INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250 3638

SUR LES ANNEAUX ARTINIENS LOCAUX DE TYPE FINI DE REPRESENTATION

par

Adrian IOVITA

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No.39/1985

BUCURESTI

SUR LES ANNEAUX ARTINIENS LOCAUX DE TYPE

FINI DE REPRESENTATION

par

Adrian IONITA *)

June 1985

*) Institute of Mathematics, Academiei str.14, 70109 Bucharest,
ROMANIA

SUR LES ANNEAUX ARTINIENS LOCAUX DE TYPE FINI DE REPRESENTATION

par

Adrian IOVITA

Si A est un anneau artinien local nous allons montrer que A est de T.F.R. si et seulement si A est un anneau principal. Ensuite, on pourra etablir la structure des anneaux artiniens A de T.F.R. qui satisferont aux conditions:

i) A est fini engendré sur son centre Z(A)

ii) A/J est une algèbre séparable sur Z(A)/J(Z(A)).

Il en résultera comme conséquences: la structure des anneaux artiniens commutatifs de T.F.R. et celle des anneaux artiniens primaires de T.F.R. satisfaisant aux conditions i) et ii).

If A is a local artinian ring we will show that A is of finite representation type if and only if A is a principal ideal ring. Next we shall examine the structure of an artinian local ring A which satisfies the conditions:

i) A is a finitely generated module over its centre Z(A).

ii) A/J(A) is a separable algebra over Z(A)/J(Z(A)).

It will follow as consequences: the structure of commutative artinian rings of F.R.T. and that of primary artinian rings of F.R.T. satisfying the conditions i) and ii).

1. Les anneaux artiniens de type fini de représéntation (T.F.R) ont été introduits par rapport à la conjecture de Brauer-Thrall. Les résultats obtenus sur la structure de la catégorie Mod A, où A est un anneau de T.F.R. dans les travaux d'Auslander et d'Auslander-Reiten, nous suggèrent l'idée que ces anneaux aient une structure suffisamment intelligible qui puisse être décrite. Dans ce travail nous examinerons surtout cet aspect. Les anneaux considérés dans ce travail ont un élément unité et le modules sont unitairés.

Si A est un anneau artinien local nous allons montrer que A est T.F.R. si et seulement si A est un anneau principal. La technique developpée est due à J.P.Jans et R.Colby (voir 4 chapitre 6). Ensuite, en utilisant ce résultat et employant les théorèmes de structure pour les anneaux artiniens (voir 5 , 6) on pourra établir la structure des anneaux artiniens A de T.F.R. qui satisferont aux conditions:

i) A est fini engendré sur son centre Z(A)

ii) A/J(A) est une algèbre séparable sur Z(A)/J(Z(A)) où on désigne par J(A) le radical de Jacobson de A.

Il en résultera comme conséquences: la structure des anneaux artiniens commutatifs de T.F.R. et cell des anneaux artiniens primaires de T.F.R. satisfaisant aux conditions i) et ii).

2. <u>Définitions et notations</u>

Si k est un corps de caractéristique p (p prime) on désigne par W(k) l'unique (jusqu'à un isomorphisme) p-anneau du corps résiduel k.

Soit $W_n(k)=W(k)/p^nW(k)$; $n\in N$. Si k est un corps parfait, $W_n(k)$ est l'anneau des vecteurs de Witt coupés.

Soit D une algèbre à division finis sur son centre séparable sur k, on désigne par $W_n(D)$ la $W_n(k)$ algèbre separable du corps résiduel D et de l'idéal maximal généré par p (voir 6 chapitre 3).

Soit A un anneau et $\sigma : A \to A$ un morphisme d'anneaux; alors on désigne par $A[x,\sigma]$ l'anneau des polynomes tordues (avec les relations: $x.a=\sigma(a).x$ pour tout $a\in A$).

3. <u>Anneaux artiniens locaux de T.F.R.</u>

<u>Lemme</u>. Soit A un anneau artinien à gauche et $K\subseteq A$ un idéal bilateral. Si A/K n'est pas de T.F.R. alors A ne l'est pas non plus.

La démonstration est évidente.

<u>Théorème 1</u>. Soit A un anneau artinien à gauche, local. Les assertions suivantes sont équivalents:

i) J est un idéal principal à gauche de A

ii) A est de T.F.R.

<u>Preuve</u>. Soit $x\in A$ un générateur de J comme idéal à gauche On a $J=A.x=x.A$. Alors A est un anneau principal, et le seuls idéals de A (à gauche, à droite, et bilatérales) sont: A; Ax; $Ax^2,\dots,A.x^{m-1}$;0 (où m est le plus petit des nombre entiers pour lesquels $J^m=0$).

Si M est un A-module à gauche de type fini on a: (par application du Théorème des facteurs invariants, voir 1 chapitre 3): $M\simeq M_1^{k_1}\oplus M_2^{k_2}\oplus\dots\oplus M_r^{k_r}$ ou M_i sont des A-modules à gauche cycliques pour chaque $i=1,2,\dots,r$.

De là les A-modules à gauche indécomposables de type fini doivent être cycliques, donc ils seront des suivants: A; A/Ax; A/Ax^2;...;A/Ax^{m-1}. Alors A est de T.F.R.

Pour la réciprocité supposons que J n'est pas un idéal principal à gauche. Alors J/J^2 est un éspace véctoriel à gauche sur A/J et $\dim_{A/J}(J/J^2)>1$ (par l'application du lemme de Nakayama). Nous allons construire un nombre infini des A-modules à gauche indécomposables de type fini, nonisomorphes. Nous pouvons supposer $J^2=0$ (si là n'est pas le cas on prendra au lieu de A, A/J^2 et on peut appliquer le lemme).

Si $\dim_{A/J} J>1$ il y a $x,y\in J$ linéairement indépendent sur A/J.

Soit $n\geq 2$ et $e_1;e_2;\dots e_n\in A^n$; $e_1=(y;-x;0,\dots,0)$; $e_2=(0;y;-x;0,\dots,0),\dots$, $e_{n-1}=(0;\dots;y;-x)$; $e_n=(0,\dots,0,y)$ et $L=Ae_1+Ae_2+\dots+Ae_n$; $N=A^n/L$.

Nous allons montrer que N est indécomposable et que la longueur de N est au moins n.

Soit $\varphi\in \mathrm{Hom}_A(N,N)$. Puisque A^n est un A-module libre il y a $\emptyset\in \mathrm{Hom}_A(A^n,A^n)\simeq M_n(A)$ (l'anneau des matrices sur A) tel que le diagrame suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, dashed, "\emptyset"] \arrow[d, "\pi"'] & A^n \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

Où π est la projection canonique. On a $\varphi\pi=\pi\emptyset$ et alors $\emptyset L\subseteq L$. Soit $B=\{\emptyset\in M_n(A)/\emptyset L\subseteq L\}$. Pour chaque $\emptyset\in B$ il y a $\overline{\emptyset}:N\longrightarrow N$ tel que $\overline{\emptyset}\pi=\pi\emptyset$. On définit l'application naturelle $\alpha:B\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N,N)$ par $\alpha(\emptyset)=\overline{\emptyset}$.

Alors α est un morphisme d'anneaux et une surjection.

Alors, suivant notre but, il est suffisant de montrer que B est un anneau local. On désigne par $\emptyset=(a_{ij})_{i,j=1,n}$ un élément de B. Pour chaque $j=1,2,\ldots,n$ il y a $\beta_{j1}, \beta_{j2}, \ldots \beta_{jn} \in A$ tel que $\emptyset e_j=\sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} e_i$.

Si $1\leq j<n$ et $1<i\leq n$ on a: $a_{1j}y+a_{1j+1}(-x)=\beta_{j1}y$ et $a_{ij}y+a_{ij+1}(-x)=\beta_{ji-1}(-x)+\beta_{ji}y$ et pour $j=n$ et $1<i\leq n$ on a: $a_{1n}y=\beta_{n1}y$ et $a_{in}y=\beta_{ni-1}(-x)+\beta_{ni}y$.

On désigne par $-$ le morphisme canonique $A \longrightarrow A/J$ et par $\bar{a}$ l'image de a par ce morphisme. Puisque x et y sont linéairement indépéndents sur A/J on a pour $1\leq j<n$ et $1\leq i<n$: $\bar{a}_{1j+1}=0$; $\bar{a}_{ij}=\bar{a}_{i+1j+1}$; pour $j=n$ et $1\leq i<n$: $\bar{a}_{in}=0$.

Alors $\bar{a}_{11}=\bar{a}_{22}=\ldots=\bar{a}_{nn}$ et $\bar{a}_{ij}=0$ pour $i\neq j$.

Alors $\emptyset-a_{11}.1_B$ a tous ses components dans J et ensuite $(\emptyset-a_{11}1_B)^2=0$. Et encore $\emptyset=a_{11}.1_B+\psi$ où $\psi\in B$ et $\psi^2=0$. On a: $\emptyset$ n'est pas inversable dans B si et seulement si a_{11} n'est pas inversable dans A, si et seulement si a_{11} est un élément nilpotent de A si et seulement si $\emptyset$ est un élément nilpotent de B. Alors B est un anneau local ce qui veut dire que $\mathrm{Hom}_A(N,N)$ est aussi un anneau local et ensuite N est indécomposable.

On désigne par $l(N)$ la longuer de N. On a: $l(N)=nl(A)-$ $-l(L)$. Mais A/J est un A-module simple et si on désigne par $r=\dim_{A/J}J$ on aura: $l(A)=1+l(J)=1+r$. Mais $L\subseteq J^n$ alors $l(L)\leq$ $\leq nl(J)=nr$, $l(N)\geq n(r+1)-nr=n$.

Q.E.D.

Soit maintenant A un anneau artinien local fini engendré (comme module à gauche) sur son centre Z(A). En vertu du Théorème Bjork-Eisenbud (voir 6 chapitre 1) Z(A) est aussi artinien et local (si Z(A) n'était pas local A contiendrait des idempotents différent de 0 et de 1).

Soit $D=A/J$ et $k=Z(A)/J(Z(A))$.

Théorème 2. Soit A un anneau artinien local fini engendré sur $Z(A)$ et soit D une k-algèbre séparable. A est de T.F.R. si et seulement si:

a) si la caractéristique de A est 0 ou p (p prime) alors A est isomorphe à $D[x,\sigma]/(x^m)$.

b) si la caractérisqiue de A est p^m (p prime, $m>1$) et $p\in J-J^2$ (on dit que A n'est pas ramifié) alors A est isomorphe à $W_m(D)$.

c) si la caractéristique de A est p^m (p prime, $m>1$) et $p\in J^e-J^{e+1}$; $e>1$ (on dit que A est ramifié et l'index de ramification est e) alors A est isomorphe à une extension Eisenstein du type:

$$W_m(D)[x,\sigma]/(f(x)) \quad \text{ou} \quad f(x)=x^e+pa_{e-1}x^{e-1}+\ldots+pa_o$$

et $a_o\not\equiv 0 \pmod J$.

Preuve. En vertu de 6 Théorème V 21 il y a B une sous-algèbre inertiale des coéfficients de A telle que:

a) si la caractéristique de A est 0 ou p $B\simeq D$.

Alors soit T le D-bimodule défini en 6 Lemma V 13.

On a: $T\oplus J^2=J$ et $J=T+T^2+\ldots+T^m$ comme D-bimodules.

Puisque A est de T.F.R. $\dim_D J/J^2=\dim_D T=1$.

Soit alors x un générateur de T comme D-éspace vectoriel à gauche. Chaque $y\in A$ peut être désigné sous la forme de: $y=b_o+b_1x+\ldots+b_{m-1}x^{m-1}$; $b_i\in D$.

Mais T est un D-bimodule, et on a une application $\sigma : D \longrightarrow D$ telle que $x.b = \sigma(b).x$ pour chaque $b \in D$, et σ est un morphisme de k-algèbres.

Alors $A \simeq D[x,\sigma]/(X^m)$.

b) si la caractéristique de A est p^m alors $B \simeq W_m(D)$. Si $p \in J - J^2$ suivant le théorème 1 on a $J = A.p$. Tout élément $y \in A$ peut être désigné sous la forme: $y = b_o + b_1 p + \ldots + b_{m-1} p^{m-1}$; $b_i \in W_m(D)$ (voir 6 Lemme V 1.1.).

Alors $y \in W_m(D)$ et $A = W_m(D)$.

c) si $p \in J^e - J^{e+1}$; $e > 1$ et $J = A.x$ (A est T.F.R) on a $x^e = \alpha.p$ et α est un élément inversable de A. Alors $\alpha = \alpha_o + \alpha_1 x + \ldots \alpha_{m-1} x^{m-1}$ et on peut substituer α dans la relation $x^e =$ p et remplacer les pouvoirs de x plus grands que e par la même relation $x^e =$ p (plusieures fois) et on obtient:

$$x^e = p.a_{e-1} x^{e-1} + pa_{r-2} x^{e-2} + \ldots + pa_o \ ; \qquad a_o \notin J.$$

Alors x est une racine d'un polynome d'Eisenstein.

Q.E.D.

Corollaire 1. Soit A un anneau artinien commutatif. Les assertions suivantes sont équivalentes:

i) A est de T.F.R.

ii) $A \simeq A_1 x A_2 X \ldots x A_t$ où A_i sont des anneaux artiniens locaux commutatifs, soit $k_i = A_i / \text{rad } A_i$ et:

Si la caractéristique de A_i est 0 ou p_i (p_i prime) $A_i \simeq k_i[x]/(X^{m_i})$.

Si la caractéristique de A_i est $p_i^{m_i}$ (p_i prime, $m_i > 1$) et A n'est pas ramifié $A_i \simeq W_{m_i}(k_i)$.

Si la caractéristique de A_i est $p_i^{m_i}$ (p_i prime, $m_i > 1$) et A_i est ramifié et l'index de ramification est e_i on a:

$$A_i \quad W_{m_i}(k_i)[x]/(X^{e_i}+p_i a_{e_i-1}X^{e_i-1}+\ldots+p_i a_o);\ a_o \not\equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Preuve. On applique le théorème de structure pour les anneaux artiniens commutatifs et le Théorème 2.

Corollaire 2. Soit A un anneau artinien primaire fini engendré sur Z(A) tel que A/J soit une algèbre séparable sur Z(A)/J(Z(A)). Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est de T.F.R.

ii) A est isomorphe à $M_n(B)$, ou B appartient à un des types décrits par le théorème 2.

Preuve. Si A est un anneau artinien primaire alors il y a un anneau artinien local B tel que $A \simeq M_n(B)$. Puisque les catégories Mod A et Mod B sont Morita équivalentes B est aussi de T.F.R. B est fini engendré sur Z(B) et B/J(B) est une algèbre séparable sur Z(B)/J(Z(B)). Et maintenent on peut appliquer le Théorème 2.

Q.E.D.

Bibliographie

1 N.Jacobson, The theory of rings, American Mathematical Society, Mathematical Surveys no.11 (1943).

2 K.R.McLean, Commutative artinian principal ideal rings, Proc. London Math. Soc. (3)26 (1973), p.249-272.

3 K.R.McLean, Principal ideal rings and separability, Proc. London Math. Soc. (3)45 (1982), p.300-318.

4 R.S.Pierce, Associative Algebras, Springer-Verlag, (1982).

5 H.Pop, Commutative rings with a finite number of ideals, Res. Math. 7(1984), p.1-9.

6 H.Pop, On the structure of certain artinian rings (ph. D.these, Bucharest 1983), voir aussi Preprint INCREST No.60/1983.

Ioviţă Adrian
St. Cetatea Histria 3
Bl.M14, sc.A, ap.3
77314 Bucureşti
Romania