

INSTITUTUL
DE
MATEMATICĂ

INSTITUTUL NAȚIONAL
PENTRU CREAȚIE
ȘTIINȚIFICĂ ȘI TEHNICĂ

ISSN 0250 3638

SUR L'EXISTENCE DES FIBRES VECTORIELS
HOLOMORPHES SUR LES SURFACES COMPACTES
NON-ALGEBRIQUES

par

C. BANICA

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No.17/1985

BUCUREȘTI

01-12-85

INSTITUTUL NAȚIONAL
PENTRU CREAȚIE
ȘTIINȚIFICĂ ȘI TEHNICĂ

INSTITUTUL
DE
MATEMATICĂ

ISSN 0250 3898

SUR L'EXISTENCE DES FIBRES VECTORIELLES
HOLONOMES SUR LES SURFACES COMPACTES
NON-ALGÈBRIQUES

PAR

C. PAMNICU

PRINTING SERIES IN MATHEMATICS

NO. 17/1987

BUCUREȘTI

1987

SUR L'EXISTENCE DES FIBRES VECTORIELS HOLOMORPHES
SUR LES SURFACES COMPACTES NON-ALGEBRIQUES

par

C.BANICA*)

March 1985

*) Department of Mathematics, National Institute for Scientific and Technical Creation, Bdul Pacii 220, 79622 Bucharest, Romania.

Sur l'existence des fibrés vectoriels holomorphes sur
les surfaces compactes non-algébriques.

par C.Bănică

Une question importante dans la théorie des fibrés vectoriels complexes est de savoir quels sont les fibrés (vectoriels, complexes) topologiques sur une variété complexe qui admettent des structures (vectorielles) holomorphes. Tandis que pour les fibrés en droites la question est résolue à l'aide de la suite exacte exponentielle ou à l'aide du théorème de Lefschetz sur les classes $(1,1)$, pour rang supérieur la connaissance est beaucoup plus faible.

Les fibrés topologiques sur les courbes admettent des structures holomorphes, donc le premier cas à considérer est celui des surfaces. D'après un résultat classique dû à Hu, les fibrés topologiques de rang $r \geq 2$ sur une surface complexe se classifient par les couples (c_1, c_2) des classes de Chern, et ceci on peut les choisir arbitrairement.

Pour les surfaces projectives, Schwarzenberger [7] a démontré que tout fibré topologique de rang $r \geq 2$ et de classes de Chern (c_1, c_2) satisfaisant la condition (évidemment, nécessaire) $c_1 = c_1(L)$, où L est un fibré holomorphe de rang 1, admet une structure holomorphe.

Mais quel est le domaine des paires (c_1, c_2) pour les fibrés vectoriels holomorphes sur une surface compacte non-algébrique?

Elençwajg et Forster [4] mettent en évidence un phénomène nouveau: l'existence des fibrés non-filtrables. Un fibré vectoriel holomorphe E sur une variété complexe s'appelle filtrable [4] s'il existe une filtration $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_r = E$ par des sous-faisceaux cohérents $\mathcal{F}_i$ de rang i . Si la variété est algébrique, alors tout fibré holomorphe est filtrable. Dans ([4], Prop. 4.9) on démontre qu'il

existe des fibrés non-filtrables de rang 2 sur tout tore X de dimension 2 ayant le groupe Neron-Severi $NS(X)=0$. L'argument de déformations de [4] montre d'ailleurs qu'il en existe sur toute surface X de dimension algébrique $a(X)=0$, et on peut prouver qu'il en existe même en tout rang ≥ 2 (théorème 2).

Le but principal du travail est de caractériser les fibrés vectoriels topologiques sur une surface (compacte, connexe) non-algébrique X qui admettent des structures de fibrés filtrables (théorème 1). À la différence du cas algébrique, la caractérisation dépend de rang.

En rang 2, ceci est :

Un fibré topologique de rang 2 et de classes de Chern (c_1, c_2) admet une structure holomorphe filtrable si et seulement si $c_1 \in NS(X)$, $c_1^2 - 4c_2 \leq \sup \{(c_1 + 2\xi)^2 \mid \xi \in NS(X)\}$ et, si X est K-3 ayant $a(X)=0$, $c_1 \not\equiv 0 \pmod{2}$ ou $c_1^2 - 4c_2 \neq -4$.

Cet énoncé a été démontré quand X est un tore dans [3], où on peut trouver aussi une description explicite dans ce cas pour $\sup \{(c_1 + 2\xi)^2 \mid \xi \in NS(X)\}$.

On peut tirer du théorème 1 plusieurs conséquences concernant les fibrés holomorphes quelconques (voir les corollaires 1-4 pour des résultats plus complets):

-Un fibré topologique de rang 2 et de classes de Chern (c_1, c_2) vérifiant $c_1 \equiv 0 \pmod{2}$, admet une structure holomorphe si et seulement si $c_1 \in NS(X)$, $c_1^2 - 4c_2 \leq 0$ et, si X est K-3 avec $a(X)=0$, $c_1^2 - 4c_2 \neq -4$;

-Un fibré topologique de rang 3 et de classes de Chern (c_1, c_2) sur un tore non-algébrique, vérifiant $c_1 \equiv 0 \pmod{3}$, admet une structure holomorphe si et seulement si $c_1 \in NS(X)$ et $c_1^2 - 3c_2 \leq 0$;

-Un fibré topologique de classes de Chern $(c_1=0, c_2)$ sur un tore de dimension algébrique zéro possède une structure holomorphe si et seulement si $c_2 \geq 0$;

-Un fibré topologique sur une surface ayant $b_2=0$ admet une structure holomorphe si et seulement si sa classe c_2 est ≥ 0 .

En utilisant les premiers deux résultats on peut trouver des fibrés topologiques E de rang 2 ne possédant pas des structures holomorphes, tandis que les fibrés $E \oplus \mathbb{C}$ possèdent (contrairement au cas algébrique!).

Pour résoudre le problème formulé il faut maîtriser le domaine des classes de Chern des fibrés non-filtrable, mais la question semble mystérieuse.

1. Préliminaires

1.1. Soient X une variété complexe compacte, $Y \subset X$ un sous-espace localement intersection complète (on va abréger l.i.c.) de codimension 2 et $L, M \in \text{Pic}(X)$. À l'aide de l'identification

$\text{Hom}(M \otimes \mathcal{I}_Y, L) \simeq M^* \otimes L$, la suite exacte des premiers termes de la suite spectrale $\text{Ext} \Rightarrow \text{Ext}$ devient.

$$0 \rightarrow H^1(X, M^* \otimes L) \rightarrow \text{Ext}^1(M \otimes \mathcal{I}_Y, L) \rightarrow H^0(X, \text{Ext}^1(M \otimes \mathcal{I}_Y, L)) \rightarrow H^2(X, M^* \otimes L)$$

Soit $\xi \in \text{Ext}^1(M \otimes \mathcal{I}_Y, L)$ et

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E_\xi \longrightarrow M \otimes \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

l'extension associée. Un résultat dû à Serre ([5], Ch. I, § 5)

montre que E_ξ est localement libre si et seulement si l'image de ξ dans $H^0(X, \text{Ext}^1)$ engendre le faisceau $\text{Ext}^1(M \otimes \mathcal{I}_Y, L)$.

Dans ce cas

$$\begin{cases} c_1(E_\xi) = c_1(L) + c_1(M) \\ c_2(E_\xi) = c_1(L) \cdot c_1(M) + [Y] \end{cases}$$

où $[Y]$ est la classe de cohomologie de Y . On va utiliser cette méthode pour obtenir des fibrés vectoriels holomorphes de rang 2 sur les surfaces.

Supposons que X est une surface. Alors on peut identifier $\text{Ext}^1(M \otimes \mathcal{I}_Y, L)$ à $\mathcal{O}_Y$. Si $H^2(X, M^* \otimes L) = 0$, en partant avec un élément inversible de $\mathcal{O}_Y$ et en prenant une préimage ξ dans Ext^1 , on peut réaliser la construction ci-dessus et construire des fibrés E_ξ . Souvent, pour assurer l'annulation de $H^2(X, M^* \otimes L) \simeq H^0(X, M \otimes L^* \otimes K_X)$, on va utiliser implicitement le fait bien connu: un faisceau inversible L vérifiant $H^0(X, L) \neq 0$ et $H^0(X, L^*) \neq 0$ est trivial.

Un point principal dans le travail est que la construction est réalisable aussi dans l'hypothèse plus faible que l'application

$$\Gamma(X, \text{Ext}^1(M \otimes \mathcal{I}_Y, L)) \longrightarrow H^2(X, M^* \otimes L)$$

soit nulle. Mais c'est application n'est autre que la duale de la restriction

$$H^0(X, M \otimes L^* \otimes K_X) \longrightarrow H^0(Y, M \otimes L^* \otimes K_X|_Y)$$

Notons aussi que pour $M \otimes L^* \otimes K_X \simeq \mathcal{O}_X$ (et si la surface a $\text{Pic}(X)=0$, on n'a pas d'autre choix!), cette application n'est pas nulle (Y supposé non-vide), mais si Y contient au moins deux points distincts on peut trouver des éléments inversibles dans $H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X)$ ayant l'image nulle dans H^2 , et donc de nouveau utiliser la méthode de Serre.

1.2. Rappelons qu'un fibré vectoriel holomorphe E de rang r sur une variété complexe X est dit filtrable [4], s'il existe une filtration

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_r = E$$

par des sous-faisceaux cohérents $\mathcal{F}_i$ de rang i . Pour $r=2$ on a les résultats ([4], 1.4, 1.6 et 1.11):

- E est filtrable si et seulement si on peut trouver $L \in \text{Pic}(X)$ tel que $H^0(X, E \otimes L) \neq 0$;

- les fibrés filtrables sont exactement ceux obtenus par extensions comme dans 1.1;

- si E est non-filtrable, alors il est simple (i.e. $\text{End}(E) \simeq \mathbb{C}$).
Nous utilisons aussi le

Lemme 1. Soit E un fibré non-filtrable de rang 3 sur une variété complexe compacte et connexe.

i) E est simple

ii) Pour tout L de $\text{Pic}(X)$ tel que $H^0(X, L^i) = 0$, $i=1,2,3$, on a $\text{Hom}(E, E \otimes L) = 0$.

Démonstration. i) Il suffit de montrer que tout endomorphisme $\sigma \neq 0$ de E est un automorphisme. Supposons par absurd, que $\det \sigma = 0$. D'après un argument standard, en utilisant les valeurs propres de σ (qui sont les mêmes pour toutes les fibres de E) l'indécomposabilité de E et l'hypothèse $\det \sigma = 0$, on trouve $\sigma^3 = 0$. En remplaçant, si nécessaire, σ par σ^2 on peut supposer

$\sigma \neq 0$, $\sigma^2 = 0$. Mais $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 = \text{Im}(\sigma) \subset \mathcal{F}_2 = \text{Ker}(\sigma) \subset \mathcal{F}_3 = E$ donne une filtration pour E , contradiction!

ii) Soient L un fibré en droites et $\sigma: E \longrightarrow E \otimes L$ un morphisme. On peut trouver des sections $\alpha_i \in H^0(X, L^i)$, $i=1,2,3$, telles que, pour tout isomorphisme local $\varepsilon: L \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$, $t^3 + \varepsilon(\alpha_1)t^2 + \varepsilon(\alpha_2)t + \varepsilon(\alpha_3)$ soit le polynôme caractéristique de $E \xrightarrow{\sigma} E \otimes L \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} E$. Supposons que L, L^2 et L^3 n'ont pas des sections globales. Alors $((1 \otimes \varepsilon)\sigma)^3 = 0$. Soit, par absurd, un $\sigma \neq 0$. Comme dans i), on peut trouver localement des filtrations pour E , et ces filtrations se récolent, contradiction.

1.3. Supposons maintenant que X est une surface et soit E un fibré filtrable. Alors il existe même une filtration

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_r = E$$

avec $\mathcal{F}_i$ localement libres. En effet, on peut trouver une filtration telle que les quotients $E/\mathcal{F}_i$ soient sans torsion, alors $\mathcal{F}_i$ sont nécessairement réflexifs, donc localement libres parce que X est de dimension 2. Le quotient $E/\mathcal{F}_{r-1}$ étant sans torsion de rang 1, est de la forme $L \otimes \mathcal{Y}_Y$, avec L de $\text{Pic}(X)$ et Y sous-espace de dimension 0 ou vide. Par conséquence, d'après une normalisation à l'aide d'un élément convenable de $\text{Pic}(X)$, on peut réaliser E comme extension

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{Y}_Y$$

F étant filtrable de rang $r-1$ et Y de dimension zéro ou vide.

On a

$$c_1(E) = c_1(F), \quad c_2(E) = c_2(F) + h^0(\mathcal{O}_Y)$$

(la deuxième formule peut s'obtenir à l'aide de la première et du théorème de Riemann-Roch)

1.4. La méthode de Serre se généralise au rang arbitraire, voir la construction de Vogelaar ([5], Ch. I, 6.4) et ([1] et la version

préprint de [1]) pour un context plus général, concernant extensions des idéaux de sous-espaces de codimension ≥ 2 par des faisceaux réflexifs. En se bornant aux fibrés et aux sous-espaces l.i.c. de codimension 2, elle est la suivante. On considère une variété complexe X , un sous-espace $Y \subset X$ l.i.c. de codimension 2 et F un fibré holomorphe de rang $r-1$ ($r \geq 2$). On a

$$\text{Ext}^1(\mathcal{I}_Y, F) \cong F|_Y \otimes \det(N_Y|_X).$$

Si ξ est un élément de $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_Y, F)$, alors le faisceau cohérent E_ξ donné par l'extension associée

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E_\xi \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

est localement libre si et seulement si l'image de ξ dans $H^0(Y, F|_Y \otimes \det(N_Y|_X))$ n'a pas des zéros. En supposant maintenant que X est une surface, $F|_Y \otimes \det(N_Y|_X)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_Y^{r-1}$, donc il y a beaucoup des sections sans zéros. Si une telle section est d'image nulle dans $H^2(X, F)$, alors on peut l'enlever dans $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_Y, F)$ et construire un fibré de rang r comme plus haut.

§2. Existence de fibrés filtrables.

2.1. Soit X une surface (compacte, connexe) non-algébrique. Pour un fibré (vectoriel, complexe) topologique E de rang r sur X , notons

$$\Delta(E) := c_1(E)^2 - \frac{2r}{r-1} c_2(E)$$

Pour tout fibré topologique L de rang 1 on a

$$\begin{cases} c_1(E \otimes L) = c_1(E) + r c_1(L) \\ c_2(E \otimes L) = c_2(E) + (r-1)c_1(E)c_1(L) + \binom{r}{2} c_1(L)^2 \end{cases}$$

Par conséquence, $\Delta(E) = \Delta(E \otimes L)$, donc l'invariant ne dépend pas que du fibré projectif associé $\mathbb{P}(E)$.

Rappelons que le groupe de Neron-Severi est

$$\text{NS}(X) := \text{Im}(H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z})).$$

Pour tout $\eta \in \text{NS}(X)$, soit

$$M(\eta) := \sup \{ (\eta + 2\xi)^2 \mid \xi \in \text{NS}(X) \}.$$

Pour tout fibré holomorphe en droites L , un résultat bien connu de Kodaira dit que $c_1(L)^2 \leq 0$ (voir par exemple ([2], IV, 5.2)). Donc $M(\eta) \leq 0$. On va définir par récurrence, pour $r \geq 2$, des fonctions $M(r, \eta)$ en prenant $M(2, \eta) = M(\eta)$ et

$$M(r, \eta) = \frac{1}{(r-1)^2} \sup \{ (\eta + r\xi)^2 + r(r-2)M(r-1, \eta + r\xi) \mid \xi \in \text{NS}(X) \}$$

On a $M(r, \eta) \leq 0$, pour tout $r \geq 2$ et tout $\eta \in \text{NS}(X)$, et $M(r, \eta) = 0$ si $\eta^2 = 0$.

Si E est un fibré topologique ayant $c_1(E) \in \text{NS}(X)$, on va définir $M(E) := M(\text{rg} E, c_1(E))$. Pour tout fibré en droites L tel que $c_1(L) \in \text{NS}(X)$, on a $M(E) = M(E \otimes L)$.

On peut formuler le résultat principal du papier.

Théorème 1. Soient X une surface non-algébrique et E un fibré vectoriel topologique de rang $r \geq 2$ sur X . Alors E admet une structure de fibré holomorphe filtrable si et seulement si $c_1(E) \in \text{NS}(X)$, $\Delta(E) \leq M(E)$ et, si X est surface K-3 ayant $a(X) = 0$, $c_1(E) \neq 0 \pmod{r}$ ou $\Delta(E) \neq -\frac{2r}{r-1}$.

Pour $r=2$ on trouve l'énoncé donné dans l'introduction. Dans ce cas, la condition $\Delta(E) \leq M(E)$ est équivalente à la suivante: il existe $L \in \text{NS}(X)$ tel que $c_2(E \otimes L) \geq 0$.

La démonstration du théorème est contenue dans les sections qui suivent.

In case $r=2$
2.2. Prouvons la nécessité des conditions. Soit donc E un fibré filtrable de rang $r \geq 2$. D'abord, $c_1(E) = c_1(\bigwedge^r E)$, donc appartient à $\text{NS}(X)$. Prouvons ensuite l'inégalité $\Delta(E) \leq M(E)$, par récurrence sur r . Soit $r=2$. Il existe une extension

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow J_Y \otimes M \rightarrow 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta(E) &= c_1(E)^2 - 4c_2(E) = (c_1(L) + c_1(M))^2 - 4(c_1(L)c_1(M) + h^0(\mathcal{O}_Y)) \leq \\ &\leq (c_1(E) - 2c_1(M))^2 \leq M(E) \end{aligned}$$

Pour le pas général d'induction, tensorisant convenablement E par un inversible (ce qui ne changera pas les invariants) on peut supposer qu'il existe une extension

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{Y}_Y \longrightarrow 0,$$

F étant filtrable de rang $r-1$ et Y sous-espace de dimension zéro ou vide. Par conséquence

$$\begin{aligned} \Delta(E) &= c_1(F)^2 - \frac{2r}{r-1} (c_2(F) + h^0(\mathcal{O}_Y)) \leq c_1(F)^2 - \frac{2r}{r-1} c_2(F) \leq \\ &\leq c_1(F)^2 - \frac{2r}{r-1} \cdot \frac{r-2}{2(r-1)} (M(F) - c_1(F)^2) = \frac{1}{(r-1)^2} (c_1(F)^2 + r(r-2)M(F)) \leq \\ &\leq M(r, c_1(F)) = M(E). \end{aligned}$$

Soit maintenant X surface $K-3$ de dimension algébrique $a(X)=0$. Il faut prouver qu'il n'existe pas des fibrés filtrables ayant $c_1=0$ et $c_2=1$. D'abord soit $r=2$ et supposons, par absurde, qu'il existe un tel fibré E . Soit

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{Y}_Y \otimes M \longrightarrow 0$$

une extension. On a

$$\begin{cases} 0 = c_1(E) = c_1(L) + c_1(M) \\ 1 = c_2(E) = c_1(L)c_1(M) + h^0(\mathcal{O}_Y) = -c_1(L)^2 + h^0(\mathcal{O}_Y). \end{cases}$$

Comme $Y \neq \emptyset$, car la forme quadratique c_1^2 est paire sur une surface $K-3$, la seule possibilité est : $c_1(L)^2=0$ et Y se réduit à un point simple. Par le lemme qui suit, $L \simeq M \simeq \mathcal{O}$, donc on a une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{Y}_x \longrightarrow 0$$

x étant un point simple de X . Dans la suite exacte

$$\text{Ext}^1(\mathcal{Y}_x, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}^1) \simeq \mathbb{C} \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}) \simeq \mathbb{C},$$

la deuxième flèche est bijective. Par la condition de Serre, on obtient une contradiction.

Pour le cas général, supposons qu'on a montré déjà qu'il n'existe pas aucun fibré filtrable de rang $r-1$ ayant classes de Chern $(0,1)$, et soit par absurde un fibré filtrable E de rang $r \geq 3$

et tel que $c_1(E)=0, c_2(E)=1$.

Il existe $L \in \text{Pic}(X)$ et une extension

$$0 \longrightarrow F \otimes L \longrightarrow E \otimes L \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0,$$

F étant filtrable de rang $r-1$ et Y sous-espace de dimension 0 ou vide. On a $c_1(E \otimes L) = c_1(F \otimes L)$ et $c_2(E \otimes L) = c_2(F \otimes L) + h^0(\mathcal{O}_Y)$, donc $c_1(F) = c_1(L)$ et $c_2(F) = 1 + c_1(L)^2 - h^0(\mathcal{O}_Y)$. Comme $\Delta(F) \leq M(F) \leq 0$, on déduit $-rc_1(L)^2 + 2(r-1)h^0(\mathcal{O}_Y) \leq 2(r-1)$. Nécessairement, $(h^0 \mathcal{O}_Y = 0, c_1(L)^2 = 0)$ ou $(h^0 \mathcal{O}_Y = 1, c_1(L)^2 = 0)$. Dans le premier cas, $L \simeq \mathcal{O}$ (lemme 2), donc $(c_1(F)=0, c_2(F)=1)$, ce qui contredit l'hypothèse d'induction.

Dans le second cas, il va résulter $(c_1(F)=0, c_2(F)=0)$, donc en utilisant de nouveau le lemme 2, $F \simeq \mathcal{O}^{r-1}$. On a par conséquence une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{r-1} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_x \longrightarrow 0,$$

x étant une point simple. L'application

$$\Gamma(X, \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_x, \mathcal{O}^{r-1})) \simeq \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}^{r-1}) \simeq \mathbb{C}^{r-1}$$

est bijective, en contradiction avec la condition de Serre. Il reste de prouver le lemme suivant

Lemme 2 Soit X une surface K-3 ayant $a(X)=0$.

(i) Si $L \in \text{Pic}(X)$ vérifie $c_1(L)^2=0$, alors L est trivial

(ii) Si E est un fibré filtrable de classes de Chern $c_1(E)=0$ et $c_2(E)=0$, alors E est trivial.

Démonstration. (i) Par Riemann-Roch, on a

$$h^0(L) + h^0(L^*) \geq 2$$

Comme $h^0(P) \leq 1$ pour tout $P \in \text{Pic}(X)$ (voir [2], iv, 6.1) il s'ensuit $h^0(X, L) \neq 0$, $h^0(X, L^*) \neq 0$ et donc $L \simeq \mathcal{O}$.

(ii) Induction d'après $r = \text{rang } E$, le cas $r=1$ étant conséquence de l'injectivité de l'application $H^1(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$. Pour le pas général de récurrence, soit E un fibré filtrable de rang $r \geq 2$ et de classes de Chern $c_1=0, c_2=0$. Il existe une extension

$$0 \longrightarrow F \otimes L \longrightarrow E \otimes L \longrightarrow \mathcal{Y}_Y \longrightarrow 0,$$

F étant filtrable de rang $r-1$, $L \in \text{Pic}(X)$ et Y étant sous-espace de dimension 0 ou vide. On a $c_1(F) = c_1(L)$, $c_2(F) = c_1(L)^2 - h^0(\mathcal{O}_Y)$.

Comme $\Delta(F) \leq M(F) \leq 0$, on déduit

$$-rc_1(L)^2 + 2(r-1)h^0(\mathcal{O}_Y) \leq 0.$$

Il s'ensuit $Y = \emptyset$ et $c_1(L)^2 = 0$. Par (i), $L \simeq \mathcal{O}$, donc $(c_1(F) = 0, c_2(F) = 0)$ et par l'hypothèse de récurrence, $F \simeq \mathcal{O}^{r-1}$. En conséquence, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{r-1} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0,$$

qui est scindable parce que $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.

2.3. Démontrons la suffisance des conditions dans le cas $r=2$, le plus difficile. Soit donc un fibré topologique de rang 2, de classes de Chern c_1 et c_2 , vérifiant les hypothèses du théorème. Soit $\xi_0 \in \text{NS}(X)$ qui réalise le maximum pour $(c_1 + 2\xi)^2$. Choisissons L et M dans $\text{Pic}(X)$ tels que $c_1(L) = c_1 + \xi_0$, $c_1(M) = -\xi_0$. Par l'hypothèse, $c_1^2 - 4c_2 \leq (c_1 + 2\xi_0)^2$, donc $c_2 + \xi_0(c_1 + \xi_0) \geq 0$. Si E est un fibré holomorphe donné par une extension de la forme

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{Y}_Y \otimes M \longrightarrow 0,$$

L et M comme ci-dessus et Y l.i.c. de dimension 0 et longueur $c_2 + \xi_0(c_1 + \xi_0)$ (vide si $c_2 + \xi_0(c_1 + \xi_0) = 0$), alors $c_1(E) = c_1$ et $c_2(E) = c_2$.

De même, si E est donné par une extension de la forme

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{Y}_Y \otimes L \longrightarrow 0,$$

ou par des extensions comme ci-dessus mais en remplaçant L et M par $L \otimes P$ et $M \otimes Q$, P et Q étant dans $\text{Pic}_0(X)$.

On a l'assertion générale suivante : si C est une courbe et si au moins un des fibrés en droites $L^* \otimes M \otimes K_X|_C$ n'a pas des sections globales, alors on peut construire l'extension cherchée.

En effet, supposons par exemple que $H^0(C, L^* \otimes M \otimes K_X|_C) = 0$ et prenons Y, sous-espace l.i.c. de dimension 0 et longueur $c_2 + \xi_0(c_1 + \xi_0)$, contenu dans C. Alors l'application

$H^0(X, \mathcal{L}^1(\mathcal{Y}_Y \otimes M, L)) \rightarrow H^2(X, M^* \otimes L)$ est nulle, étant duale de la restriction

$$H^0(X, L^* \otimes M \otimes K_X) \rightarrow H^0(C, L^* \otimes M \otimes K_X) \rightarrow H^0(Y, L^* \otimes M \otimes K_X).$$

D'après 1.1, on peut construire une extension

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow \mathcal{Y}_Y \otimes M \rightarrow 0$$

ayant E localement libre et l'assertion est prouvée.

Si par exemple C est une courbe lisse rationnelle et si $C^2 = -1$, alors au moins un des fibrés $L^* \otimes M \otimes K_X|_C$, $L \otimes M^* \otimes K_X|_C$ est de degré négatif et on peut utiliser l'assertion. En particulier, pour conclure, on peut supposer (si nécessaire) que X est surface minimale. On va traiter de façon distincte les deux cas: $a(X)=0$ et $a(X)=1$.

Le cas $a(X)=1$. La surface sera elliptique et soit $\pi : X \rightarrow S$ un morphisme ayant la fibre générique une courbe elliptique, S étant une surface de Riemann compacte. On va utiliser l'assertion ci-dessus pour les fibres de π . S'il existe un point s de S tel que un des fibrés $L^* \otimes M \otimes K_X$, $L \otimes M^* \otimes K_X$ n'a pas des sections sur X_s , on a conclu. Supposons donc que pour tout s de S

$$H^0(X_s, L^* \otimes M \otimes K_X|_{X_s}) \neq 0, H^0(X_s, L \otimes M^* \otimes K_X|_{X_s}) \neq 0.$$

Pour tout s , $K_X|_{X_s} \simeq \omega_{X_s}$ et pour s générique, $\omega_{X_s} \simeq \mathcal{O}_{X_s}$.

En particulier, pour s générique,

$$h^0(X_s, L^* \otimes M \otimes K_X|_{X_s}) = h^1(X_s, L^* \otimes M \otimes K_X|_{X_s}) (=1).$$

Par l'invariance de la caractéristique de Euler-Poincaré dans une déformation, on a

$$h^0(X_s, L^* \otimes M \otimes K_X|_{X_s}) = h^1(X_s, L^* \otimes M \otimes K_X|_{X_s})$$

pour tout s . L'espace $H^0(X_s, L_s \otimes M_s^*)$ est dual à $H^1(X_s, L_s^* \otimes M_s \otimes \omega_{X_s})$, et donc il résultera non-nul. Similaire, $H^0(X_s, L_s^* \otimes M_s) \neq 0$ pour tout s .

Par conséquence, $L_s \subseteq M_s$ pour tout s de S , donc $M \subseteq L \otimes \mathcal{W}^*(P)$,

$P \in \text{Pic}(S)$ (on a utilisé ici le fait que $h^0(\mathcal{O}_{X_s})=1$ pour tout s ,

voir [2] III, 11.1). Si on tensorise le fibré topologique initial

avec L^* , pour le nouveau fibré on a $c_1 = c_1(\mathcal{W}^*(P))$. Dans ce cas

$c_1^2=0$, donc $M(2, c_1)=0$, et l'hypothèse concernant Δ devient $c_2 \geq 0$.

On va construire des structures holomorphes filtrables par extensions

$$0 \rightarrow \pi^*(R_1) \longrightarrow E \longrightarrow \pi^*(R_2) \otimes \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0,$$

avec R_1 et R_2 de $\text{Pic}(S)$ tels que $c_1(R_1) + c_1(R_2) = c_1(P)$ et Y sous-espace l.i.c. de dimension zero ayant longueur c_2 . Si $R_1, R_2 \in \text{Pic}(S)$, on a

$$H^2(X, \pi^*(R_2) \otimes \pi^*(R_1)) \simeq H^0(X, \pi^*(R_1 \otimes R_2) \otimes K_X) \simeq H^0(S, R_1^* \otimes R_2 \otimes \pi_{*}(K_X)).$$

Mais $\pi_{*}(K_X)$ est un faisceau invertible sur S et on peut prendre R_1 de degré suffisamment grand pour conclure.

Le cas $a(X)=0$. On va supposer X minimale et on va considérer successivement les cas $\text{Kod}(X)=-1$ et $\text{Kod}(X)=0$ (si la dimension de Kodaira est 1, nécessairement $a(X) \geq 1$ et si $\text{Kod}(X)=2$, X est algébrique).

Le cas $\text{Kod}(X)=-1$ est clair, parce que on n'a pas en même temps $H^0(X, L^* \otimes M \otimes K_X) \neq 0$ et $H^0(X, L \otimes M^* \otimes K_X) \neq 0$ (autrement, $H^0(X, K_X^{\otimes 2}) \neq 0$, contradiction). Par conséquence, on peut trouver l'extension cherchée.

Soit donc $\text{Kod}(X)=0$. Le fameux tableau de classification des surfaces ([2] p.188) montre que X devrait être un tore ou une surface K-3. Pour un tore, en changeant, si nécessaire, L et M entre eux et en les tensorisant avec des éléments de $\text{Pic}(X)$, on peut réaliser la construction de Serre.

Il reste le cas: X surface K-3 avec $a(X)=0$. Dans ce cas $\text{Pic}_0(X)=0$ et $K_X \simeq \mathcal{O}_X$. Si au moins un des espaces $H^0(X, L^* \otimes M)$ et $H^0(X, L \otimes M^*)$ est nul, on a fini. Dans le cas contraire, $L \simeq M$. En tensorisant par $\otimes L^*$, on peut supposer $c_1=0$ et la condition sur c_2 devient $c_2 \geq 0, c_2 \neq 1$. Le cas $c_2=0$ étant banal, supposons $c_2 \geq 2$. On peut alors prendre des sous-espaces Y formés par c_2 points simples et construire des extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0,$$

comme on a vu dans 1.1.

2.4. Enfin, prouvons la suffisance des conditions en rang arbitraire, par récurrence. Soit E un fibré vectoriel topologique de rang $r \geq 3$, de classes de Chern c_1 et c_2 , satisfaisant les hypothèses du théorème. Soit $\xi \in NS(X)$ tel que

$$M(r, c_1) = \frac{1}{(r-1)^2} ((c_1 + r\xi)^2 + r(r-2)M(r-1, c_1 + r\xi)).$$

En tensorisant E avec ξ on peut donc supposer

$$c_1^2 - \frac{2r}{r-1} c_2 \leq \frac{1}{(r-1)^2} (c_1^2 + r(r-2)M(r-1, c_1)).$$

Soit $E \subseteq F \oplus \mathbb{C}$ une scindage topologique. On a

$$c_1(F) = c_1, \quad c_2(F) = c_2 \quad \text{et} \quad M(F) = M(r-1, c_1).$$

On en déduit alors $\Delta(F) \leq M(F)$. Si X n'est pas une surface $K-3$ ayant $a(X)=0$, d'après l'hypothèse de récurrence F admet une structure holomorphe filtrable, et de même E . Il reste le cas d'une surface $K-3$ ayant $a(X)=0$. On a par l'hypothèse $a \neq 0 \pmod{r}$ ou $\Delta(E) \neq -\frac{2r}{r-1}$. Si $c_1(F) \neq 0 \pmod{r-1}$ ou $\Delta(F) \neq -\frac{2(r-1)}{r-2}$

on conclut de nouveau par l'hypothèse de récurrence. Supposons donc $c_1(F) = 0 \pmod{r-1}$ et $\Delta(F) = -\frac{2(r-1)}{r-2}$. Mais alors, en tensorisant E par un élément convenable de $NS(X)$, on se réduit au cas : c_1 élément non-nul de $NS(X)$ et $c_2 = 1$. D'après le lemme 2 $c_1^2 \neq 0$, donc $c_1^2 - 4c_2 \neq -4$. Il existe donc un fibré filtrable E' de rang 2 ayant $c_1(E') = c_1$, $c_2(E') = 1$. Le fibré $E' \oplus \mathbb{C}^{r-2}$ est une structure holomorphe filtrable sur E . Le théorème est prouvé.

Faisons la remarque que l'argument de 2.4 montre que pour un fibré vectoriel topologique vérifiant les hypothèses du théorème, il existe même des structures holomorphes filtrables de la forme $E' \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_{r-2}$, E' étant filtrable de rang 2 et L_i fibrés holomorphes en droites.

2.5. On va tirer dans cette section des conséquences concernant les fibrés holomorphes quelconques. D'abord on fait la remarque que si $c_1 \equiv 0 \pmod{r}$, alors $M(r, c_1) = 0$, et donc la condition sur Δ devient $\Delta \leq 0$. On peut normaliser, donc supposer $c_1 = 0$, et la condition revient à $c_2 \geq 0$.

Corollaire 1. Soit X une surface non-algébrique. Alors un fibré vectoriel topologique ^(de rang 2 et) de classes de Chern $(c_1 = 0, c_2)$ admet une structure holomorphe si et seulement si $c_2 \geq 0$ et, si X est une surface K-3 ayant $a(X) = 0, c_2 \neq 1$.

Démonstration D'après le théorème, il reste à prouver que pour un fibré holomorphe non-filtrable E de rang 2 et de classe de Chern $c_1(E) = 0$ on a aussi $c_2(E) \geq 0$ et que, si X est une surface K-3 ayant $a(X) = 0$, il n'existe pas des fibrés holomorphes non-filtrables de classes de Chern $(c_1 = 0, c_2 = 1)$. Mais les deux assertions découlent du théorème de Riemann-Roch, car $h^0(E) = h^2(E) = 0$ pour E non-filtrable de rang 2 et $\chi(X, \mathcal{O}_X) \geq 0$ (pour l'inégalité on peut se borner aux modèles minimaux et suivre la classification [2], p.188).

Corollaire 2. Soit X une surface non-algébrique ayant K_X trivial ou satisfaisant la condition $h^0(K_X^i) = 0$, pour $i = 1, 2, 3$. Alors un fibré vectoriel topologique de rang 3 de classes de Chern $(c_1 = 0, c_2)$ admet une structure holomorphe si et seulement si $c_2 \geq 0$ et, si X est une surface K-3 avec $a(X) = 0, c_2 \neq 1$.

Démonstration. Si E est fibré non-filtrable de rang 3, de classes de Chern $(0, c_2)$, alors le théorème de Riemann-Roch pour $\text{End}(E)$ et le lemme 1 impliquent

$$6c_2 \geq -h^0(\text{End}E) - h^2(\text{End}E) \geq -2,$$

donc $c_2 \geq 0$. Si X est K-3 on obtient $6c_2 = 16 + h^1(\text{End}E)$, donc $c_2 \neq 1$.

On conclut par le théorème 1.

Le corollaire s'applique quand X est un tore, une K-3 surface,

une surface de Kodaira ou une surface ayant $Kod(X)=-1$ (en supposant bien sur X non-algébrique).

On peut affaiblir l'hypothèse $c_1=0$ dans les corollaires 1 et 2 par $nc_1=0, n$ entier $\neq 0$.

Maintenant on peut construire des fibrés dont on a fait allusion à la fin de l'introduction. Considérons, par exemple, un tore qui contient dans $NS(X)$ un élément ξ tel que $\xi^2=-2$. Alors le fibré vectoriel topologique de rang 2 déterminé par les classes de Chern $(c_1=6\xi, c_2=-24)$ ne possède pas des structures holomorphes, tandis que si on ajoute le fibré trivial de rang 1, le fibré topologique de rang 3 obtenu possède (on applique les corollaires d'après normalisations convenables).

Corollaire 3. Soit X un tore ou une surface K-3, sans courbes. Alors un fibré vectoriel topologique ayant classes de Chern $(c_1=0, c_2)$ possède une structure holomorphe si et seulement si $c_2 \geq 0$ et, si X est K-3 avec $a(X)=0, c_2 \neq 1$,

Démonstration. D'après le théorème, il reste à montrer la nécessité des conditions pour des structures non-filtrables. On fera induction d'après le rang, le pas initial étant clair. Pour le pas général, soit E un fibré holomorphe non-filtrable de rang r , ayant $c_1(E)=0$ et $c_2(E)=c_2$. Si $h^0(E)=h^2(E)=0$, alors on conclut par Riemann-Roch que $c_2 \geq 0$. Supposons que $h^2(E) \neq 0$. Une section globale non-nulle de E^* définira une extension

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{Y}_Y \longrightarrow 0,$$

F étant fibré holomorphe de rang $r-1$ et Y sous-espace de dimension zéro ou vide (par l'hypothèse, il n'y a pas des courbes). On a

$$c_1(F)=c_1(E)=0, \quad c_2=c_2(E)=c_2(F)+h^0(\mathcal{O}_Y).$$

On déduit par l'hypothèse de récurrence que $c_2 \geq 0$. Si $h^2(E)=0$, mais $h^0(E) \neq 0$, on peut remplacer E par E^* et arriver à la même conclusion.

Supposons maintenant que X est K-3 sans courbes et montrons

que le cas $(c_1=0, c_2=1)$ n'est pas possible. On raisonne comme plus haut et on conclut grâce au lemme:

Lemme 3. Soit X une surface K-3 sans courbes et E un fibré vectoriel holomorphe ayant $c_1(E)=0$, $c_2(E)=0$ (donc topologiquement trivial). Alors E est trivial.

Démonstration. Induction d'après le rang r , le cas $r=1$ étant clair. Par Riemann-Roch, E ou E^* possède des sections globales non-nulles. À l'aide de ceci on construit des extensions etc... (voir aussi la démonstration du lemme 2, ii).

On peut appliquer le corollaire aux tores de dimension algébrique zéro.

Corollaire 4. Soit une surface avec $b_2(X)=0$. Alors un fibré vectoriel topologique possède une structure complexe si et seulement si sa classe de Chern c_2 est ≥ 0 .

Démonstration. $H^2(X, \mathbb{Z}) = NS(X)$ et la forme d'intersection $H^2(X, \mathbb{Z}) \times H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est nulle ($H^2(X, \mathbb{Z})$ étant à torsion). On conclut par le théorème et par Riemann-Roch, en raisonnant par récurrence sur le rang à l'aide des extensions (on va noter que $c_2(E \otimes L) = c_2(E)$ pour tout fibré E et tout fibré en droites L).

On peut appliquer le corollaire aux surfaces de Hopf, aux surfaces de Inoue-Bombieri et aux surfaces secondaires de Kodaira.

§3 Existence de fibrés non-filtrables.

3.1. Dans ([4], Prop. 4.9) on démontre l'existence des fibrés non-filtrables de rang 2 sur tout tore de dimension 2 ayant $NS=0$. Également, sur toute surface K-3 ayant $NS=0$ (dans ce cas, $Pic=0$) il existe des fibrés non-filtrables: un exemple est le fibré tangent, et il y a beaucoup d'autres dans sa déformation verselle ([6], Lemme 4).

-18-

Théorème 2. Sur toute surface complexe compacte de dimension algébrique zéro, il existe des fibrés non-filtrables de rang ≥ 2 quelconque.

Dans cette section on va considérer le rang 2 et raffiner l'argument de déformations de [4] pour en arriver à prouver l'existence. Soit donc X une surface avec $\chi(X)=0$ et soit E_0 un fibré filtrable de rang 2 sur X . Prouvons l'énoncé plus précis:

$$\text{si } c_1(E_0)=0 \text{ et } c_2(E_0) \geq 3\chi(X, \mathcal{O}_X) + 2\dim \text{Pic}_0(X) + 1 - \frac{c_1(X)^2}{4},$$

alors dans la déformation verselle de E_0 il y a des fibrés non-filtrables.

D'abord remarquons que pour tout fibré holomorphe F de rang 2 avec $c_1(F)=0$, d'après le théorème de Riemann-Roch

$$h^1(\text{End}F) - h^2(\text{End}F) \geq 4(c_2(F) - \chi(X, \mathcal{O}_X)) + 1.$$

Soit $((S, s_0), E)$ la déformation verselle de E_0 . On a

$$\dim_{s_0} S \geq 4(c_2(E_0) - \chi(X, \mathcal{O}_X)) + 1.$$

On peut supposer que la déformation verselle est complète en tout point de S . Soit R le sous-ensemble de $\text{Pic}(X) \times S$ défini par

$$R = \{ (\xi, s) \mid H^0(X, \mathcal{P}_\xi \otimes E_s) \neq 0 \}$$

où $\mathcal{P}_\xi$ est la fibre au-dessus de ξ du fibré de Poincaré $\mathcal{P}$.

R est un sous-ensemble analytique fermé et on va noter par R_{red}

l'espace réduit associé, et par $\pi: R_{\text{red}} \longrightarrow S_{\text{red}}$ l'application induite par projection.

Supposons par absurd que pour tout s de S , E_s est filtrable, donc que l'application π est surjective. Soit V un ouvert non-vide de S_{red} sur le quel il existe une section τ pour π . On peut choisir V connexe et V_{red} non-singulier. L'image inverse de $\mathcal{P}$ par la composition

$$X \times V_{\text{red}} \xrightarrow{1 \times \tau} X \times R_{\text{red}} \hookrightarrow X \times \text{Pic}(X) \times S \xrightarrow{\text{pr.}} X \times \text{Pic}(X)$$

définit un fibré en droites $\mathcal{N}$ sur $X \times V_{\text{red}}$ tel que, pour tout

s de V , $H^0(X, \mathcal{N}_s \otimes E_s) \neq 0$. En remplaçant V , si nécessaire, par un

ouvert plus petit, on peut supposer en plus que la fonction

$$V \ni s \longmapsto \dim H^0(X, \mathcal{N}_s \otimes E_s)$$

soit constante. En diminuant de nouveau V , on peut trouver des sections non-nulles de $\mathcal{N} \otimes E$ sur $X \times V$. Par conséquence (voir e.g. [4], 1.4 et 1.6) on peut obtenir sur $X \times V_{\text{réd}}$ une extension de la forme

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{M} \otimes \mathcal{Y}_Y \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ sont inversibles sur $X \times V_{\text{réd}}$ et $Y \subset X \times V_{\text{réd}}$ est l.i.c..

Enfin, on diminue V pour une dernière fois pour s'assurer que Y soit plat sur $V_{\text{réd}}$, donc que l'extension localise en extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_s \longrightarrow E_s \longrightarrow \mathcal{M}_s \otimes \mathcal{Y}_{Y_s} \longrightarrow 0.$$

Notons $\xi = c_1(\mathcal{L}_s)$, $\eta = c_1(\mathcal{M}_s)$ et $d = h^0(\mathcal{O}_{Y_s})$. On a

$$\begin{cases} 0 = c_1(E_0) = \xi + \eta \\ c_2(E_0) = \xi\eta + d = -\xi^2 + d. \end{cases}$$

Supposons d'abord que $d > 0$. Considérons le morphisme

$$V_{\text{réd}} \xrightarrow{\psi} \text{Pic}_{\xi}(X) \times \text{Pic}_{\eta}(X) \times D_d(X)$$

donné par $s \longmapsto ([\mathcal{L}_s], [\mathcal{M}_s], Y_s)$, où $D_d(X)$ c'est l'espace de Douady des sous-espaces de dimension 0 et longueur d de X . Fixons un point v_0 de V . $((S, v_0), E)$ est une déformation complète pour E_{v_0} . Soit $((T, 0), F)$ la déformation verselle de E_{v_0} et $(T, 0) \xrightarrow{\alpha} (S, v_0)$ un morphisme tel que $\alpha^*(E)$ soit isomorphe comme déformation à F . Notons par φ la composition

$$T_{\text{réd}} \xrightarrow{\alpha_{\text{réd}}} V_{\text{réd}} \xrightarrow{\psi} \text{Pic}_{\xi}(X) \times \text{Pic}_{\eta}(X) \times D_d(X)$$

et soit $Z = \varphi^{-1}([[\mathcal{L}_{v_0}], [\mathcal{M}_{v_0}], Y_{v_0}])$. Parce que

$\dim_0 T \geq 4(c_2(E_0) - \chi(X, \mathcal{O}_X)) + 1$, on a $\dim_0 Z \geq 4(c_2(E_0) - \chi) + 1 - 2p - 2d$, où on a noté $\chi = \chi(X, \mathcal{O}_X)$ et $p = \dim \text{Pic}_0(X)$.

Considérons maintenant le morphisme

$$Z_{\text{réd}} \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{M}_{v_0} \otimes \mathcal{Y}_{Y_{v_0}}, \mathcal{L}_{v_0}).$$

$z \longmapsto$ l'extension $0 \longrightarrow \mathcal{L}_{v_0} \longrightarrow E_{\alpha(z)} \longrightarrow \mathcal{M}_{v_0} \otimes \mathcal{Y}_{Y_{v_0}} \longrightarrow 0$.

Comme chaque extension est non-triviale ($d > 0$), on peut considérer l'application induite

$$Z_{\text{réd}} \longrightarrow \mathbb{P}(\text{Ext}^1(\mathcal{M}_{V_0} \otimes \mathcal{Y}_{Y_{V_0}}, \mathcal{L}_{V_0})).$$

Regardons la suite exacte

$$H^1(X, \mathcal{M}_{V_0}^* \otimes \mathcal{L}_{V_0}) \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{M}_{V_0} \otimes \mathcal{Y}_{Y_{V_0}}, \mathcal{L}_{V_0}) \longrightarrow H^0(Y_{V_0}, \mathcal{O}_{Y_{V_0}}).$$

Par Riemann-Roch, et en utilisant le fait que $h^0(X, L) \leq 1$ pour tout L de $\text{Pic}(X)$ ([2], IV, 6.1), on obtient

$$h^1(\mathcal{M}_{V_0}^* \otimes \mathcal{L}_{V_0}) \leq 2 - \chi - \xi c_1(X) - 2\xi^2.$$

Rappelons que $h^0(\mathcal{O}_{Y_{V_0}}) = d$ et que $d = c_2(E_0) + \xi^2$. En somme, on trouve

que la fibre de l'application $Z_{\text{réd}} \longrightarrow \mathbb{P}(\text{Ext}^1)$ au-dessus de l'extension $0 \longrightarrow \mathcal{L}_{V_0} \longrightarrow E_{V_0} \longrightarrow \mathcal{M}_{V_0} \otimes \mathcal{Y}_{Y_{V_0}} \longrightarrow 0$ est de

$$\text{dimension} \geq c_2(E_0) - 3\chi - 2p - \left(\xi - \frac{c_1(X)^2}{2} \right) + \frac{c_1(X)^2}{4} \geq$$

$$\geq c_2(E_0) - 3\chi - 2p + \frac{c_1(X)^2}{4} \geq 1$$

(pour la dernière inégalité on a utilisé l'hypothèse sur $c_2(E_0)$).

Par conséquent, on peut trouver un germe de courbe (réduite)

$$\Gamma \text{ dans } (Z_{\text{réd}}, 0) \subset (T, 0), \text{ tel que } F_z \simeq E_{V_0} \text{ pour tout } z \text{ de } \Gamma.$$

La restriction de F à $(\Gamma, 0)$ sera triviale, ce qui contredit la versalité de $((T, 0), F)$.

Maintenant soit $d=0$, donc on a sur $X \times V_{\text{réd}}$ une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Si pour un point v_0 de V l'extension $0 \longrightarrow \mathcal{L}_{V_0} \longrightarrow E_{V_0} \longrightarrow \mathcal{M}_{V_0} \longrightarrow 0$

n'est pas triviale, alors on peut raisonner dans un voisinage de v_0

comme plus haut. Dans le cas contraire, par des arguments

standards à l'aide du théorème de continuité de Grauert on trouve

que $E \simeq \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$ au-dessus des ouverts de Stein petits de $V_{\text{réd}}$.

Donc, localement par rapport à la base, $F = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{M}'$, où

$\mathcal{L}' = \alpha_{\text{réd}}^* (\mathcal{L})$ et $\mathcal{M}' = \alpha_{\text{réd}}^* (\mathcal{M})$. Mais l'ensemble analytique

$$\{z \in T \mid \mathcal{L}'_z \simeq \mathcal{L}'_0, \mathcal{M}'_z \simeq \mathcal{M}'_0\}$$

est de dimension $\dim_0 T - 2p \geq 1$, etc....

3.2. Prouvons l'existence des fibrés non-filtrables de rang quelconque $r \geq 2$, par récurrence. Plus précis, on va prouver par récurrence qu'il existe pour tout $r \geq 2$ un fibré holomorphe E de rang r tel que : $h^0(E \otimes L) = 0$ pour tout L de $\text{Pic}(X)$ et $h^2(E) \leq r-2$. Un tel fibré sera non-filtrable. Le cas $r=2$ a été considéré dans 3.1. Pour le pas général d'induction, soit F de rang $r-1$ vérifiant ces conditions. D'après ([2], IV, 6.2), le nombre des courbes irréductibles de X est fini. On peut donc considérer un point x qui n'appartient pas à aucune courbe. On va construire des fibrés E de rang r comme extensions

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_x \longrightarrow 0,$$

par la méthode de 1.4. On a $h^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_x, F)) = h^0(F_x / m_x F_x) = r-1$ et $h^2(X, F) \leq r-1$. Donc l'application $H^0(X, \mathcal{E}xt^1) \longrightarrow H^2(X, F)$ est de noyau non-nul et on obtient des extensions ayant E localement libre. Vu les hypothèses sur F et le choix de x (et le fait que $h^2(\mathcal{O}_x) = h^0 K_X \leq 1$) on trouve $h^0(E \otimes L) = 0$ et $h^2(E) \leq r-2$. Le théorème est prouvé.

3.3. On va finir par quelques remarques sur le rang 2. Dans des exemples concrets, on peut améliorer l'estimation de $c_2(E_0)$ donnée dans 3.1. En se bornant aux modèles minimaux, on peut appliquer le théorème 2 dans les cas:

1) X tore avec $a(X) = 0$. Dans ce cas X n'a pas des courbes. La condition sur $c_2(E_0)$ devient: $c_1(E_0) = 0, c_2(E_0) \geq 5$. Si en plus E_0 est simple, les fibrés E_s sont en aussi, donc $\mathcal{L}_s$ et $\mathcal{M}_s$ ne sont pas isomorphes. Il en résulte $h^0(\mathcal{M}_s^* \otimes \mathcal{L}_s) = h^0(\mathcal{M}_s \otimes \mathcal{L}_s^*) = 0$. L'argument de 3.1 montre alors qu'il suffit de supposer $c_2(E_0) \geq 3$.

En fait, d'après ([4], Prop. 4.9) il suffit $c_2(E_0) \geq 2$, mais pour en arriver on doit utiliser le fait subtil que la déformation verselle d'un fibré simple sur un tore est lisse ([4], 3.6).

D'autre part, par extensions de la forme $0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{Y}_Y \longrightarrow 0$ avec $L \in \text{Pic}_0(X)$ non-nul, on peut construire des fibrés filtrables simples de rang 2 pour tout couple $(c_1=0, c_2 \geq 1)$. Sur un tore de dimension 2, tout fibré holomorphe de rang 2 ayant $(c_1=0, c_2=0)$ est filtrable ([4], 4.6). J'ignore ce que se passe pour $(c_1=0, c_2=1)$.

2) X surface K-3 avec $a(X)=0$. La condition sur le fibré filtrable E_0 de rang 2, assurant que la déformation verselle contient des fibrés non-filtrables, est: $c_1(E_0)=0, c_2(E_0) \geq 7$. Si E_0 est même simple, alors il suffit $c_2(E_0) \geq 5$ (la déformation verselle est lisse et $h^0(\mathcal{H}_S^* \otimes \mathcal{L}_S)=0$). Supposons en plus que X ne contient pas des courbes. Alors $h^0(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{L}_S^*)$ est aussi nul, et la condition devient $c_2(E_0) \geq 4$. D'autre part, sur toute surface K-3, pour un fibré non-filtrable de rang 2 et classes de Chern $(c_1=0, c_2)$, on a nécessairement $c_2 \geq 4$. Mais, à la différence du cas des tores, l'existence des fibrés filtrables simples de rang 2 dépend de la lattice $\text{NS}(X)$ (par exemple, si $\text{NS}(X)=0$, il n'en existe pas).

3) X une surface dans la classe VII avec $a(X)=0$. La condition devient $c_1(E_0)=0, c_2(E_0) \geq 3 - \frac{c_1(X)^2}{4}$. Si E_0 est même simple ayant $h^2(\underline{\text{End}} E_0)=0$, on peut supposer seulement $c_2(E_0) \geq 1 - \frac{c_1(X)^2}{4}$.

Concernant l'existence des fibrés filtrables simples de rang 2 ayant $h^2=0$, on peut la prouver pour tout couple $(c_1=0, c_2 \geq 1)$. En effet, on prend un L de $\text{Pic}_0(X)$ qui n'est pas isomorphe avec un fibré de la forme $\mathcal{O}(D), K_X(D)$ or $K_X^*(D)$, D divisor (c'est possible car $\dim \text{Pic}_0(X)=1$ et il existe un nombre au plus dénombrable de divisors) et on considère des extensions

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{Y}_Y \longrightarrow 0,$$

où Y est l.i.c. de dimension zéro ayant $h^0(\mathcal{O}_Y)=1$ la classe donnée $c_2 \geq 1$.

Supposons maintenant que $b_2(X)=0$ (par exemple, surfaces de Hopf or surfaces de Inoue-Bombieri). Alors les conditions ci-dessus devient $c_1(E_0)=0, c_2(E_0) \geq 3$ (resp. $c_1(E_0)=0, c_2(E_0) \geq 1$ pour E_0 simple ayant $h^2(E_0)=0$). Par conséquence, il existe des fibrés non-filtrables de rang 2 ayant $c_1=0$ et $c_2 \geq 1$ quelconque (en fait, on peut prendre c_1 quelconque, car dans 3.1 on peut remplacer la condition $c_1=0$ par $nc_1=0$, n entier $\neq 0$). J'ignore s'il en existe aussi dans le cas qui reste ($c_1=0, c_2=0$).

Bibliographie

- [1] C.Bănică and I.Coandă, On the existence of rank 3 vector bundles with given Chern classes on homogeneous rational 3-folds, Preprint INCREST 27/1984 (apparaîtra dans Manuscripta math.)
- [2] W.Barth, C.Peters and A.Van de Ven, Compact complex surfaces, Springer-Verlag 1984.
- [3] V.Brînzănescu and P.Flondor, Holomorphic 2-vector bundles on non-algebraic 2-tori, Preprint INCREST 58/1984, Bucharest.
- [4] G.Elençwajg and O.Forster, Vector bundles on manifolds without divisors and a theorem of deformation, Ann.Inst.Fourier, 32, 4(1982), 25-51.
- [5] C.Okonek, M.Schneider and H.Spindler, Vector bundles on complex projective spaces, Boston-Basel-Stuttgart, Birkhäuser 1980.
- [6] H.W.Schuster, Locally free resolutions of coherent sheaves on surfaces, J.reine angew.Math. 337(1982), 159-165.
- [7] R.L.E.Schwarzenberger, Vector bundles on algebraic surfaces, Proc.London Math.Soc. 11(1961), 601-622.

