

INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250 3638

SUR LE NOMBRE DES CARACTERS IRREDUCTIBLES
DONT L'INDEX DE SCHUR SUR Q EST TRIVIAL
par

Victor ALEXANDRU et Ion ARMLANU

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No. 18/1983

BUCURESTI

Recu 19211

SUR LE NOMBRE DES CARACTERS IRREDUCTIBLES
DONT L'INDEX DE SCHUR SUR Q EST TRIVIAL

par

Victor ALEXANDRU ^{*)} et Ion ARMEANU ^{**)}

March, 1983

^{*)} Faculty of Mathematics, University of Bucharest,
Str. Academiei 14, 70109 Bucharest, Romania

^{**)} Faculty of Physics, Mathematics Dept., University of Bucharest,
Bucharest-Magure P.O. Box 5211, Romania

SUR LE NOMBRE DES CARACTERES IRREDUCTIBLES
DONT L'INDEX DE SCHUR SUR $\mathbb{Q}$ EST TRIVIAL

par

VICTOR ALEXANDRU et ION ARMEANU

Dans cet article on determine pour chaque groupe fini G et nombre premier p , une borne inférieure pour le nombre des caractères irréductibles χ des G dont l'index de Schur sur $\mathbb{Q}$, $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$, n'est pas multiple de p . On déduit que pour un groupe non-trivial G dont les caractères ont les valeurs dans $\mathbb{Q}$ le nombre des caractères irréductibles avec $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$, c'est au moins $t+1$ où t c'est le nombre des classes de conjugaison 2-régulier.

Une question analogue pour le nombre des $\chi \in \text{Irr}(G)$ dont l'index de Schur sur $\mathbb{R}$, $m_{\mathbb{R}}(\chi) = 1$, a été considéré par R. Gow (voir [5]) répondant à une problème de R. Brauer (voir [1]).

On examine aussi d'autres situations particulières.

Soit G un groupe fini et $C_1 = e, C_2, \dots, C_s$ les classes de conjugaison dans G . Fixons $g_i \in C_i$ et soit

$K_i = \mathbb{Q}(\chi_1(g_i), \dots, \chi_s(g_i))$ où $\chi_j \in \text{Irr}(G)$ et $k_i = [K_i : \mathbb{Q}]$. Si l'ordre $\text{ord } g_i = n_i$ il est bien connue l'inclusion $K_i \subset \mathbb{Q}(\omega_{n_i})$ aussi que $H_i = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega_{n_i})/K_i)$ c'est le sous groupe de $\mathbb{Z}_{n_i}^*$ formé par les classes $\bar{d}$ tel que $g_i^d \sim g_i$. (voir [6]).

Evidement $[\mathbb{Z}_{n_i}^* : H_i] = k_i$ et notons par $h_1, \dots, h_{k_i}$ un système de représentants pour les classes modulo H_i . Notons par T_i l'action du groupe G sur les classes à droite modulo $\langle g_i \rangle$, par multiplication, donc $T_i : G \rightarrow S_{\tilde{n}_i}$ ou $\tilde{n}_i = [G : \langle g_i \rangle]$. Soit $T = T_1 \times \dots \times T_s : G \rightarrow S = S_{\tilde{n}_1} \times \dots \times S_{\tilde{n}_s}$ qui est injective parce que T_1 est injective et nous allons supposer $G \subset S$.

PROPOSITION. Soit D une classe de conjugaison du groupe S et supposons que $D \cap G \neq \emptyset$. Soit $g_j \in C_j \subset D \cap G$ et $k_j = [K_j:Q]$. Alors $D \cap G$ c'est une réunion des k_j classes de conjugaison du groupe G .

PREUVE. Si $g \in D \cap G$ on obtient $T_k(g) \sim T_k(g_j)$ dans S_{n_k} , $k=1, \dots, s$. Evidemment $T_j(g_j)$ a un point fixe même $\langle g_j \rangle$, et par conséquence $T_j(g)$ a aussi un point fixe, donc on a $\langle g_j \rangle u g = \langle g_j \rangle u$ pour un $u \in G$. On déduit que $g_j^d = u g u^{-1}$ où $(d, \text{ord } g_j) = 1$, parce que $\text{ord } g = \text{ord } g_j$, par $T_1(g) \sim T_1(g_j)$. Mais $g_j^d \sim g_j$ si $d \in H_j$ et on trouve $h \in \{h_1, \dots, h_{k_j}\}$ tel que $g_j^h \sim g$, ce qui montre que $D \cap G$ est une réunion des k_j classes de conjugaison du groupe G . Mais, évidemment, $r \geq k_j$ parce que pour $h \neq h' \pmod{H_j}$ on a $g_j^h \sim g_j^{h'}$ dans le groupe S mais pas dans le groupe G .

COROLLAIRE 1. Soit p un nombre premier. Alors le nombre des classes de conjugaison p -régulier D du groupe S avec $D \cap G \neq \emptyset$ est donné par $n_p = \sum_i 1/k_i$, où l'addition est fait après tout i tel que $(\text{ord } g_i, p) = 1$.

PREUVE. Pour chaque $D \subset S$ classe p -régulier avec $D \cap G \neq \emptyset$ on a par la proposition précédente, $\sum_i 1/k_i = 1$ quand on fait l'addition après tout i tel que $g_i \in D \cap G$.

OBSERVATIONS. 1) Les nombres n_p sont bien déterminés par le tableau des caractères du groupe G .

2) Particulièrement si $\chi_i(g) \in Q$, pour $i=1, \dots, s$ et tout $g \in G$, les classes de conjugaison de G sont les traces sur G des celles du groupe S et n_p est le nombre des classes p -régulier de G . Evidemment, cela est une caractéristique des groupes dont les caractères ont des valeurs dans Q .

THEOREME 1. Pour chaque groupe fini G et $p \in \mathbb{Z}$ nombre premier, le nombre des caractères irréductibles du groupe G dont l'index de Schur, $m_Q(\chi)$, n'est pas divisible par p ,

c'est plus grande que n_p .

PREUVE. Il est bien connu que les représentations du groupe symétrique sont réalisables dans $\mathbb{Q}$. (voir 2). Donc les représentations irréductibles du groupe S , qui sont des produits tensoriels des représentations des groupes symétriques, sont aussi réalisables dans $\mathbb{Q}$.

Soit $\{\mu_1, \dots, \mu_t\} = \text{Irr}(S)$ et pour chaque $D_i \subset S$ p -régulier soit $x_i \in D_i$, $i=1, \dots, f$. Il est connu (voir [2]) que le p -rang de la matrice $(\mu_i(x_j))$, $i=1, \dots, t$ et $j=1, \dots, f$ c'est f même ; donc on trouve $\mu_1, \dots, \mu_f \in \text{Irr}(S)$ tel que $\det(\mu_i(x_j)) \not\equiv 0 \pmod{p}$ pour chaque $i, j=1, \dots, f$. Par la proposition démontrée, pour exactement n_p classes p -régulières D_i du groupe S les intersections $D_i \cap G$ sont non vides. Supposons donc $x_i = g_i \in G$ pour $i=1, \dots, n_p$ et soit μ_i où $i=1, \dots, n_p$ tel que $\det(\mu_i(g_j)) \not\equiv 0 \pmod{p}$ pour $i, j=1, \dots, n_p$.

Considérons la restriction de μ_i sur G et soit $\mu_i|_G(g_j) = \sum_{k=1}^s a_{ik} \chi_k(x_j)$ avec $\chi_k \in \text{Irr}(G)$. Notons $N = (\mu_i(g_j))$, $A = (a_{ik})$, $H = (\chi_k(x_j))$ où $i, j=1, \dots, n_p$, $k=1, \dots, s$; donc $N = AH$ et les p -rangs des A et H sont supérieures à n_p . Plus précisément, par une bien connue évaluation du $\det(AH)$, on trouve n_p valeurs pour k , notons par $1, \dots, n_p$, tel que $\det(a_{ik}) \not\equiv 0 \pmod{p}$ et $\det(\chi_k(g_j)) \not\equiv 0 \pmod{p}$, où $i, j, k=1, \dots, n_p$. Donc pour chaque $k=1, \dots, n_p$ on peut trouver i tel que $(p, a_{ik})=1$. Mais $\mu_i|_G$ est une $\mathbb{Q}$ -représentation et la preuve est terminée. (voir [3])

THEOREME 2. Soit G un groupe fini et supposons $2 \nmid |G|$. Alors le nombre des $\chi \in \text{Irr}(G)$ avec $(m_{\mathbb{Q}}(\chi), 2)=1$ est supérieur à $f=n_2+1$.

PREUVE. Supposons que $\chi_1, \dots, \chi_{f-1}$ qui sont trouvés par le théorème 1 sont les seuls avec la propriété que

$(m_Q(\chi), 2) = 1$. Notons alors $1_G = \chi_1$. Soit H un 2-groupe de Sylow du groupe G et λ un caractère linéaire de H tel que $\lambda \neq 1_H$ et $\lambda^2 = 1_H$, $\phi = \lambda^G$ et $\psi = 1_H^G$ les caractères induits par λ et 1_H . Soit $\phi = \sum_{i=1}^{f-1} a_i \chi_i + \sum_{i=f}^s a_i \chi_i$ et $\psi = \sum_{i=1}^{f-1} b_i \chi_i + \sum_{i=f}^s b_i \chi_i$. Alors pour $i \geq f$ a_i et b_i sont divisibles par 2 parce que ϕ et ψ sont des $\mathbb{Q}$ -représentation du groupe G . (voir [3]).

Avec les notations antérieures, évidemment $\phi(g_j) = \psi(g_j) = 0$ pour g_j éléments 2-réguliers et différents de $g_1 = e$ (l'unité de G), et $\phi(e) = \psi(e) = [G:H]$. Alors

$$\sum_{i=1}^{f-1} (a_i - b_i) \chi_i(g_j) = 0 \pmod{2}, \quad j=1, \dots, f-1$$

d'où $a_i = b_i \pmod{2}$ parce que $\det(\chi_i(g_j)) \not\equiv 0 \pmod{2}$.

Mais par la théorème de réciprocité de Frobenius nous trouvons $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, donc une contradiction.

COROLLAIRE 2. Supposons $1 \neq |G|$ et $\chi_i(g) \in \mathbb{R}$ pour $i=1, \dots, s$. Alors pour au moins $n_2 + 1$ valeurs du k $m_Q(\chi_k) = 1$.

PREUVE. Par la théorème de Brauer-Speiser (voir [4]) on a $m_Q(\chi) \leq 2$ pour tout $\chi \in \text{Irr}(G)$; parce que $\chi_i(g) \in \mathbb{R}$ on a toujours $2/|G|$ si $|G| \neq 1$.

COROLLAIRE 3. Supposons $|G| \neq 1$, $\chi_i(g) \in \mathbb{Q}$ où $i=1, \dots, s$ et soit t le nombre des classes de conjugaison 2-régulier. Alors pour au moins $t+1$ caractères irréductibles $m_Q(\chi) = 1$. En effet, dans cet cas $n_2 = t$. (voir [7])

OBSERVATIONS. Généralement le nombre $t+1$, donc $n_2 + 1$, est le plus grand possible sans autres suppositions sur G . Voir par exemple $G = S_3$.

COROLLAIRE 4. Supposons $|G| = 2^a p^b \dots q^c$ où $p, \dots, q$ sont nombres premiers de Fermat. Alors, pour au moins $n_2 + 1$ caractères irréductibles du groupe G on a $m_Q(\chi) = 1$.

PREUVE . Il est bien connu que $2(p-1)\dots(q-1)$ est divisible par $m_k(\chi)$, pour chaque $\chi \in \text{Irr}(G)$. (voir [3]).

COROLLAIRE 5 . Supposons $H \trianglelefteq G$, H abélien et $[G:H] = p^m$, où p est un nombre premier . Alors pour ou moins n_p caractères irréductibles du G on a $m_Q(\chi) = 1$.

PREUVE . Par la theoreme de Ito (voir [3]) on a que $\chi(1)/p^{\bar{m}}$. Mais on a aussi $m_Q(\chi)/\chi(1)$.

REFERENCES

1. BRAUER, R. Representations of finite groups, Editor T. L. Saaty, John Wiley & Sons, New York (1963).
2. CURTIS, C.W. and REINER, I. Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, New-York, (1962).
3. FEIT, W. Characters of finite groups, Benjamin Press, New-York (1967).
4. FEIN, B. Note on the Brauer-Speiser theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 25(1970), 620-621.
5. GOW, R. Real valued characters and the Schur index, J. of Algebra 40(1) 1976.
6. SERRE, J.P. Représentations linéaires des groupes finis, Herman, Paris, (1967).
7. ALEXANDRU, V. and ARMEANU, I. About groups with rational valued characters, Preprint series in mathematics No.5 (1983), INCREST, București.