INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250 3638

SUR LES SOUS-FACTEURS D'INDICE FINI D'UN FACTEUR DE TYPE II_1 AYANT LA PROPRIETE T

par

Mihai Pimsner et Sorin Popa

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS
No. 27/1986

BUCURESTI

Med 23731

SUR LES SOUS-FACTEURS D'INDICE FINI D'UN FACTEUR DE TYPE II_1 AYANT LA PROPRIÉTÉ T

par

Mihai Pimsner*et Sorin Popa*

Avril 1986

*) *Département de Mathématiques, l'Institut National pour la Création Scientifique et Technique, Bv. Păcii 220, 79622 Bucharest, Romania.*

SUR LES SOUS-FACTEURS D'INDICE FINI D'UN FACTEUR DE TYPE II_1 AYANT LA PROPRIETE T

par

Mihai Pimsner et Sorin Popa

Nous démontrons que si $N \subset M$ sont des facteurs de type II_1 avec l'indice de Jones $[M:N]$ fini alors M a la propriété T si et seulement si N l'a aussi. Utilisant ce résultat nous montrons que si M a la propriété T alors l'ensemble des valeurs possibles des indices $[M:N]$, pour les sous-facteurs $N \subset M$, est au plus dénombrable.

On subfactors of finite index in a property T *type* II_1 factor. *We prove that if* $N \subset M$ *are type* II_1 *factors with finite Jones' index* $[M:N]$ *then* M *has property* T *iff* N *has it. Using this result we show that if* M *has property* T *then the set of possible values of the index* $[M:N]$ *for subfactors* $N \subset M$, *is countable.*

Soit M un facteur de type II_1, τ sa trace normalisée et $N \subset M$ un sous-facteur de M. Alors l'indice $[M:N]$ de N en M est défini par Jones ([6]) comme la constante de liaison de N dans sa représentation sur $L^2(M,\tau)$. Quand M est l'algebre $L(G)$ associée a un groupe discret G et $N=L(G_o)$ pour un sous-groupe $G_o \subset G$ alors $[L(G):L(G_o)]$ coincide avec l'indice $[G:G_o]$. Il est bien connu ([7]) que, pour $[G:G_o]$ fini, G a la propriété T de Kazhdan en même temps que G_o. D'autre part Connes a défini ([4]) la propriété T pour tout facteur fini M et dans le cas $M=L(G)$ cette propriété equivaut la propriété T de G. Le théoreme suivant est l'extension au cas des facteurs du résultat précedent sur les groupes.

<u>Théorème 1</u>. Si N M sont des facteurs de type II_1 et si M:N alors M a la propriété T si et seulement si N a la propriété T.

Démonstration. Supposons que M a la propriété T et soit $\{m_j\}_j \subset M$ une "base orthonormale" de M par rapport à N ([9], 1.3). Soient $x_1,\dots,x_n \in M$ et $\varepsilon>0$ qui donnent un voisinage critique de la correspondence trivialle de M. Par ([9], 1.3) on a $x_i m_j = \sum_k m_k E_N(m_k^* x_i m_j)$ et $m_j^* x_i = \sum_k E_N(m_j x_i m_k^*) m_k$. Nottons $y_{jk}^i = E_N(m_j^* x_i m_k) \in N$. Soit alors $\mathcal{H}$ une correspondence de N et $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\|=1$, avec $\| y_{jk}^i \xi - \xi y_{jk}^i \| < \delta$ pour tous i, j, k. Soit aussi $\mathcal{H}'$ la correspondence induite de N à M par $\mathcal{H}$ (donc, $\mathcal{H}' = L^2(M,\tau) \otimes_N \mathcal{H} \otimes_N L^2(M,\tau)$) et $\xi' = \sum_j m_j \otimes \xi \otimes m_j^*$. Alors ([9]), $\|\xi'\|^2 = [M:N] \geq 1$ et l'on a $\| x_i \xi' - \xi' x_i \| =$

$$= \| \sum_j (x_i m_j \otimes \xi \otimes m_j^* - m_j \otimes \xi \otimes m_j^* x_i) \| = \| \sum_{j,k} (m_k y_{kj}^i \otimes \xi \otimes m_j^* - m_j \otimes \xi \otimes y_{jk}^i m_k^*) \| =$$

$$= \| \sum_{j,k} (m_j y_{jk}^i \otimes \xi \otimes m_k^* - m_j \otimes \xi \otimes y_{jk}^i m_k^*) \| = \| \sum_{j,k} m_j \otimes (y_{jk}^i \xi - \xi y_{jk}^i) \otimes m_k^* \|$$

$\leq \sum_{j,k} \| y_{jk}^i \xi - \xi y_{jk}^i \| \leq ([M:N]+1)^2 \delta$. Par ([5]) si $\delta < ([M:N]+1)^{-2} \varepsilon$ est petit alors il y a un vecteur $\eta' \in \mathcal{H}'$ centralisateur pour M, près de ξ'. Donc la projection η de η' sur $\mathcal{H} = 1 \otimes \mathcal{H} \otimes 1 \subset \mathcal{H}'$ est près de ξ (=la projection de ξ' sur $\mathcal{H}$). Donc $\eta \in \mathcal{H}$, $\eta \neq 0$ est η est central pour N.

Réciproquement supposons que N a la propriété T, que $y_1,\dots,y_n \in N$, $\varepsilon>0$ donnent un voisinage critique de la correspondence trivialle de N et soit $\mathcal{H}$ une correspondence de M et $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\|=1$, tels que $\| y_i \xi - \xi y_i \| < \varepsilon$, $\| m_j \xi - \xi m_j \| < \varepsilon$. En regardant $\mathcal{H}$ comme N-bimodule il résulte qu'il existe $\eta \in \mathcal{H}$ près de ξ central pour N. Comme $\|\eta - \xi\|$ est petit, $\| m_j \eta - \eta m_j \|$ sont petits, donc $\xi' = \sum_j m_j \eta m_j^* \neq 0$ (étant près de $[M:N]\eta$) et par un calcul antérieur ξ' est central pour M.

Une question fondamentale posée par Jones ([6]) est la suivante: pour M fixé quel est l'ens mble des valeurs possibles $\mathcal{G}(M)$ des indices $[M:N]$ pour les sous-facteurs $N \subset M$. Si $[M:N] < 4$, $[M:N] \in \{4\cos^2\frac{\pi}{n} \mid n \geq 3\}$ ([6]). Si $[M:N] \geq 4$ on a une application $t \mapsto (1+t)^2 t^{-1}$ du groupe fondamental de M dans $\mathcal{G}(M)$ ([6]). Ce groupe étant dénombrable pour M ayant la propriété T ([3]), Jones a conjecturé que pour un tel facteur $\mathcal{G}(M)$ est également dénombrable. Le théorème suivant donne une réponse affirmative à cette conjecture:

THEOREME 2. Si M a la propriété T alors $\mathcal{G}(M)$ est au plus dénombrable. En outre, pour chaque $t \in \mathcal{G}(M)$, $t<\infty$, l'ensemble des classes de conjugaison par automorphismes intérieurs de sous-facteurs d'indice t est au plus dénombrable.

Démonstration. L'éspace produit de la boule unité de $\mathcal{B}(L^2(M,\tau))$ avec la topologie de la convergence forte et de $\mathbb{R}_+$ est séparable ($L^2(M,\tau)$ étant séparable). Pour chaque $t \in \mathcal{G}(M)$ soit $N_t \subset M$ un sous-facteur d'indice t et e_{N_t} l'extension de E_{N_t} à $L^2(M,\tau)$. Si $\mathcal{G}(M)$ est non dénombrable, $\mathcal{G}(M) \cap [1,K]$ est non-dénombrable pour un certain K et par la séparabilité mentionée il existe dans $\{(e_{N_t}, t) \mid t \in \mathcal{G}(M) \cap [1,K]\}$ un point d'accumulation (e_{N_o}, t_o) (où $N_o = N_{t_o}$). Il existe alors des sous-facteurs $N_k \subset M$, $k \geq 1$, avec $[M:N_k] = t_k \longrightarrow t_o$, $t_k \neq t_o$, et $e_{N_k} \longrightarrow e_{N_o}$. En particulier $\| E_{N_k}(x) - E_{N_o}(x) \|_2 \to 0$, $x \in M$. Il résulte que $\varphi_k : N_o \to N_o$, $\varphi_k(x) = E_{N_o} E_{N_k}(x)$, $x \in N_o$, sont normales et complétement positives et satisfont $\lim \| \varphi_k(x) - x \|_2 = 0$, $x \in N_o$. Par le théorème 1, N_o a la propriété T donc ([5]) $\lim_k \| \varphi_k(x) - x \| = 0$ uniformément pour $x \in N_o$, $\| x \| \leq 1$. Ainsi,

$$\| x - E_{N_k}(x) \|_2^2 = \| x \|_2^2 - \| E_{N_k}(x) \|_2^2 \leq \| x \|_2^2 - \| E_{N_o} E_{N_k}(x) \|_2^2$$
$$\leq 2 \| x \| (\| x \|_2 - \| E_{N_o} E_{N_k}(x) \|_2) \leq 2 \| x - E_{N_o} E_{N_k}(x) \|_2 = 2 \| \varphi_k(x) - x \|_2 \to 0$$

uniformément pour $x \in N_o$, $\| x \| \leq 1$. Pour en déduire une contradiction on utilise la suivante:

PROPOSITION. Soit $K>1$. Il existe un $\delta>0$ tel que pour tous sous-facteurs $N_o, N \subset M$ vérifiant $[M:N_o] \leq K$, $[M:N] \leq K$ et $\| E_N(x) - x \|_2 < \delta$, $x \in N_o$, $\| x \| \leq 1$ il existe un unitaire $u_o \in M$ satisfaisant $u_o N_o u_o \subset N$. Donc ([6]) si $[M:N] = [M:N_o]$ alors $u_o N_o u_o = N$ et si $[M:N] \neq [M:N_o]$ alors $[M:N] \geq [M:N_o] + 2$.

La démonstration de cette proposition est une application diréct des technique et résultats de ([1]) comme suit: Soit M_1

l'extension de M par N, τ sa trace normalisée et $e=e_N\in M_1$. Pour $u\in\mathcal{U}(N_o)$ on a $\|ueu-e\|_2^2=2\tau(e)\|u-E_N(u)\|_2^2\leq 2[M:N]^{-1}\delta$. Donc si $[M:N]=t$, $h\in K_e=co^{-w}\{ueu^*\mid u\in\mathcal{U}(N_o)\}$ est l'élément unique de norme $\|\ \|_2$ minimale de K_e alors $\|h-e\|_2^2\leq 2t^{-1}\delta$, $h\in N_o'\cap M_1$. Il existe donc une projection $e_o\in N_o'\cap M_1$ avec $\|e_o-e\|_2$ petit et on peut choisir des projections $f\in N$, $f_o\in N_o$ et une isometrie partielle $v\in M_1$ tels que $v^*v=f_oe_o$, $vv^*=fe$, $\|v-e\|_2$ petit (1.4, [2]). Comme $eM_1e=eNe=Ne$ il résulte que $e_of_oN_of_oe_o\ni x\mapsto vxv^*\in efM_1fe=efNfe$ donne un isomorphisme σ de $f_oN_of_o$ dans fNf et on a $\sigma(x)v=vx$, $x\in f_oN_of_o$. Donc $a=E_M(v)$ satisfait $\sigma(x)a=ax$, $a=faf_o$ et $\|a-t^{-1}\|_2$ est petit. On déduit que si $v_o\in M$ est l'isometrie partielle de la décomposition polaire de a alors $v_ox=\sigma(x)v_o$, $v_o=fv_of_o$, $\|v-1\|_2<\delta'$, ou $\delta'\to 0$ quand $\delta\to 0$, et $v_o^*v_o\in(f_oN_of_o)'\cap f_oMf_o$. Par ([6]), si $v_o^*v_o\neq f_o$ alors $\tau(f_o-v_o^*v_o)\geq$ $\geq[f_oMf_o:f_oM_of_o]^{-1}=[M:N_o]^{-1}\geq K^{-1}$. Donc δ suffisement petit impose $v_o^*v_o=f_o$ et $v_of_oN_of_ov_o^*\subset N$. Comme N_o, N sont des facteurs de type II_1 v_o peut être prolongée à un unitaire $u_o\in M$ tel que $u_oN_ou_o\subset N$. Le reste résulte de [6].

Cette proposition renforce le résultat ([8]) concernant la stabilité de l'indice aux perturbations dans la distance $(N_o,N)=$ $=\sup\{\|x-E_{N_o}(x)\|_2 \mid x\in N,\ \|x\|\leq 1\}+\sup\{\|x-E_N(x)\|_2 \mid x\in N_o,\ \|x\|\leq 1\}$.

Nottons que le théorème 2 implique la dénombrabilité de $\mathcal{F}(M)$ ([3]), mais la preuve n'utilise pas ce résultat.

[1] E. Christensen, Math. Ann., 243, 1979, 17-29.

[2] A. Connes, Ann. Math., 104, 1976, 73-115.

[3] A. Connes, J. Op. Theory, 4, 1980, 151-153.

[4] A. Connes, Proc. Symp. Pure Math., 38, 1982, 43-109.

[5] A. Connes et V. Jones, Property T ofr von Neumann algebras, preprint 1984.

[6] V. Jones, Invent. Math., 72, 1983, 1-25.

[7] D. Kazhdan, Funct. Anal. Appl., 1, 1967, 63-65.

[8] B. Mashood et K. Taylor, On continuity of the index for subfactors of a finite factor, preprint 1985.

[9] M. Pimsner et S. Popa, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 19, 1986.

Math. Dept. INCREST,
79622-Bucharest, Bd.Păcii 220
Romania