INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250 3638

SUR LES CONTRACTIONS A CALCUL FONCTIONNEL ISOMETRIQUE, II.

by

Bernard CHEVREAU

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS
No. 27/1987

BUCURESTI

Med 23784

SUR LES CONTRACTIONS A CALCUL FONCTIONNEL ISOMETRIQUE, II.

by

Bernard CHEVREAU*)

June 1987

*) *UER de Mathématiques et d'Informatique, Université de Bordeaux I, 351, Cours de la Libération, 33405 Talence, France.*

SUR LES CONTRACTIONS A CALCUL FONCTIONNEL ISOMETRIQUE, II.

Bernard Chevreau

§1. INTRODUCTION

Soit H un espace de Hilbert, complexe, séparable, de dimension infinie et soit $L(H)$ l'algèbre des opérateurs (linéaires bornés) sur H. La classe $\mathbf{A}(=\mathbf{A}(H))$ est l'ensemble des contractions T, sur H, absolument continues, pour lesquelles le calcul fonctionnel de Sz.-Nagy–Foias, $\Phi_T: H^\infty \to L(H)$, est isométrique. (Nous désignons par H^∞ l'algèbre des fonctions analytiques bornées dans le disque unité ouvert $\mathbf{D}$, canoniquement identifiée avec l'algèbre $H^\infty(\mathbf{T})$ constituée des éléments de $L^\infty(\mathbf{T})$ dont les coefficients de Fourier d'indice <0 sont nuls - $\mathbf{T}$ désigne le cercle unité.) On sait (cf. [5, Chap. IV]) que pour $T\in\mathbf{A}$, l'image de Φ_T coincide avec A_T, l'algèbre duale engendrée par T, et que Φ_T est un homéomorphisme faible* de H^∞ sur A_T. Rappelons qu'une algèbre duale sur H est une sous-algèbre (unitaire) de $L(H)$ fermée pour la topologie faible* de $L(H)$ résultant de la dualité $L(H)=(C^1(H))'$, ou $C^1(H)$ désigne l'espace de Banach des opérateurs à trace finie sur H. (Pour une telle algèbre duale, A, on a, en effet, $A=(\mathcal{Q}_A)'$ avec $\mathcal{Q}_A=C^1(H)/{}^\perp A$.) Ce concept introduit par S.Brown dans sa solution (positive) du problème du sous-espace invariant pour les opérateurs sous-normaux (cf. [7]) s'est révélé particulièrement fécond pour l'étude des opérateurs, notamment de certaines

contractions (cf. [5] pour les développements essentiels jusqu'en 84 et ([Chap. III et IV, de l'introduction de [13]) pour un aperçu de résultats récents).

Etant donnée une algèbre duale, A, sur H, nous écrivons [L] $L \in C_1(H)$, pour l'élément générique de Q_A, et $x \otimes y$ pour l'opérateur de rang ≤ 1 associé aux vecteurs x et $y \in H$ ($x \otimes y(u) = (u,y)x$). On dit que A a la propriété $(A)_1$ si tout [L] de Q_A peut se mettre sous la forme $[L]=[x \otimes y]$. Si, de plus, pour tout $s>\rho$, on peut réaliser cette égalité avec $\|x\| \|y\| < s \|[L]\|$ on dit que A a la propriété $(A_1)(\rho)$.

La classe A_1 (resp. $A_1(\rho)$) est l'ensemble des $T \in A$ tels que A_T ait la propriété (A_1) (resp. $(A_1)(\rho)$). Ces propriétés et classes, introduites formellement dans [5] et [4], ont été l'objet de nombreux travaux. Les premiers resultats ont conduit Apostol-Bercovici-Foias-Pearcy à conjecturer ([4, Conj. 4.7]) que $A=A_1$, et cette conjecture, en liaison avec un théorème d'Apostol ([1, théorème 2.2]), a constitué une ligne directrice essentielle dans le problème du sous-espace invariant pour contractions T dont le spectre, $\sigma(T)$, contient T, résolu récemment (positivement) dans [9]. (En effet, un argument élémentaire montre que toute contraction de la classe A_1 possède des sous-espaces invariants et le théorème d'Apostol permet de se ramener, pour $\|T\| \leq 1$ et $\sigma(T) \supset T$, au cas $T \in A$ dans la recherche de sous-espaces invariants.)

Les techniques de [9] laissent toutefois ouverte la conjecture ci-dessus dont l'intérêt dépasse largement le cadre du le problème du sous-espace invariant (cf. [5, Chap. IV et V] pour des résultats de structure concernant $T \in A_1$ ainsi que [16] et [17],

pour des résultats de réflexivité liés aux opérateurs de la sous-classe $A_{1,\aleph_0} \cup A_{\aleph_0,1}$ de A_1).

Tout récemment (cf. [3]), Bercovici a prouvé que $(C_{o\cdot} \cup C_{\cdot o}) \cap A \subset A_1(\rho)$ pour un certain ρ. L'objet du présent article est de démontrer le théorème suivant qui établit la validité complète de la conjecture de Apostol Bercovici-Foias-Pearcy.

THEOREME 1. Il existe ρ (≥ 1) tel que $A = A_1(\rho)$.

Nous appuyant sur une localisation du procédé d'approximation fonctionnelle de [3] et les techniques de [19], nous avons d'abord pu établir que $A = A_{\frac{1}{2}}(\rho)$ ($T \in A_{\frac{1}{2}}(\rho)$ si $T \in A$ et si $\forall$ $s > \rho$ $\forall$ $[L] \in Q_T (= Q_{A_T})$ on peut ecrire $[L] = [x_1 \times y_1] + [x_2 \times y_2]$ avec $\|x_1\| \|y_1\| + \|x_2\| \|y_2\| < s \|[L]\|$). Ce résultat, annoncé dans [14], permet déjà, par des techniques connues, de dégager de nombreux cas où $T \in A_1(\rho)$.

Pour "passer", dans le cas général, de $A_{\frac{1}{2}}$ à A_1, nous introduisons la notion de borélien essentiel maximal pour une contraction absolument continue, arbitraire T, ce qui nous permet de "localiser" la technique de [3] à la partie $C_{o\cdot}$ de T.

Nous concluons cette introduction par une brève description du plan de l'article. Le §2 développe les notations que nous utiliserons tout au long de l'article concernant la dilatation unitaire minimale d'une contraction ainsi qu'une version largement généralisée de certaines techniques de [19]. Dans le §3 nous introduisons le concept de borélien essentiel pour une contraction

absolument continue. Ensuite (§4) nous développons la technique d'approximation de [3] dans ce cadre plus général. Les §§5 et 6 sont consacrés à la démonstration de $A=A_{\frac{1}{2}}(\rho)$ et du théorème 1, respectivement. Nous concluons par quelques corollaires dans la ligne de nos résultats de [19], notamment des résultats de réflexivité.

§2. PRELIMINAIRES

Les techniques de [19] reposent sur un usage systématique de l'extension coisométrique minimale (notation: e.c.i.m.) d'une contraction et, par "dualité", de la dilatation isométrique minimale (d.i.m.). Il sera commode de "regrouper les deux" en utilisant la dilatation unitaire minimale (notation: d.u.m.). Nous rappelons brievement les faits essentiels en suivant, en general, la terminologie de [24, Chap. II].

Si T est une contraction absolument continue, sa d.u.m. $U\in L(\mathcal{U})$ $(\mathcal{U}\supset H)$ est également absolument continue. La d.i.m., U_+ de T est la restriction de U au sous-espace $\mathcal{U}_+=\bigvee_{n\geq 0} U^n H$ invariant pour U. Nous écrivons $U_+=S_* + R$, (S_* shift à droite agissant sur un espace $\mathcal{S}_*$, R unitaire absolument continue agissant sur $\mathcal{R}$ (R est la partie résiduelle de U)) la décomposition de Wold de U^+. De même, l'e.c.i.m., B, de T est la compression de U au sous-espace $\mathcal{B}=\bigvee_{n\leq 0} U^n H=\bigvee_{n\leq 0} U^{*n} H$, invariant pour U^* (donc semi-invariant pour U) et la décomposition de Wold de B^* donne $B=S^* + R_*$, S^* shift a gauche agissant sur un espace $\mathcal{S}$ réduisant pour B et R_* , partie *-residuelle de U, unitaire sur $\mathcal{R}_*$. Rappelons que $\mathcal{S}_*$ et $\mathcal{S}$ sont non réduits à (0) des que T est non unitaire et que $\mathcal{R}=(0)$ (resp.

$R_*=(0)$) si et seulement si $T\in C_{.o}$ (resp. $C_{o.}$) c'est-a-dire $\forall\ x$ $||T^{*n}x|| \to 0$ (resp. $\forall\ x\ ||T^n x|| \to 0$). Nous désignons par Q, Q_*, A, A_*, P les projections orthogonales de U sur les sous-espaces S, S_*, R, R_*, H (le lecteur remarquera le changement de notations par rapport a [19] et [17] où nous n'utilisons que B).

Il est bien connu (cf. [5, Prop. 8.3]) que pour toute contraction absolument continue, $T\in L(H)$, il existe une application sesquilinéaire $H \times X \to L^1(T)$ $(x,y) \to \overset{T}{x\cdot y}$.

La fonction $\overset{T}{x\cdot y}$ peut être définie par ses coefficients de Fourier ($(T^n x,y)$ pour $n\geq 0$, $(T^{*n}x,y)$ pour $n<0$). Alternativement $\overset{T}{x\cdot y}$ est la densité de la mesure $(E(\cdot)x,y)$ (où E désigne la mesure spectrale de U sur T) par rapport à m. On a donc, pour $x,y\in H$,

$$\overset{T}{x\cdot y}=\overset{U}{x\cdot y}=\overset{B}{x\cdot y}=\overset{U_+}{x\cdot y}\ .$$

Dans une telle situation on écrira donc simplement $x\cdot y$. Il résulte facilement de l'une ou l'autre des définitions de $x\cdot y$ que $[x\cdot y]=\phi_T([x\times y]_T)$, ϕ_T désignant l'application (contractante) de Q_T $(=Q_{A_T})$ dans le prédual L^1/H^1_o de H^∞ telle que $(\phi_T)^*=\Phi_T$. Posant, pour $T\in A$ et $f\in L^1(T)$, $[f]_T=\phi_T^{-1}([f]_{L^1/H^1_o})$, on a donc $[x\times y]_T=[x\cdot y]_T$.

Les opérateurs unitaires R et R_* étant absolument continues il existe des boréliens Σ et Σ_* de T tels que m_Σ et m_{Σ_*} soient des mesures spectrales scalaires pour R et R_*, respectivement (cf. [20] pour la notion de mesure spectrale scalaire). Ici, il revient au même de dire que, par exemple, Σ est le borélien minimal (à un borélien m-négligeable près) supportant toutes les fonctions $u\cdot v$, $u,v\in R$. On sait ([16, Théorème 3.9]) que si $\Sigma_*=T$ (ou $\Sigma=T$) on a

$T \in A_1(3)$. Ceci nous permettra de supposer dans les lemmes préparatoires au théorème 1 que $m(T\backslash\Sigma)>0$ et $m(T\backslash\Sigma_*)$. De même, le principal résultat de [3] ($(C_{o.} \cup C_{.o}) \cap A = A_1(r)$) permet de supposer $m(\Sigma)$ et $m(\Sigma_*)$ strictement positifs.

Nous présentons maintenant une extension des techniques de [19] et [27], basée sur une "localisation" des ensembles $E_\theta^r(A_T)$ à un sous-espace M semi-invariant pour T. Rappelons que M est dit semi-invariant pour T si $M=N_1 \cap N_2^\perp$ avec $N_1 \subset N_2$ et $N_i \in \mathrm{Lat}\ T$, $i=1,2$. (Lat T designe, comme d'habitude, le treillis des sous-espaces invariants de T.) De facon équivalente $M \in SI(T)$ (l'ensemble des sous-espaces semi-invariants pour T) si et seulement si, pour tout entier k,

$$(T^k)_M u = (T_M)^k u, \quad u \in M .$$

(Pour $A \in L(H)$ et M sous-espace de H, A_M désigne la compression de A a M, c'est-à-dire l'élément de $L(M)$ tel que $A_M u = P_M A u$, $u \in M$).

Etant donnés $M \in SI(T)$, L un sous-espace de H intermédiaire entre M et H et $\theta \in [0,1[$ nous désignons par $E_\theta^r(A_T, M, L)$ l'ensemble des [L] de Q_T pour lesquels il existe des suites (x_n), (y_n) dans la boule unite fermée de M vérifiant:

$$\overline{\lim} \| [L] - [x_n \otimes y_n] \| \leq \theta$$

$$\forall\, \omega \in L \quad \| [x_n \otimes \omega] \| \to 0 \text{ et } y_n \to 0 \text{ faiblement.}$$

On définit de même $E_\theta^\ell(A_T, M, L)$. Si L coincide avec H on se dispensera de l'écrire. Autrement dit, $E_\theta^r(A_T, M) = E_\theta^r(A_T, M, H)$ et, de même, en accord avec la définition donnée dans [19] on écrira $E_\theta^r(A_T) = E_\theta^r(A_T, H)$. Pour $M \in SI(T)$ on affectera de l'indice-exposant

M les diverses notions liées a la d.u.m. de T_M (i.e. U^M, U^M_+, $B^M,\ldots,Q^M,\ldots,\Sigma^M_*\ldots$ etc.). Notons que si $T\in\mathbf{A}$ et $M\in SI(T)$ avec T_M non unitaire l'e.c.i.m. de T_M, B^M, est également dans **A**. L'application $j=\phi^{-1}_{B^M}\circ\phi_T$ est donc une isométrie de Q_T sur Q_{B^M} qui possède des propriétés analogues à celles développées pour $\phi^{-1}_B\circ\phi_T$ dans [19, Lemmas 3.5 a 3.8]. En outre, on a immédiatement $j([f]_T)=[f]_{B^M}$ pour $f\in L^1(T)$. Le lemme suivant s'inspire de [19, Proposition 4.6]. Nous le donnons sous une forme assez technique pour éviter des répétitions aux §§ 5 et 6. (Ω étant une partie d'un espace vectoriel normé X, ecef(Ω) désigne l'enveloppe convexe équilibrée fermée de Ω dans X.)

LEMME 2.1. Soient $T\in\mathbf{A}$, $M\in SI(T)$ avec $0<M(\Sigma^M_*)<1$, L un sous-espace de H contenant M, $c,d,\in M$, $[K]\in\beta$ ecef$E^r_\theta(A_T,M,L)$, $f\in L^1(\Sigma^M_*)$ et des scalaires $\theta\in[0,1[$, $0<\beta<\delta_1$, $\delta_2>\|f\|_1$, $\delta=\delta_1+\delta_2$.

Alors il existe des suites (c_p), (d_p) dans M telles que, pour tout p,

$$\|[c\times d]+[K]+[b]-[c_p\times d_p]\|<\theta\delta_1$$

$$\|c_p-c\|<3\delta^{\frac12},\quad \|d_p\|<\|d\|+\delta^{\frac12}.$$

Plus précisement $c_p-c=u_p+\tilde{u}_p$ avec

$$\|u_p\|<\delta_1^{\frac12},\qquad \|\tilde{u}_p\|<2\delta^{\frac12}$$

$\forall\,\omega\in L$ $\|[u_p\times w]\|\to 0$, $\tilde{u}_p\to 0$ faiblement et $\|Q^M\tilde{u}_p\|\to 0$.

DEMONSTRATION. Pour simplifier les notations, nous nous dispensons, dans cette démonstration, d'écrire les indices-

exposants "M". Nous nous donnons $\varepsilon>0$ tel que $\beta\theta+5\varepsilon<\theta\delta_1$, une suite (z_j) dense dans L et une suite de réels positifs (ε_j) décroissante vers 0 avec $\varepsilon_1=\varepsilon$. L'hypothèse sur $[K]$ entraîne l'existence d'éléments $[K_i]\in E^r_\theta(A_T,M,L)$ $i=1,\dots,N$ et de scalaires α_i, $i=1,\dots,N$ tels que

$$\|[K]-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i[K_i]\|<\varepsilon \text{ et } \sum_{i=1}^{N}|\alpha_i|\leq\beta .$$

Soient p un entier fixe et, pour $i=1,\dots,N$, $(x_{i,n})$, $(y_{i,n})$ les suites traduisant l'appartenance de $[K_i]$ a $E^r_\theta(A_T, M, L)$. Quitte à supprimer un nombre fini de termes dans chacune des suites on peut supposer que, pour tout $i\leq N$ et tout n, on a

(a) $$\|[x_{i,n}\otimes z_j]\|<\varepsilon_p/(\sum_{i=1}^{N}|\alpha_i|^{\frac{1}{2}}),\quad j=1,2,\dots,p, \text{ et}$$

$$\|[K_i]-[x_{i,n}\otimes y_{i,n}]\|<\theta+\varepsilon/\delta_1$$

Etant donné un N-uplet $\nu=(n_1,\dots,n_N)$ nous posons

$$[L_\nu]=[c\otimes d]_B+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i[x_{i,n}\otimes y_{i,n}]+[f]_B. \text{ Ainsi}$$

(b) $$\|[L_\nu]-j([c\otimes d]_T+[K]+[f]_T)\|<\varepsilon+\beta(\theta+\varepsilon/\delta_1)<\beta\theta+2\varepsilon .$$

Nous transformons $[L_\nu]$ comme dans [19, Prop. 4.6]. Tout d'abord: $[L_\nu]=[P_\nu]+[M_\nu]$ avec

$$[P_\nu]=[Qc\otimes Qd]_B+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i[Qx_{i,n_i}\otimes Qy_{i,n_i}]_B$$

et

$$[M_\nu]=[A_*c\otimes A_*d]_B+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i[A_*x_{i,n_i}\otimes A_*y_{i,n_i}]_B .$$

Soient $u_\nu=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^{\frac{1}{2}}x_{i,n_i}$, $\overline{u}_\nu=\sum_{i=1}^{N}\overline{\alpha}_i^{\frac{1}{2}}x_{i,n_i}$; en suivant la démonstration de [19, Prop. 4.6], nous pouvons choisir ν_p tel que, avec $u_p=u_{\nu_p}$,

on ait

$$\| [P_{\nu_p}] - [Q(c+u_p) \otimes Q(d+\bar{u}_p)] \| < \varepsilon$$

$$\|c+u_p\|^2 \simeq \|c\|^2 + \|u_p\|^2, \quad \text{idem pour } d+\bar{u}_p ,$$

$$\|\bar{u}_p\|^2, \ \|u_p\|^2 \simeq \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| < \delta_1$$

$$\| [A_* u_p \otimes A_* d] \| < \varepsilon .$$

Posons $c_p = c+u_p$ et désignons par x_i^p, y_i^p les x_{i,n_i}, y_{i,n_i} figurant dans u_p, $\bar{u}_p$. Il résulte de la dernière inégalité ci-dessus que

$$\| [M_p]_B - [M_{\nu_p}] \| < \varepsilon \text{ avec } M_p = A_* \tilde{c}_p \circ A_* d + h \text{ et } h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_* x_i^p \circ A_* y_i^p + f .$$

Nous appliquons à M_p la technique de [19, Prop. 3.11] simplifiée par le fait (conséquence immédiate de $m(\Sigma_*^m) < 1$) que l'espace R_*^o (sous-espace de R_*, réduisant pour R_*, tel que la restriction R_*^o de R_* à R_*^o soit unitairement équivalente à $M_{e^{it}}$ agissant sur $L^2(\Sigma_*^m)$) vérifie $R_*^o \subset (A_* H)^-$ (car, en fait, dans ce cas $(A_* H)^- = R_*$). Ceci permet d'écrire immédiatement

$$h = w \circ w', \quad w, w' \in R_*^o \quad |w| = |w'| = |h|^{\frac{1}{2}}$$

Posons $w_n = R_*^n w$ (" $= " e^{int} w$) $w_n' = R_*^n w$ et $E = \{e^{it} : |w(e^{it})| \geq |A_* \tilde{c}_p|\}$. Pour tout n on a $|A_* \tilde{c}_p + 2\chi_E(R_*) w_n| \geq \text{Max}\{|A_* \tilde{c}_p|, |w_n|\}$ ce qui permet d'écrire

$$A_* \tilde{c}_p \circ A_* d + h = A_* \tilde{c}_p \circ A_* d + w_n \circ w_n' = (A_* \tilde{c}_p + 2\chi_E(R_*) w_n) \circ g_n$$

avec $|g_n| \leq |A_* d| + |h|^{\frac{1}{2}}$.

Soit $(x_k) \subset M$ telle que $\| 2\chi_E(R_*) w - A_* x_k \| \to 0$; puisque

$$\| 2\chi_E(R_*) w - A_* x_k \| = \| 2\chi_E(R_*) w_n - R_*^n A_* x_k \| = \| 2\chi_E(R_*) w_n - A_* T_M^n x_k \|$$

et

$$\|A_*y\| = \lim_{n\to\infty} \|T_M^n y\|, \quad y \in M ,$$

nous pouvons choisir une suite $y_k = T_M^{n_k} x_k$ avec (n_k) strictement croissante telle que

$$\|2\chi_E(R_*) w_{n_k} - A_* y_k\| \to 0 \quad \text{et} \quad \|Qy_k\| \to 0 .$$

La suite $2\chi_E(R_*)$ converge faiblement vers 0 ($(2\chi_E(R_*)w_n, z)$ est le coef. de Fourier d'indice $(-n)$ de la fonction de L^1, $2\chi_E(R_*)w \circ z$); il en est donc de même de (y_k). Ce qui précède permet de choisir $\tilde{u}_p = y_k$, $\ell_p = g_{n_k}$, k étant suffisamment grand pour que

$$\|M_p - A_*(\tilde{c}_p + \tilde{u}_p) \cdot \ell_p\| < \varepsilon, \quad \|\tilde{u}_p\| < 2\delta^{\frac{1}{2}} \quad (\text{car } \|y_k\| \to 2\|h\|^{\frac{1}{2}}),$$

$$\|Q\tilde{u}_p\| < \varepsilon_p/(1+\|d\|+\|\bar{u}_p\|) \text{ et } |(\tilde{u}_p, z_j)| < \varepsilon_p , \ j=1,\dots,p .$$

On a alors, avec $c_p = \tilde{c}_p + u_p$,

$$\|[M_p] - [A_* c_p \otimes \ell_p]\| < \varepsilon$$

$$\|[P_{\nu_p}] - [Qc_p \otimes Q(d+\bar{u}_p)]\| < 2\varepsilon .$$

Nous en déduisons (car $\|[L_{\nu_p}] - \{[M_p] + [P_{\nu_p}]\}\| = \|[M_{\nu_p}] - [M_p]\| < \varepsilon$)

$\|[L_{\nu_p}] - [c_p \otimes (Q(d+\bar{u}_p) + \ell_p)]\| < 4\varepsilon$, soit avec $d_p = P(Q(d+\bar{u}_p) + \ell_p)$,

$$\|[L_{\nu_p}] - [c_p \otimes d_p]_B\| < 4\varepsilon .$$

Via l'inégalité (b) et j^{-1}, nous obtenons

$$\|[c_p \otimes d_p]_T - \{[c \otimes d]_T + \beta[K] + [f]_T\}\| < 4\varepsilon + \beta\theta + 2\varepsilon \leq \theta\delta_1 .$$

En cours de route on a vu que $\|u_p\| < \delta_1^{\frac{1}{2}}$, $\|\tilde{u}_p\| < \delta 2\delta^{\frac{1}{2}}$, ce qui entraîne $\|c_p - c\| < \delta 3\delta^{\frac{1}{2}}$. Par ailleurs,

$$\|d_p\| \leq \|Q(d+\bar{u}_p)\|^2 + \|\ell_p\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\|Qd\|^2 + \|Q\bar{u}_p\|^2 + \|\ell_p\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et,}$$

en se basant sur $\|\ell_p\| \leq \|A_* d\| + |h|^{\frac{1}{2}}$, on obtient l'inégalité désirée. De (a) on déduit $\|[u_p \times z_j]\| < \varepsilon_p$ $j=1,\dots,p$ qui entraîne,

par un argument standard de densité, $\|[u_p \otimes w]\| \to 0$ pour tout $w \in L$. De même, des inégalités $|(\tilde{u}_p, z_j)| < \varepsilon_p$, $j=1,\dots,p$, on déduit la convergence faible vers 0 de $\tilde{u}_p$. Enfin $\lim_{p\to\infty} \|\Omega_M \tilde{u}_p\| = 0$ est immédiat.

Le lemme précédent admet une version duale dont la démonstration peut se baser sur U_+^M.

LEMME 2.2. Soient les mêmes données que dans le lemme 2.1 sauf: Σ^M au lieu de Σ_*^M, $([K]/\beta) \in ecef E_\theta^\ell(A_T, M, L)$, $a, b \in M$. Alors il existe des suites (a_p), (b_p) dans M telle que, pour tout p,

$$\|[a \otimes b]_T + [K] + [\mathcal{J}]_T - [a_p \otimes b_p]\| < \theta\delta_1$$

$$\|b_p - b\| < 3\delta^{\frac{1}{2}}, \quad \|a_p\| \leq \|a\| + \delta^{\frac{1}{2}} .$$

Plus précisement $b_p - b = v_p + \tilde{v}_p$ avec $\|v_p\| < \delta_1^{\frac{1}{2}}$, $\|\tilde{v}_p\| < 2\delta^{\frac{1}{2}}$, $\forall\, w \in L \|[w \times v_p]\| \to 0$, $\tilde{v}_p \to 0$ faiblement, et $\|\Omega_*^M \tilde{v}_p\| \to 0$.

§3. ENSEMBLES ESSENTIELS POUR UNE CONTRACTION ABSOLUMENT CONTINUE

DEFINITION 3.1. Soit T une contraction absolument continue. Un borélien E de T est dit essentiel pour T si

(1) $\|h(T)\| \geq \|h\|_E$ pour tout $h \in H^\infty$ $\quad (\|h\|_E = \|h|_E\|_\infty)$

(Nous conviendrons que tout borélien négligeable est essentiel pour T.)

Ainsi $T \in A$ si et seulement si T est essentiel pour T. Remarquons également que si E est essentiel pour T alors $E^* = \{e^{-it}; e^{it} \in E\}$ est essentiel pour T^*.

La proposition suivante donne diverses caractérisations des ensembles essentiels. (Pour $x \in L(H)$, $\|x\|_e$, $r(x)$ et $\sigma_e(x)$ désignent

respectivement la norme essentielle, le rayon spectral et le spectre essentiel de x.)

PROPOSITION 3.2. Pour une contraction absolument continue T sur H et un borélien non negligeable E de T les affirmations suivantes sont équivalentes:

(1) E est essentiel pour T;

(2) Pour tout $h\in H^\infty$, on a $r(h(T))\geq \|h\|_E$;

(3) Pour tout $h\in H^\infty$ tel que $\|h\|=\|h\|_E$, on a $\|h(T)\|=\|h\|_E$.

De plus ces affirmations sont équivalentes à chacune des affirmations $(1)_e$, $(2)_e$, $(3)_e$ obtenues en remplaçant dans (1), (2), (3) norme et rayon spectral de h(T) par norme essentielle et rayon spectral essentiel.

DEMONSTRATION. Soit E essentiel pour T; de $r(h(T))=\lim\|h(T)^n\|^{1/n}=\lim\|h^n(T)\|^{1/n}\geq\lim(\|h^n\|_E)^{1/n}=\|h\|_E$ on obtient (2). Ainsi (1) entraîne (2).

L'implication (2) $\Longrightarrow$ (3) résulte immédiatement de l'inégalité générale $r(h(T))\leq\|h(T)\|\leq\|h\|$.

Supposons maintenant que E vérifie (3) et soit $h\in H^\infty$ non nulle; choisissons $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon\|h\|<\|h\|_E$. D'après, par exemple, [21, p.53] il existe $g\in H^\infty$ telle que $|g|=\begin{cases}1 & \text{sur E}\\ \varepsilon & \text{sur T\E.}\end{cases}$

On a alors $\|gh\|=\|gh\|_E$ et

$$\|h(T)\|\geq\|h(T)\|\,\|g(T)\|\geq\|h(T)g(T)\|\geq\|(gh)(T)\|=\|gh\|_E=\|h\|_E.$$

Les equivalences $(1)_e\Longleftrightarrow(2)_e\Longleftrightarrow(3)_e$ se démontrent de la même façon. Comme $(i)_e$ entraîne trivialement (i), i=1,2,3, il suffit

d'établir, pour conclure, que, par exemple, (3) entraîne $(3)_e$. Soient donc E vérifiant (3) et $h\in H^\infty$ telle que $\|h\|=\|h\|_E=1$. On a, d'après (2), $r(h(T))=1$ et, par "rotation" on peut supposer $1\in\sigma(h(T))$. Il existe donc une suite de vecteurs unitaires (x_n) telle que $\lim_{n\to\infty}\|(h(T)-1)x_n\|=0$ ou $\lim_{n\to\infty}\|((h(T))^*-1)x_n\|=0$. Soit (x_{n_k}) une sous-suite de (x_n) faiblement convergente vers x. On a suivant, le cas,

$$h(T)x=x, \qquad \text{ou} \qquad (h(T))^*x=x.$$

Il est bien connu (cf. [24,]) que pour T absolument continue et $\|h\|\leq 1$, h(T) est une contraction absolument continue. Il en resulte que x=0 et, qu'en fait, la suite (x_n) elle-même converge faiblement vers 0. Ceci prouve bien que $1\in\sigma_e(h(T))$ et donc que $\|h(T)\|_e\geq 1$.

De la définition il résulte facilement que toute réunion (borélienne) d'ensembles essentiels pour T est encore essentielle pour T. Ceci permet d'établir l'existence d'un borélien essentiel maximal (défini à un borélien negligeable près) pour T.

PROPOSITION 3.3. Soit T une contraction absolument continue. Il existe un borélien E_T (éventuellement négligeable) essentiel pour T tel que pour tout borélien E, essentiel pour T, on ait $m(E\setminus E_T)=0$.

DEMONSTRATION. Soit $\gamma=\sup\{m(E);\ E \text{ essentiel pour } T\}$. Si $\gamma=0$ on prend $E_T=\emptyset$. Sinon soit (γ_n) une suite de réels strictement croissante convergente vers γ. Pour chaque n il existe E_n borélien essentiel pour T tel que $m(E_n)>\gamma_n$. L'ensemble $E_T=\cup_n E_n$ est un

borélien essentiel pour T (d'après l'observation précédente) qui vérifie nécessairement $m(E_T)=\gamma$. De la définition de γ on déduit facilement $m(E\setminus E_T)=0$ pour tout E essentiel pour T.

Pour la suite nous faisons la convention que inclusions (et égalités) ensemblistes concernant E_T s'entendent "à un borélien négligeable près".

La proposition suivante donne quelques informations supplémentaires sur E_T. (Pour $\Omega\subset\mathbf{D}$, $LNT(\Omega)$ désigne l'ensemble des points de $\mathbf{T}$ limites non tangentielles de points de Ω. Un tel ensemble est toujours borélien).

PROPOSITION 3.4. Soit T une contraction absolument continue.

a) On a $\Sigma\cup\Sigma_*\subset E_T$.

b) $NTL(\sigma(T))\subset E_T$; plus généralement $NTL(\zeta_a(T))\subset E_T$ pour tout $a>1$ avec $\zeta_a(T)=\sigma(T)\cap\mathbf{D}\cup\{\lambda\in\mathbf{D}\setminus\sigma(T):\|(T-\lambda)^{-1}\|>\frac{a}{1-|\lambda|}\}$.

DEMONSTRATION.

a) Prouvons, par exemple, que Σ_* est essentiel pout T. On peut supposer $m(\Sigma_*)<1$ (sinon $T\in\mathbf{A}$ et le résultat est acquis). Soit $h\in H^\infty$ telle que $\|h\|_{\Sigma_*}=\|h\|=1$. On a donc $\|h(R_*)\|=1$ et, pout tout $\varepsilon>0$, on peut trouver $y\in R_*$ tel que $\|h(R_*)y\|>1-\varepsilon/2$ et $\|y\|<1$. Puisque $(A_*H)^-=R_*$, il existe $x_1\in H$ tel que

$$\|y-A_*x_1\|<\inf(\varepsilon/2,\ 1-\|y\|).$$

Pour tout n, on a $\|h(R_*)R_*^n y\|=\|h(R_*)y\|>1-\varepsilon/2$. Il en résulte

$$\|A_*h(T)T^n x_1\|=\|h(R_*)R_*^n A_*x_1\|>1-\varepsilon\ .$$

On a donc $\|h(T)x_n\|>1-\varepsilon$ avec $x_n=T^n x_1$; comme $\|T^n x_1\|\to\|A_*x_1\|<1$, on a, pour n assez grand, $\|x_n\|<1$ et, donc, $\|h(T)\|>1-\varepsilon$ pour tout

$\varepsilon>0$. On obtient bien la conclusion voulue: $||h(T)||=1$.

b) Soit $h\in H^\infty$ telle que $||h||=||h||_{LNT(\zeta_a(T))}$. D'après [21, Cor. p. 38], on a alors aussi $||h||=\sup_{\lambda\in\zeta_a(T)}|h(\lambda)|$.
Il resulte de la démonstration de [22, théorème 2.1] que, sous ces conditions, on a $||h(T)||=||h||$; ceci achève la démonstration.

Nous concluons cette section par un résultat utile pour la dernière partie de la démonstration du théorème 1. Etant donnés $T\in\mathbf{A}$, $M\in SI(T)$ et $\beta\in[0,1[$, nous désignons par $\Lambda(\beta,M,T)$ l'ensemble des $\lambda\in D$ pour lesquels il existe x_λ, y_λ dans la boule unité de M vérifiant $||[C_\lambda]-[x_\lambda\times y_\lambda]||\leq\beta$. Rappelons que pour $T\in\mathbf{A}$, on pose $[C_\lambda]=[P_\lambda]$, P_λ noyau de Poisson, autrement dit

$$\forall\, h\in H^\infty \quad \langle h(T),\ [C_\lambda]\rangle=h(\lambda).$$

LEMME 3.5. Pour $T\in\mathbf{A}$, $M\in SI(T)$ et $\beta\in[0,1[$, l'ensemble $LNT(\Lambda(\beta,M,T))$ est essentiel pour T_M.

DEMONSTRATION. Les paramètres étant fixés écrivons Λ pour $\Lambda(\beta,M,T)$. Soit $h\in H^\infty$; on a, pour $\lambda\in\Lambda$, $x=x_\lambda$, $y=y_\lambda$,

$$||h(T_M)||\geq|(h(T_M)x,y)|=|(h(T)x,y)|=|\langle h(T),\ [x\times y]_T\rangle|\geq$$
$$\geq|\langle h(T),\ [C_\lambda]\rangle|-|\langle h(T),\ [C_\lambda]-[x\times y]\rangle|\geq h(\lambda)-\beta||h||\ .$$

Ainsi $||h(T_M)||\geq\sup_{\lambda\in\Lambda}|h(\lambda)|-\beta||h||\geq||h||_{LNT(\Lambda)}-\beta||h||$. Donc, pour tout h telle que $||h||=||h||_{LNT(\Lambda)}$, on a $||h(T_M)||\geq(1-\beta)||h||$. L'argument classique, basé sur la formule du rayon spectral, permet de conclure, qu'en fait, $||h(T_M)||\geq||h||$, ce qui achève la démonstration.

§4. CONTRACTION ABSOLUMENT CONTINUE ET APPROXIMATION FONCTIONNELLE

Notre généralisation de [3, théorème 2] s'énonce comme suit.

PROPOSITION 4.1. Il existe une constante universelle τ $(0\leq\tau<1)$ avec la propriété suivante: Pour toute contraction absolument continue T et tout borélien non négligeable $\Gamma\subset E_T$ on peut trouver une suite (x_n) de vecteurs de la boule unité fermée de H, faiblement convergente vers 0 telle que $\forall\ \|\tilde{x}_\Gamma - x_n\|\cdot x_n\|\leq\tau$, et

$$\lim_{n\to\infty}\|X_{T\setminus\Gamma}x_n\|=0 \ .$$

Le point de départ de cette approximation est la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2. (cf. [3, Prop. 5]). Soit T une contraction absolument continue sur H. Il existe un espace de Hilbert E et un sous-espace H' de $L^2(E)$ tels que

(1) H' est semi-invariant pour $M_e$it ,

(2) T est unitairement équivalente à la compression de $M_e$it à H',

(3) le sous-espace (linéaire) $H_o=L^\infty(E)\cap H'$ est dense dans H'.

Dans la suite, jusqu'à la fin de la démonstration de la proposition 4.1, T est une contraction absolument continue fixée et nous identifions H a H'. (En d'autres termes les vecteurs de H eux-mêmes sont des (classes de) fonctions à valeurs vectorielles.)

Nous désignons par $\langle,\rangle$, $|\ .\ |$ le produit scalaire et la norme dans E. Pour $f,g\in L^2(E)$ on remarque que

$f \cdot {}^{U'} g(e^{it}) = \langle f(e^{it}), g(e^{it}) \rangle$ avec $U' = M_{e^{it}}$.

Le lemme suivant est tout à fait analogue à [3, Cor. 10]; il exprime qu'on peut trouver des vecteurs de H_o presque entièrement "supportés" par un borélien essentiel donné de T.

LEMME 4.3. Soit T une contraction absolument continue sur H, σ un borélien non negligeable essentiel pour T, $\varepsilon>0$ et N un sous-espace de dimension finie de H. Alors il existe $x \in H_o \cap N^\perp$ tel que

$$\|\chi_{T\setminus\sigma} x\| < \varepsilon \|\chi_\sigma x\|$$

Preuve. Soit $u \in H^\infty$ telle que $|u| = \begin{cases} 1 & \text{sur } \sigma \\ \frac{1}{2} & \text{sur } T\setminus\sigma. \end{cases}$

(L'existence d'une telle fonction est bien connue; cf., par exemple, [21, p. 53].) On a donc $\|u(T)\|_e = 1$ et, de [3, Cor. 9] il résulte qu'on peut trouver une suite (x_n) de vecteurs unitaires de $H_o \cap N^\perp$ telle que $\|u(T)x_n\| \to 1$, ce qui entraîne (car $\|u(T)x\| \le \|ux\| \le \|u\|\,\|x\|$ pour tout x et tout $u \in H^\infty$) $\|ux_n\| \to 1$. On a donc

$$\|\chi_{T\setminus\sigma} x_n\|^2 + \|x_o x_n\|^2 = 1$$

$$\|\tfrac{1}{4}\chi_{T\setminus\sigma} x_n\|^2 + \|x_o x_n\|^2 \to 1,$$

d'où l'on déduit: $\lim_{n\to\infty} \|\chi_\sigma x_n\|^2 = 1$ et la conclusion désirée en prenant $x = x_n$ avec n assez grand.

Etant donnés N sous-espace de H de dimension finie, Γ borélien essentiel (non négligeable) pour T et deux scalaires $\eta \in]0, \sqrt{2}-1[$, $\mu \in]0,1[$, nous définissons $S = S(\eta, \Gamma, N, \mu)$ comme le sous-ensemble des $x \in H \cap N^\perp$ pouvant s'écrire $x = \ell + h$ $\ell, h \in L^2(E)$ avec

1) $|\ell| \le \chi_\Gamma$ p.p.

Med 23784

2) $||h||\leq\eta||\ell||$

3) $||\chi_{T\setminus\Gamma}h||\leq\mu||x||$.

Remarquons que, sous ces conditions, on a

4) $||x||/(1+\eta)\leq||\ell||\leq||x||/(1-\eta)$

LEMME 4.4. Pour $x\in S$ on a

5) $||\chi_\Gamma - x\cdot x||_1\leq m(\Gamma)-c_1||x||^2$

avec $c_1=c_1(\eta)=\frac{2-(1+\eta)^2}{(1+\eta)^2}$.

DEMONSTRATION. Observons que 1) entraîne $||\chi_\Gamma-\ell\cdot\ell||=$ $=m(\Gamma)-||\ell||^2$. Il vient donc, via 3) et 4),

$$||\chi_\Gamma-x\cdot x||\leq||\chi_\Gamma-\ell\cdot\ell||+2||h||\,||\ell||+||h||^2\leq m(\Gamma)-||\ell||^2(1-2\eta-\eta^2)\leq$$

$$\leq m(\Gamma)-||x||^2\left(\frac{2-(1+\eta)^2}{(1+\eta)^2}\right) .$$

LEMMA 4.5. On a $\sup\{||x||,\ x\in S\}\geq\rho(1-\eta)m(\Gamma)^{\frac{1}{2}}$ avec $\rho=\rho(\eta)=$ $=\frac{1}{2}(\eta^2/(1+\eta^2))$.

Preuve. Soit $\beta=\sup\{||x||,\ x\in S\}$; posons $\beta=\gamma(1-\eta)(m(\Gamma))^{\frac{1}{2}}$. Nous voulons montrer que $\gamma\geq\frac{1}{2}(\eta^2/(1+\eta^2))$. Supposons cette inégalité non vérifiée, soit $\eta>\sqrt{2\gamma/(1-2\gamma)}$. Du lemme 4.3 on déduit que S n'est pas réduit a $\{0\}$. Soit donc $x_n=\ell_n+h_n$ une suite d'éléments de S dont la norme converge vers β. D'après 4) on a

6): $||\ell_n||\leq\gamma(m(\Gamma))^{\frac{1}{2}}$.

Posons $\sigma_n=\{e^{it}\in\Gamma;\ |\ell(e^{it})|\leq\sqrt{\gamma}\}$. On a

7) $m(\sigma_n)=m(\Gamma)-m\{e^{it}\in\Gamma;\ |\ell|>\sqrt{\gamma}\}\geq m(\Gamma)(1-\gamma)$.

Quitte à passer à des sous-suites on peut supposer que

$$\left.\begin{array}{l} a)\ x_n \to x \\ b)\ \chi_{\sigma_n} \ell_n \to u \\ c)\ \chi_{T\setminus\sigma_n} h_n \to v' \\ d)\ \chi_{T\setminus\Gamma} h_n \to v' \end{array}\right\} \text{ faiblement et e) } \chi_{\sigma_n} \to gw^* \text{ dans } L^\infty.$$

Notons que

8) $0\le g\le\chi_\Gamma$ et $\int g\ge(1-\gamma)m(\Gamma)$.

Soit $E_o=\{e^{it}\in\Gamma;\ |g(e^{it})|\ge 1-2\gamma\}$; des inégalités $(1-\gamma)m(\Gamma)\le\int g=$ $=\int_{E_o} g+\int_{\Gamma\setminus E_o} g\le m(E_o)+(1-2\gamma)(m(\Gamma)-m(E_o))$ on déduit $m(E_o)\ge(m(\Gamma)/2)>0$. Soit $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon<\mu/2$ et $((2\gamma+\varepsilon)/(1-2\gamma))^{\frac{1}{2}}<\eta$. Le lemme 4.4 assure l'existence de $b\in H_o\cap\{N,x,u,v,v'\}^\perp$ tel que $\|\chi_{T\setminus E_o} b\|^2<\varepsilon\|\chi_{E_o} b\|^2$; puisque $b\in H_o$, on peut supposer que

9) $|b|<1-\gamma^{\frac{1}{2}}$.

On a

$$\lim_{n\to\infty}\int\chi_{\sigma_n}|b|^2=\int g|b|^2\ge(1-2\gamma)\|\chi_{E_o} b\|^2 \quad \text{et}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int\chi_{T\setminus\sigma_n}|b|^2=\int(1-g)|b|^2\le 2\gamma\|\chi_{E_o} b\|^2+\|\chi_{T\setminus E_o} b\|^2\le$$
$$\le(2\gamma+\varepsilon)\|\chi_{E_o} b\|^2.$$

Ainsi

10) $\lim(\int\chi_{T\setminus\sigma_n}|b|^2/(\int\chi_{\sigma_n}|b|^2))\le((2\gamma+\varepsilon/(1-2\gamma))<\eta$.

Posons $\bar{x}_n=b+x_n$; nous allons montrer que $\bar{x}_n\in S$ pour n grand, ceci via la décomposition $\bar{x}_n=\bar{\ell}_n+\bar{h}_n$ avec $\bar{\ell}_n=\ell_n+\chi_{\sigma_n} b$ $\bar{h}_n=h_n+\chi_{T\setminus\sigma_n} b$. Le choix de b entraîne immédiatement $\bar{x}_n\in H\cap N^\perp$ et (via 9)) $|\bar{\ell}_n|\le\chi_\Gamma$ p.p..

De c) et de l'orthogonalité de b à v, on déduit que $\lim\int b\cdot\chi_{T\setminus\sigma_n} h_n=\lim\int(\chi_{T\setminus\sigma_n} b\cdot h_n)=\lim(b,\ \chi_{T\setminus\sigma_n} h_n)=0$. Par conséquent:

11) $(\|\bar{h}_n\|^2-\{\|h_n\|^2+\int\chi_{T\setminus\sigma_n}|b|^2\})\underset{n\to\infty}{\to} 0$; de même (via b) et b1u) il vient

12) $\|\bar{\ell}_n\|^2-\{\|\ell_n\|^2+\int\chi_{\sigma_n}|b|^2\}\to 0$.

De 10), 11), 12) et 2) il résulte alors que $\|\bar{h}_n\|/\|\bar{\ell}_n\|\le\eta$ pour n

assez grand. On procède de même (en utilisant $\varepsilon<\mu/2$) pour établir que $\|\chi_{T\setminus\Gamma}\bar{h}_n\|<\mu\|\bar{x}_n\|$ pour n assez grand.

Ainsi, pour n grand, on a $\bar{x}_n\varepsilon S$. Mais, par ailleurs, $\|\bar{x}_n\|^2=\|x_n\|^2+|b\|^2+2Re(x_n,b)\to\beta^2+\|b\|^2>\beta^2$, ce qui est contraire à la définition de β. On a donc bien $\gamma\geq\frac{1}{2}(\eta^2/(1+\eta^2))$.

Demonstration de 4.1. Soit N_n une suite croissante de sous-espaces de dimension finie de H telle que $\cup N_n=H$, et soit (μ_n) une suite décroissante vers zéro. On peut trouver $y_n\varepsilon S(\eta,\Gamma,N_n,\mu_n)$ telle que $\|y_n\|\to(1-\eta)\rho\sqrt{m(\Gamma)}$ (on utilise ici le fait élémentaire que, si $y\varepsilon S$ alors $\alpha y\varepsilon S$ pour $|\alpha|\leq 1$). La suite $x_n=y_n/\sqrt{m(\Gamma)}$ converge faiblement vers 0 (cela résulte de $x_n\varepsilon N_n^{\perp}$ et du choix des N_n), satisfait, d'une part, $\|\chi_{T\setminus\Gamma}x_n\|\leq\mu_n\|x_n\|\to 0$, et, d'autre part, en vertu du lemme 4.4,

$$\|\tilde{\chi}_{\Gamma}\cdot x_n\cdot x_n\|\leq 1-(1-\eta)c_1\rho$$

On a donc le résultat désiré avec $\tau=1-(1-\eta)c_1\rho$.

COROLLAIRE 4.6. Soient T une contraction absolument continue, Γ un borélien non négligeable essentiel pour T et $f\varepsilon L^1(\Gamma)$ avec $\|f\|\leq 1$. Alors il existe deux suites (u_n), (v_n) dans la boule unité de H, faiblement convergentes vers 0 et telles que

$$\overline{\lim}\|f-u_n\cdot v_n\|\leq\tau,\quad \lim\|\chi_{T\setminus\Gamma}u_n\|=\lim|\chi_{T\setminus\Gamma}v_n\|=0.$$

DEMONSTRATION. Nous nous donnons une suite (ε_n) décroissante vers 0 et une suite de vecteurs (z_n), dense dans H. Pour chaque n on peut trouver des boréliens (Γ_i) de Γ deux à deux disjoints, et

des scalaires α_i, $i=1,\ldots,N$ tels que

$$\|f-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\tilde{\chi}_{\Gamma_i}\|<\varepsilon_n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N}|\alpha_i|<1.$$

(Ceci se déduit facilement de la densité des combinaisons linéaires des fonctions χ_A, A borélien de Γ, dans $L^1(\Gamma)$.) Pour $\nu=(n_1,\ldots,n_N)$ nous posons

$$u_\nu=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\alpha_i}x_{i,n_i} \qquad v_\nu=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\alpha_i}x_{i,n_i}$$

$(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$, étant une suite obtenue via la proposition 4.1 appliquee a Γ_i, $i=1,\ldots,N$. On obtient par des calculs élémentaires

$$\|f-u_\nu\cdot v_\nu\|<\|\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\tilde{\chi}_{\Gamma_i}\|+2\sum_{1\le i<j\le N}|\alpha_i\alpha_j|^{\frac{1}{2}}\|x_{i,n_i}\cdot x_{i,n_j}\| .$$

Puisque $\Gamma_i\cap\Gamma_j=\emptyset$ on a

$$\|x_{i,n}\cdot x_{j,m}\|\le\|\chi_{T\setminus\Gamma_i}x_{i,n}\|\,\|\chi_{T\setminus\Gamma_j}x_{j,n}\| .$$

Ces inégalités et la convergence vers 0 des suites $(\|\chi_{T\setminus\Gamma_i}x_{i,n}\|)_{n\in\mathbb{N}}$, $i=1,\ldots,N$ entraînent l'existence de p_o tel que $\|f-u_\nu\cdot v_\nu\|<\varepsilon_n$ pour tout ν vérifiant

$$\inf\{n_i;\ i=1,\ldots,N\}\ge p_o .$$

Puisque $\|\chi_{T\setminus\Gamma}x_{i,n}\|\le\|\chi_{T\setminus\Gamma_i}x_{i,n}\|$ on peut également supposer que $\|\chi_{T\setminus\Gamma}u_\nu\|$, $\|\chi_{T\setminus\Gamma}v_\nu\|<\varepsilon_n$ pour $\inf\{n_i;\ i=1,\ldots,N\}\ge p_o$.

De même, la convergence faible vers 0 des suites $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ permet de conclure facilement à l'existence de p_1 tel que

$$|(u_\nu,z_j)|,\ |(v_\nu,z_j|<\varepsilon_n \quad j=1,\ldots,n \text{ des que } \inf_{1\le i\le n} n_i\ge p_1$$

Enfin, les expressions développées de $\|u_\nu\|^2$, $\|v_\nu\|^2$, l'inégalité $\sum_{i=1}^{N}|\alpha_i|<1$ et la convergence faible vers 0 des suites $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$

montrent que l'on peut choisir les n_i successivement ($n_1 \geq \mathrm{Max}(p_o, p_1)$, $n_2 - n_1$ suffisamment grand, etc.) tels que

$$\|u_\nu\|^2, \ \|v_\nu\|^2 \leq 1.$$

Ainsi, pour chaque n, il existe ν_n tel que $\|u_n\|, \ \|v_n\| \leq 1$ (avec $u_n = u_{\nu_n}$, $v_n = v_{\nu_n}$);

$$\|f - u_n \cdot v_n\| \leq \tau; \qquad \|\chi_{T\setminus\Gamma} v_n\|, \qquad \|\chi_{T\setminus\Gamma} u_n\| < \varepsilon_n; \qquad |(u_n, z_j)|, \ |(v_n, z_j)| \leq$$

$$\leq \varepsilon_n \quad j = 1, \ldots, n .$$

Ces dernières inégalités assurent bien la convergence faible vers 0 des suites (u_n) et (v_n).

§5. $A = A_{\frac{1}{2}}(\rho)$

Ce résultat a été annoncé dans [14]. Nous en complétons maintenant la démonstration. Commençons par un lemme qui traduit le Corollaire 4.6 en termes d'approximation dans Q_T dans le cas où $T \in A$. (Les notations sont celles introduites au §2.)

LEMME 5.1. Soit $T \in A$ et soit $f \in L^1(T)$, $\|f\| \leq 1$.

a) Si f est nulle p.p. sur Σ alors $[f]_T \in E^r_\tau(A_T)$.

b) Si f est nulle p.p. sur Σ_* alors $[f]_T \in E^\ell_\tau(A_T)$.

c) Si f est nulle p.p. sur $\Sigma \cup \Sigma_*$ alors $[f]_T \in X_\tau(A_T)$.

DEMONSTRATION. Soient (x_n), (y_n) les suites obtenues en appliquant le Corollaire 4.6 a f. On a immédiatement $\|[f]_T - [x_n \times y_n]_T\| < \tau$. Dans le cas a), on peut supposer $\lim \|\chi_\Sigma x_n\| = 0$, et nous devons seulement établir la condition

(v_r) $\quad \forall\, \omega \in H \quad \|[x_n \otimes \omega]_T\| \to 0.$

Or

$$\|[x_n \otimes \omega]_T\| = \|[x_n \otimes \omega]_{U_+}\| \leq \|[Q_* x_n \otimes Q_* \omega]_{U_+}\| +$$

$$+ \|[Ax_n \otimes A\omega]_{U_+}\| \leq \|[Q_* x_n \otimes Q_* \omega]_{S_*}\| + \|Ax_n\| \|A\omega\| .$$

Le shift (à droite) S_* est $C_{.o}$ et la suite $Q_* x_n$ tend faiblement vers 0. Il est bien connu (cf., par exemple, [18, Proposition 2.7]) que ceci entraîne $\lim_{n\to\infty} \|[Q_* x_n \times Q_* \omega]_{S_*}\| = 0$. Par ailleurs, pour tout $y \in L^2(E)$, on a

$$\|Ay\| \leq \|\chi_\Sigma y\| .$$

On a donc bien $\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = 0$ et (v_r) est établie.

Dans le cas b) on utilise l'extension coisométrique minimale B de T et le fait que S^* est C_o. pour établir la condition

$$(v_\ell) \quad \forall\, \omega \in H \quad \|[\omega \otimes y_n]_T\| \to 0 .$$

Il résulte clairement de a) et b) que dans le cas $f \in L^1(T \setminus \Sigma \cup \Sigma_*)$ les suites (x_n) (y_n) vérifient (v_r) et (v_ℓ). Ceci, avec l'inégalité générale $\|[f] - [x_n \times y_n]\| < \tau$ exprime bien que $[f] \in X_\tau(A_T)$.

Le lemme suivant est un procédé pour ameliorer les approximations de "longueur 2" dans le prédual Q_T pour $T \in \mathbf{A}$.

LEMME 5.2. Soit $T \in \mathbf{A}$ tel que $\Sigma \neq T$ et $\Sigma_* \neq T$. Supposons donnés $[L] \in Q_T$ $a,b,c,d \in H$ et $\delta > 0$ tels que $\|[L] - \{[a \otimes b] + [c \otimes d]\}\| < \delta$.

Alors il existe $a',b',c',d', \in H$ tels que

$$\|[L] - \{[a' \times b'] + [c' \times d']\}\| < \tau\delta ,$$

$$\|c' - c\| , \ \|b' - b\| < 3\delta^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\|a'\|\leq\|a\|+\delta^{\frac{1}{2}},\quad \|d'\|\leq\|d\|+\delta^{\frac{1}{2}}\ .$$

DEMONSTRATION. Soit $f\in L^1(T)$ telle que

$$[f]_T=[L]-[a\otimes b]-[c\otimes d]\quad\text{et}\quad \|f\|<\delta\ .$$

On peut écrire $f=f_1+f_2+f_3$ avec $f_3=\chi_{\Sigma_*}f$ et $f_2=\chi_{\Sigma\setminus\Sigma_*}f$. Soient $\delta_i>\|f_i\|$ $i=1,2,3$ et $\varepsilon>0$ tels que $\delta_1+\delta_2+\delta_3+2\varepsilon=\delta$. Via le lemme 2.2 (appliqué avec $[K]=0$, $f=f_3$ $\delta_1=\varepsilon$, $\delta_2=\delta_3$, $\theta=\tau$) on obtient des vecteurs c', d' de H tels que

$$\|[c\otimes d]+[f_3]-[c'\otimes d']\|<\tau\varepsilon\ ,$$

$$\|c'-c\|<3(\varepsilon+\delta_3)^{\frac{1}{2}}\quad \|d'\|\leq|d\|+(\varepsilon+\delta_3)^{\frac{1}{2}}\ .$$

De même en appliquant le lemme 2.3 (avec $[K]=[f_1]$, $f=f_2$, $\delta_1=\delta_1$, $\delta_2=\delta_2$ $\theta=\tau$) on obtient des vecteurs a', b', de H tels que

$$\|[a\times b]_T+[f_1]_T+[f_2]_T-[a'\times b']\|<\tau\delta_1\ ,$$

$$\|a'\|\leq\|a\|+(\delta_1+\delta_2)^{\frac{1}{2}}\quad\text{et}\quad \|b'-b\|<3(\delta_1+\delta_2)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Les vecteurs a', b', c', d' satisfont donc les inégalités désirées. Par ailleurs, en regroupant les autres inégalités, il vient

$$\|[f]_T+[a\times b]+[c\times d]-\{[a'\times b']+[c'\times d']\}\|<\tau(\delta_1+\varepsilon)\ ,$$

ce qui donne bien

$$\|[L]-\{[a'\times b']+[c'\times d']\}\|<\tau\delta\ .$$

THEOREME 5.3. ([14, théorème 1]). Il existe $\rho\geq 1$ tel que $A=A_{\frac{1}{2}}(\rho)$.

DEMONSTRATION. Si Σ ou Σ_* est égal à T nous savons que $T \in A_1(1)$. Nous pouvons donc supposer vérifiées les hypothèses du lemme.

Soit $[L] \in Q_T$ et $\delta > \|[L]\|$. Nous construisons par récurrence quatre suites (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) de la façon suivante: $a_o = b_o = c_o = d_o = 0$; supposant construits a_n, b_n, c_n, d_n tels que

$$\|[L] - [a_n \otimes b_n] - [c_n \otimes d_n]\| < \tau^{n-1}\delta ,$$

nous appliquons le lemme 5.2 pour obtenir des vecteurs a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1} tels que

$$\|[L] - [a_{n+1} \otimes b_{n+1}] - [c_{n+1} \otimes d_{n+1}]\| < \tau^n \delta ,$$

$$\|c_{n+1} - c_n\| , \quad \|b_{n+1} - b_n\| < 3\delta^{\frac{1}{2}} \tau^{(n-1)/2} ,$$

$$\|a_{n+1}\| \leq \|a_n\| + \delta^{\frac{1}{2}} \tau^{(n-1)/2} , \quad \|d_{n+1}\| \leq \|d_n\| + \delta^{\frac{1}{2}} \tau^{(n-1)/2} .$$

Il est clair que les suites ainsi construites satisfont:

(i) $\lim_{n \to \infty} \|[L] - [a_n \otimes b_n] - [c_n \otimes d_n]\| = 0$,

(ii) (a_n) et (d_n) convergentes; et leur limites a et d verifient $\|a\|$, $\|d\| < 3\delta^{\frac{1}{2}} \alpha$ avec $\alpha = 1/(1 - \tau^{\frac{1}{2}})$,

(iii) $\|c_n\|$, $\|b_n\| \leq \alpha \delta^{\frac{1}{2}}$.

Quitte à passer à des sous suites on peut supposer que (b_n) et (c_n) sont faiblement convergentes vers des limites que nous désignons par b et c.

De (i) et (ii) il vient

$$\lim_{n \to \infty} \|[L] - [a \otimes b_n] - [c_n \otimes d]\| = 0 .$$

Il est facile de vérifier que $x \to [a \otimes x]$ et $y \to [x \otimes d]$ sont continues de H dans Q_T munis de leurs respectives topologies

faibles. On en déduit $[L]=[a \otimes b]+[c \otimes d]$. Par ailleurs, on a $\|a\|\|b\|+\|c\|\|d\|<6\alpha^2\delta$. On a donc la conclusion désirée avec $\rho=6\alpha^2$.

§6. $A=A_1(\rho)$

Nous partons de la triangulation de T sous la forme (cf. [24, p.73]):

$$T=\begin{pmatrix} T_1 & * \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } T_1 \in C_{o.} \text{ et } T_2 \in C_{1.} \ ;$$

autrement dit, T_1 est la restriction de T au sous-espace H_1, hyperinvariant pour T, constitué des vecteurs x de H tels que $T^n x \underset{n\to\infty}{\to} 0$; ainsi $H_1 \subset S$. Posons $E_1=E_{T_1}$; si $E_1=T$ on a $T_1 \in C_{o.} \cap A$ et donc $T_1 \in A_1(\rho)$ d'après [3]. On a alors, a fortiori, $T \in A_1(\rho)$. Nous supposerons donc $E_2=T\backslash E_1$ non négligeable.

Le premier lemme est une adaptation aisée de résultats des §§ 2 et 4.

LEMME 6.1. Soit $T \in \mathbf{A}(H)$ et $f \in L^1(E_1)$ avec $\|f\|_1 \leq 1$; alors $[\![f]\!]_T \in E^{\ell}_{\tau}(A_T, H_1)$.

DEMONSTRATION. D'après la proposition 4.1, il existe des suites (x_n), (y_n) dans la boule unité fermée de H_1, faiblement convergentes vers 0, et telles que $\|f-x_n \circ y_n\|<\tau$, ce qui assure déjà

$$\|[\![f]\!]_T - [x_n \otimes y_n]_T\| < \tau \ .$$

Par ailleurs, pour $\omega \in H$, on a

$$\|[\omega \otimes y_n]_T\| = \|[\omega \otimes y_n]_B\| = \|[Q\omega \otimes y_n]_B\| = \|[Q\omega \otimes y_n]_{S^*}\| \to 0$$

car S^* est C_o. .

Dans le contexte de la triangulation ci-dessus on voit facilement que $\sigma_p(T)=\sigma_p(T_1)$; d'après la proposition 3.4 on a l'inclusion $LNT(\sigma_p(T))\subset E_1$ qui entraîne

$$E_2\subset LNT(D\backslash\sigma_p(T)) .$$

De $A=A_{\frac{1}{2}}$ nous déduisons maintenant le résultat suivant crucial pour la suite.

PROPOSITION 6.2. Soit $T\in A$ et $\lambda\in D\backslash\sigma_p(T)$; alors $[C_\lambda]_T\in E^r_{\frac{1}{2}}(A_T)$. Plus précisement il existe une suite de vecteurs $(x_n)=(x_{n,\lambda})$ de H et $\theta=\theta_\lambda\leq\frac{1}{2}$ tels que

(1) $\lim \|[C_\lambda]-[x_n\times x_n]\|\leq\theta$,

(2) $\lim \|x_n\|^2=1-\theta$, et

(3) $\forall\ \omega\in H \quad \|[x_n\times\omega]\|\to 0$.

DEMONSTRATION. Puisque $T^{(2)}\in A_1$ on a, en particulier pour $\lambda\in D\backslash\sigma_p(T)$, $[C_\lambda]_{T^{(2)}}=[u\times v]_{T^{(2)}}$ pour certains vecteurs $u=u_\lambda$ $v=v_\lambda$ de $H^{(2)}$. Cette égalite entraîne

$$((T^{(2)}-\lambda)^k u,v)=\begin{cases}1 & \text{si } k=0\\ 0 & \text{si } k>0\end{cases}$$

Posons $L=\bigcup_{k\geq 0} T^{(2)k}u=\bigcup_k (T^{(2)}-\lambda)^k u$. L'injectivité de $(T-\lambda)$ entraîne celle de $(T^{(2)}-\lambda)$. Par ailleurs, les égalités ci-dessus montrent que $((T^{(2)}-\lambda)L)^-$ est de codimension 1 dans L. Il en résulte en premier lieu que L est de dimension infinie. Nous envisageons maintenant deux cas:

a) $(T^{(2)}-\lambda)L$ non fermé. Il existe donc une suite de vecteurs unitaires $(u_n)\subset L$ telle que $\|(T^{(2)}-\lambda)u_n\| \to 0$. Toute valeur d'adhérence faible de cette suite appartient au noyau de $(T^{(2)}-\lambda)$ et est donc nulle. Il en résulte que $u_n \to 0$ faiblement et que $\lambda\in\sigma_{\ell e}(T^{(2)})=\sigma_{\ell e}(T)$. Il existe donc une suite orthonormale $(x_n)\subset H$ telle que $\|(T-\lambda)x_n\| \to 0$. Pour une telle suite on sait que (cf. [7, Lemmes 4.3 et 4.4]) les conditions (1), (3) et, bien sûr, (2), de la proposition 5.1 sont satisfaites avec $\theta_\lambda=0$.

b) $(T^{(2)}-\lambda)L$ est fermé. Alors $(T^{(2)}|_L-\lambda)$ est Fredholm d'indice -1. De [19, lemme 5.2], appliqué à $(T^{(2)})^*$, nous déduisons l'existence d'une suite orthonormale $u_n=x_n+y_n$ de vecteurs de $H^{(2)}$ telle que $[C_\lambda]_{T^{(2)}}=[u_n \times u_n]_{T^{(2)}}$ soit $[c_\lambda]_T=[x_n \otimes x_n]_T+[y_n \otimes y_n]$ et $\|[u_n \otimes z]_{T^{(2)}}\| \to 0$ pour tout $z\in H^{(2)}$.

Puisque $\|x_n\|^2+\|y_n\|^2=1$, on peut, quitte à passer à une sous-suite et à echanger x_n et y_n, supposer l'existence de $\theta=\theta_\lambda\leq\frac{1}{2}$ tel que

$$\lim\|x_n\|^2=1-\theta \quad \text{et} \quad \lim\|y_n\|^2=1 .$$

On en déduit (1), via l'expression de $[c_\lambda]_T$ ci-dessus. Par ailleurs, pour $\omega\in H$, on a

$$\|[x_n \otimes \omega]_T\|=\|[x_n \oplus y_n) \otimes (\omega \oplus 0)]_{T^{(2)}}\| \to 0 .$$

Ceci termine la démonstration.

Etant donné $x\in H$, nous écrivons $x=x^1+x^2$ sa décomposition relative à $H=H_1+H_2$ avec $H_2=H_1^\perp$. Pour chaque $\lambda\in D\setminus\sigma_p(T)$, nous choisissons une suite $(x_{n,\lambda})\subset H$ vérifiant (1), (2), (3) de la

proposition 5.1 et, en outre, $\lim_{n\to\infty}\|x^1_{n,\lambda}\|=\gamma_\lambda$. Posons, pour $\gamma\in[0,\frac{1}{2}[$, $D_\gamma=\{\lambda\in D\setminus\sigma_p(T)\,|\,\gamma_\lambda\leq\gamma\}$. L'intérêt que présentent les ensembles D_γ est exprimé par les deux propositions suivantes.

PROPOSITION 6.3. Si $\lambda\in D_\gamma$ alors $[C_\lambda]\in E^r_{\theta_\lambda+\gamma}(A_T,H_2)\subset E^r_{\frac{1}{2}+\gamma}(A_T,H)$. Plus précisement $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|[C_\lambda]-[x^2_{n,\lambda}\otimes x^2_{n,\lambda}]\|\leq\theta_\lambda+\gamma(1-\theta_\lambda)^{\frac{1}{2}}$ et $\lim_{n\to\infty}\|[x^2_{n,\lambda}\otimes\omega]\|=0$ pour $\omega\in H_2$.

DEMONSTRATION. Résulte sans difficultés, du fait que, $\forall$ $z,\omega\in H$, $[z\times\omega]=[z\times z^1_o]+[z^2\times\omega^2]$, de l'inégalité

$$\|[c_\lambda]-[x^2_{n,\lambda}\otimes x^2_{n,\lambda}]\|\leq\|[c_\lambda]-[x_{n,\lambda}\otimes x_{n,\lambda}]\|+\|[x_{n,\lambda}\otimes x^1_{n,\lambda}]\|,$$

et des propriétés de la suite $(x_{n,\lambda})$.

PROPOSITION 6.4. Pour tout $\gamma\in]0,\frac{1}{2}[$, l'ensemble D_γ est dominant pour E_2 (i.e. $E_2\subset LNT(D_\lambda)$).

DEMONSTRATION. Puisque $E_2=T\setminus E_{T_1}$, il est clair qu'il suffit d'établir que $LNT(D\setminus D_\lambda)$ $(=LNT(\sigma_p(T_1))\cup LNT(D\setminus\sigma_p(T)\setminus D_\lambda))$ pour T_1. On sait déjà que $LNT(\sigma_p(T_1))$ est essentiel pour T_1. Par ailleurs, pour $\lambda\in D\setminus\sigma_p(T)\setminus D_\lambda$, on a $\lim_{n\to\infty}\|x^1_{n,\lambda}\|>\gamma$. Il vient successivement

$$\|[C_\lambda]-[x^1_{n,\lambda}\otimes x^1_{n,\lambda}]\|\leq\|[C_\lambda]-[x_{n,\lambda}\otimes x_{n,\lambda}]\|+\|[x^2_{n,\lambda}\otimes x_{n,\lambda}]\|\ ,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|[C_\lambda]-[x^1_{n,\lambda}\otimes x^1_{n,\lambda}]\|<\theta_\lambda+(1-\theta_\lambda)^{\frac{1}{2}}(1-\theta_\lambda-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\theta_\lambda+(1-\theta_\lambda)\left(1-\frac{\gamma^2}{1-\theta_\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\theta_\lambda+(1-\theta_\lambda)\left(1-\frac{\gamma^2}{2(1-\theta_\lambda)}\right)\leq 1-\gamma^2/2\ .$$

On en déduit donc l'inclusion $D\setminus D_\gamma\subset\Lambda(1-\gamma^2/2,\,H_1,\,T)$ et

l'essentialité de $LNT(D\backslash D_\gamma)$ pour T_1 d'après la proposition 3.5.

LEMMA 6.5. Soit $T\in\mathcal{A}(H)$ tel que $m(\overset{H_1}{\Sigma_*})<1$ et $m(\overset{H_1}{\Sigma})<1$ et soient $[L]\in Q_T$, $a,b\in H_1$, $c,d\in H_2$ et $\delta>0$ tels que

$$\|[L]-\{[(a+c)\otimes(b+d)]\}\|<\delta .$$

Alors il existe $a',b'\in H_1$, $c',d'\in H_2$ tels que

$$\|[L]-\{[(a'+c')\otimes(b'+d')]\|<\tau_o\delta \qquad \text{avec } \tau_o=\mathrm{Max}(\tfrac{3}{4},\tau),$$

$$\|c'-c\|<3\delta^{\frac{1}{2}}\ ,\quad \|d'\|<\|d\|+\delta^{\frac{1}{2}}\ ,$$

$$\|b'-b\|<3\delta^{\frac{1}{2}},\quad \|a'\|<\|a\|+\delta^{\frac{1}{2}}\ .$$

DEMONSTRATION. Soit $f\in L^1(T)$ telle que

$$[f]=[L]-[(a+c)\otimes(b+d)] \quad \text{avec} \quad \|f\|<\delta .$$

On peut écrire $f=f_1+f_2$ avec $f_1\in L^1(E_1)$, $f_2\in L^2(E_2)$, $\|f_i\|<\delta_i$, $i=1,2$, $\delta_1+\delta_2=\delta-5\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon>0$.

Fixon $\gamma>0$ tel que $\gamma\delta_2^{\frac{1}{2}}\|b\|<\varepsilon$ et $\gamma<\frac{1}{4}$.

Nous transformons d'abord le terme

$$[K_2]=[c\otimes d]+[f_2]$$

en utilisant le lemme 2.1 avec $M=H_2$ et les propositions 6.3 et 6.4. En effet, la dominance de D_γ pour E_2 entraîne que (cf., par exemple, [6, Lemme 1.2])

$$[f_2]_T\varepsilon\|f_2\|\,\mathrm{ecef}\{[c_\lambda]_T;\ \lambda\varepsilon D_\gamma\}\subset\|f\|_2\,\mathrm{ecef}E^r_{\frac{3}{4}}(A_T,H_2,H_2).$$

Il existe donc des suites (c_p), (d_p) dans H_2 vérifiant

$$\|[c\otimes d]_T+[f]_T-[c_p\otimes d_p]_T\|<\tfrac{3}{4}\delta_2$$

$$\|c_p-c\|<3\delta_2^{\frac{1}{2}},\quad \|d_p\|\leq\|d\|+\delta_2^{\frac{1}{2}}.$$

En outre $c_p-c_p=u_p^2+\tilde{u}_p$, les suites (u_p^2) et $(\tilde{u}_p)$ vérifiant (2) du

lemme 2.1. De plus, (cf. démonstration de 2.1) u_p^2 est la projection sur H_2 d'un vecteur de la forme

$$u_p = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\alpha_i}\, x_i^p \text{ avec } \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| < \delta_2 \text{ et chaque } x_i^p \ (i=1,\dots,N)$$

est choisi dans une suite $(x_{i,n})$ vérifiant $[x_{i,n} \times \omega] \underset{n\to\infty}{\to} 0$. En prenant tous les n_i assez grands on assurera l'inégalité $\|[u_p \otimes b]\| < \varepsilon_p < \varepsilon$. Puis (puisque $x_{i,n}$ tend faiblement vers 0) le choix successif des n_i peut se faire de façon que

$$\|u_p^1\| \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \, \|(x_i^p)^1\|^2 < \gamma^2 \delta_2 .$$

Il en résulte, de par le choix de γ, $\|[u_p^2 \times b]\| < 2\varepsilon$. Par ailleurs, on peut choisir $\tilde{u}_p$ tel que

$$\|\tilde{u}_p\| - \lim_{n\to\infty} \|T_2^n \tilde{u}_p\| < \varepsilon/(\|b\|+1) ,$$

ce qui entraîne (car $\|T^n \tilde{u}_p\| \geq \|T_2^n \tilde{u}_p\|$)

$$\|Q\tilde{u}_p\| < \varepsilon/(\|b\|+1) ,$$

et donc (puisque $b = Qb$, vu que $H_1 \subset S$)

$$\|[\tilde{u}_p \otimes b]_T\| \ (= \|[\tilde{u}_p \otimes b\|_B\| = \|[Q\tilde{u}_p \otimes b]_B\|) < \varepsilon .$$

Ainsi avec $c' = c_p$ $d' = d_p$, on a l'inégalité

$$\|[c \otimes (b+d)] + [f_2\mathbb{I}] - [c' \otimes (b+d')]\| < \tfrac{3}{4}\delta_2 + 3\varepsilon$$

et les inégalités désirées pour $\|c'-c\|$ et $\|d'\|$.

De même, puisque $[f_1\mathbb{I}] \varepsilon E_\tau^\ell(A_T, H_1)$. D'après le lemme 2.2, il existe des suites (a_p), (b_p) dans H_1 telles que

$$\|[a \otimes b] + [f_1\mathbb{I}] - [a_p \otimes b_p]\| < \tau\delta_1$$

$$\|a_p\| < \|a\| + \delta_1^{\frac{1}{2}}, \quad \|b_p - b\| < 3\delta_1^{\frac{1}{2}} .$$

En outre, la suite $(b_p - b)$ converge faiblement vers 0. Il en résulte (cf. démonstration du lemme 6.1) que $\lim_{p\to\infty} [c' \otimes (b_p - b)] = 0$.

Donc, en choisissant p assez grand, on aura, avec $b'=b_p$, $a'=a_p$, $||[c' \otimes (b'-b)]||<\varepsilon$ et, en regroupant,

$$||[L]-[(a'+b') \otimes (b'+d')]||<\tfrac{3}{4}\delta_2+3\varepsilon+\tau\delta_1+\varepsilon<\tau_o\delta ,$$

ainsi que les diverses inégalités désirées.

Demonstration du theoreme 1. Soit $T\in A(H)$. Si $m(\Sigma_*^{H_2})=1$ ou $m(\Sigma^{H_1})=1$ on a T_2 ou T_1 dans $A_1(1)$ (cf. [1], theoreme 3.9] déjà mentionné). Supposons donc $m(\Sigma_*^{H_2})<1$ et $m(\Sigma^{H_1})<1$. Soit $[L]\in\Omega_T$ et $\delta>||[L]||$. Le lemme 6.5 permet de construire, par récurrence, des suites (a_n), (b_n) dans H_1, (c_n), (d_n) dans H_2 telles que

$$a_o=b_o=c_o=d_o=0,$$

$$||[L]-[(a_n+c_n) \otimes (b_n+d_n)]||<\tau_o^{n-1}\delta,$$

$$||a_{n+1}||\leq||a_n||+(\tau_o^{n-1}\delta)^{\frac{1}{2}},\quad ||d_{n+1}||\leq||d_n||+(\tau_o^{n-1}\delta)^{\frac{1}{2}},$$

$$||b_{n+1}-b_n||,\ ||c_{n+1}-c_n||<3(\tau_o^{n-1}\delta)^{\frac{1}{2}}.$$

Ces inégalités montrent que les suites (b_n), (c_n) sont des suites de Cauchy et que les suites $(||a_n||)$ et $(||d_n||)$ sont bornées par $\delta^{\frac{1}{2}}(1/(1-\sqrt{\tau_o}))=\delta^{\frac{1}{2}}\alpha$.

Posant $b=\lim b_n$, $c=\lim c_n$, il vient $||[L]-[(a_n+c) \otimes (b+d_n]||ightarrow 0$; soient a et d des limites faibles de sous-suites (a_{n_k}), (b_{n_k}); tenant compte de $[a_n \otimes d_n]=0$ et de la continuite faible des applications $x \to [x \otimes b]$, $y \to [c \otimes y]$, on obtient

$$[L]=[(a+c) \otimes (b+d)],$$

avec $||c||,\ ||b||<3\alpha\delta^{\frac{1}{2}}$, d'où

$$||a+c||,\ ||b+d||<\alpha(10\delta)^{\frac{1}{2}}$$

Autrement dit, T appartient a $A_1(\rho)$ avec $\rho=10\alpha^2$.

§7. COROLLAIRES ET REMARQUES

Du théorème 1 on déduit d'abord, par un argument devenu classique (cf., par exemple, [15]) le résultat suivant

COROLLAIRE 7.1. Pour tout T de la classe A les topologies faible* et faible-opérateur coïncident sur A_T. De plus A_T coïncide avec W_T. (Pour $T \in L(H)$, nous désignons par W_T l'algèbre faible-opérateur fermée engendrée par T.)

Le corollaire 7.1 résoud donc (pour la clase A) une question topologique portée au premier plan par des théorèmes d'Apostol-Bercovici-Foias-Pearcy ([5, théorèmes 6.13 et 9.7 (c)) (cf. aussi [18, théorèmes 3.7 et 4.1]).

Dans ce domaine, rappelons que [25], puis [10], ont donné des exemples d'opérateurs T pour lesquels les topologies faible* et faible-opérateur différent sur A_T (cf. [11] pour des résultats concernant les propriétés $(A_{1/p})$ et $(A_{1/p})(\rho)$) et que [26] exhibe un exemple de T pour lequel l'inclusion $A_T \subset W_T$ est stricte. Par ailleurs le théorème 1 et le corollaire 7.1 précisent, en ce qui concerne la classe A, les résultats de [15]. Enfin, notons (cf. [2]) qu'une algèbre duale arbitraire peut avoir la propriété (A_1) sans avoir aucune propriété $(A_1)(\rho)$.

Nous présentons maintenant deux critères d'appartenance aux classes $A_{1,\aleph_0}$ et $A_{\aleph_0,1}$. Rappelons que $A_{1,\aleph_0}(H)$ est la sous-classe de $A(H)$ constituée des $T \in A(H)$ tels que A_T ait la propriété $(A_{1,\aleph_0})$, c'est-à-dire, que pour toute suite $([L_j]) \subset Q_T$ il existe

des vecteurs x, (y_j) de H vérifiant

(*) $\quad [L_j]=[x \otimes y_j]$, $\quad j\in N$;

la propriete $A_{\aleph_0,1}$ est définie de facon symétrique.

COROLLAIRE 7.2. Soit $T\in A$ tel que $D\backslash\sigma_p(T)$ (resp. $D\backslash\sigma_p(T^*)$) soit dominant pour T. Alors $T\in A_{1,\aleph_0}$ (resp. $T\in A_{\aleph_0,1}$). En particulier $C_{1.}\cap A\subset A_{1,\aleph_0}$ et $C_{.1}\cap A\subset A_{\aleph_0,1}$.

DEMONSTRATION. De la démonstration de la proposition 6.2 on déduit (puisque T lui-même est dans A_1) que, pour $\lambda\in D\backslash\sigma_p(T)$, $[c_\lambda]\in E_o^r(A_T)$. La dominance de $D\backslash\sigma_p(T)$ entraîne alors que $ecef(E_o^r(A_T))$ coïncide avec la boule unité fermée de Q_T (autrement dit que A_T a la propriete $E_{o,1}^r$). On conclut via [16, Theoreme 2.1] que $T\in A_{1,\aleph_0}$. Pour prouver la dernière affirmation il suffit d'observer que, pour $T\in C_{1.}$, on a $\sigma_p(T)=\emptyset$ (cf. [18, proposition 2.8]).

THEOREME 7.3. Soit $T\in A$ tel que $\Sigma\subset\Sigma_*$ (resp. $\Sigma_*\subset\Sigma$). Alors $T\in A_{1,\aleph_0}$ (resp. $T\in A_{\aleph_0,1}$).

DEMONSTRATION. D'après le lemme 5.1 on a $[f]\in E_\tau^r(A_T)$ pour $f\in L^1(T\backslash\Sigma)$ et $\|f\|\leq 1$. De ceci et de l'inclusion $\Sigma\subset\Sigma_*$ on déduit facilement que $ecef(E_\tau^r(A_T)\cup\{[g],\ g\in L^1(\Sigma_*)\ \|g\|\leq 1\})=(Q_T)_1$. Donc, d'apres [17, théorème 4.1], on a $T\in A_{1,\aleph_0}$.

Rappelons qu'un opérateur T est dit réflexif si

W_T=AlgLat T(=$\{X \in L(H) | \text{Lat}\mathcal{T} \subset \text{Lat } X\}$). Des résultats ci-dessus et des conditions suffisantes de réflexivite obtenues en [17] on dëduit immédiatement les résultats suivants.

THEOREME 7.4. Soit T' une contraction dont la partie complètement non unitaire T est dans A. Chacune des conditions suivantes assure la réflexivite de T':

a) $D\backslash\sigma_p(T')$ ou $D\backslash\sigma_p(T'^*)$ dominant pour T,

b) $T \in C_{1\cdot} \cup C_{\cdot 1}$,

c) $\Sigma \vdash \Sigma_*$ ou $\Sigma_* Z \Sigma$.

Au moment du tirage de ce préprint l'auteur a appris de C. Pearcy que H. Bercovici a prouvé qu'en fait, $A=A_1(1)$.

La rédaction finale de ce travail a ëtë accomplie pendant un séjour de recherche a l'INCREST et le résultat $A=A_1(\rho)$ *a été annoncé lors d'une conférence à l'Université de Bucarest. L'auteur remercie vivement la Section de mathématiques de l'INCREST pour son hospitalité et les facilités offertes pendant ce séjour.*

B. Chevreau
UER de Mathématiques et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, Cours de la Libération
33405 Talence
France.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] C. APOSTOL, Ultraweakly closed operator algebras, J. Operator Theory, 2, 1979, p. 49-61.

[2] H. BERCOVICI, A note on property (A_1), preprint.

[3] H. BERCOVICI, A contribution to the structure theory of the class A, J. Funct. Anal. (à paraître).

[4] H. BERCOVICI, C. FOIAS et C. PEARCY, Dilation theory and systems of simultaneous equations in the predual of an operator algebra, I., Michigan Math. J., 30 (1983), 335-354.

[5] H. BERCOVICI, C. FOIAS et C. PEARCY, Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory, C.B.M.S. Regional conf. ser. in Math. n 56, Amer. Math. Soc., Providence,R.I., 1985.

[6] H. BERCOVICI, C. FOIAS, C. PEARCY et B.Sz.-NAGY, Functional models and extended spectral dominance, Acta Sci. Math., 43 (1981), 243-254.

[7] S. BROWN, Some invariant subspaces for subnormal operators, Integral Equations Operator Theory, 1 1978, 310-333.

[8] S. BROWN, B. CHEVREAU et C. PEARCY, Contractions with rich spectrum have invariant subspaces, J. Operator Theory, 1, 1979, 123-136.

[9] S. BROWN, B. CHEVREAU et C. PEARCY, On the structure of contraction operators II, J. Funct. Anal. (a paraitre).

[10] G. CASSIER, Une contraction pour laquelle les topologies faible et ultrafaible ne coïncident pas sur l'algèbre duale engendrée, J. Operator Theory (à paraître).

[11] G. CASSIER, Une note sur les propriétés $(A_{1/p})$, préprint.

[12] B. CHEVREAU, On the spectral picture of an operator, J. Operator Theory, 4, 1980, p. 119-132.

[13] B. CHEVREAU, Algèbres duales et sous-espaces invariants, Thèse d'Etat, Bordeaux, 1987.

[14] B. CHEVREAU, Sur les contractions à calcul fonctionnel isométrique I., Note soumise aux C.R. Acad. Sci., Paris.

[15] B. CHEVREAU et J. ESTERLE - Pettis' lemma and topological properties of dual algebras, Mich. Math. J., 34, 1987, p. 143-146.

[16] B. CHEVREAU, G. EXNER et C. PEARCY, Sur la réflexivité des contractions de l'espace hilbertien, C.R. Acad. Sci., Paris, (a paraitre).

[17] B. CHEVREAU, G. EXNER et C. PEARCY, On the structure of contraction operators III, (to be submitted).

[18] B. CHEVREAU et C. PEARCY, On the structure of contraction operators with applications to invariant subspaces, J. Funct. Anal., 67, 1986, 360-379.

[19] B. CHEVREAU et C. PEARCY, On the structure of contraction operators I, J. Funct. Anal. (à paraître).

[20] J. CONWAY, Subnormal operators, Pitman, Boston, Mass. 1981.

[21] K. HOFFMAN, Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[22] B. PRUNARU, Sufficient conditions for membership in $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}_{\aleph_0}$, J. Operator Theory, to appear.

[23] B. PRUNARU, On the structure of contraction operators with dominating spectrum, submitted.

[24] B. Sz.-NAGY et C. FOIAS, Harmonic Analysis of operators on Hilbert space, North Holland, Amsterdam, 1970.

[25] D. WESTWOOD, Weak operator and weak* topologies on singly generated algebras, J. Operator Theory, 15, 1986, p. 267-280.

[26] W. WOGEN, Some counterexamples in nonselfadjoint algebras, preprint.

[27] F. ZAROUF, Sur les opérateurs sous-normaux de la classe A, préprint.