

INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250 3638

SUR LES FIBRE INSTABLES DE RANG 2 sur $P^3(C)$

par

Constantin BANICA

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No. 79/1982

BUCURESTI

Mod 18959

SUR LES FIBRÉS INSTABLES DE RANG 2 SUR $P^3(C)$

par

Constantin BANICA*)

December 1982

*) Department of Mathematics, National Institute for Scientific and Technical Creation, Bdul Păcii 220, 79622 Bucharest, Romania.

Sur les fibrés instables de rang 2 sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

par

Constantin Bănică

Introduction

Les fibrés instables de rang 2 sur le plan projectif ont été étudiés dans ([2], [8], [13], [14]). Le but du travail est d'aborder le cas des fibrés instables de rang 2 sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ (voir aussi [2] pour le cas des fibrés topologiquement triviaux).

D'après ([7], théorème 2.5), la famille des fibrés instables de type topologique fixé est très large. Fixons encore le degré d'instabilité: ceci est, pour un tel fibré E , le plus grand entier d tel que $E(-d)$ a des sections globales non-nulles. L'instabilité est équivalente à l'inégalité $d > \frac{c_1(E)}{2}$. On trouve alors que l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels fibrés peut être muni d'une structure de variété algébrique, en fait un espace de moduli grossier: c'est une conséquence, en utilisant la méthode des extensions de Serre, de la variation de Ext dans une déformation ([4], [6], [9] p.110)..

Ensuite, c'est le point principal, on détermine exactement les systèmes (c_1, c_2, d) (resp. (c_1, c_2, α, d) si c_1 est pair) qui apparaissent. Pour ceci on doit construire des courbes convenables ayant des éléments nilpotents et on utilise la méthode de Ferrand [5] et [3]. Précisément, le résultat prouvé dans le papier est:

Théorème. Soient c_1, c_2 des entiers vérifiant $c_1 c_2 \equiv 0 \pmod{2}$ et, si c_1 est pair, $\alpha \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et soit $d > \frac{1}{2}c_1$. Alors l'ensemble $M(d)$ des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes

de rang 2 sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ de type topologique (c_1, c_2) (resp. (c_1, c_2, α)) et de degré d'instabilité d admet une structure naturelle de variété algébrique faisant de $M(d)$ un espace de moduli grossier.

De plus, $M(d)$ est non-vide à l'exception des cas suivantes:

- (i) $d^2 - dc_1 + c_2 < 0$
- (ii) $d^2 - dc_1 + c_2 = 1$
- (iii) $d^2 - dc_1 + c_2 = 2$ ou $3, c_1$ pair et $(\alpha = 0, d = \frac{1}{2}c_1 \pmod{4})$ ou $(\alpha = 1, d \neq \frac{1}{2}c_1 \pmod{4})$.

Renvoyons à la section 5 pour la définition des familles de fibrés concernant les quelles $M(d)$ est un espace grossier de moduli.

1. Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre et plat d'espaces complexes ou variétés algébriques et $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ des $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents plats relativement à Y . Comme on sait, on peut définir des faisceaux Ext -relatifs $\text{Ext}_f^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, en prenant les faisceaux associés aux préfaisceaux $V \mapsto \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^i(f^{-1}(V); \mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Si $g: Y' \rightarrow Y$ est un changement de base et si

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g' \uparrow & & \uparrow g \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

est la diagramme cartésien associé, alors on peut définir des morphismes de changement de base

$$g^*(\text{Ext}_f^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \rightarrow \text{Ext}_{f'}^i(\mathcal{F}', \mathcal{G}'),$$

où $\mathcal{F}' = g'^*(\mathcal{F})$, $\mathcal{G}' = g'^*(\mathcal{G})$. Les faisceaux $\text{Ext}_f^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sont $\mathcal{O}_Y$ -cohérents et les résultats concernant les images directes $\mathcal{R}^q f_*$ peuvent se généraliser aux Ext_f^i , en particulier sont vrais les théorèmes de changement de base, de semi-continuité et de

continuité ([4], [6], [9]). Pour la paramétrisation de $M(d)$ nous utilisons le résultat suivant (voir aussi : l'auteur, Sur les Ext-globaux dans une déformation, Comp.Math., vol.44, Fasc.1-3, p.22, (1981)). Fixons $X \xrightarrow{f} Y, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ et un entier q .

Proposition. Il existe une partition localement finie de Y par des sous-espaces localement fermés telle que, en notant par Y' la somme directe des ces sous-espaces et par $g: Y' \rightarrow Y$ l'application induite par inclusions, le faisceau $\text{Ext}_{\mathcal{F}'}^q(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ est localement libre et commute avec les changement de base. De plus, (Y', g) vérifie la propriété universelle correspondante.

Démonstration. La question est locale sur Y . On peut donc supposer qu'il existe sur Y un complexe $\mathcal{L}^\bullet$ de $\mathcal{O}_Y$ -modules libres de rang fini tel que pour tout p , $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^p(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathcal{H}^p(\mathcal{L}^\bullet)$ et une propriété analogue d'après un changement de base quelconque. L'existence d'un tel complexe est prouvé dans [4] moyennant une hypothèse supplémentaire, par exemple si f est lisse (le seul cas d'ailleurs que nous l'utilisons ici); pour le cas général envoyons à [6]. $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est localement libre et commute avec les changement de base si et seulement si les faisceaux $\text{Coker}(\mathcal{L}^{q-1} \rightarrow \mathcal{L}^q), \text{Coker}(\mathcal{L}^q \rightarrow \mathcal{L}^{q+1})$ sont localement libres. D'après ([11], p.56), on peut trouver une partition de Y sur laquelle les deux faisceaux devient localement libres: c'est la partition cherchée.

Comme ensemble, $Y' = \bigcup_k Y'_k$, où

$$Y'_k = \{y \in Y \mid \dim \text{Ext}^q(X_y; \mathcal{F}_y, \mathcal{G}_y) = k\}$$

et g est l'identité.

2. Les fibrés vectoriels complexes (continues) de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$ se classifient par des couples d'entiers (c_1, c_2) vérifiant $c_1 c_2 \equiv 0 \pmod{2}$ (les classes de Chern), aux quels on ajoute pour c_1 pair un élément $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ (l'invariant d'Atiyah-Rees [1]).

On sait qu'il existe sur chaque type topologique des nombreux structures de fibré holomorphe. Les fibrés stables et semi-stables admettent de moduli [10], tandis que les fibrés instables (i.e. qui ne sont pas semi-stables) forment une famille non-bornée ([7], th.2.5).

Pour un fibré vectoriel holomorphe E de rang 2, notons

$$d(E) = \sup \{ r \mid h^0(E(-r)) \neq 0 \}.$$

E est instable si et seulement si $d(E) > \frac{1}{2}c_1(E)$ (en normalisant, si on suppose $c_1(E) = 0$ la condition est $d(E) > 0$ et si $c_1(E) = -1$ la condition est $d(E) \geq 0$). Dans ce cas $d(E)$ s'appelle le degré d'instabilité et on a : $h^0(E(-d(E))) = 1$, voir par exemple ([7], lemma 3.4) ou le lemme suivant. Fixons (c_1, c_2) (resp. (c_1, c_2, α) quand c_1 est pair) et notons pour un entier $d > \frac{1}{2}c_1$ par $M(d)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes de rang 2 ayant type topologique (c_1, c_2) (resp. (c_1, c_2, α)) et de degré d'instabilité d . Supposons par la suite c_1 pair. Pour une courbe Y notons ici

$$\alpha(Y) = \begin{cases} h^0 \mathcal{O}_Y(\frac{1}{2}c_1 - d - 2) + 1 \pmod{2} & \text{si } d + 2 - \frac{1}{2}c_1 \equiv 0 \pmod{4} \\ h^0 \mathcal{O}_Y(\frac{1}{2}c_1 - d - 2) \pmod{2} & \text{si } d + 2 - \frac{1}{2}c_1 \not\equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Rappelons que pour un fibré holomorphe E de rang 2,

$$\alpha(E) = h^0(E(-\frac{1}{2}c_1 - 2)) - h^1(E(-\frac{1}{2}c_1 - 2)) \pmod{2}.$$

La méthode de Serre d'étudier des fibrés de rang 2 par extensions ([12], Ch.I, §5) et des raisonnements connus donnent le

Lemme. (1) Tout fibré E de $M(d)$ est donné par une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(d) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_Y(c_1-d) \longrightarrow 0$$

où Y est une courbe localement intersection complète de degré $d^2 - dc_1 + c_2$, ayant $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(c_1 - 4 - 2d)$ et $\chi(Y) = \chi$. La courbe Y est uniquement déterminée par E , de même l'extension (mod $\mathbb{C}^*$).

(2) Inversement, une courbe comme ci-dessus détermine telles extensions et l'ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés obtenus ainsi s'identifie à $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)^* / \mathbb{C}^*$.

Quand Y varie, il est préférable de regarder $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)^* / \mathbb{C}^*$ comme sous-ensemble (ouvert) de l'espace projectif $P(\text{Ext}^1(\mathcal{I}_Y(c_1-d), \mathcal{O}(d)))$.

Une lemme analogue vaut pour c_1 impair.

Faisons aussi la remarque suivante : pour un fibré E de $M(d)$ $\dim(\text{End} E) = \binom{2d-c_1+3}{3} + 1$, donc le degré d'instabilité d'un fibré de rang 2 on peut le définir aussi à l'aide de la dimension d'espace des endomorphismes.

3. Montrons maintenant comment paramétriser $M(d)$. On va se borner au cas c_1 pair, le cas c_1 impair étant analogue. Notons par $\mathbb{H}$ le sous-espace ouvert du schéma de Hilbert des courbes l.i.c. (localement intersection complète) ayant polynôme de Hilbert $(d^2 - dc_1 + c_2)(1 + 2 + d - \frac{1}{2}c_1)$ et $\mathcal{Y} \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{H}$ le sous-espace universel associé. Appliquons la proposition pour la projection $\pi: \mathbb{P}^3 \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ et le faisceau $\text{Ext}_{\pi}^1(\mathcal{Y}_Y(c_1-d), \mathcal{O}(d))$ et soit $\mathbb{H}' \xrightarrow{g} \mathbb{H}$ le morphisme obtenu. Comme ensemble, $\mathbb{H}' = \bigcup_k \mathbb{H}'_k$, où

$$\mathbb{H}'_k = \{h \in \mathbb{H} \mid \dim \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{\mathcal{Y}_h}(c_1-d), \mathcal{O}(d)) = k\},$$

et g est l'identité ($\mathcal{Y}_h$ est la courbe associée à h). Notons

par $\mathcal{Y}'$ l'image inverse de $\mathcal{Y}$ par $(\text{id}_{\mathbb{P}^3} \times g)$ et par $\pi': \mathbb{P}^3 \times \mathbb{H}' \longrightarrow \mathbb{H}'$

la projection. Soit $\omega := \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{Y'}, \mathcal{O}(-4))$: c'est un $\mathcal{O}_{Y'}$ -module inversible et sa fibre au dessus d'un point $h \in H'$ est le faisceau dualisant ω_{Y_h} . La platitude et une suite spectrale donnent un isomorphisme naturel (voir par exemple [2], lemme 2)

$$\mathcal{E}xt_{\pi'}^1(\mathcal{Y}_{Y'}(c_1-d), \mathcal{O}(d)) \simeq \pi'_*(\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{Y'}(c_1-d), \mathcal{O}(d))) \simeq \pi'_*(\omega(4+2d-c_1)).$$

On déduit d'ici et du fait que $\mathcal{E}xt_{\pi'}^1(\mathcal{Y}_{Y'}(c_1-d), \mathcal{O}(d))$ commute avec les changements de base que l'ensemble

$$H'' = \{h \in H' \mid \omega_{Y_h} \simeq \mathcal{O}_{Y_h}(c_1-4-2d)\}$$

est ouvert. Soient $\mathcal{Y}''$ le sous-espace de $\mathbb{P}^3 \times H''$ obtenu et $\pi'' : \mathbb{P}^3 \times H'' \longrightarrow H''$ la projection. Le faisceau

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}xt_{\pi''}^1(\mathcal{Y}_{Y''}(c_1-d), \mathcal{O}(d))$$

est localement libre sur H'' et commute avec les changements de base. On trouve alors, en utilisant des correspondances bijectives comme dans le lemme, que l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes de rang 2, de classes de Chern (c_1, c_2) et de degré d'instabilité d , s'identifie avec un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)$ (pour la propriété d'être ouvert, voir [2], lemme 3). Comme l'invariant α est localement constant dans une déformation, on obtient sur $M(d)$ une structure de variété algébrique.

4. Définissons les familles de fibrés pour les quelles $M(d)$ est un espace de moduli grossier (voir [14], §2 pour la question analogue sur $\mathbb{P}^2$). Soit T un espace complexe (ou une variété algébrique sur $\mathbb{C}$) et $\mathcal{A}$ une famille de fibrés paramétrée par T , telle que les classes des $\mathcal{A}_t$ sont dans $M(d)$. Soit $q : \mathbb{P}^3 \times T \longrightarrow T$ la projection et faisons d'abord l'hypothèse : $q_*(\mathcal{A}(-d))$ est localement libre et commute avec les changements de base.

Si T est réduit, alors l'hypothèse est remplie (conséquence du théorème de continuité pour les $\mathcal{E}xt$ -relatifs, puisque $h^0 E(-d) = 1$ pour E de $M(d)$). On peut donc trouver, localement par rapport à T , des sections σ dans $\mathcal{A}(-d)$ ayant la propriété: pour tout t , $\sigma \bmod(\mathcal{M}_t)$ est non-nulle dans $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{A}_t(-d)) \simeq \mathbb{C}$.

En utilisant telles sections et des raisonnements de platitude on trouve, localement par rapport à T , des extensions

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(d) \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{Y}_Z(c_1 - d) \longrightarrow 0,$$

$Z \subset \mathbb{P}^3 \times T$ étant une famille plate de courbes l.i.c. indexée par T .

Par rapport au cas $\mathbb{P}^2$, sur $\mathbb{P}^3$ on a des sauts pour $\dim \text{Ext}^1(\mathcal{Y}_Z(c_1 - d), \mathcal{O}(d))$ (par exemple pour $c_1 = c_2 = 0$, $d = 0$ et $d = 3$, voir [2]). Pour éliminer ce phénomène faisons une nouvelle hypothèse, qui implique que $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}_Z(c_1 - d), \mathcal{O}(d))$ est localement libre et commute avec les changements de base:

$\mathcal{R}^1 q_* \mathcal{A}(d - c_1)$ est localement libre et commute avec les changements de base.

En effet, on a

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}_Z(c_1 - d), \mathcal{O}(d)) \simeq q_*(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{Y}_Z(c_1 - d), \mathcal{O}(d)))$$

et l'extension $(*)$ donne une section dans

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{Y}_Z(c_1 - d), \mathcal{O}(d)) \simeq \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Z(c_1 - d), \mathcal{O}(d))$$

qui, d'après le lemme de Serre ([13], Ch. I, lemme 6.4.3), engendre ce faisceau. Par conséquent, $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}_Z(c_1 - d), \mathcal{O}(d)) \simeq q_*(\mathcal{O}_Z)$.

On trouve alors une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_T = q_*(\mathcal{O}) \longrightarrow q_*(\mathcal{O}_Z) \rightarrow \mathcal{R}^1 q_* \mathcal{Y}_Z \simeq \mathcal{R}^1 q_* \mathcal{A}(d - c_1) \rightarrow 0$$

et l'affirmation cherchée sur $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}_Z(c_1 - d), \mathcal{O}(d))$ va résulter.

Il est donc justifiée la définition suivante:

la famille $\mathcal{A}$ de fibrés de degré d'instabilité d s'appelle pure si les faisceaux $q_* \mathcal{A}(-d)$, $\mathcal{R}^1 q_* \mathcal{A}(d - c_1)$ sont localement libres

et commutent avec les changements de base. Comme d'habitude, on va identifier deux familles $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ s'il existe $\mathcal{L}_{\text{Pic}} T$ tel que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \otimes q^*(\mathcal{L})$.

Notons de nouveau par $\pi : \mathbb{P}^3 \times M(d) \longrightarrow M(d)$ la projection et par $\mathcal{Y} \subset \mathbb{P}^3 \times M(d)$ la famille de courbes déduite de la famille universelle. Si V est un ouvert affiné petit de $M(d)$, alors il existe sur $\mathbb{P}^3 \times V$ une extension "tautologique"

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(d) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{Y}_Y(c_1 - d) \longrightarrow 0,$$

en particulier un fibré tautologique. Cette extension correspond (à l'aide du théorème de changement de base pour $\mathcal{O}_{X/Y}^1$ -relatif) à la surjection tautologique $p^*(\mathcal{O}^*) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{O}^*)}^{(1)} \longrightarrow 0$, $p: \mathbb{P}(\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1$ étant le morphisme structural.

Avec les faits ci-dessus il va résulter que $M(d)$ est un espace grossier de moduli par rapport aux familles pures.

Il semble qu'il est difficile de décrire les propriétés de la variété $M(d)$ (dimension, lissité, ...). Dans [2] on démontre que pour $c_1 = c_2 = 0$ et $\alpha = 0$ (donc fibrés topologiquement triviaux) la variété $M(2)$ ($M(0)$ = la classe du fibré trivial, $M(1) = \emptyset$) a deux composantes connexes, lisses, rationnelles, de dimension 58, resp. 49.

5. Passons à l'existence des fibrés instables.

Faisons d'abord la remarque qu'une courbe Y comme dans le lemme ou son analogue n'a pas une composante irréductible X qui soit lisse. En effet, on aura alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y}_Y / \mathcal{Y}_X \mathcal{Y}_Y \longrightarrow \mathcal{Y}_X / \mathcal{Y}_X^2 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{A}$ a support fini. On va trouver alors que $\omega_Y|_X \simeq \omega_X(h^0(\mathcal{A}))$,

qui est en contradiction avec $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(c_1 - 4 - 2d)$.

La remarque suivante est que le cas $d^2 - dc_1 + c_2 < 0$, $d^2 - dc_1 + c_2 = 1$ ne sont pas possibles et que $d^2 - dc_1 + c_2 = 0$ correspond exactement aux fibrés de la forme $\mathcal{O}(d) \oplus \mathcal{O}(c_1 - d)$. Supposons donc par la suite que $d^2 - dc_1 + c_2 \geq 2$.

Soit X une droite de $\mathbb{P}^3$. Une courbe l.i.c. Y de degré 2 et de support X est donnée nécessairement par la construction de Ferrand [5]. $\mathcal{Y}_X / \mathcal{Y}_Y$ est $\mathcal{O}_X$ -module inversible de la forme

$\mathcal{O}_X(r)$ avec $r \geq -1$, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(r) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

et un isomorphisme $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-2-r)$.

Supposons d'abord que c_2 est impair. Alors, en prenant $\frac{1}{2}(d^2 - dc_1 + c_2)$ droites doubles disjointes avec $r = 2d + 2 - c_1$ on trouve des courbes l.i.c. Y , de degré $d^2 - dc_1 + c_2$ et ayant $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(c_1 - 4 - 2d)$. Par extensions on trouve des fibrés instables de rang 2 ayant classes de Chern (c_1, c_2) et degré d'instabilité exactement d .

Par la suite c_1 sera donc pair. Supposons $d^2 - dc_1 + c_2 = 2$. Alors une éventuelle courbe Y comme dans le lemme est une droite double avec $r = 2d + 2 - c_1$. Mais dans ce cas

$$h^0 \mathcal{O}_Y(\frac{1}{2}c_1 - d - 2) = d + 1 - \frac{1}{2}c_1.$$

D'après la définition de $\alpha(Y)$, il résulte que les seuls cas possibles sont $(\alpha = 0, d \not\equiv \frac{1}{2}c_1 \pmod{4})$ et $(\alpha = 1, d \equiv \frac{1}{2}c_1 \pmod{4})$.

Passons au cas $d^2 - dc_1 + c_2 = 3$. Vu la première remarque, une éventuelle courbe Y comme dans le lemme doit être une courbe de multiplicité 3 et de support une droite X . Telles courbes sont classifiées dans ([3], [7], Proposition 9.1). $\mathcal{Y}_X / (\mathcal{Y}_Y + \mathcal{Y}_X^2)$ résulte un $\mathcal{O}_X$ -module inversible (on vérifie localement) de la forme $\mathcal{O}_X(r)$ avec $r \geq -1$ (étant un quotient de $\mathcal{Y}_X / \mathcal{Y}_X^2$). On a

les suites exactes (données par des inclusions d'idéaux)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(r) \simeq \mathcal{I}_X / \mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_X^2 \longrightarrow \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_X^2 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X(2r)} \simeq \mathcal{I}_X^2 / \mathcal{I}_X(\mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_X^2) \longrightarrow \mathcal{O} / \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O} / \mathcal{I}_Y + \mathcal{I}_X^2 \longrightarrow 0$$

et l'isomorphisme $\omega_Y|_X \simeq \mathcal{O}_X(-2-2r)$. Donc nécessairement, $r = d+1 - \frac{1}{2}c_1$. Les suites exactes montrent que $\text{Pic } Y \xrightarrow{\sim} \text{Pic } X$, donc

$$\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(c_1 - 4 - 2d) \text{ pour un tel } r, \text{ et que } h^0 \mathcal{O}_Y(\frac{1}{2}c_1 - d - 2) = d+1 - \frac{1}{2}c_1.$$

On trouve la même conclusion comme dans le cas précédent.

Rappelons aussi qu'une structure double (resp. triple) sur une droite X est de la forme suivante ([3], [5], [7]): si $x=y=0$ sont les équations pour la droite X , alors la courbe est donnée par un idéal homogène de la forme $(ax+by, x^2, y^2)$, resp. de la forme $(ax+by+cx^2+dx+ey^2, x^3, y^3)$, où $a, b \in H^0 \mathcal{O}_X(r+1)$ sans zéro commun et $c, d, e \in H^0 \mathcal{O}_X(r)$.

Soit maintenant $d^2 - dc_1 + c_2 = 4$. Si X ^{est} une conique, alors on peut la doubler [5] à l'aide d'un épimorphisme $\mathcal{I}_X / \mathcal{I}_X^2 \rightarrow \mathcal{O}_X(3+2d-c_1)$ et obtenir une courbe l.i.c., de degré 4, ayant $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(c_1 - 4 - 2d)$ et $h^0 \mathcal{O}_Y(\frac{1}{2}c_1 - d - 2)$ impair. D'autre part on peut prendre Y comme réunion disjointe de deux droites doubles et obtenir également la possibilité $h^0 \mathcal{O}_Y(\frac{1}{2}c_1 - d - 2)$ pair. On voit donc que dans ce cas l'ensemble des courbes cherchées est non-vide.

On va laisser le cas $d^2 - dc_1 + c_2 = 5$ pour la section suivante.

Soit donc $d^2 - dc_1 + c_2 \geq 6$. On peut écrire $d^2 - dc_1 + c_2 = 4\alpha + 3\beta + 2\gamma$ avec des entiers $\alpha \geq 1, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$.

On prend alors Y comme réunion disjointe de courbes de degré 4, de droites triples et droites doubles et on obtient pour $h^0 \mathcal{O}_Y(\frac{1}{2}c_1 - d - 2)$ des valeurs paires ou bien impaires.

6. Soit enfin $d^2 - dc_1 + c_2 = 5$ (et c_1 pair). On peut prendre Y comme réunion disjointe d'une droite double et d'une droite triple. On obtient $h^0 \mathcal{O}_Y(\frac{1}{2}c_1 - d - 2)$ pair. Il reste de construire des courbes Y , l.i.c. et de degré 5, ayant $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(c_1 - 4 - 2d)$ et $h^0 \mathcal{O}_Y(\frac{1}{2}c_1 - d - 2)$ impair. C'est plus difficile que les autres situations et on va utiliser pour ceci des raisonnements de [3].

Soient X_1, X_2 deux droites se coupant et Y_1 une structure double de support X_1 ayant $I_{X_1}/I_{Y_1} \simeq \mathcal{O}_{X_1}(5 + 2d - c_1)$, Y_2 une structure l.i.c. triple sur X_2 ayant $I_{X_2}/(I_{Y_2} + I_{X_2}^2) \simeq \mathcal{O}_{X_2}(2 + d - \frac{1}{2}c_1)$. Soit $Y = Y_1 \cup Y_2$ et supposons qu'au voisinage du point d'intersection $X_1 \cap X_2$ la courbe Y est contenue dans une surface non-singulière.

On peut déterminer exactement les couples (Y_1, Y_2) tels que $Y = Y_1 \cup Y_2$ ait cette propriété, nous nous bornons de donner par la suite un exemple.

La courbe Y sera l.i.c. et calculons d'abord $\omega_Y|_{X_1}, \omega_Y|_{X_2}$. Au voisinage de $X_1 \cap X_2$ il existe un système de coordonnées ξ, ζ, τ tel que $I_{X_1} = (\xi, \tau), I_{Y_1} = (\xi^2, \tau), I_{X_2} = (\zeta, \tau), I_{Y_2} = (\xi^3, \tau), I_Y = (\xi^2 \xi^3, \tau)$. On a une suite exacte de $\mathcal{O}_{X_1}$ -modules

$$0 \longrightarrow I_Y/I_{X_1} I_Y \longrightarrow I_{Y_1}/I_{X_1} I_{Y_1} \longrightarrow I_{Y_1}/(I_Y + I_{X_1} I_{Y_1}) \longrightarrow 0.$$

et un calcul local montre que $I_{Y_1}/(I_Y + I_{X_1} I_{Y_1})$ est concentré en $X_1 \cap X_2$ et de dimension 3. On trouve alors $\omega_Y|_{X_1} \simeq \mathcal{O}_{X_1}(c_1 - 4 - 2d)$.

Analoguement, on trouve

$$\omega_Y|_{X_2} \simeq (\omega_{Y_2}|_{X_2})(2) \simeq \mathcal{O}_{X_2}(c_1 - 4 - 2d).$$

Montrons que l'application $\text{Pic } Y \longrightarrow \text{Pic } Y_1 \times \text{Pic } Y_2$ est isomorphisme; comme $\text{Pic } Y_1 \simeq \text{Pic } X_1$ et $\text{Pic } Y_2 \simeq \text{Pic } X_2$, on va

déduire $\omega_Y \simeq \partial_Y(c_1 - 4 - 2d)$. On a une suite exacte (diagonale et différence)

$$0 \longrightarrow \partial_Y \longrightarrow \partial_{Y_1} \times \partial_{Y_2} \longrightarrow \partial_{Y_1 \cap Y_2} \longrightarrow 0.$$

Il suffit de montrer que l'application différence

$$H^0(\partial_{Y_1}) \times H^0(\partial_{Y_2}) \longrightarrow H^0(\partial_{Y_1 \cap Y_2})$$

est surjective, parce que alors l'application correspondante

$$H^0(\partial_{Y_1})^* \times H^0(\partial_{Y_2})^* \longrightarrow H^0(\partial_{Y_1 \cap Y_2})^*$$

sera surjective. $\partial_{Y_1 \cap Y_2}$ est concentré en $X_1 \cap X_2$ et isomorphe à

$\mathbb{C}\langle \xi, \zeta, \tau \rangle / (\xi^2, \zeta^3, \tau) \simeq \mathbb{C}^6$, une base étant donnée par les classes de $1, \xi, \zeta, \xi\zeta, \zeta^2, \xi\zeta^2$. Soient x, y, z, u des coordonnées homogènes et supposons que $X_1 = (x=z=0), X_2 = (y=z=0)$. Prenons Y_1 donné par l'idéal homogène $(y^{6+2d-c_1}x + u^{6+2d-c_1}z, x^2, z^2)$ et Y_2 par l'idéal homogène $(x^{3+d-\frac{1}{2}c_1}y + u^{3+d-\frac{1}{2}c_1}z, y^3, z^3)$. Soient $\xi = x/u, \zeta = y/u$ et $\tau = z/u + \zeta^{6+2d-c_1}\xi + \xi^{3+d-\frac{1}{2}c_1}\zeta$. (ξ, ζ, τ) est un système de coordonnées au voisinage de $0 = (0; 0; 0; 1)$ et l'idéal de Y sera (τ, ξ^2, ζ^3) . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0 \partial_{X_1}(5+2d-c_1) \longrightarrow H^0 \partial_{Y_1} \longrightarrow H^0 \partial_{X_1} \simeq \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

$\partial_{X_1}(5+2d-c_1)$ est isomorphe dans le voisinage de 0 avec ∂_{X_1} par $\varphi \longmapsto \varphi / (u^{5+2d-c_1})$ et on identifie ∂_{X_1} avec $\mathfrak{Y}_{X_1} / \mathfrak{Y}_{Y_1}$ dans le voisinage de 0 par $\psi \longrightarrow \psi$ (la classe de ξ).

Par conséquent, si $\varphi(y, u) \in H^0 \partial_{X_1}(5+2d-c_1)$ est regardé comme élément de $H^0 \partial_{Y_1}$, alors l'image de $\lambda + \varphi$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) dans $\partial_{Y_1, 0}$ est la classe de $\lambda + (\varphi / (u^{5+2d-c_1})) \xi$.

De même, pour Y_2 on a les suites exactes

$$0 \longrightarrow \partial_{X_2}(2+d-\frac{1}{2}c_1) \longrightarrow \partial_{Y_2} + \mathfrak{Y}_{X_2}^2 \longrightarrow \partial_{X_2} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_2}(4+2d-c_1) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_2} \longrightarrow \mathcal{O}/(\mathfrak{Y}_{Y_2} + \mathfrak{Y}_{X_2}) \longrightarrow 0.$$

On peut identifier $H^0 \mathcal{O}_{Y_2}$ avec la somme directe

$$\mathbb{C} + H^0 \mathcal{O}_{X_2}(2+d-\frac{1}{2}c_1) + H^0 \mathcal{O}_{X_2}(4+2d-c_1),$$

de manière que le germe dans $\mathcal{O}_{Y_2,0}$ d'un élément $\lambda + \varphi(x,u) + \psi(x,u)$ est la classe de

$$\lambda + (\varphi/(u^{2+d-\frac{1}{2}c_1}))\zeta + (\psi/(u^{4+2d-c_1}))\zeta^2.$$

On trouve en effet que l'application $H^0 \mathcal{O}_{Y_1} \times H^0 \mathcal{O}_{Y_2} \rightarrow H^0 \mathcal{O}_{Y_1 \cap Y_2}$ est surjective. Il reste à montrer que $h^0 \mathcal{O}_Y(\frac{1}{2}c_1-d-2)$ est impair.

On a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{O}_Y(\frac{1}{2}c_1-d-2) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_{Y_1}(\frac{1}{2}c_1-d-2) \times H^0 \mathcal{O}_{Y_2}(\frac{1}{2}c_1-d-2) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_{Y_1 \cap Y_2} \simeq \mathbb{C}^6.$$

Mais $h^0 \mathcal{O}_{Y_1}(\frac{1}{2}c_1-d-2) = h^0 \mathcal{O}_{Y_2}(\frac{1}{2}c_1-d-2) = 4+d-\frac{1}{2}c_1$ et, par le même argument comme plus haut, l'image de la flèche dans $\mathbb{C}^6$ a dimension 5 (on manque cette fois les constantes).

Constantin Bănică

Dep.de Mathématique INCREST

Bd.Păcii 220 .

Bucarest, Roumanie.

Bibliographie

- [1] M.F.Atiyah, E.Rees: Vector bundles on projective 3-space, Invent.Math.35,131-153,(1976).
- [2] C.Bănică:Topologisch triviale holomorphe Vektorbündel auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, Preprint INCREST,nr.62/1982,Bucarest
- [3] C.Bănică,O.Forster:Sur les structures multiples,(manuscrit).
- [4] C.Bănică,M.Putinar,G.Schumacher:Variation der globalen Ext in Deformationen kompakter komplexer Räume,Math.Ann.250,135-155 (1980).
- [5] D.Ferrand: Courbes gauches et fibrés de rang 2,CRAS Paris 281,A 345-347 (1975).
- [6] H.Flenner:Eine Bemerkung über relative Ext-Garben, Preprint, Osnabrück,Heft 28 (1981).
- [7] R.Hartshorne:Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$,Math.Ann. 238,229-280 (1973).
- [8] H.Lange:Invertierbare Untergarben maximalen Grades vom Rang 2 Vektorbündeln auf der projektiven Ebene, Archiv der Math.34, 313-321 (1980).
- [9] K.Lønsted,S.L.Kleiman:Basics on families on hyperelliptic curves,Comp.Math.38,83-111 (1979).
- [10] M.Maruyama:Moduli of stable sheaves I, J.Math.,Kyoto Univ.17, 91-126 (1977).
- [11] D.Mumford:Lectures on curves on an algebraic surface,Annals of Math.Studies,59,Princeton (1966).
- [12] C.Okonek,M.Schneider,H.Spindler:Vector bundles on complex projective spaces,Basel,Boston,Stuttgart,Birkhäuser (1980).
- [13] U.Schafft: Nichtsepariertheit instabiler Rang-2-Vektorbündel auf $\mathbb{P}^2$, Dissertation,Göttingen (1981).
- [14] S.A.Strømme:Deforming vector bundles on the projective plane, Preprint,Oslo (1982).