

INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250 3638

SUR UNE CLASSE DE PROLONGEMENTS A $K(X)$ D'UNE
VALUATION SUR UN CORPS K

par

Victor ALEXANDRU et Nicolae POPESCU

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS

No.59/1985

BUCURESTI

Mea 23681

SUR UNE CLASSE DE PROLONGEMENTS A $K(X)$ D'UNE
VALUATION SUR UN CORPS K

par

Victor ALEXANDRU*) et Nicolae POPESCU**)

Octobre 1985

*) University of Bucharest, Faculty of Mathematics, Str. Academiei 14,
79543 Bucharest, Romania.

**) Department of Mathematics, National Institute for Scientific and Technical
Creation, Bd. Păcii 220, 79622 Bucharest, Romania.

SUR UNE CLASSE DE PROLONGEMENTS A $K(X)$ D'UNE
VALUATION SUR UN CORPS K

par

Victor ALEXANDRU et Nicolae POPESCU

Soient K un corps et v une valuation sur K . On dit qu'une valuation w sur $K(X)$ est un r.t. prolongement de v si son corps résiduel est une extension transcendante du corps résiduel de v . On montre comment on peut décrire tous les r.t. prolongements de v à $K(X)$ si l'on connaît un prolongement de v à une clôture algébrique de K et les racines de tous les polynômes de $K[X]$.

ON A CLASS OF EXTENSIONS TO $K(X)$ OF A VALUATION
TO A FIELD K

Let K be a field and v a valuation on K . One says that a valuation w on $K(X)$ is a r.t. extension of v if its residue field is a transcendental extension of the residue field of v . One shows that all r.t. extensions of v to $K(X)$ ^{may} be constructed if one knows an extension of v to an algebraic closure of K and the roots of all polynomials of $K[X]$.

1. Notations et définitions. Les notions comme: valuation sur un corps, prolongement d'une valuation, indice de ramification, etc., sont utilisées d'après [1]. Ch. VI.

Soit v une valuation sur un corps K ; notons: A_v l'anneau de la valuation v , k_v le corps résiduel de v et Γ_v le groupe des ordres de v . Si $a \in A_v$, notons $\bar{a}$, l'image de a dans k_v . Si w est un prolongement de v à une extension L de K , on identifie de façon canonique Γ_v à un sous-groupe de Γ_w et k_v à un sous-corps de k_w .

Soient K un corps et v une valuation sur K . Soient X une indéterminée, $K(X)$ le corps des fonctions rationnelles et w un prolongement de v à $K(X)$. On dit que w est un prolongement de v résiduel transcendant (on écrira brièvement: r.t.-prolongement) si k_w , le corps résiduel de w , est transcendant sur k_v .

Soit f un élément de $K[X]$, $f \notin K$. Si $P = a_0 + a_1 f + \dots + a_n f^n \in K[f]$, notons:

$$w_f(P) = \inf_i (v(a_i)) .$$

D'après [1], Ch.VI, § 10, on sait que l'on définit ainsi une valuation w_f sur l'anneaux $K[f]$, qui a une prolongement canonique à $K(f)$, noté aussi w_f . On dit que w_f est la valuation sur $K(f)$ définie par v et f d'après l'infimum. On sait (voir [1] Ch.VI, § 10) que w_f est un r.t.-prolongement de v à $K(f)$. Evidemment tout prolongement w , de w_f , à $K(X)$ est un r.t. prolongement de v . On a le résultat réciproque:

PROPOSITION 1. Soit w un r.t.-prolongement de v à $K(X)$. Alors il existe un polynôme $f \in K[X]$, de telle manière que w est le prolongement à $K(X)$ de la valuation w_f sur $K(f)$ définie par v et f d'après l'infimum.

Preuve. Vu que l'extension k_w/k_v est transcendante, il y a un élément $\alpha \in A_w$ ainsi que $\bar{\alpha} \in k_w$ est transcendant sur k_v . Soit w_0 la restriction de w à $K(\alpha)$. On sait (voir [1], Ch.VI, §10, Proposition 2) que $w_0 = w_1$, i.e. elle est définie par v et α d'après l'infimum. Il est clair que $\Gamma_{w_0} = \Gamma_v$ et que l'extension $K(X)/K(\alpha)$ est finie; alors Γ_v est une sous-groupe d'indice fini de Γ_w . Soit $e = [\Gamma_w : \Gamma_v]$ et $\alpha = f/g$, où $f, g \in K[X]$. On a: $w(\alpha) = w(f) - w(g) = 0$, et $w(f^e) = ew(f) \in \Gamma_v$. En remplaçant, éventuellement, α par α^e on peut supposer que $w(f) \in \Gamma_v$. On a donc $w(f) = v(a)$, $a \in K$, $a \neq 0$. En remplaçant f, g respectivement par f/a et g/a , on peut supposer que $w(f) = w(g) = 0$. L'hypothèse $\bar{\alpha}$ transcendant sur k_v montre que $\bar{f}$, au $\bar{g}$ est transcendant sur k_v .

2. Le cas K algébriquement clos. Soient K un corps algébriquement clos et v une valuation sur K . Il est facile de voir que le groupe Γ_v est divisible, i.e. pour tout $\gamma \in \Gamma_v$ et chaque nombre naturel n il existe $\gamma' \in \Gamma_v$ tel que $n\gamma' = \gamma$.

PROPOSITION 2. Soit w un r.t.-prolongement de v à $K(X)$. Alors w est la valuation définie d'après infimum de v et d'un polynôme linéaire $f = ax - b$, $a \neq 0$.

Preuve. D'après la Proposition 1 il existe un polynôme $g \in K[X]$ tel que w est le prolongement à $K(X)$ de la valuation w_g sur $K(g)$. Soit $g(X) = a_0(X - x_1) \dots (X - x_n)$ la décomposition de g en facteurs linéaires. Vu que Γ_v est divisible, on a $\Gamma_v = \Gamma_w$ et pour tout i , $1 \leq i \leq n$ il y a un élément $c_i \in K$ tel que $w(X - x_i) = v(c_i)$. On a $g = a_0 c \left(\frac{X - x_1}{c_1} \right) \dots \left(\frac{X - x_n}{c_n} \right)$ où $c = c_1 \dots c_n$. Il est

clair que $w(\frac{x-x_i}{c_i})=0$, $1 \leq i \leq n$, et pour au moins un i_0 , l'image de $f = \frac{x-x_{i_0}}{c_{i_0}}$ dans k_w est transcendante sur k_v . On peut prendre le polynôme f pour finir la démonstration.

PROPOSITION 3. Soient $f_i = a_i x - b_i$, $i=1,2$, deux polynômes de $K[X]$ et $w_i = w_{f_i}$ la valuation sur $K(X)$ définie de v et f_i d'après l'infimum, $i=1,2$. Les conditions suivantes sont équivalents:

- a) $w_1 = w_2$
- b) Il existe des éléments $c, d \in A_v$ tels que $v(c)=0$ et que $f_2 = cf_1 + d$.
- c) $w_1(f_2)=0$ et $\bar{f}_2$, l'image de f_2 dans k_{w_1} est transcendente sur k_v .
- d) $v(a_1)=v(a_2)$ et $v(a_1 b_2 - a_2 b_1) \geq v(a_1)$.

Preuve. a) $\Rightarrow$ b) On a $w_1(f_2) = w_2(f_2) = 0$; mais $f_2 = \frac{a_2}{a_1}(a_1 x - b_1) + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1}$, donc $w_1(f_2) = \min(v(a_2) - v(a_1), v(a_2 b_1 - a_1 b_2) - v(a_1)) = 0$. Mais alors, $v(a_2) \geq v(a_1)$ et $v(a_1 b_2 - a_2 b_1) \geq v(a_1)$. Par symétrie, on voit que $v(a_1) \geq v(a_2)$, donc finalement $v(a_1) = v(a_2)$. On a donc $f_2 = cf_1 + d$, où $c = a_1/a_2$, $d = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1}$.

L'implication b) $\Rightarrow$ c) est évidente et l'implication c) $\Rightarrow$ a) est une conséquence de [1]; Ch.VI, § 10, Proposition 2. La condition d) est une autre formulation de b).

Soient $f(x) = a \prod_{i=1}^n (x - x_i) \in K[X]$, $f \notin K$, et $w_0 = w_f$ la valuation sur $K(f)$ définie de v et f d'après l'infimum. Nous voulons déterminer tous les prolongements de w_0 à $K(X)$. En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve de la Proposition 2, on obtient le résultat suivant:

PROPOSITION 4. Soit w un prolongement de w_0 à $K(X)$. Il existe une racine x_i de f et un élément $c_i \in K$ ainsi que $w = w_{f_i}$, ou $f_i = \frac{X-x_i}{c_i}$.

LEMME 5. Soient w un prolongement de $w_0 = w_f$ à $K(X)$,

$\gamma_i = w(X-x_i) = v(c_i)$, $c_i \in K$, $1 \leq i \leq n$ et $\gamma_{i_0} = \sup_i (\gamma_i)$. Soit $f_{i_0} = \frac{X-x_{i_0}}{c_{i_0}}$.

Alors $w = w_{f_{i_0}}$ i.e. w est valuation sur $K(X)$ définie de v et f_{i_0}

d'après l'infimum. Inversement, si $w = w_{f_i}$, $f_i = \frac{X-x_i}{c_i}$, alors, $\gamma_i = \gamma_{i_0}$.

Preuve. D'après la Proposition 4 on voit qu'il existe un

indice i_1 , $1 \leq i_1 \leq n$ tel que $w = w_{f_{i_1}}$, $f_{i_1} = \frac{X-x_{i_1}}{c_{i_1}}$. Alors $\gamma_{i_0} = \gamma_{i_1}$.

En effet si on a $\gamma_{i_1} < \gamma_{i_0}$, alors on déduit: $w(\frac{X-x_{i_0}}{c_{i_0}}) = 0 =$

$$= w\left(\frac{c_{i_1}}{c_{i_0}} \left(\frac{X-x_{i_1}}{c_{i_1}}\right) + \frac{x_{i_1}-x_{i_0}}{c_{i_0}}\right) = \inf(v(c_{i_1}/c_{i_0}), v(\frac{x_{i_1}-x_{i_0}}{c_{i_0}})) < 0, \text{ c'est-à-dire}$$

une contradiction. Donc nécessairement, $\gamma_{i_1} = \gamma_{i_0}$. Mais

alors, $v(c_{i_1}) = v(c_{i_0})$ et $v(x_{i_1} - x_{i_0}) \geq v(c_{i_0})$. Donc d'après la

Proposition 3, d) il résulte que $w_{f_{i_0}} = w_{f_{i_1}} = w$.

La dernière partie du Lemme 5 résulte aussi de la Proposition 3, d).

LEMME 6. Soit w un prolongement de w_0 à $K(x)$. Supposons

que $w = w_{f_1}$, $f_1 = \frac{X-x_1}{c_1}$.

a) Les conditions suivantes sont équivalentes:

$$i) w = w_{f_i}, \quad f_i = \frac{X - x_i}{c_i},$$

$$ii) v(x_1 - x_i) \geq \sup(v(c_1), v(c_i)).$$

$$iii) v(c_1) = v(c_i)$$

$$b) \text{ Si } v(c_i) < v(c_1) \text{ alors } v(c_i) = \bar{v}_i = v(x_1 - x_i).$$

Preuve. a) Les implications $i) \Rightarrow iii)$, $i) \Rightarrow ii)$ résultent du Lemme 5. Pour montrer que $ii) \Rightarrow iii)$ on voit d'après le Lemme 5 que $v(c_1) = \sup_j (v(c_j)) = v(c_i)$, c'est-à-dire, $w = w_{f_i}$.

b) On a $v(c_i) = w(X - x_i) = w(X - x_1) = w(c_1 (\frac{X - x_1}{c_1}) + x_1 - x_i) = \inf(v(c_1), v(x_1 - x_i))$, d'où $v(c_i) = v(x_1 - x_i)$.

Nous montrons maintenant que pour tout i , $1 \leq i \leq n$, il y a un élément $d_i \in K$, ainsi que la valuation sur $K(X)$ définie de v et $\frac{X - a_i}{d_i}$ d'après infimum est un prolongement de w_0 . Pour déterminer l'élément d_i on considère le développement selon la formule de Taylor de f :

$$f(x) = (X - x_i)h_1 + \dots + (X - x_i)^n h_n, \text{ où } h_j = \frac{f^{(j)}(x_i)}{j!}, \quad 1 \leq j \leq n$$

d'où $f(x) = d_i h_1 (\frac{X - x_i}{d_i}) + \dots + d_i h_n (\frac{X - x_i}{d_i})^n$. Soit w_i la valuation sur

$K(X)$ définie de v et $\frac{X - x_i}{d_i}$ d'après infimum. On voit que w_i est un prolongement de w_0 si $w_0(f) = 0 = w_i(f) = \inf_j (v(h_j) + jv(d_i))$ d'où :

$$(4) \quad v(d_i) = -\inf_j \left(\frac{v(h_j)}{j} \right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

La condition (4) nous permet la détermination (non unique) d'un élément d_i de K .

Soient d_i un élément de K déterminé d'après (1) et w_i la valuation sur $K(X)$ définie de v et $\frac{X-x_i}{d_i}$ d'après infimum. Nous voulons montrer que w_i est un prolongement de w_0 . Pour cela il suffit de montrer que $f \in A_{w_i}$ et que l'image de f dans k_{w_i} est transcendante sur k . En effet si $j \neq i$, on a: $w_i(X-x_j) = \inf(v(d_i), v(x_i-x_j)) = v(d_{ij})$, où $d_{ij} \in K$, $d_{ii} = d_i$. La condition $w_i(f) = 0$ montre que l'on a: $v(a) + \sum_{j=1}^n v(d_{ij}) = 0$. Notons:

$$d'_i = \prod_{j=1}^n d_{ij} ; \text{ on a, } f = a d'_i \prod_{j=1}^n \left(\frac{X-x_i}{d_{ij}} \right). \text{ Vu que } \frac{X-x_i}{d_{ij}} = \frac{d_i}{d_{ij}} \left(\frac{X-x_i}{d_i} \right) + \frac{x_i-x_j}{d_{ij}}$$

et $w_i\left(\frac{X-x_j}{d_{ij}}\right) = 0$, on voit que $v(d_i) \geq v(d_{ij})$, c'est-à-dire que l'image de $\frac{X-x_j}{d_{ij}}$ dans k_{w_i} est transcendante sur k_v ou appartient à k_v . Parce que l'image de $\frac{X-x_i}{d_i}$ dans k_{w_i} est transcendante sur k_v , on voit finalement que l'image de f dans k_{w_i} est aussi transcendante sur k_v .

THEOREME 7. Soit $f = a \prod_{i=1}^n (X-x_i)$ un polynôme sur K , $f \notin K$.

Pour tout i , $1 \leq i \leq n$ il y a un élément $d_i \in K$ tel que la valuation w_i sur $K(X)$ définie de v et $\frac{X-x_i}{d_i}$ d'après infimum est un prolongement du w_0 . Inversement, tout prolongement de w_0 à $K(X)$ est équivalent à un de type w_i .

On dit que $\gamma_i = v(d_i) \in \bigcap_v$ défini d'après (1) est l'ordre propre et que w_i est la valuation propre associée à f et racine x_i . Si x_i, x_j sont deux racines distinctes de f , généralement les valuations propres associées w_i et w_j ne sont pas distinctes. On obtient le résultat suivant:

PROPOSITION 8. Soient $f \in K[X]$, $f \notin K$, x_1, x_2 deux racines de f , γ_1, γ_2 les ordres propres et w_1, w_2 les valuations propres associées respectivement à x_1, x_2 et f . Les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1) $w_1 = w_2$
- 2) $\gamma_1 = \gamma_2$ et $v(x_1 - x_2) \geq \gamma_1$
- 3) $\gamma_1 = w_2(X - x_1)$ et $\gamma_2 = w_1(X - x_2)$.

La preuve découle d'après les lemmes 5 et 6 ^{de} la Proposition 3.

COROLLAIRE 9. Soit $f = a \prod_{i=1}^n (X - x_i)$ un polynôme de $K[X]$ ainsi que $v(a) = 0$ et $v(x_i) \geq 0$ pour tout i , $1 \leq i \leq n$. Alors il y a un unique prolongement w de w_0 à $K(X)$. w est la valuation sur $K(X)$ définie de v et X d'après infimum.

Preuve. Soit w un prolongement de w_0 à $K(X)$. D'après les hypothèses on voit que $w(X) \geq 0$ et nécessairement $w(X - x_i) = 0$ pour tout i , $1 \leq i \leq n$. Mais alors d'après la Proposition 8, 2) on conclut que pour tout i, j , on a $w_i = w_j$. Pour finir la preuve on utilise la Proposition 3, b).

COROLLAIRE 10. Soient $f = a \prod_{i=1}^n (X - x_i) \in K[X]$ et pour tout i , w_i la valuation propre associée à f et x_i .

a) Si $w_1 = \dots = w_r$, et $w_1 \neq w_i$ pour tout $i > r$, alors k_{w_1}/k_{w_0} est une extension de degré r .

b) Soit $w'_1, \dots, w'_t$ un système complet de prolongement de w_0 à $K(X)$; alors $\sum_{j=1}^t e(w'_j/w_0) f(w'_j/w_0) = [K(X) : K(f)] = n$, où e est l'indice de ramification et f le degré résiduel (voir [1], p.138).

PREUVE. a) Soient γ_1 l'ordre propre associé à f et racine x_1 et $v(c_i) = w_1(X - x_1)$, $1 \leq i \leq n$. D'après les hypothèses et la Proposition 8 on voit que $v(c_i) = \gamma_1$ si $1 \leq i \leq r$, et $v(c_i) < \gamma_1$ si $i > r$. Donc, d'après la Proposition 3, c) on conclut que l'image de $\frac{X - x_1}{c_i}$ dans k_{w_1} est transcendante sur k_v si et seulement si $1 \leq i \leq r$. Il est clair que k_{w_1}/k_{w_0} est une extension de degré r .

b) Vu que $\Gamma_v = \Gamma_{w'_1}$, $1 \leq i \leq t$ on voit que $e(w'_1/w_0) = 1$.

L'assertion résultera alors d'après a).

3. Le cas K quelconque. Soient K un corps et v une valuation sur K . Nous voulons déterminer toutes les valuations w sur $K(X)$ qui sont des prolongements résiduels transcendants de v . Pour cela, on fixe une clôture algébrique $\bar{K}$ de K et $\bar{v}$ un prolongement de v à $\bar{K}$. Soient w une valuation sur $K(X)$ qui est un r.t. prolongement de v , f un polynôme sur K dont l'image $\bar{f}$ dans k_w est transcendante sur k_v (Proposition 1) et $\bar{w}$ un prolongement de w à $\bar{K}(X)$. Vu que $k_{\bar{v}}$ est une extension algébrique de k_v , on voit que $\bar{f}$ est transcendant aussi sur $k_{\bar{v}}$, c'est-à-dire $\bar{w}$ est un r.t. prolongement de $\bar{v}$. Mais alors, on conclut d'après le Théorème qu'il y a une racine a de f et un élément $d \in \bar{K}$ ainsi que $\bar{v}(d)$ est l'ordre propre associé à f ^{à la} $\bar{v}$ racine a , et tel que $\bar{w}$ est une valuation définie de $\bar{v}$ et $\frac{x-a}{d}$ d'après l'infimum. Si $g \in K[X]$, et si $g(X) = \sum_{j=1}^m \frac{g^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$ est le développement ^{de} Taylor de g d'après $X - x_1$, on a:

$$(2) \quad w(g) = \bar{w}(g) = \inf_j \left(\bar{v} \left(\frac{g^{(j)}(a)}{j!} \right) + j \bar{v} \right)$$

où $\mathcal{V} = \overline{w}(X-a) = \overline{v}(d)$, est l'ordre propre associé à f et à la racine a et définie d'après (1) pour $x_1 = a$. On a donc le résultat suivant:

THEOREME 11. Soient K un corps, v une valuation sur K et w un r.t. prolongement de v à $k(X)$. Il y a un polynôme $f \in K[X]$ et une racine a de f ainsi que w est défini d'après (2), où $\overline{v}$ est un prolongement de v à une clôture algébrique de K et $\mathcal{V}$ est l'ordre propre associé à f et a .

Inversement si $f(x)$ est un polynôme sur F et a une racine de f (dans une extension convenable de K) alors on peut définir d'après (1) l'ordre propre $\mathcal{V}$ associé à f et racine a , et d'après (2) une valuation sur K qu'est un r.t. prolongement de v .

Une valuation v sur le corps K est dit Henselienne si pour tout extension finie L/K , v a un unique prolongement à L . Le résultat suivant est un complément à un résultat de Ohm (voir [2], p.201).

THEOREME 1, Soient K un corps et v une valuation Henselienne sur K . Supposons que w est une r.t. prolongement de v à $K(X)$, tels que $\bigcap_v = \bigcap_w$, $k_w = k_v(t)$, t transcendente sur k_v , et $w(X) = 0$. Alors w est la valuation définie de X et w d'après infimum.

Preuve. Soit $f \in K[X]$ un polynôme de degré minim ainsi que $\overline{f} \in k_w$ est transcendante sur k_v (voir Proposition 1). La condition $\bigcap_v = \bigcap_w$ montre que f est irréductible. D'après le Théorème 11 il y a une racine a de f ainsi que pour tout polynôme $g(x) = \sum_i a_i x^i$ de $K[X]$ on a :

$$w(g(X)) = \min(\bar{v}(a_i) + i\tilde{\gamma})$$

ou $\bar{v}$ est l'unique prolongement de v à L , le corps des racines de f . On a

$$w(X) = 0 = \min(\bar{v}(a), \tilde{\gamma})$$

d'où $\bar{v}(a) \geq 0$ i.e. $a \in A_v$. La condition v Henselienne montre que $A_{\bar{v}}$ est la fermeture intégrale de A_v dans L (voir [1], § 8, Proposition 6). Vu que a est entier sur A_v alors les éléments conjugués à a le sont aussi, c'est-à-dire f est un polynôme unitaire de l'anneau de polynôme $A_v[X]$. Mais alors d'après le Corollaire 9 on voit que w est définie de v et x d'après l'infimum.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N.Bourbaki, Algèbre commutative, Ch.V, VI, Hermann, Paris, 1964.
- [2] J.Ohm, Simple transcendental extensions of valued fields, J.Math. Kyoto Univ. 22-2 (1982), 201-202.

Université de Bucarest, Faculté de Mathématiques,
rue Academiei 14, 70109-Bucarest, Roumanie.

INCREST, Departement de Mathématique, Bd.Păcii 220,
79622-Bucarest, Roumanie.