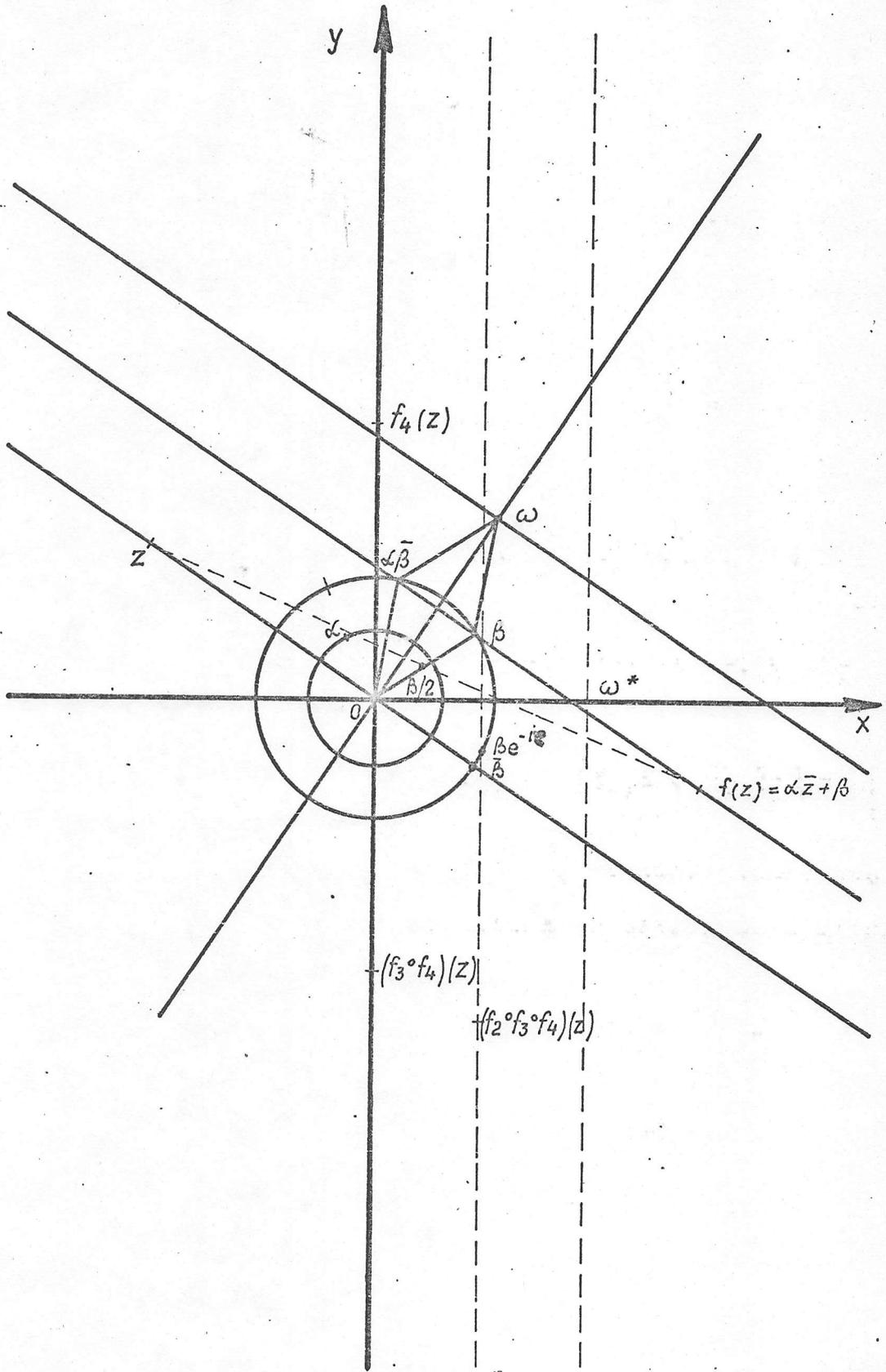


Fig. 1.

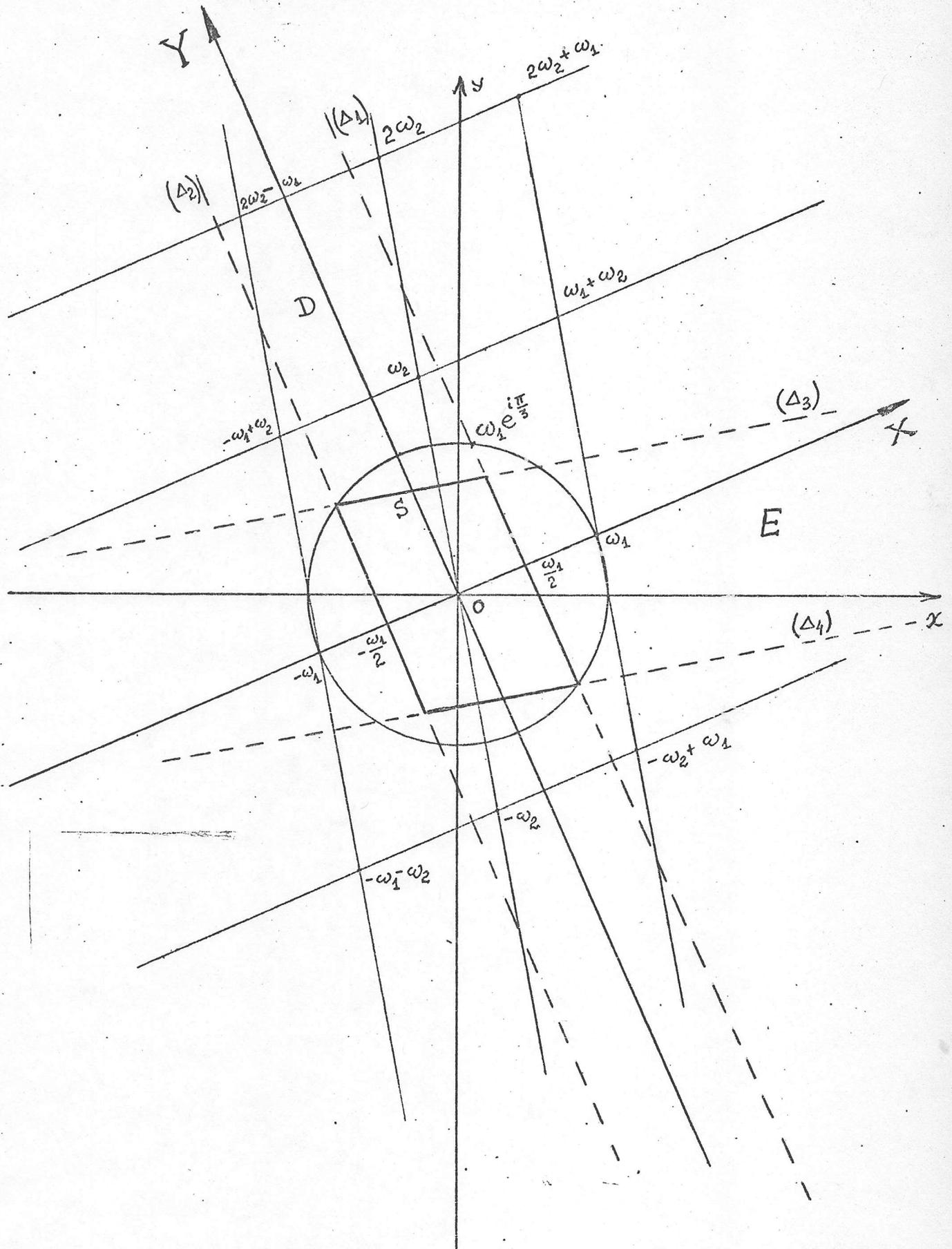
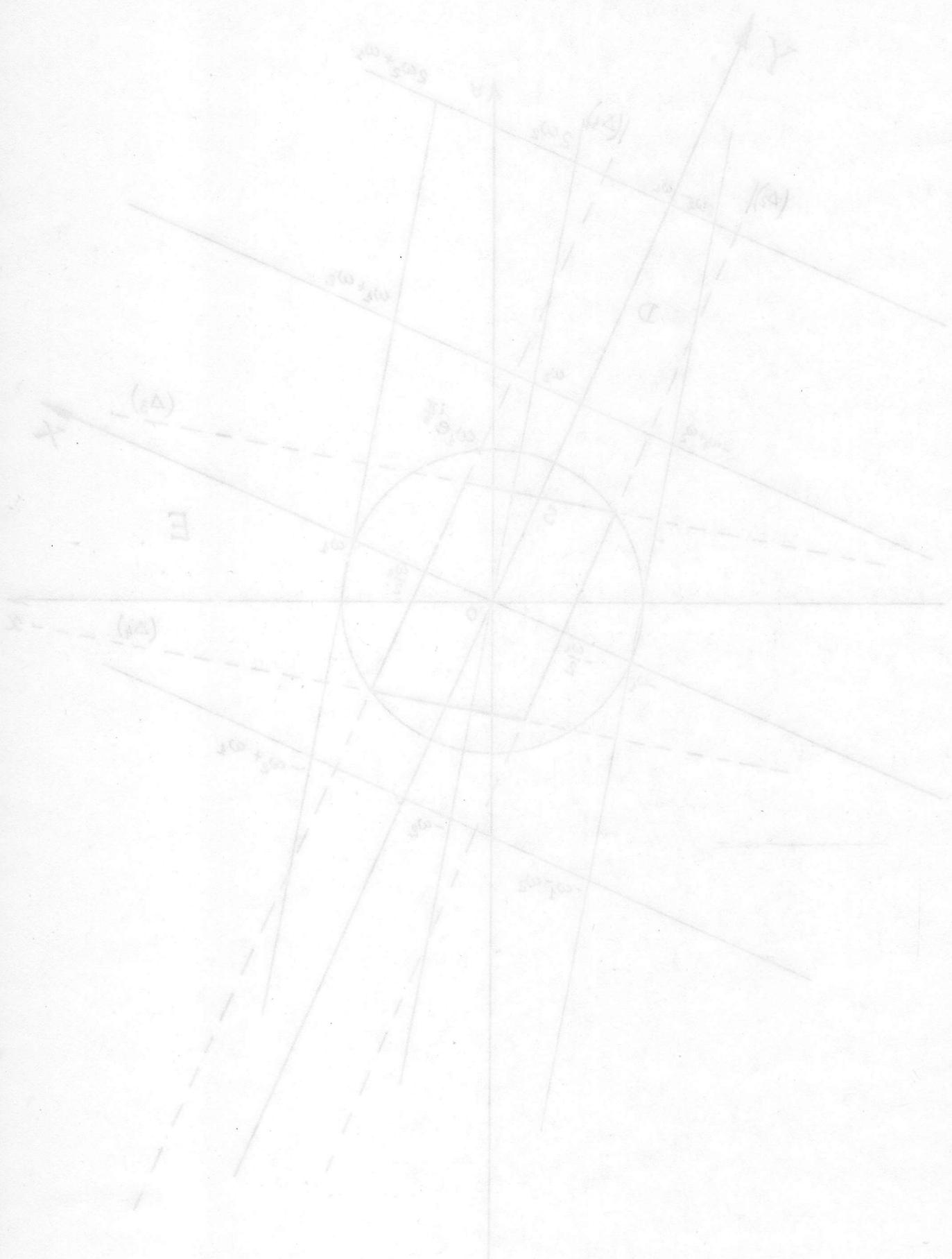


Fig. 2



on remplace ω_1 par δ .

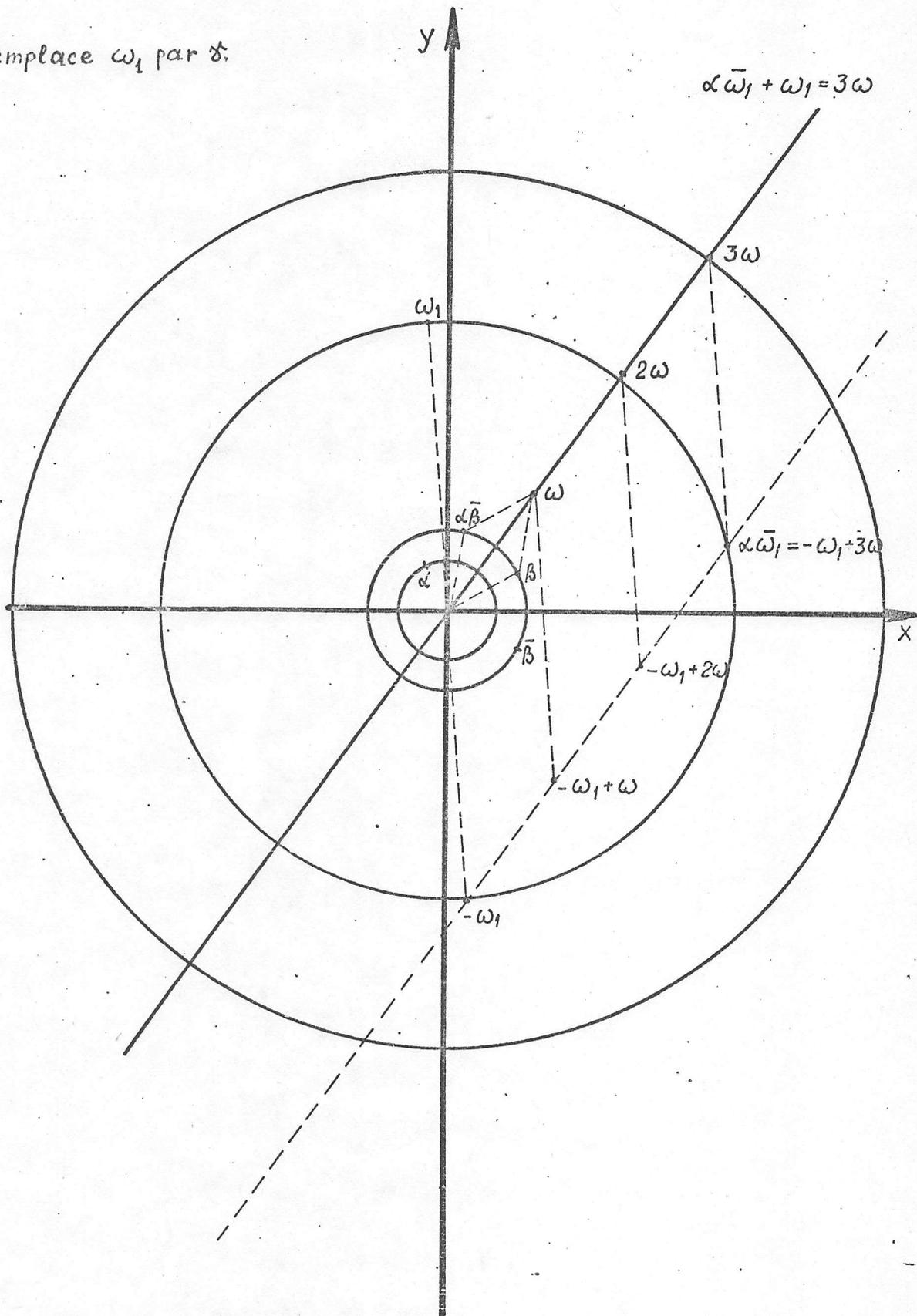


Fig. 3.

on remplace ω , par δ .

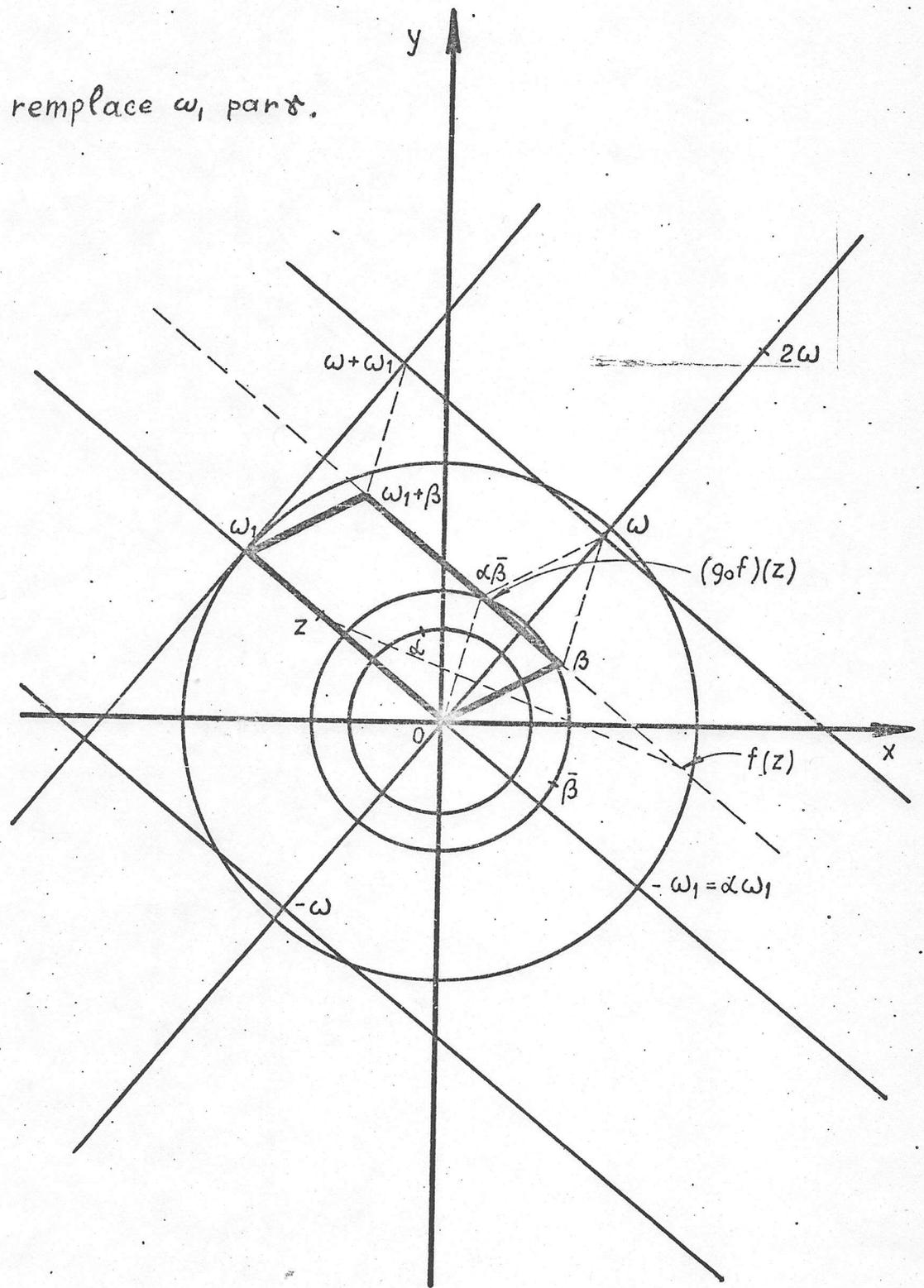


Fig. 4.

on remplace ω_1 par δ ,

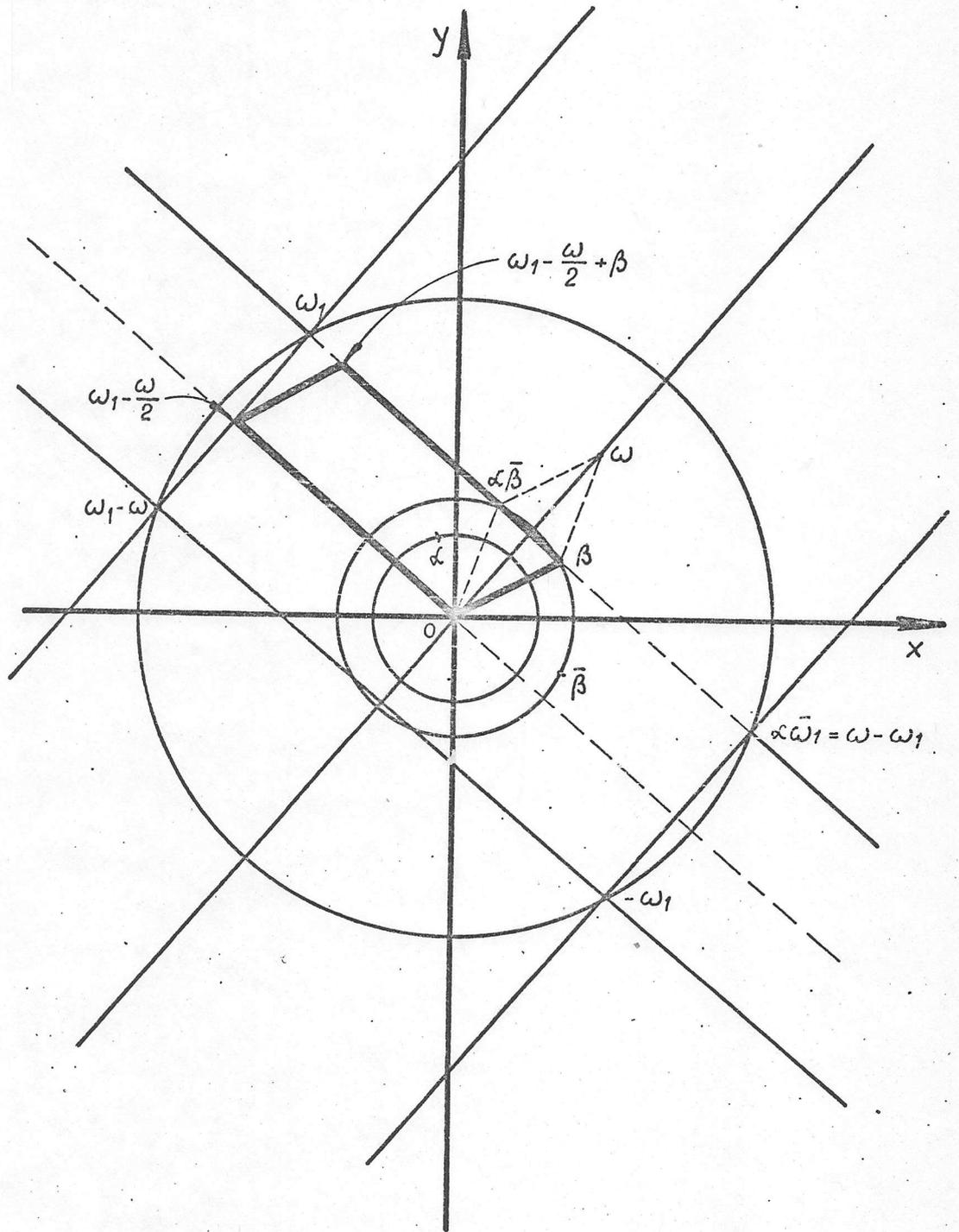


Fig. 5.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] . Ahlfors, Complex Analysis. Mc.Grow Hill-Book Company, Inc.1953, New-York, Toronto, London.
- [2] . Ahlfors, L.Sario, Riemann Surfaces, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1960.
- [3]. N.L.Alling, N.Greenleaf, Foundations of The Theory of Klein Surfaces, Lecture Notes in Mathematics, 219/1971, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York.
- [4] . I.Bârză, Surfaces de Riemann Non Orientables (Suprafețe Riemann Neorientabile).Thèse, 1981, Bucarest.
- [5] . I.Bârză, Fonctions de Type Méromorphe sur la Bouteille de Klein, Revue Roumaine des Mathématiques Pures et Appliquées, Nr.4/1980.
- [6] . N.Boboc, Funcții Complexe, Editura Didactică și Pedagogică, București 1969.
- [7] . H.Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.Hermann, Paris 1961.
- [8] . R.C.Gunning, Lectures on Riemann Surfaces, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1966.
- [9] . Hu, Sze-Tsen, Differentiable Manifolds, Holt, Rinehart and Winston, Inc.1969.
- [10]. S.Lefschetz, Introduction to Topology, Princeton, New Jersey 1949, Princeton University Press.
- [11]. J.Lehner, Discontinuous Groups and Automorphic Functions, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1964.
- [12] . B.von Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, Berlin, Springer Verlag, 1923.
- [13]. E.H.Spanier, Algebraic Topologie, Mc.Grow Hill-Book Company, 1966.
- [14]. D.Spencer, M.Schiffier, Functionals of Finite Riemann Surfaces, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1954.

- [15]. G.Springer, Introduction to Riemann Surfaces, Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1957.
- [16]. S.Stoilow, Teoria funcțiilor de o variabilă complexă, vol.I, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1962.
- [17]. S.Stoilow, în colaborare cu Cabiria Andreian Cazacu, Teoria funcțiilor de o variabilă complexă, vol.II, Editura Academiei R.P.R., 1958.
- [18]. S.Stoilow, Leçons sur les Principes Topologiques de la Théorie des Fonctions Analytiques, Paris, Gauthiers-Villars, 1938.
- [19]. O.Teichmüller, Extremale quasiconforme Abbildungen und quadratische Differentiale, Abh.Preuss Akad.Wiss.1940, 2o.