

INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250 3638

UNE PROPRIETE DE LA SOLUTION D'UNE CLASSE
D'INEQUATIONS VARIATIONNELLES

by

Anca RADOSLOVESCU

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No.2/1983

BUCURESTI

Mod 1984

UNE PROPRIETE DE LA SOLUTION D'UNE CLASSE
D'INEQUATIONS VARIATIONNELLES

by

Anca RADOSLOVEANU*)

January, 1983

*) Faculty of Mathematics, University Bucharest, str. Academiei 14,
70109 Bucharest, Romania

UNE PROPRIÉTÉ DE LA SOLUTION D'UNE CLASSE D'INEQUATIONS VARIATIONNELLES

par ANCA RADOSLOVESCU

Abstract In this paper we study a class of variational inequality of the first kind and for its solution a property likewise a maximum principle we derive. For illustrating, the results are applied to flow through porous media problems and to obstacle problems.

1. Introduction

La classe des inéquations variationnelles qui est abordée dans le travail est caractérisée par la forme bilinéaire

$$(1.1) \quad a(u,v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \text{ grad } v \, dx$$

et par un ensemble des contraintes du type de celles qui apparaissent dans des problèmes de la mécanique des fluides parmi des milieux poreux ou du type de celles qui apparaissent dans le problème de l'obstacle.

Dans la première partie du travail, on démontre l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel considéré, on obtient ensuite une caractérisation remarquable de cette solution (propriété nommée dans la littérature de spécialité, dans le cas homogène, la propriété de "supersolution") à l'aide de laquelle on énonce et on démontre le résultat essentiel du travail donné par le théorème 2.1 En corollaire, on obtient un certain principe de maximum.

A la fin du travail on donne deux exemples: le problème d'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux et le problème de l'obstacle, par lesquelles on illustre l'application du résultat obtenu.

Le cadre du travail sera le suivant:

Soit V un espace de Hilbert (sur le corps $\mathbb{R}$ des réels) et V' son dual, c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur V . On désigne par $(\cdot, \cdot)_V$ le produit scalaire sur V , par $\|\cdot\|_V$ sa norme et par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application de dualité sur $V' \times V$.

Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et continue; par conséquent:

$$(1.2) \quad \exists M > 0 \text{ tel que } |a(u,v)| \leq M \|u\|_V \cdot \|v\|_V, \forall u, v \in V$$

Soit K un sous-ensemble convexe, non-vidé et fermé de V . Enfin, soit f un élément de V' . On considère alors l'inéquation variationnelle:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ tel que:} \\ a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K \end{cases}$$

On peut démontrer (cf. [6], [9]):

Théorème 1.1 Sous les hypothèses ci-dessus, si la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique, c'est-à-dire:

$$(1.4) \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

alors l'inéquation variationnelle (1.3) admet une solution unique.

L'objet du travail sera constitué par une inéquation variationnelle du type (1.3) dans laquelle la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ sera définie par (1.1).

Dans la littérature, les inéquations du type (1.3) sont appelées des inéquations variationnelles de première espèce (cf. [8]) et elles sont spécifiques aux phénomènes stationnaires.

2. La formulation du problème; l'existence et l'unicité de la solution

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ régulière.

On désigne par $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions v telles que:

$$(2.1) \quad v \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad i=1, 2, \dots, n$$

où $L^2(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Ω et où les dérivées $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ sont prises au sens des distributions sur Ω . Muni du produit scalaire:

$$(2.2) \quad (u, v)_\Lambda = \int_{\Omega} u v \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$$

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Comme d'habitude, on désigne par $\|\cdot\|_\Lambda$ la norme générée par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ et par $\|\cdot\|_1$

la seminorme sur $H^1(\Omega)$. Aussi, on désigne par $H_0^1(\Omega)$ la clôture de $C_0^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Par $\gamma: H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ on désigne l'opérateur de traces d'ordre zéro $\gamma(u)=u/\partial\Omega$ qui, conformément au théorème de traces ([1]), est linéaire, continu et surjectif.

Nous considérerons ensuite une certaine inéquation variationnelle qui constituera l'objet d'étude du travail. Pour cela, nous considérons d'abord le suivant sous-ensemble de $H^1(\Omega)$ qui joue le rôle d'ensemble des contraintes:

$$(2.3) \quad K = \left\{ v \in H^1(\Omega) ; v=g \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega \right\}$$

où g est une fonction donnée à valeurs réelles, définie sur $\partial\Omega$, dont les propriétés de régularité seront précisées ultérieurement.

Maintenant, nous supposons que g s'annule sur un sous-ensemble régulier et ouvert Γ_0 de $\partial\Omega$, avec mesure strictement positive et que $g \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Avec ces suppositions, on observe que l'ensemble K peut s'écrire sous la forme:

$$(2.4) \quad K = \left\{ v \in V ; v=g \text{ sur } \Gamma_A \text{ et } v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega \right\}$$

où

$$(2.5) \quad V = \left\{ v \in H^1(\Omega) ; v=0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}$$

et Γ_A est l'intérieur de $\partial\Omega \setminus \Gamma_0$.

Introduisons sur $H^1(\Omega)$ la forme bilinéaire:

$$(2.6) \quad H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \ni (u,v) \longrightarrow a(u,v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \text{ grad } v \, dx \in \mathbb{R}$$

et, pour f donnée dans $L^2(\Omega)$, considérons la suivante inéquation variationnelle:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in K \text{ tel que:} \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad , \forall v \in K \end{cases}$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire usuel dans $L^2(\Omega)$.

Proposition 2.1 Dans les hypothèses ci-dessus, si $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ alors l'inéquation variationnelle (2.7) admet une solution unique.

Démonstration

Nous démontrons que nous nous situons dans les hypothèses du

théorème 1.1.

On vérifie immédiatement que l'ensemble K est convexe.

Nous montrons qu'il est fermé en choisissant une suite $\{v_n\} \subset K$ avec $v_n \rightarrow v$ dans $H^1(\Omega)$ et en démontrant que $v \in K$. Puisque $v_n \rightarrow v$ dans $H^1(\Omega)$, il en résulte que $v_n \rightarrow v$ dans $L^2(\Omega)$ et alors il existe une sous-suite v_{n_i} de la suite v_n telle que v_{n_i} converge ponctuellement p.p. dans Ω vers v (voir [1], par exemple). Ayant $v_{n_i}(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in \Omega$ car $v_{n_i} \in K$, il en résulte que la limite ponctuelle v de la suite v_{n_i} a aussi la même propriété, donc:

$$(2.8) \quad v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega$$

Puisque l'opérateur de traces $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ est continu et, de plus, $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ avec injection continue, alors de la convergence $v_n \rightarrow v$ dans $H^1(\Omega)$ nous obtenons la convergence $\gamma v_n \rightarrow \gamma v$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Mais $\gamma v_n = g$ car $v_n \in K$ et donc:

$$(2.9) \quad \gamma v = g$$

De (2.8) et (2.9) nous concluons que $v \in K$ et donc K est fermé.

Montrons maintenant que l'ensemble K est non-vidé. Soit $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ une fonction ayant la propriété: $\gamma \tilde{g} = g$. Il existe une telle extension de g puisque, conformément à l'hypothèse, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et l'opérateur de traces $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ est surjectif. Alors $\tilde{g}^{\pm} = \sup(\tilde{g}, 0)$ est aussi dans $H^1(\Omega)$ et, évidemment, $\tilde{g}^{\pm} \geq 0$ p.p. dans Ω . Pour prouver que $\tilde{g}^{\pm} \in K$, il faut encore vérifier que $\gamma \tilde{g}^{\pm} = g$, ce qui est facile à voir: $\gamma \tilde{g}^{\pm} = \sup(\gamma \tilde{g}, 0) = \sup(g, 0) = g$ (conformément à l'hypothèse $g \geq 0$ sur $\partial\Omega$). En conclusion $\tilde{g}^{\pm} \in K$ et donc K n'est pas vide.

Le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_A$ de $H^1(\Omega)$ induit sur V une structure d'espace de Hilbert sur lequel, de plus, la seminorme $|\cdot|_A$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_A$ (cf. [4], par exemple), c'est-à-dire:

$$(2.10) \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \alpha \|u\|_A \leq |u|_A \leq \alpha \|u\|_A, \quad \forall u \in V$$

Pour pouvoir appliquer le théorème 1.1, il faut encore démontrer que la forme $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire, continue et V -elliptique. La bilinéarité est immédiate et la continuité se déduit à l'aide de l'inégalité de Schwartz:

$$(2.11) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \leq \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2} =$$

$$= \|u\|_A \cdot \|v\|_A \leq \|u\|_A \|v\|_A, \quad \forall u, v \in V$$

Puisque:

$$(2.12) \quad a(u, u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = \|u\|_A^2, \quad \forall u \in V$$

en utilisant la deuxième inéquation (2.10), nous obtenons:

$$(2.13) \quad a(u, u) \geq \frac{1}{2^2} \|u\|_A^2, \quad \forall u \in V$$

donc la V-ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$.

Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer le théorème 1.1 qui nous assure que le problème (2.7) a une solution et cette solution est unique.

3. Propriétés de la solution

On va montrer ci-après que la solution $u \in K$ de l'inéquation variationnelle (2.7) admet une caractérisation indépendante de la fonction g qui intervient dans la définition de l'ensemble K des contraintes. De façon plus précise, nous démontrerons que u satisfait à l'inéquation (3.4) qui est une inéquation variationnelle dont l'ensemble des contraintes est constitué par des fonctions positives de $H_0^1(\Omega)$.

Nous désignons par K_u l'ensemble suivant:

$$(3.1) \quad K_u = \left\{ w \in H^1(\Omega) ; \exists v \in K \text{ et } \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \text{ tels que } w = \varepsilon(v - u) \right\}$$

où u est la solution de (2.7).

L'ensemble K étant convexe, non-vide et fermé de $H^1(\Omega)$, il en résulte, sans difficulté, que l'ensemble K_u a les mêmes propriétés: K_u est non-vide, convexe et fermé de $H^1(\Omega)$.

Observation 3.1 $K_u \subset H_0^1(\Omega)$.

En effet, d'une part si $w \in K_u$ alors $w \in K$ et, de l'autre part, puisque $w = \varepsilon(v - u)$ avec $v \in K$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, alors $w = 0$ sur $\partial\Omega$ car $v = u = g$ sur $\partial\Omega$.

Observation 3.2 Si $w_1, w_2 \in K_u$ alors $w_1 + w_2 \in K_u$ donc K_u est un cône.

Vraiment, en raison de la définition de l'ensemble K_u , on déduit qu'il existe $v_1, v_2 \in K$ et les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que $w_i = \varepsilon_i(v_i - u), i=1, 2$. Alors:

$$w_1 + w_2 = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 - u(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) =$$

$$=(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} v_1 + \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) v_2 - u \right]$$

Posant $\xi = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $v = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} v_1 + \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) v_2$, il en résulte $v \in K$

puisque $0 < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} < 1$ et l'ensemble K est convexe. En conclusion, il existe $v \in K$ et $\xi > 0$ tels que $w_1 + w_2 = \xi(v - u)$, c'est-à-dire $w_1 + w_2 \in K_u$.

Proposition 3.1 Soit $u \in K$ la solution de l'inéquation variationnelle (2.4). Soit K_u l'ensemble défini par (3.1). Alors:

$$(3.2) \quad a(u, w) \geq (f, w) \quad , \quad \forall w \in K_u$$

Démonstration

Soit $w \in K_u$. Il existe alors $v \in K$ et $\xi > 0$ tels que $w = \xi(v - u)$. L'inéquation variationnelle (2.7) est vraie pour cette v . Multipliant cette inégalité par $\xi > 0$ et en utilisant ensuite la linéarité de la forme $a(\cdot, \cdot)$ et du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, on obtient (3.2).

Remarque On peut démontrer, de façon générale, le résultat suivant (voir [9]): l'inéquation variationnelle (1.3) équivaut au problème:

$$a(u, w) \geq (f, w) \quad , \quad \forall w \in K_u$$

où

$$K_u = \left\{ w \in V ; \exists v \in K \text{ et } \exists \xi > 0 \text{ tels que } w = \xi(v - u) \right\}$$

En conséquence, la solution $u \in K$ du problème (2.7) satisfait à l'inégalité (3.2) pour tout $w \in K_u$. Mais l'ensemble K_u dépend de la fonction u à laquelle il est attaché. Cette dépendance est apparente comme il résultera de l'inclusion suivante:

$$(3.3) \quad K_u \supset \left\{ w \in H_0^1(\Omega) ; w \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega \right\}$$

Pour démontrer cette chose, soit $w \in H_0^1(\Omega)$ avec $w \geq 0$ p.p. dans Ω . Soit $v = w + u$ où u est la solution de (2.7). Nous avons alors dans Ω $w \geq 0$ et $u \geq 0$ donc $v \geq 0$ p.p. dans Ω , et sur la frontière de Ω , $w = 0$ et $u = g$ donc $v = g$. Compte tenu de la définition (2.3) de l'ensemble K , il résulte $v \in K$. Par conséquent, en choisissant $\xi = 1$, il existe $v \in K$ tel que $w = \xi(v - u)$. Conformément à la définition (3.1) de l'ensemble K_u nous obtenons $w \in K_u$.

De la proposition 3.1 et de l'inclusion (3.3), nous avons:

Proposition 3.2 Soit $u \in K$ la solution de l'inéquation variationnelle (2.7). Alors:

$$(3.4) \quad a(u, w) \geq (f, w) \quad , \forall w \in H_0^1(\Omega) \text{ avec } w \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega$$

Remarque Une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que:

$$\int_{\Omega} \text{grad } u \text{ grad } w \, dx \geq 0 \quad , \forall w \in H_0^1(\Omega) \text{ avec } w \geq 0 \text{ p.p. } \Omega$$

s'appelle (cf. [7], par exemple) supersolution pour l'opérateur A défini par: $Au = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$. Selon cette définition, nous observons que la proposition 3.2 affirme que la solution de l'inéquation variationnelle (2.7), dans le cas $f=0$, est une supersolution pour l'opérateur A défini comme dessus.

Nous sommes maintenant dans la possession de la caractérisation désirée de la solution u, sur un ensemble des contraintes indépendant de la fonction donnée g et nous sommes en mesure de démontrer le suivant résultat essentiel:

Théorème 3.1 Soit u la solution de l'inéquation variationnelle (2.7). Soit $h \in H^1(\Omega)$ qui satisfait les conditions:

$$(3.5) \quad a(h, w) \geq (f, w) \quad , \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad , \quad w \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega$$

$$(3.6) \quad h \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega$$

$$(3.7) \quad h \geq g \text{ sur } \partial\Omega$$

Alors $u \leq h$ p.p. dans Ω .

Observation 3.3 Compte tenu des hypothèses faites au début du travail sur g, la condition (3.7) peut s'écrire sous la forme équivalente:

$$(3.8) \quad \begin{cases} h \geq 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ h \geq g & \text{sur } \Gamma_A \end{cases}$$

Démonstration du théorème 3.1

Soit $v = \min(h, u) = u - (u - h)^+$ où v^+ est la partie positive de la fonction v. Nous avons $v \in H^1(\Omega)$ puisque la partie positive d'une fonction de $H^1(\Omega)$ est encore dans $H^1(\Omega)$. Selon les hypothèses (3.6), (3.7) sur h et les propriétés de u comme élément de l'ensemble K, il résulte $v \geq 0$ p.p. dans Ω et $v = g$ sur $\partial\Omega$ et donc $v \in K$. Cela nous permet de remplacer v dans (2.7), d'où on obtient:

$$(3.9) \quad a(u, -(u-h)^+) \geq -(f, (u-h)^+)$$

De l'autre part, puisque la différence des deux fonctions de K est dans $H_0^1(\Omega)$, nous obtenons $(u-h)^+ \in H_0^1(\Omega)$ car $(u-h)^+ = u-v$ et $u, v \in K$. De même, nous avons $(u-h)^+ \geq 0$ p.p. dans Ω . En prenant $w = (u-h)^+$ nous avons donc $w \in H_0^1(\Omega)$ et $w \geq 0$ p.p. dans Ω et, alors, en utilisant la relation (3.5), nous obtenons:

$$(3.10) \quad a(h, (u-h)^+) \geq (f, (u-h)^+)$$

Par addition de (3.9) et (3.10), il vient:

$$(3.11) \quad a(u-h, (u-h)^+) \leq 0$$

Remarquons maintenant que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ a la propriété: $a(v^+, v^-) = 0$, $\forall v \in H^1(\Omega)$ et donc $a(v, v^+) = a(v^+, v^+)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$. Cela implique, grâce à la V -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$, que:

$$(3.12) \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \alpha \|v^+\|_V^2 \leq a(v, v^+), \forall v \in H^1(\Omega) \text{ avec } v^+ \in V$$

Mais $(u-h)^+ \in H_0^1(\Omega) \subset V$ et alors, de (3.12) et (3.11) nous obtenons:

$$(3.13) \quad \alpha \|(u-h)^+\|_V^2 \leq a(u-h, (u-h)^+) \leq 0$$

ce qui implique $(u-h)^+ = 0$ p.p. dans Ω , c'est-à-dire $u \leq h$ p.p. dans Ω . Le théorème est ainsi démontré.

Quand la fonction $f \in L^2(\Omega)$ donnée est négative, on obtient une conséquence de ce théorème sous la forme du suivant principe de maximum:

Corollaire 3.1 Soit $u \in K$ la solution de l'inéquation variationnelle (2.7) pour $f \leq 0$ p.p. dans Ω . Si la fonction g de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est majorée d'une constante positive N alors $u \leq N$ p.p. dans Ω .

Démonstration

On applique le théorème 3.1 pour $h=N$.

Observation 3.1 L'hypothèse $f \leq 0$ p.p. dans Ω du corollaire ci-dessus a la justification suivante: pour pouvoir prendre la place de h dans le théorème 3.1, le nombre N doit vérifier l'hypothèse (3.5) qui revient à:

$$a(N, w) \geq (f, w), \forall w \in H_0^1(\Omega), w \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega$$

Mais $a(N, w) = 0$ car N est une constante et donc:

$$(f, w) \leq 0, \forall w \in H_0^1(\Omega), w \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega$$

4. Une généralisation du problème (2.7)

Notre but est maintenant d'étendre les résultats obtenus au §3. En fait on va considérer le problème (2.7) sur des ensembles des contraintes sous la forme:

$$(4.1) \quad K(g, \psi) = \{ v \in H^1(\Omega) ; v=g \text{ sur } \partial\Omega, v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega \}$$

avec g et ψ des fonctions données, régulières, définies sur $\partial\Omega$, respectivement dans Ω .

Nous montrerons que de telles inéquations variationnelles admettent des solutions uniques et que pour ces solutions on peut mettre en évidence une propriété analogue à celle donnée par le théorème 3.1 et le corollaire 3.1.

Proposition 4.1 Soient Ω, g, a et f comme au §2 précédent. Soient une fonction $\psi \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ donnée telle que $\psi \leq 0$ sur $\partial\Omega$ et $K(g, \psi)$ défini comme dessus. Alors l'inéquation variationnelle:

$$(4.2) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in K(g, \psi) \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u), \forall v \in K(g, \psi) \end{cases}$$

admette une solution unique.

Démonstration

Observons d'abord que l'ensemble $K(g, \psi)$ peut s'écrire sous la forme:

$$(4.3) \quad K(g, \psi) = \{ v \in V ; v=g \text{ sur } \Gamma_1, v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega \}$$

où V est l'espace de Hilbert défini par (2.5). On a démontré que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, qui intervient dans (4.3) et qui est définie par (2.6), est continue et V -elliptique. Pour obtenir le résultat énoncé, il reste à démontrer (conformément au théorème 1.1) que l'ensemble $K(g, \psi)$ est convexe, non-vidé et fermé de V . La convexité de $K(g, \psi)$ est immédiate et la fermeture est une conséquence du fait que toute suite convergente dans $H^1(\Omega)$ contient une sous-suite convergente ponctuellement p.p. dans Ω (on utilise le même raisonnement au celui utilisé dans la démonstration de la proposition 2.1). Pour démontrer que l'ensemble $K(g, \psi)$ n'est pas vide nous considérerons $g \in H^1(\Omega)$ une extension de $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ donnée par le théorème de traces (voir la démonstration de la pro-

position 2.1). En posant alors $v = \tilde{g}_+ + \psi_+$ ou $\psi_+ = \sup(\psi, 0)$ et $\tilde{g}_+ =$

$\sup(\tilde{g}, 0)$, nous obtenons $v \in K(g, \psi)$. Vraiment,

(i) puisque $\psi \in H^1(\Omega)$, $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$, alors $\psi_+ \in H^1(\Omega)$, $\tilde{g}_+ \in H^1(\Omega)$

et donc $v = \psi_+ + \tilde{g}_+ \in H^1(\Omega)$

(ii) puisque $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$ car $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$ et puisque $\tilde{g}_+ = g$

sur $\partial\Omega$ car $\tilde{g} = g$ sur $\partial\Omega$ et $g \geq 0$ sur $\partial\Omega$, alors $v = g$ sur $\partial\Omega$

(iii) puisque $\psi_+ + \tilde{g}_+ \geq \psi$ p.p. dans Ω , alors $v \geq \psi$ p.p. dans Ω

de (i), (ii), (iii), il résulte $v \in K(g, \psi)$ donc $K(g, \psi)$ n'est pas vide.

Conformément au théorème 1.1, il résulte que l'inéquation

variationnelle (4.2) a une solution et cette solution est unique.

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans §3 (on

peut observer que la condition $v \geq \psi$ p.p. dans Ω de (4.1) par

laquelle nous avons remplacé la condition $v \geq 0$ p.p. dans Ω de

(2.3) ne produit aucune difficulté majeure) on obtient: la caractérisation (3.4) de la solution $u \in K(g, \psi)$ de l'inéquation varia-

tionnelle (4.2), le théorème 3.1 et le corollaire 3.1 dans les

variantes suivantes:

Théorème 4.1 Sous les hypothèses ci-dessus, soient $u \in K(g, \psi)$ la

solution de l'inéquation variationnelle (4.2) et $h \in H^1(\Omega)$ qui

satisfait les relations (3.5), (3.7) et:

$$(4.4) \quad h \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega$$

Alors $u \leq h$ p.p. dans Ω .

Démonstration

L'hypothèse (4.4) sur h et l'appartenance de u à $K(g, \psi)$

impliquent $v \geq \psi$ p.p. dans Ω où $v = \min(u, h)$. Avec cette observation,

la démonstration du théorème 4.1 est la même que celle du théorème

3.1, en remplaçant seulement K par $K(g, \psi)$.

Corollaire 4.1 Soit $u \in K(g, \psi)$ la solution de l'inéquation varia-

tionnelle (4.2) pour $f \in L^2(\Omega)$ tel que $f \leq 0$ p.p. dans Ω . Soit N_1

une constante qui majore la fonction ψ dans Ω . Si la fonction g

est majorée sur $\partial\Omega$ d'une constante N_2 , alors $u \leq N$ p.p. dans Ω où

$$N = \max(N_1, N_2).$$

Démonstration

On choisit dans le théorème 4.1 sur la place de h le nombre

$$\max(N_1, N_2).$$

Remarque Une condition suffisante pour l'existence de N_2 dans le

corollaire 3.1 est $g \in C(\partial\Omega)$. L'existence de N_1 dans le corollaire

4.1 est assurée puisque $\psi \in C(\Omega)$.

5. Applications

5.1 Un problème de frontière libre de la théorie d'écoulement des fluides à travers les milieux poreux

Considérons le problème d'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux homogène qui sépare deux réservoirs de niveaux différents H et h avec $H > h \geq 0$. Le milieu qui sépare les deux réservoirs est borné par des parois parallèles et a une base horizontale, imperméable fixe. Soit a l'épaisseur du milieu poreux, $a > 0$. Soit $\varphi : [0, a] \rightarrow [0, H]$ la fonction qui décrit la frontière libre formée dans le milieu poreux, donc $\varphi(0) = H, \varphi(a) \geq h$. On désigne par Ω la région d'écoulement définie par:

$$(5.1) \quad \Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x < a, 0 < y < \varphi(x) \}$$

donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On va considérer le problème 2-dimensionnel. La géométrie du problème est donnée par la figure 5.1.

fig.5.1

Le mouvement dans le milieu poreux est décrit à l'aide de la vitesse de filtration, soit $\vec{v}$. De l'équation de continuité et de la loi de Darcy valable pour des milieux homogènes et isotropes, on déduit:

$$(5.2) \quad \begin{cases} -\Delta u = 0 \\ \vec{v} = \text{grad } u \end{cases}$$

D'après les conditions à limite de hydrogasodynamique sous-terrainne on obtient l'ensemble des conditions (en utilisant les notations de la fig.5.1):

$$(5.3) \quad \begin{cases} u = H & \text{sur } [AF] \\ u = h & \text{sur } [BC] \\ u_y = 0 & \text{sur }]AB[\\ u_n = 0 & \text{sur la courbe } \widehat{FC}_\varphi \\ u(x, y) = y & \text{sur la courbe } \widehat{FC}_\varphi \\ u(x, y) = y & \text{sur la "partie humide" } [CC_\varphi] \end{cases}$$

où le symbol $\cdot_n$ dénote la dérivée normale $\cdot_n = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}$ et où

$n = \{n_x, n_y\}$ est le vecteur unité normal extérieur à la frontière de Ω et le symbol $\cdot_y$ dénote la dérivée par rapport à y .

Le problème (5.2), (5.3) a comme inconnue, en fait, le triplet $\{\varphi, \Omega, u\}$ donc il est un problème de frontière libre. Baiocchi a montré, cependant, qu'après un changement convenable de la fonction inconnue u , ce problème peut se réduire à une inéquation variationnelle du type (1.3). À savoir, en considérant que la solution $u(x, y)$ dans le sens faible du problème (5.2), (5.3) est un élément de l'espace $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, Baiocchi introduit ([3]) la fonction:

$$(5.4) \quad w(x, y) = \int_y^H (\tilde{u}(x, t) - t) dt \quad \forall (x, y) \in D$$

où

$$(5.5) \quad D = (0, a) \times (0, H)$$

$$(5.6) \quad u(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{si } (x, y) \in \bar{\Omega} \\ y & \text{si } (x, y) \in D \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

et il montre que w ainsi défini est la solution de l'inéquation variationnelle:

$$(5.7) \quad \int_D \text{grad } w \text{ grad}(v-w) dx dy \geq - \int_D (v-w) dx dy, \quad \forall v \in K$$

où

$$(5.8) \quad K = \{v \in H^1(D) ; v = g \text{ sur } \partial D, v \geq 0 \text{ p.p. dans } D\}$$

et

$$(5.9) \quad g(x, y) = w(x, y) \text{ pour } (x, y) \in \partial D$$

Par un calcul immédiat, de (5.3), (5.6) et (5.4) on obtient:

$$g = \begin{cases} \frac{H^2}{2} - \frac{H^2 - h^2}{2a} x & \text{sur }]AB[\\ \frac{1}{2} (H-y)^2 & \text{sur } [AF] \\ \frac{1}{2} (h-y)^2 & \text{sur } [BC[\\ 0 & \text{sur } \partial D \setminus ([FA] \cup]AB[\cup [BC[) \end{cases}$$

La fonction g a, évidemment, les propriétés: g est lipschitz-continue donc $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ ([2]), $g \geq 0$ sur ∂D et $g=0$ sur $\Gamma_0 =]FE] \cup]EC[$.

On obtient ainsi une inéquation variationnelle du type (2.7) avec $f=-1$, pour lequel l'application des résultats démontrés dans §2 et §3 signifie que le nombre N qui majore les valeurs de la fonction g sur ∂D (il existe un tel N car $g \in C(\partial D)$), majore aussi la fonction w dans la région D .

5.2 Le problème d'obstacle

Considérons le problème de la détermination de la position d'équilibre d'une membrane élastique qui est fixée le long d'une courbe Γ (Γ étant la frontière d'un ouvert Ω de plan horizontal de coordonnée (x,y)). La membrane est soumise à une force de densité F et elle doit passer par-dessus un obstacle représenté par une fonction $\psi : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$.

fig. 5.2

En notant avec t la tension de membrane et avec $f=T/t$, le problème aux conditions à la limite qui décrit ce phénomène est le suivant:

$$(5.11) \quad -\Delta u \geq f \quad \text{dans } \Omega$$

$$(5.12) \quad u \geq \psi \quad \text{dans } \Omega$$

$$(5.13) \quad (-\Delta u - f)(u - \psi) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(5.14) \quad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

$$(5.15) \quad u^+ = u^0 \quad \text{sur } \chi$$

où χ est l'interface des ensembles $\Omega^+ = \{x \in \Omega; u(x) > \psi(x)\}$ et $\Omega^0 = \{x \in \Omega; u(x) = \psi(x)\}$ donc $\chi = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^0$ et $u^+ = u/\Omega^+$, $u^0 = u/\Omega^0$.

Le problème consiste à trouver la frontière libre χ et la position de la membrane donnée par la fonction u telles que les conditions (5.11)-(5.15) soient vérifiées. De (5.11) et (5.13), respectivement (5.12) et (5.13), on obtient:

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega^+$$

$$u = \psi \quad \text{dans } \Omega^0$$

donc dans Ω^+ la membrane se situe strictement au-dessus de l'obstacle et dans Ω^0 la membrane est en contact avec l'obstacle.

On démontre (par exemple [4]) que la solution formale de ce problème correspond, pour $f \in L^2(\Omega)$ donné, à la solution d'une

inéquation variationnelle du type (1.3) avec les donnés:

$$(5.16) \quad \begin{cases} V = H_0^1(\Omega) \\ K = \{ v \in V ; v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega \} \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx \, dy \end{cases}$$

Si l'obstacle est décrit par une fonction $\psi \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ avec $\psi \leq 0$ sur Γ , alors l'inéquation variationnelle (1.3) avec les donnés (5.16) entre dans la classe d'inéquations variationnelles considérée dans §4, avec $g=0$ (on peut toujours supposer que $f \leq 0$ p.p. dans Ω). En appliquant le théorème 4.1 et le corollaire 4.1 on retrouve les résultats démontrés dans [7] pour des inéquations variationnelles du type (1.3) avec les donnés (5.16) et avec $f=0$. À savoir, on obtient que la solution de cette inéquation variationnelle (avec $f=0$) est une supersolution pour l'opérateur A défini par $Au = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$ et elle a aussi la propriété d'être la plus petite parmi les supersolutions qui satisfont les conditions (3.7) et (4.4). En particulier, cette solution est plus petite que la constante qui majore la fonction ψ dans Ω .

BIBLIOGRAPHIE

1. R.Adams - Sobolev spaces. Academic Press (1975)
2. C.Baiocchi - Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica. Annali Mat. Pura et Appli.92,107 (1972)
3. C.Baiocchi,V.Comincioli,L.Guerri,G.Volpi - Free boundary problems in the theory of fluid through porous media; a numerical approach. Calcolo X (1973)
4. Ph.G.Ciarlet - The finite element method for elliptic problems. North.Holland Amsterdam (1977)
5. G.Dincă - Metode variaționale și aplicații. Ed.tehn. (1980)
6. R.Glowinski,J.L.Lions,R.Trémolières - Analyse numérique des inéquations variationnelles I,II. Dunod,Paris (1976)
7. H.Lewy,G.Stampacchia - On the regularity of the solution of a variational inequality. Comm. Pure Appl. Math.,vol.22 (1969)
8. J.T.Oden,N.Kikuchi - Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media. Int.J. Engng.Sci.,vol.18,pp.1173-1284 (1980)
9. G.Stampacchia - Variational inequalities. Theory and applications of monotone operators. Proceedings of a Nato advanced study Institute held in Venice, Italy, june 17-30 (1968)

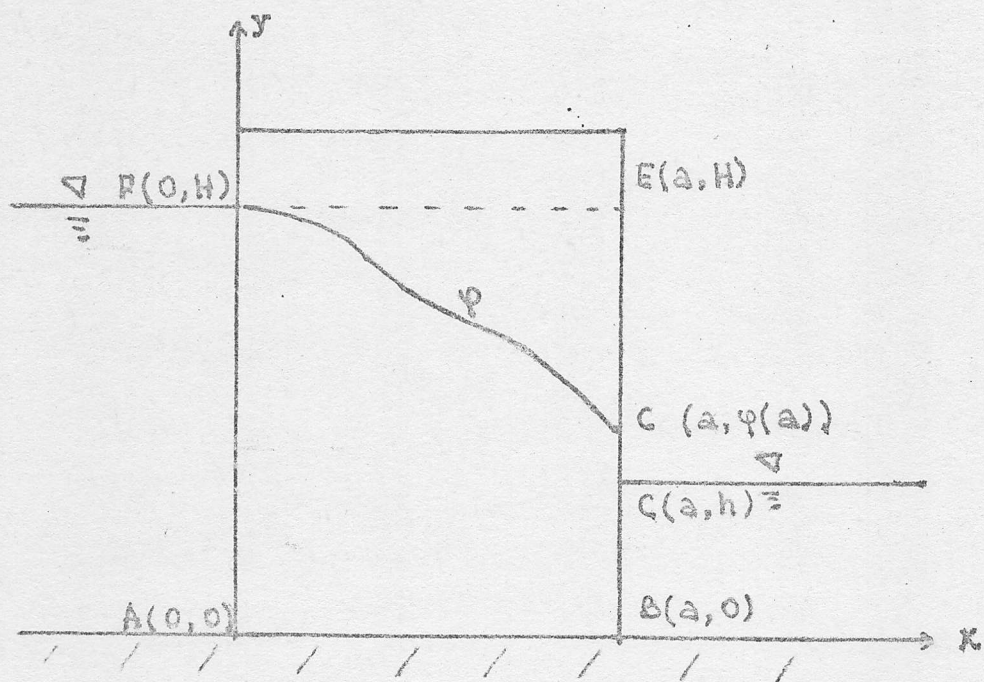


Fig. 5.1

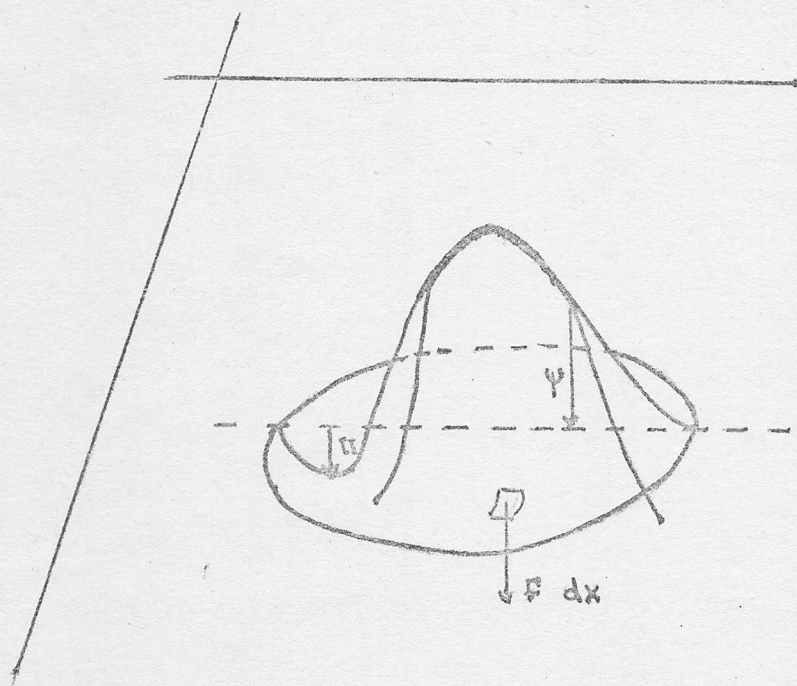


Fig. 5.2

