INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250 3638

LE MOUVEMENT D'UN FLUIDE À TRAVERS UN MILIEU POREUX NONHOMOGÈNE

par

Ruxandra Stavre-STANCESCU

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS
No. 34/1982

BUCURESTI

LE MOUVEMENT D'UN FLUIDE À TRAVERS UN MILIEU POREUX NONHOMOGÈNE

par

Ruxandra Stavre-STANCESCU *)

May 1982

*) University of Bucharest, Department of Mathematics
Str. Academiei 14, Bucharest, Romania

LE MOUVEMENT D'UN FLUIDE À TRAVERS UN MILIEU POREUX NONHOMOGÈNE

par Ruxandra Stavre-Stăncescu

Introduction

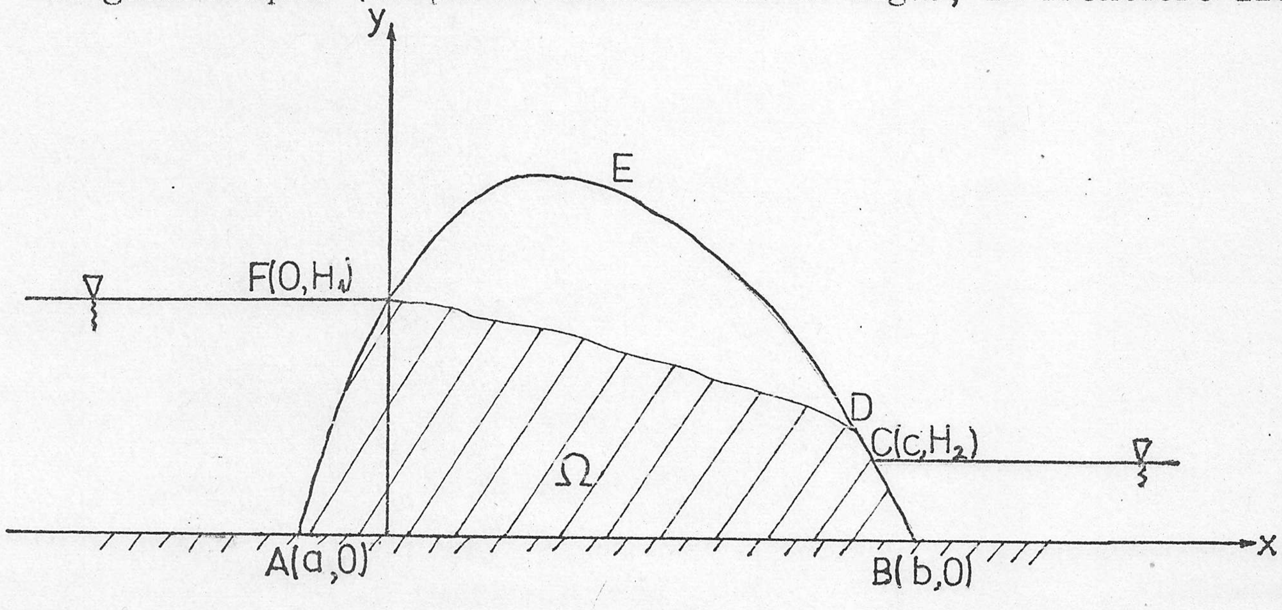
L'étude du mouvement du fluide à travers des matériaux poreux conduit, en général à des problèmes du type frontière libre. De tels problèmes ont été traités dans [1], [2], [3], [4], [5] et en d'autres articles.

Dans cet article on étudie le mouvement d'un fluide à travers un milieu poreux nonhomogène à l'aide des inéquations quasi-variationnelles.

1 Le problème

Sur une base horizontale imperméable il y a deux bassins d'eau, de niveaux H_1 et H_2 , avec $H_1 > H_2$; les deux bassins sont séparés par une digue en matériau poreux nonhomogène. Le coefficient de perméabilité est $k(x,y)=k_1(x)k_2(y)$.

L'eau filtre du bassin plus élevé au bassin moins élevé. On veut déterminer les grandeurs physiques (la pression, la vitesse) et géométriques (la partie mouillée de la digue, la frontière libre)



$AF \cup FED \cup DC \cup CB \quad : y=Z(x)$

On va supposer :

(1.1) le fluide incompressible ;

(1.2) le mouvement stationaire, irrotationnel, bidimensionnel ;

(1.3) on suppose négligeables les effets de capillarité;

(1.4) $Z \in C^2(a,b)$;

(1.5) on désigne par D la section de la digue et on suppose :

$k_1 > 0$, $k_2 > 0$, il existe $\alpha > 0$ avec $k_1(x)k_2(y) > \alpha > 0$ dans D,

$k \in C^2(\bar{D})$, $(Z'k_1)' \leqslant 0$, $k_2' > 0$, $k_2'' \leqslant 0$

On désigne par Ω la partie mouillée de D, par $p(x,y)$ la pression au point $(x,y) \in D$ et par $y=Y(x)$ la partie supérieure du bord de Ω .

$p > 0$ dans Ω ; $p=0$ dans $D \setminus \bar{\Omega}$

Soit $u=p+y$

Moyennant la loi de Darcy et les conditions aux limites on aboutit au problème suivant :

Problème A Trouver u, solution de

(1.6) $u \geqslant y$ dans $\bar{\Omega}$

(1.7) $-\mathrm{div}(k_1 k_2 \,\mathrm{grad}\, u) = 0$ dans Ω

(1.8) $u=H_1$ sur AF ; $u=H_2$ sur BC ; $u=y$ sur $FD \cup DC$

(1.9) $u_n=0$ sur FD

(1.10) $u_y=0$ sur AB

Proposition 1.1 a) Si u satisfait les relations (1.7), (1.9) et (1.10) alors pour tout $\Psi \in C^1(\bar{\Omega})$ avec Ψ nul dans un voisinage de AF et BD et Ψ=const. dans $D \setminus \bar{\Omega}$ on a

(1.11) $\displaystyle\int_\Omega k_1 k_2 \,\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, \Psi \,dxdy = 0$

b) Si pour tout $\Psi \in C^1(\bar{\Omega})$ avec Ψ nul dans un voisinage de AF et BD et Ψ=const. dans $D \setminus \bar{\Omega}$ on a (1.11) alors u vérifie (1.7), (1.9), (1.10) dans le sens faible.

Démonstration

a) $\displaystyle\int_\Omega k_1 k_2 \,\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, \Psi \,dxdy = -\int_\Omega \mathrm{div}(k_1 k_2 \,\mathrm{grad}\, u)\Psi \,dxdy + \int_{\partial\Omega} k_1 k_2 u_n \Psi ds =$
$\displaystyle = \int_{AF \cup DC \cup CB} k_1 k_2 u_n \Psi ds = 0$ pour tout $\Psi \in C^1(\bar{\Omega})$ avec Ψ nul dans un voisinage de AF et BD.

b) $\displaystyle\int_\Omega k_1 k_2 \,\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, \Psi \,dxdy = 0$ pour tout $\Psi \in C^1(\bar{\Omega})$ avec Ψ nul dans un voisinage de AF et BD et Ψ=const. dans $D \setminus \bar{\Omega} \Rightarrow$

$\displaystyle\int_\Omega k_1 k_2 \,\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, \Psi \,dxdy = 0$ pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\langle k_1 k_2 \,\mathrm{grad}\, u, \mathrm{grad}\, \Psi \rangle = 0$ pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\langle -\mathrm{div}(k_1 k_2 \,\mathrm{grad}\, u), \Psi \rangle = 0$ pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$-\mathrm{div}(k_1k_2 \mathrm{grad}\ u) = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Soit $\Psi \in C^1(\bar{\Omega})$ avec Ψ nul dans un voisinage de AF et DB et Ψ=const. dans $D \setminus \bar{\Omega}$.

$$\int_\Omega k_1k_2 \mathrm{grad}\ u \cdot \mathrm{grad}\,\Psi dxdy = 0$$

$$\int_{\partial\Omega} k_1k_2 u_n \Psi ds = 0 \ ; \quad \int_{AB \cup FD} k_1k_2 u_n \Psi ds = 0$$

Définition On dit que u est une solution faible pour le problème A si u satisfait (1.6), (1.8) et si pour tout $\Psi \in C^1(\bar{\Omega})$ nul dans un voisinage de AF et DB, Ψ =const. dans $D \setminus \bar{\Omega}$ on a la relation (1.11).

2 L'étude d'une inéquation quasi-variationnelle

On va utiliser le théorème suivant ([2]) :

Théorème 2.1 Soit $\mathcal{K} \subset H^1(D)$ convexe, fermé. Soit $a: \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to R$ une forme bilinéaire, bornée et coercive, $L: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire et $j: \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \bar{R}$ une fonction propre, convexe, s.c.i. et qui vérifie la propriété suivante :

(2.1) $j(a,w) + j(b,v) - j(a, \inf(v,w)) - j(b, \sup(v,w)) \geq 0 \ \forall a \leq b$

Alors il existe au moins une solution pour l'inéquation quasi-variationnelle

(2.2) $a(w, v-w) + j(w,v) - j(w,w) \geq L(v-w) \quad \forall v \in \mathcal{K}$

On va définir:

(2.3) $\mathcal{K} = \left\{ v \in H^1(D) \ / \ v=0 \text{ sur } AE \right\}$

(2.4) $$\begin{cases} a : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow R \\ a(w,v) = \displaystyle\int_D \frac{k_1}{k_2} \mathrm{grad}\ w \cdot \mathrm{grad}(k_2 v) dxdy + \int_D \left\{ -Z' \frac{k_1}{k_2} \left[w_y (k_2 v)_x - \right.\right. \\ \left.\left. - w_x (k_2 v)_y \right] - Z'' k_1 w_y v - Z' k_1' w_y v - Z' \dfrac{k_1 k_2'}{k_2} w_x v \right\} dxdy \end{cases}$$

(2.5) $L: \mathcal{K} \longrightarrow R$

$$L(v) = \int_D k_1k_2 v dxdy + \int_a^0 k_1k_2(1+Z'^2)(H_1 - y) v dx + \int_c^b k_1k_2(1+Z'^2) \cdot (H_2 - y) v dx$$

(2.6) $j: \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow R$

$$j(w,v) = \int_D k_1k_2 (v - w_z)^+ dxdy$$

où $v^+ = \sup\{v, o\}$; $w_z = w(x, Z(x))$

Observation 2.1 a est une forme bilinéaire

Observation 2.2 L est une forme linéaire

Observation 2.3 j est une fonction propre, convexe, s.c.i.

Proposition 2.1 $\mathcal{K} \subset H^1(D)$ est convexe et borné

Démonstration

Soit $v_1, v_2 \in \mathcal{K}, \lambda \in [0,1]$, $\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 = 0$ sur AB

$\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ convexe

Soit $(v_n)_n \subset \mathcal{K}$ $v_n \xrightarrow{\| \|_{H^1}} v$

$v_n = 0$ sur AB pour tout $n \Rightarrow v = 0$ sur AB

Proposition 2.2 a est bornée ; si $(Z'k_1)' \leqslant 0$, $k_2' > 0$, $k_2'' \leqslant 0$ alors a est coercive

Démonstration

$$|a(w,v)| \leqslant \max_{\bar{D}} [k_1(x)] \, \|w\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \max_{\bar{D}} [\frac{k_1(x)}{k_2(y)} k_2'(y)] \|w_y\|_{L^2} \|v\|_{L^2} +$$

$$+ \max_{\bar{D}} [k_1(x)|Z'(x)|] \quad (\|w_y\|_{L^2} \|v_x\|_{L^2} + \|w_x\|_{L^2} \|v_y\|_{L^2}) + \max_{\bar{D}} [k_1(x) \, |Z''(x)|] \cdot$$

$$\|w_y\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \max_{\bar{D}} |Z'(x) k_1'(x)| \quad \|w_y\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leqslant C \|w\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

Donc a est bornée

$$a(v,v) = \int_D \frac{k_1}{k_2} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad}(k_2 v) dxdy +$$

$$+ \int_D \Big\{ -Z'k_1 v_y v_x + Z'k_1 v_x v_y + Z' \frac{k_1 k_2'}{k_2} v_x v - Z'' k_1 v_y v - Z' k_1' v_y v - Z' \frac{k_1 k_2'}{k_2} v_x v \Big\}$$

$$dxdy = \int_D k_1 \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} v \, dxdy + \int_D \frac{k_1 k_2'}{k_2} v_y v \, dxdy - \int_D (Z'k_1)' (\frac{v^2}{2})_y dxdy \geqslant$$

$$\geqslant C_1 \|v\|^2_{H^1} + \int_D \frac{k_1 k_2'}{k_2} (\frac{v^2}{2})_y \, dxdy - \int_a^b (Z'k_1)' \, \frac{v^2_Z}{2} \, dx \geqslant$$

$$C_1 \|v\|^2_{H^1} + \int_{D_b} (\frac{k_1 k_2'}{k_2} \, \frac{v^2}{2})_y dxdy - \int_D (\frac{k_1 k_2'}{k_2})_y \, \frac{v^2}{2} \, dxdy \geqslant$$

$$C_1 \|v\|^2_{H^1} + \int_a \frac{k_1 k_2'(Z(x))}{k_2(Z(x))} \, \frac{v^2_Z}{2} \, dx \geqslant C_1 \|v\|^2_{H^1}$$

Donc a est coercive

<u>Proposition 2.3</u> Si j est définie par (2.6) alors j satisfait la propriété (2.1)

<u>Démonstration</u>

(2.7) $\varphi(u,v) = (v-u_z)^+$

Soit $a \leq b$

(2.8) $\chi = \varphi(a,v) + \varphi(b,u) - \varphi(a,\inf(v,u)) - \varphi(b,\sup(v,u)) =$

$$= (v-a_z)^+ + (u-b_z)^+ - (\inf(v,u)-a_z)^+ - (\sup(v,u)-b_z)^+$$

Soit $v \geq u$

$$\chi = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad v \geq u \geq b \geq a \\ b_z - u & \text{si} \quad v \geq b \geq u \geq a \\ b_z - a_z & \text{si} \quad v \geq b \geq a \geq u \\ v - u & \text{si} \quad b \geq v \geq u \geq a \\ v - a_z & \text{si} \quad b \geq v \geq a \geq u \\ 0 & \text{si} \quad b \geq a \geq v \geq u \end{cases} \quad \text{, donc } \chi \geq 0$$

Si $v \leq u$ alors

$$\chi = (v-a_z)^+ + (u-b_z)^+ - (v-a_z)^+ - (u-b_z)^+ = 0$$

On va utiliser le théorème 2.1 pour $\mathcal{K}$, a, L et j définis par (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) et on va obtenir l'existence de la solution de l'inéquation quasi-variationnelle.

Soit $w \in \mathcal{K}$ une solution de l'inéquation quasi-variationnelle (2.2) avec $\mathcal{K}$, a, L et j définis par (2.3), (2.4), (2.5), (2.6).

<u>3 L'existence de la solution faible de problème A</u>

On va définir

(3.1) $\tilde{u}(x,y) = y + \dfrac{1}{k_2(y)} w_y(x,y) \qquad (x,y) \in D$

(3.2) $\Omega = \left\{(x,y) \in D \mid w(x,y) < w(x,Z(x))\right\}$

(3.3) $u = \tilde{u}\big|_\Omega$

<u>Proposition 3.1</u> (3.4) $w \geq 0$ dans D

<u>Démonstration</u>

Soit $v = w^+ \in \mathcal{K}$

L'inéquation quasi-variationnelle (2.2) devient :

$$a(w,w^+-w) + j(w,w^+) - j(w,w) \geq L(w^+-w)$$

$$a(w,w^-) + \int_D k_1k_2 \left\{ (w^+-w_z)^+ - (w-w_z)^+ \right\} dxdy \geq \int_D k_1k_2 w^- dxdy$$

parce que $w=w^+-w^-$, $H_1- y \geq 0$ sur AF ; $H_2-y \geq 0$ sur BC

$a(w^+, w^-) = 0$

$$-a(w^-, w^-) + \int_D k_1k_2 \left\{ (w^+-w_z)^+ - (w-w_z)^+ \right\} dxdy \geqslant \int_D k_1k_2 w^- dxdy$$

$$(w^+-w_z)^+ = (w^-+w-w_z)^+ \leqslant (w^-)^+ + (w-w_z)^+ = w^- + (w-w_z)^+$$

$$-a(w^-, w^-) + \int_D k_1k_2 w^- dxdy \geqslant \int_D k_1k_2 w^- dxdy$$

$a(w^-,w^-) \leqslant 0 \Rightarrow w^- = 0$; donc $w \geqslant 0$

Proposition 3.2 (3.5) $0 \leqslant - k_2 \operatorname{div}(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{grad} w) \leqslant k_1k_2$

Démomstration

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(D)$; $v = w+\varphi \in \mathcal{K}$

$$a(w, \varphi) + \int_D k_1k_2 \left\{ (w+\varphi-w_z)^+ - (w-w_z)^+ \right\} dxdy \geqslant \int_D k_1k_2 \varphi\, dxdy$$

$$(w+\varphi-w_z)^+ \leqslant \varphi^+ + (w-w_z)^+$$

$$a(w, \varphi) + \int_D k_1k_2 \varphi^+ dxdy \geqslant \int_D k_1k_2 \varphi\, dxdy$$

Si $\varphi \leqslant 0$ dans D alors $a(w, \varphi) \geqslant \int_D k_1k_2 \varphi\, dxdy$

Si $\varphi \geqslant 0$ dans D alors $a(w, \varphi) \geqslant 0$

$$0 \leqslant -k_2 \operatorname{div}(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{grad} w) \leqslant k_1k_2$$

$$-k_2 \operatorname{div}(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{grad} w) \in L^\infty(D) \subset L^2(D)$$

Proposition 3.3 (3.6) $w \leqslant w_z$ dans D

Démonstration

$w \geqslant 0$ dans D donc $w_z \geqslant 0$ dans D

$$(w-w_z)^+ \big|_{\partial D} = (w-w_z)^+ \big|_{AB} = (-w_z)^+ \big|_{AB} = 0$$

Soit $v = w-(w-w_z)^+ \in \mathcal{K}$

$$- \int_D -k_2 \operatorname{div}(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{grad} w)\, (w-w_z)^+ dxdy +$$

$$+\int_D k_1k_2 \left\{ (w-w_z-(w-w_z)^+)^+ - (w-w_z)^+ \right\} dxdy \geqslant -\int_D k_1k_2(w-w_z)^+ \, dxdy$$

$$-\int_D -k_2 \, \mathrm{div}(\frac{k_1}{k_2} \, \mathrm{grad} \, w) \, (w-w_z)^+ \, dxdy - \int_D k_1k_2(w-w_z)^+ \, dxdy \geqslant$$

$$-\int_D k_1k_2(w-w_z)^+ \, dxdy$$

$$\int_D -k_2 \, \mathrm{div}(\frac{k_1}{k_2} \, \mathrm{grad} \, w) \, (w-w_z)^+ \, dxdy \leqslant 0$$

Moyennant la relation (3.5) on obtient $(w-w_z)^+ = 0$,

donc $w \leqslant w_z$ dans D

<u>Proposition 3.4</u> La fonction u définie par (3.3) vérifie la relation (1.6)

<u>Démonstration</u>

$$w(x, y) = \int_0^y k_2 \, (t) \left[\tilde{u}(x, t)-t \right] dt$$

En utilisant la relation (3.6) on obtient $\tilde{u}(x, y) \geqslant y$ dans D
Donc $u(x, y) \geqslant y$ dans $\bar{\Omega}$

<u>Proposition 3.5</u> u vérifie les conditions aux limites (1.8)

<u>Démonstration</u>

Soit $\chi \in \mathcal{K}$, $v = w \pm \chi \in \mathcal{K}$

$$-\int_D k_2 \left[-\mathrm{div}(\frac{k_1}{k_2} \, \mathrm{grad} \, w)-k_1 \right] \chi \, dxdy + \int_D k_1k_2(-\chi)^+ \, dxdy \geqslant$$

$$\int_a^b k_1(1+Z'^2)w_y \chi \, dx - \int_a^o k_1k_2(1+Z'^2)(H_1-y)\chi \, dx - \int_c^b k_1k_2(1+Z'^2)(H_2-y)\chi dx \geqslant$$

$$-\int_D k_2 \left[-\mathrm{div}(\frac{k_1}{k_2} \, \mathrm{grad} \, w) - k_1 \right] \chi \, dxdy - \int_D k_1k_2 \chi^+ \, dxdy$$

$$\left| \int_D k_2 \left[-\mathrm{div}(\frac{k_1}{k_2} \, \mathrm{grad} \, w) - k_1 \right] \chi \, dxdy \right| \leqslant \int_D k_1k_2 \, |\chi| \, dxdy$$

$$\left|\int_D k_1k_2(-\chi)^+ \,dxdy\right| \leq \int_D k_1k_2 \,|\chi|\, dxdy$$

$$\left|\int_D k_1k_2\, \chi^+ \,dxdy\right| \leq \int_D k_1k_2 \,|\chi|\, dxdy$$

On obtient donc

$$\left|\int_a^b k_1(1+Z'^2)w_y\chi dx - \int_a^o k_1k_2(1+Z'^2)(H_1-y)\chi dx - \int_c^b k_1k_2(1+Z'^2)(H_2-y)\chi\, dx\right| \leq$$

$$2\int_D k_1k_2\,|\chi|dxdy$$

En choisissant convenablement χ on obtient

$w_y = k_2\,(H_1-y)$ sur AF ; $w_y = k_2(H_2-y)$ sur BC ; $w_y = 0$ sur $FD \cup DC$

$u\,|_{AF} = \tilde{u}\,|_{AF} = (y+\frac{1}{k_2}\,w_y)\,|_{AF} = H_1$; $u\,|_{BC} = H_2$; $u\,|_{DC} = y\,|_{DC}$

Avec la relation (3.2) on obtient $w(x,y) = w(x,Z(x))$ dans $D\setminus\bar{\Omega}$

Donc $w_y = 0$ dans $D\setminus\bar{\Omega}$

Soit $Y(x) = \sup\left\{y \,/\, (x,y)\in\Omega\right\}$

$u(x,Y(x)) = Y(x)$

<u>Proposition 3.6</u> (3.7) $-k_2\,\mathrm{div}(\frac{k_1}{k_2}\,\mathrm{grad}\ w) = k_1k_2$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

<u>Démonstration</u>

Soit $\Psi\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\forall\lambda\in R$ $w+\lambda\Psi\in K$

$a(w,\lambda\Psi) + j(w,w+\lambda\Psi) - j(w,w) \geq L(\lambda\Psi)$

$$-\int_D k_2\,\mathrm{div}(\frac{k_1}{k_2}\,\mathrm{grad}\ w)\lambda\Psi\,dxdy + \int_D k_1k_2\left\{(w-w_z+\lambda\Psi)^+ - (w-w_z)^+\right\}dxdy \geq$$

$$\int_D k_1k_2\,\lambda\Psi\,dxdy$$

$$\int_\Omega -k_2\,\mathrm{div}(\frac{k_1}{k_2}\,\mathrm{grad}\ w)\lambda\Psi\,dxdy + \int_\Omega k_1k_2(w-w_z+\lambda\Psi)^+\,dxdy \geq \int_\Omega k_1k_2\,\lambda\Psi\,dxdy$$

Pour tout $\Psi\in\mathcal{D}(\Omega)$ il existe $\lambda_\Psi > 0$ de sorte que $\forall\lambda$ avec $|\lambda| < \lambda_\Psi$

On a $w-w_z+\lambda\Psi\leq 0$

Soit $A = \mathrm{supp}\,\Psi$, $A\subset\subset\Omega$

$$\lambda_\Psi = \min_{\bar{A}}\,[w_z-w]\,.\,\frac{1}{\max_{\bar{A}}|\Psi(x,y)|}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| < \lambda_\psi$

Alors $w+\lambda\psi \leq w_z \quad \Rightarrow \quad (w+\lambda\psi - W_z)^+ = 0$

$$\int_\Omega -k_2 \operatorname{div}\left(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{grad} w\right)\lambda\psi \, dxdy \geqslant \int_\Omega k_1 k_2 \lambda\psi \, dxdy$$

Pour $\lambda > 0$ $\displaystyle\int_\Omega -k_2 \operatorname{div}\left(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{grad} w\right)\psi \, dxdy \geqslant \int_\Omega k_1 k_2 \psi \, dxdy$

Pour $\lambda < 0$ $\displaystyle\int_\Omega -k_2 \operatorname{div}\left(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{grad} w\right)\psi \, dxdy \leq \int_\Omega k_1 k_2 \psi \, dxdy$

Donc $\displaystyle\int_\Omega k_2 \left[-\operatorname{div}\left(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{grad} w\right) - k_1\right]\psi \, dxdy = 0 \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$-k_2 \operatorname{div}\left(\frac{k_1}{k_2} \operatorname{grad} w\right) = k_1 k_2 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

<u>Proposition 3.7</u> Pour tout $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ avec ψ nul dans un voisinage de AF et DB , ψ = const. dans $D \setminus \bar{\Omega}$ on a la relation (1.11)

<u>Démomstration</u>

$$\int_\Omega k_1 k_2 \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad}\psi \, dxdy = \int_\Omega k_1 k_2 (u_x \psi_x + u_y \psi_y) \, dxdy =$$

$$= \int_\Omega k_1 k_2 \left\{ \frac{1}{k_2} w_{xy} \psi_x + \left[1 + D_y\left(\frac{1}{k_2} w_y\right)\right] \psi_y \right. \quad dxdy =$$

$$= \int_\Omega k_1 w_{xy} \psi_x - D_x(k_1 w_x) \psi_y \quad dxdy = \int_D \left[k_1 w_{xy} \psi_x - D_x(k_1 w_x)\psi_y\right] dxdy =$$

$$= \int_D \left[D_y(k_1 w_x \psi_x) - D_x(k_1 w_x \psi_y)\right] dxdy = \int_{\partial D} k_1 w_x (\psi_x n_y - \psi_y n_x) ds =$$

$$= \int_{AB} k_1 w_x (\psi_x n_y - \psi_y n_x) ds = 0$$

<u>Conclusions</u> 1- La fonction u définie par (3.3) est une solution faible pour le problème A .

2- Dans le cas général on n'a pas l'unicité de la solution.

<u>Observation 3.1</u> Si $k_2(y) = 1$ alors $k = k_1(x)$

Les définitions (2.4), (2.5), (2.6) se modifient :

(3.8) $\displaystyle a(w,v) = \int_D k_1 \operatorname{grad} w \cdot \operatorname{grad} v \, dxdy +$

$$+ \int_D \left\{ -Z' k_1 (w_y v_x - w_x v_y) - Z'' k_1 w_y v - Z' k_1' w_y v \right\} dxdy$$

(3.9) $\displaystyle L(v) = \int_D k_1 v \, dxdy + \int_a^b k_1 (1+Z'^2)(H_1 - y) v \, dx + \int_c^o k_1(1+Z'^2)(H_2 - y) v dx$

$$(3.10) \qquad j(w,v) = \int_D k_1(v-w_z)^+ \, dxdy$$

Observation 3.2 Si $k_1(x) = 1$ alors $k = k_2(y)$

$$(3.11) \qquad a(w,v) = \int_D \frac{1}{k_2} \operatorname{grad} w \cdot \operatorname{grad}(k_2 v) \, dxdy +$$

$$+ \iint_D \left\{ - \frac{Z'}{k_2} \left[w_y (k_2 v)_x - w_x (k_2 v)_y - Z'' w_y v - Z' \frac{k_2'}{k_2} w_x v \right\} dxdy$$

$$(3.12) \qquad L(v) = \int_D k_2 v dxdy + \int_a^o k_2(1+Z'^2)(H_1-y) \, vdx + \int_c^b k_2(1+Z'^2)(H_2-y) vdx$$

$$(3.13) \qquad j(w,v) = \int_D k_2(v-w_z)^+ dxdy$$

Les deux cas mentionnés ont été étudiés dans [2] .

Observation 3.3 Dans le cas où D est un rectangle on a l'unicité de la solution.
Ce cas particulier, avec $k_1(x) = \exp[f(x)]$, $k_2(y) = \exp[g(y)]$ a été étudiédans [3] .

Bibliographie

[1] C. Baiocchi, Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica, Ann. Mat. Pura. Appl. (4) 92 (1972)

[2] J. T. Oden, N. Kikuchi, Int. J. Eng. Science 10 (1980)

[3] C. Baiocchi, A. Friedmann, A Filtration Problem in a Porous Medium with Variable Permeability, Ann. Mat. Pura. Appl. (4) (1977)

[4] D. Macovei, D. Pascali, Variational Inequalities Techniques in Free Boundary Problems, Int. Symp. Appl. Math. System Th.

[5] C. Baiocchi, Inéquations quasi-variationnelles dans les problèmes à frontière libre en hydraulique, Lect. Notes Math 503 (1976)