BUCURESTI

INSTITUTUL DE MATEMATICA
AL ACADEMIEI ROMANE

PREPRINT SERIES OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS
OF THE ROMANIAN ACADEMY

ISSN 0250 3638

THEORIE DU POTENTIEL POUR LES SYSTEMES SEMI-DYNAMIQUES

par

GH. BUCUR et M. BEZZARGA

PREPRINT No. 11/1993

THEORIE DU POTENTIAL POUR LES SYSTEMES SEMI-DYNAMIQUES

par

Gh. Bucur* et M. Bezzarga**

June, 1993

* Institutul de Matematică al Academiei Române

** Faculté des Sciences de Tunis, Departement de Mathématique

THEORIE DU POTENTIEL POUR LES SYSTEMES SEMI-DYNAMIQUES

Par
GH. BUCUR et M. BEZZARGA

<u>**Introduction**</u> : Partant par la donnée d'un systéme semi-dynamique Φ on lui associe directement les concepts : d'ensemble absorbant, topologie fine, topologie naturelle etc.... D'autre part à chaque système semi-dynamique Φ on associe, d'une manière naturelle, une résolvante $\mathcal{V}_\Phi$ de noyaux positives et par conséquent une théorie de potentiel. Un nombre des propositions sont consacrées au rapport entre les concepts associés au systéme semi-dynamique et les concepts similaires dans la théorie du potentiel. Parmi les résultats on peut remarquer : - l'équivalence entre la propriété de transience du systéme semi- dynamique Φ et le fait que la résolvante associée $\mathcal{V}_\Phi$ est propre ; la mesurabilité dans X_o^2 de la relation d'ordre associée à une résolvante est aussi le fait que cette relation d'ordre est fermée par rapport à la topologie naturelle ; la construction d'un systéme semi-dynamique Φ à partir par la donnée d'une résolvante $\mathcal{W} = (W_\alpha)_{\alpha \geq o}$ tel que la résolvante $\mathcal{V}_\Phi$ associée au systéme Φ soit exactement $\mathcal{W}$; des différents assurant l'existence d'un système semi-dynamique associé à une résolvante donnée.

Il faut remarquer que dans le cas où $\mathcal{W}$ est une résolvante continue sur un espace localement compact à base dénombrable et satisfaisant aussi les exigences de l'énoncé 16 l'équivalence entre les affirmations 5), 6) du théorème 16 et l'existence d'un système semi-dynamique associé à été envisagée par M. HMISSI [4].

Soit $(X,\mathfrak{B})$ un espace mesurable séparé, dénombrablement généré et soit ω un élément fixé de X. Une application

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \times X \dashrightarrow X$$

sera nommée <u>système semi-dynamique mesurable avec le pôle en ω</u> si les propriétés suivantes sont remplies :

a) Φ est une application mesurable si l'espace $\mathbb{R}_+ \times X$ est munie de la tribu produit

b) Pour chaque point x de X il existe un élément $\zeta(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ tel que $\Phi(t,x) \neq \omega$ pour tout $t \in [0,\zeta(x))$ et $\Phi(t,x) = \omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \geq \zeta(x)$. De plus $\zeta(\omega) = 0$ et $\zeta(x) > 0$ pour tout x, $x \neq \omega$

c) Pour tous $x \in X$, $s \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\Phi(s, \Phi(t,x)) = \Phi(s+t,x)$$

d) $\Phi(0,x) = x$ pour tout $x \in X$

e) S'il on a $\Phi(t,x) = \Phi(t,y)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t > 0$ alors $x = y$.

<u>Notations</u> : Par la suite on note $(X, \mathfrak{B}, \omega, \Phi)$ (ou parfois simplement par Φ) le système semi-dynamique sur l'espace mesurable $(X,\mathfrak{B})$ ayant le pôle en ω. De même on va noter X_0 l'ensemble $X \setminus \{\omega\}$ et pour chaque point $x \in X_0$ le symbole Γ_x designera la <u>trajectoire de x</u> c'est à dire l'ensemble

$$\{\Phi(t,x) \ / \ t \in [0,\zeta(x))\}$$

<u>Définition</u> : Un système semi-dynamique $(X, \mathfrak{B},\omega,\Phi)$ est appelé <u>transient</u> s'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{B}$ telle que

$$X_0 = \cup \{A_n \ ; n \in \mathbb{N}\}$$

et telle que pour chaque élément x dans X_0 <u>le temps de résidence en A</u> de la trajectoire de x est fini. i.e

$$\lambda (\{t \in \mathbb{R}_+ \ / \ \Phi(t,x) \in A_n\}) < \infty$$

(λ denote la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$)

<u>Proposition 1</u> : Si $(X, \mathfrak{B}, \omega, \Phi)$ est transient alors pour chaque point $x \in X_0$ l'application Φ réalise une bijection de l'intervalle $[0,\zeta(x))$ sur la trajectoire Γ_x de x. Plus précis l'application $\Phi_x : [0,\zeta(x)) \dashrightarrow \Gamma_x[$ donnée par

$$\Phi_x(t) = \Phi(t,x)$$

est un isomorphisme d'espaces mesurables si on munie Γ_x de la tribu trace de $\mathfrak{B}$ sur Γ_x.

<u>Démonstration</u> : En utilisant les propriétés c) et d) du système semi-dynamique Φ il suffit de démontrer que pour tout $t \in (0,\zeta(x))$ on a $\Phi(t,x) \neq x$. On remarque qu'on ait

$$[0,t_0] \subset [0,\zeta(x)) = \bigcup_{n=o}^{\infty} \{t \in \mathbb{R}_+ \ / \ \Phi(t,x) \in A_n\}$$

et par conséquent il existera $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$r := \lambda([0,t_0) \cap \{(t \in \mathbb{R}_+ \ / \ \Phi(t,x) \in A_{n_0}\}) > 0$$

On note

$$T_0 := \{t \in [0,t_0) \setminus \Phi(t,x) \in A_{n_0}\}$$

En utilisant la propriété c) on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\Phi(n t_0, x) = x$ et de la même propriété on constate que l'ensemble

$$T_n := [n\, t_0, (n+1)\, t_0] \cap \{t \in \mathbb{R}_+ / \Phi(t,x) \in A_{n_0}\}$$

est le translaté de l'ensemble T_0 par $n\, t_0$ i.e $T_n = T_0 + n\, t_0$. Puisque les ensembles $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints on déduit

$$\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(T_n) = r.\infty = \infty$$

ce qui contredit le fait que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = \{t \in \mathbb{R}_+ / \Phi(t,x) \in A_{n_0}\}$$

Donc l'application $\Phi_x : [0,\zeta(x)) \dashrightarrow \Gamma_x$ est une bijection. L'application $\Phi : \mathbb{R}_+ \times X \dashrightarrow X$ étant mesurable il résulte que l'application $\Phi_x : [0,\zeta(x)) \dashrightarrow \Gamma_x$ est mesurable si on munie Γ_x de la tribu trace. Donc on s'appuyant sur le théorème de Lusin il résulte que Φ_x est même un isomorphisme d'espaces mesurables entre $[0,\zeta(x))$ et Γ_x.

__Remarque 2__ : Par la suite on va démontrer que, pour chaque ensemble A de X_0, l'ensemble des éléments $x \in X_0$ dont leurs trajectoires passe par A (i.e $\Gamma_x \cap A \neq \emptyset$) est aussi mesurable.

__Topologies et l'ordre associées aux systèmes semi-dynamiques.__

Si $(X, \mathfrak{B}, \omega, \Phi)$ est un système semi-dynamique alors sur l'espace $X_0 = X \setminus \{\omega\}$ on considère la famille de filtres $(\mathcal{V}_x)_{x\in X_0}$ définie par :

$x \in X_0 \Longrightarrow \mathcal{V}_x = \{V \subset X_0 \,/\, (\exists\ \alpha_V \in (0,\zeta(x))\ ;\ \Phi(t,x) \in V\ \ (\forall)\ t \in [0,\alpha_V)\}$

On peut vérifier sans effort qu'il existe une topologie τ_Φ sur X_0 de sorte que pour chaque point $x \in X_0$ l'ensemble $\mathcal{V}_x$ coincide avec l'ensemble de tous les voisinages de x par rapport à la topologie à τ_Φ. Plus précis un sous-ensemble D de X_0 appartient à τ_Φ si et seulement si pour chaque élément x de D il existe $r \in (0,\zeta(x))$ tel que $\Phi(t,x) \in D$ pour tout nombre t dans $(0,r)$.

__Proposition 3__ : Un sous-ensemble F de X_0 est fermé par rapport à la topologie τ_Φ si et seulement si F contient tout élément $x \in X_0$ pour lequel il existe une suite décroissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers zéro dans l'intervalle $(0,\zeta(x))$ telle que $\Phi(t_n,x) \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même l'adhérence par rapport à la topologie τ_Φ d'un sous-ensemble A de X_0 est formé par tous les points x de X_0 tels que pour chaque nombre naturel n, $n \geq 1$ il existe $t_n \in [0,1/n) \cap [0,\zeta(x))$ de sorte que $\Phi(t_n,x) \in A$.

Démonstration : Evidente.

Proposition 4 : On suppose que le système $(X,\mathfrak{B},\omega,\Phi)$ est transient. Alors pour tout élément $x \in X_0$ l'ensemble Γ_x est simultanément fermé et ouvert par rapport à la topologie τ_Φ.

Démonstration : Le fait que Γ_x est ouvert est immédiat. Pour démontrer que cet ensemble est aussi fermé on considère un point $x_0 \in X_0$ tel qu'il existe une suite décroissante vers zéro dans $(0,\zeta(x_0))$ notée par $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte que $\Phi(t_n,x_0) \in \Gamma_x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existera u_n dans $[0,\zeta(x))$ tel que $\Phi(t_n,x_0) = \Phi(u_n,x)$. Il s'en suit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on aura

$$\begin{aligned}\Phi(t_n,x_0) &= \Phi(t_n - t_{n+1},\Phi(t_{n+1},x_0)) = \Phi(t_n - t_{n+1}, \Phi(u_{n+1},x))\\ &= \Phi((t_n - t_{n+1})+u_{n+1},x),\end{aligned}$$

$$\Phi(u_n,x) = \Phi((t_n - t_{n+1}) + u_{n+1},x)$$

ce qui implique l'égalité $u_n = u_{n+1} + (t_n - t_{n+1})$ ou $u_n - u_{n+1} = t_n - t_{n+1}$ en vertue de la proposition 1. Donc la suite $(u_n)_n$ de l'intervalle $[0,\zeta(x))$ est aussi décroissante. Soit $u := \lim_{n\to\infty} u_n$. Les considérations précédentes nous assurent que $u_n - u_{n+k} = t_n - t_{n+k}$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ et par suite en faisant tendre k vers l'infini on aura :

$$u_n - u = t_n \qquad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation

$$\Phi(t_n,x_0) = \Phi(u_n,x) = \Phi(t_n+u,x) = \Phi(t_n,\Phi(u,x))$$

est vérifiée. Si on note par x' l'élément de Γ_x donné par $x' = \Phi(u,x)$ alors la suite d'égalités :$\Phi(t_n,x_0) = \Phi(t_n,x')$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le fait que $\inf_n t_n = 0$ nous assure que $\Phi(t,x_0) = \Phi(t,x')$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et par conséquent, en utilisant la propriété e) du système semi-dynamique, on obtient

$x_0 = x' \in \Gamma_x$ c'est à dire Γ_x est fermé par rapport à la topologie τ_Φ.

Corollaire 5 : La topologie τ_Φ est séparé.

Démonstration : Soient $x,y \in X_0$, $x \neq y$. Tout d'abord on considère le cas $x \in \Gamma_y$ ou également $y \in \Gamma_x$. Soit donc $t \in (0,\zeta(y))$ tel que $x = \Phi(t,y)$. En vertue de la proposition 1 on aura $y \notin \Gamma_x$. Donc

$$y \in \Gamma_y \setminus \Gamma_x,\ x \in \Gamma_x,\ \Gamma_x \cap (\Gamma_y \setminus \Gamma_x) = \emptyset$$

et d'après la proposition 4 les ensembles $\Gamma_y \setminus \Gamma_x$ et Γ_x sont ouverts ce qui montre que les points x et y sont séparés par des ouverts. On suppose maintenant que $x \notin \Gamma_y$ et $y \notin \Gamma_x$. Alors ou bien $\Gamma_x \cap \Gamma_y = \emptyset$ ou bien

$\Gamma_x \cap \Gamma_y \neq \emptyset$. Dans la première situation les éléments x et y sont séparés par les ouverts Γ_x et Γ_y. Dans la deuxième situation on peut considérer les nombres t_x, t_y donnés par

$$t_x = \inf\{t \in [0,\zeta(x)) \ / \ \Phi(t,x) \in \Gamma_y\}$$
$$t_y = \inf\{t \in [0,\zeta(y)) \ / \ \Phi(t,y) \in \Gamma_x\}$$

Puisque Γ_y et Γ_x sont fermés on déduit que $\Phi(t_x,x) \in \Gamma_y$, $\Phi(t_y,y) \in \Gamma_x$, $t_x \neq 0$, $t_y \neq 0$ et par la définition même on a :

$$t \in [0,t_x) \Longrightarrow \Phi(t,x) \notin \Gamma_y$$
$$t \in [0,t_y) \Longrightarrow \Phi(t,y) \notin \Gamma_x.$$

Donc les ensembles $\Gamma_x \setminus \Gamma_{\Phi(t_x,x)}, \Gamma_y \setminus \Gamma_{\Phi(t_y,y)}$ sont des ouverts disjoints et de plus

$$x \in \Gamma_x \setminus \Gamma_{\Phi(t_x,x)}, \ y \in \Gamma_y \setminus \Gamma_{\Phi(t_y,y)}$$

<u>La topologie naturelle</u> . Soit τ^o_Φ l'ensemble des parties D de X_o ayant la propriété suivante : quelque soit $x \in X_o$ et quelque soit $t_o \in [0,\zeta(x))$ tels que $\Phi(t_o,x) \in D$ alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$ tel que pour tout élément t de l'ensemble

$$(t_o-\varepsilon, \ t_o+\varepsilon) \cap [0,\zeta(x))$$

on a $\Phi(t,x) \in D$.

Evidemment que τ^o_Φ est une topologie sur X_o.

<u>Définition</u> : On appelle trajectoire ouverte (partante de x) x l'ensemble $\Gamma_x \setminus \{x\} = \{\Phi(t,x) \ / \ t \in (0,\zeta(x))\}$. Un élément $x_o \in X_o$ sera dit point minimal s'il n'existe pas $x \in X_o$ tel que $x_o \in \Gamma_x$ et $x \neq x_o$.

Pour toute paire (x,y) de X_o^2 on dénote par $x \leq_\Phi y$ la relation $y \in \Gamma_x$. Evidemment que $x \leq_\Phi x$ pour chaque point x de X_o et de plus la propriété de transitivité est vérifié :

$$x \leq_\Phi y, \quad y \leq_\Phi z \Longrightarrow x \leq_\Phi z$$

<u>Remarque</u> : Si le système semi-dynamique $(X,\mathcal{B},\omega,\Phi)$ est transient alors la relation $x \leq_\Phi y$ est aussi antisymatique. En effet si on suppose que $x \leq_\Phi y$ et $y \leq_\Phi x$ alors il existe $s \in [0,\zeta(x))$, $t \in [0,\zeta(y))$ tels que $y = \Phi(s,x)$ et $x = \Phi(t,y)$. Donc on aura :

$$\Phi(s+t,y) = \Phi(s,\Phi(t,y)) = \Phi(s,x) = y = \Phi(0,y)$$

En utilisant la proposition 1 on déduit $s + t = 0$ et par conséquent $y = \Phi(0,x) = x$.

Donc, dans le cas d'un système semi-dynamique transient la relation $x \leq_\Phi y$ est une relation d'ordre. On voit que dans cette situation deux éléments sont comparables si et seulement s'ils se trouvent sur une même trajectoire et de plus en vertue de la proposition 1 les éléments d'une trajectoire sont deux à deux comparables. En fait, sur la trajectoire Γ_x l'ordre antérieure coincide avec l'ordre usuel sur l'intervalle $[0,\zeta(x))$ si on identifie chaque élément $t \in [0,\zeta(x))$ à l'élément $\Phi(t,x)$ de Γ_x.

On peut décrire un système fondamentale de voisinages du point $x \in X_0$ par rapport à la topologie τ^o_Φ de la manière suivante : si x est minimal alors la famille $\{\Gamma_{x,\varepsilon} / \varepsilon > 0\}$ où pour toute ε on a noté :

$$\Gamma_{x,\varepsilon} = \{\Phi(t,x) \ / \ t \in [0,\varepsilon] \cap [0,\zeta(x))\}$$

est un système fondamental de voisinages de x pour la topologie τ^o_Φ.
Si x n'est pas minimal alors pour tout $y \in X_0$, $y < x$ on considère un nombre $\varepsilon_y > 0$ et $t_y \in [0,\zeta(y))$ tels que $x = \Phi(t_y,y)$. La famille de sous-ensemble de X_0, $\Gamma_{(x,\varepsilon),\ (y,\varepsilon_y)_{y\leq x}}$ donné par

$$\Gamma_{(x,\varepsilon),(y,\varepsilon_y)_{y\leq x}} := \Gamma_{x,\varepsilon} \cup \bigcup_{y,y\leq x} \{\Phi(t,y) / t \in (t_y-\varepsilon, t_y] \cap [0,\zeta(y))\}$$

est un système fondamental de voisinages pour la topologie τ^o_Φ.
On peut aussi démontrer l'affirmation suivante :
<u>**Proposition 6**</u> : La topologie τ^o_Φ est séparé. Pour tout élément $x \in X_0$ l'ensemble Γ_x est fermé par rapport à la topologie τ^o_Φ mais en générale Γ_x n'est pas ouvert par rapport à la topologie τ^o_Φ

<u>**Résolvantes associées aux systèmes semi-dynamique**</u>.

Etant donné un système semi-dynamique $(X,\mathfrak{B},\omega,\Phi)$ alors pour toute fonction $f : X \dashrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\mathfrak{B}$-mesurable et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ on note par $V_\alpha f$ la fonction numérique sur X définie par :

$$V_\alpha f(x) = \int_o^\infty e^{-\alpha t} f(\Phi(t,x))dt$$

Evidemment que l'application $(t,x) \dashrightarrow f(\Phi(t,x))$ de $\mathbb{R}_+ \times X$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction mesurable si on munit $\mathbb{R}_+ \times X$ de la tribu produit et par conséquent la fonction $V_\alpha f$ définie auparavant est une application mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

En s'appuyant sur la propriété d'un système semi-dynamique et en utilisant le théorème de Fubini, comme d'habitudes, on démontre que la famille $\mathcal{V}_\Phi := (V_\alpha)_{\alpha\geq o}$ est une résolvante de noyaux positives sur X i.e.

$$V_\alpha f = V_\beta f + (\beta-\alpha)\, V_\alpha(V_\beta f) \quad \text{et} \quad V_\alpha(V_\beta f) = V_\beta(V_\alpha f)$$

pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \leq \beta$ et pour tout fonction $f : X \dashrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\mathfrak{B}$-mesurable.

Cette résolvante $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\Phi$ sera nommée <u>la résolvante sur X associée au système semi-dynamique</u> $(X,\mathfrak{B},\omega,\Phi)$. De la définition de $\mathcal{V}_\Phi$ il résulte que $\alpha V_\alpha 1 = 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > 0$ i.e la résolvante $\mathcal{V}_\Phi$ est markovienne.

Remarque : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ on a $V_\alpha \mathbb{1}_{X \setminus \{\omega\}}(\omega) = 0$ et par conséquent on peut considérer la résolvante $\mathcal{V}_\Phi$ comme une résolvante sur l'espace $X_0 = X \setminus \{\omega\}$ muni de la tribue trace de $\mathfrak{B}$ sur X_0 de la manière suivante : Pour toute fonction mesurable, positive f sur X_0 on considère la fonction $\tilde{f}$ sur X égale f sur X_0 et égale zéro en ω. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}+$, $\alpha \geq 0$ on note $V'_\alpha f = (V_\alpha \tilde{f}) /_{X_0}$ et on constate que cette famille $\mathcal{V}' = (V'_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ de noyaux positives sur X_0 est une résolvante pour laquelle on utilisera aussi la notation $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha \geq 0}$.

<u>**Proposition 7**</u> : Le système semi-dynamique $(X, \mathfrak{B}, \omega, \Phi)$ est transient si et seulement si la résolvante associée $\mathcal{V}_\Phi$ (sur X_0) est propre.

<u>**Démonstration**</u> : Si la résolvante $\mathcal{V}_\Phi$ est propre alors il existe une fonction $f : X_0 \dashrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable, strictement positive telle que $Vf(x) = V_0 f(x) < \infty$ pour tout point $x \in X_0$. Pour chaque nombre naturel n, $n \geq 1$ on note

$$A_n = \{x \in X_o \,/\, f(x) \geq \frac{1}{n}\},\ T_n^x := \{t \in [0, \zeta(x)) \,/\, \Phi(t,x) \in A_n\}$$

Evidemment on a $X_o = \cup \{A_n / n \in \mathbb{N}^*\}$ *et* $f(\Phi(t,x)) \geq \frac{1}{n}$ pour $t \in T_n^x$. Donc

$$\lambda(T_n^x) \leq n \int_{T_n^x} f(\Phi(t,x))dt \leq n \int_o^\infty f(\Phi(t,x))\,dt < \infty$$

c'est à dire $(X, \mathfrak{B}, \omega, \Phi)$ est un système transient.

Supposons maintenant que Φ est transient et soit $(A_n)_n$ une suite de $\mathfrak{B}$ telle que $X_0 = \cup \{A_n / n \in \mathbb{N}\}$ et telle que pour tout $x \in X_0$ on ait

$$\lambda(\{t \in \mathbb{R}_+ \,/\, \Phi(t,x) \in A_n\}) < \infty$$

Donc on aura

$$x \in X_o \Longrightarrow V 1_{A_n}(x) = \int_0^\infty 1_{A_n}(\Phi(t,x))dt = \lambda(\{t \in \mathbb{R}_+ / \Phi(t,x) \in A_n\}) < \infty$$

On applique le principe complete de maximum pour le noyaux $V = V_0$ et on décompose l'ensemble A_n en une réunion d'ensembles $(A_n^m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $\mathfrak{B}$ tels que $V(1_{A_n^m}) \leq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$. Donc si on considère la fonction $f : X_0 \dashrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$f = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} \frac{1}{2^{n+m}} 1_{A_n^m}$$

on aura

$$Vf \leq \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+m}} = 2,\ f > 0 \text{ sur } X_o$$

ça veut dire $\mathcal{V}_\Phi$ est propre.

Théorème 8 : Si $(X, \mathcal{B}, \omega, \Phi)$ est transient alors l'ensemble $\mathcal{E}^f_{\mathcal{V}}$ des fonctions réelles, positives, $\mathcal{B}$-mesurables excessives par rapport à la résolvante $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\Phi$ (sur X_0) est identique à l'ensemble des fonctions réelles, positives, $\mathcal{B}$–mesurables sur X_0, décroissantes suivant l'ordre $\leq_\Phi$ et continues par rapport à la topologie τ_Φ. De plus les fonctions excessives par rapport à la résolvante $\mathcal{V}_\Phi$ sont semi-continues inférieurement par rapport à la topologie τ^o_Φ et pour chaque fonction $f : X_0 \dashrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $Vf < \infty$ sur X_0 on a Vf continue par rapport à la topologie τ^o_Φ.

Démonstration : On considère $f : X_0 \dashrightarrow \mathbb{R}_+$, $\mathcal{B}$-mesurable de sorte que Vf soit finie sur X_0. Soit $x \in X$ et soit $y = \Phi(t_0,x)$ où $t_0 \in [0,\zeta(x))$ ou équivalent $x \leq y$. On aura :

$$Vf(y) = \int_0^\infty f(t, \Phi(t_o, x))dt = \int_{t_o}^\infty f(\Phi(t,x))\, dt \leq Vf(x).$$

Donc la fonction Vf est décroissante par rapport à l'ordre $\leq_\Phi$.

La fonction Vf est continue par rapport à la topologie τ^o_Φ. En effet, on considère $x_0 \in X_0$ fixé et $x_t \in \Gamma_{x_o}$, $x_t = \Phi(t,x_0)$, $t \in [0,\zeta(x_0))$ arbitraire. On aura

$$Vf(x_o) - Vf(x_t) = \int_0^t f(\Phi(u,x_o))du$$

et par conséquent pour $\varepsilon > 0$ donné il existe $\eta_\varepsilon > 0$, $\eta_\varepsilon < \zeta(x_0)$ tel que

$$\int_0^{\eta_\varepsilon} f(\Phi(u,x_o))du < \varepsilon, \quad Vf(t_o) - Vf(x_t) < \varepsilon \quad (\forall)\, t \in [0,\eta_\varepsilon).$$

Soit maintenant $y < x_0$ (si x_0 n'est pas minimal) et soit $t_0 \in [0,\zeta(y))$ tel que $\Phi(t_0,y) = x_0$. Si on considère $t \in [0,t_0)$ alors on a :

$$Vf(\Phi((t,y))) - Vf(x_o) = \int_t^{t_o} f(\Phi(u,x))\, du$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné on pourrait choisir $\eta_\varepsilon > 0$ tel que $\int_{t_o - \eta_\varepsilon}^{t_o} f(\Phi(u,x))du < \varepsilon$ et par conséquent

$$Vf(\Phi(t,y)) - Vf(x) < \varepsilon \quad \text{si} \quad t \in (t_0 - \eta_\varepsilon, t_0].$$

Les considérations précédentes montrent que Vf est continue en x_0 pour la topologie τ^o_Φ. Donc Vf est aussi continue par rapport à la topologie plus fine τ_Φ. D'après le théorème de Hunt chaque fonction $\mathcal{V}$-excessive sera semi-continue inférieurement par rapport à la topologie τ^o_Φ et décroissante par rapport à l'ordre $\leq_\Phi$. D'ici on peut déduire sans effort que une telle fonction est continue par rapport à la topologie τ_Φ. Plus précise une fonction $s : X_0 \dashrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ décroissante suivant l'ordre $\leq_\Phi$ est semi-continue inférieurement par rapport à τ^o_Φ si et seulement si elle est continue par rapport à la topologie τ_Φ.

Réciproquement, soit s une fonction réelle, positive, $\mathfrak{B}$-mesurable, décroissante suivant l'ordre $\leq_\Phi$. Pour $\lambda > 0$ donné on a

$$\lambda V_\lambda s(x) = \int_o^\infty \lambda e^{-\lambda t} s(\Phi(t,x))\, dt \leq \int_o^\infty \lambda e^{-\lambda t} s(x) dt = s(x)$$

Donc s est surmédiane par rapport à la résolvante $\mathcal{V}_\Phi$. On montre maintenant que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda s(x_o) = s(x_o)$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné et soit $M_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tel que $e^{-M_\varepsilon} < \varepsilon$. On a

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda s(x_o) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_o^\infty \lambda e^{-\lambda t} s(\Phi(t,x)) dt = \lim_{\lambda\to\infty} \int_o^\infty e^{-u} s(\Phi(\frac{u}{\lambda}, x_o))\, du \geq$$

$$\geq \lim_{\lambda\to\infty} \int_o^{M_\varepsilon} e^{-u} s(\Phi(\frac{u}{\lambda}, x_o)) du = \int_o^{M_\varepsilon} e^{-u} s(x_o)\, du = s(x_o)\,(1 - e^{-M_\varepsilon}) \geq s(x_o)(1-\varepsilon).$$

Donc, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda s(x_o) = s(x_o)$$

<u>**Corollaire 9**</u> : Les fonctions constantes positives sur X_0 sont excessives par rapport à la résolvante $\mathcal{V}_\Phi$ associée au système semi-dynamique transient Φ.

Afin de formuler d'autres propriétés pour les systèmes semidynamiques on rappelle la notion d'ensemble absorbant par rapport à une résolvante. Soit donc $\mathcal{W}$ une résolvante sur X_0 telle qu'il existe une fonction strictement positive s sur X_0, qui est excessive par rapport à $\mathcal{W}$. On suppose que l'ensemble des fonctions excessives $\mathcal{E}_\mathcal{W}$ est min-stable sur X_0. Dans ces conditions on rappelle l'assertion suivante :

<u>**Proposition 10**</u> : Si $A \subset X_0$, $A \in \mathfrak{B}$ est fermé par rapport à la topologie la moins fine sur X_0 rendant continues les éléments de $\mathcal{E}_\mathcal{W}$ alors les propriétés suivante sont équivalentes :

a) Pour toutes les deux mesures positive μ, ν sur X_0 telles que $\mu(s) \leq \nu(s)$ quelque soit $s \in \mathcal{E}_\mathcal{W}$ on a $\mu(\ _A) = 0$ dés que $\nu\ (\ _A) = 0$.

b) Pour tout élément $x \in A$ et toute mesure positive μ sur X_0 telle que $\mu(s) \leq s(x)$ quelque soit $s \in \mathcal{E}_\mathcal{W}$ on a $\mu(\ _A) = 0$

c) Il existe une fonction excessive s telle que $A = [s = 0]$.

d) Pour toute fonction excessive s la fonction $1_{\complement A} * s$ est aussi excessive.

<u>**Démonstration**</u> : Les implications d) ==> c) ==>a) ==> b) sont évidentes.

Supposons que l'assertion b) est vérifiée et soit $s > 0$ une fonction excessive. Pour tout $x \in X_0$ nous avons, par définition même des fonctions excessives

$$\lambda W_\lambda u(x) \leq u(x) \qquad (\forall) \quad u \in \mathcal{E}_{\mathcal{W}} \;, \quad (\forall) \quad \lambda > 0$$

Donc d'après l'assertion b) si on prend $x \in A$ alors, $\varepsilon_x(\complement_A) = 0$ et par conséquent $\lambda W_\lambda(\complement_A)(x) = 0$, $\lambda W_\lambda(s\, 1_{\complement_A})(x) = 0 \leq s\, 1_{\complement_A}(x)$.

Pour $x \in \complement_A$ on a

$$\lambda W_\lambda(s.1_{\complement_A})(x) \leq \lambda W_\lambda(s)(x) \leq s(x) = (s\, 1_{\complement_A})(x)$$

c'est-à-dire la fonction $s.1_{\complement_A}$ est $\mathcal{W}$-surmédiane. Puisque A a été supposé finement fermé il résulte que la fonction $\mathcal{W}$-surmédiane. $s.1_{\complement_A}$ est aussi semi-continue inférieurement par rapport à la topologie fine et par suite est $\mathcal{W}$-excessive.

<u>**Définition**</u> : Un ensemble finement fermé et borélien A de X_0 est nommé <u>$\mathcal{W}$-absorbant</u> s'il vérifie l'une des conditions a), b), c), d) de la proposition précédente.

Un ensemble M de X_0 sera nommé <u>Φ-absorbant</u> si pour tout élément x de X_0 et tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tels que $\Phi(t_0,x) \in M$ on aura $\Phi(t,x) \in M$ quelque soit $t \in [t_0,\zeta(x))$.

Evidemment une réunion (resp. intersection) arbitraire d'ensembles Φ-absorbants est aussi un ensemble Φ-absorbant.

<u>**Remarque 11**</u> : Un ensemble M de X_0 est Φ absorbant si et seulement si pour tout $x \in M$ on a $\Gamma_x \subset M$. Particulièrement la trajectoire Γ_x d'un point arbitraire x de X_0 est un ensemble Φ-absorbant fermé pour la topologie τ_Φ^o ou τ_Φ.

<u>**Proposition 12**</u> : Si $(X, \mathcal{B}, \omega, \Phi)$ est transient alors

a) $1_{\complement\Gamma_x} \in \mathcal{E}_{\mathcal{V}_\Phi}$ pour tout élément $x \in X_0$

b) La topologie fine associée à la résolvante $\mathcal{V}_\Phi$ coincide avec la toplogie τ_Φ

c) Un sous-ensemble borélien A de X_0 finement fermé est $\mathcal{V}_\Phi$-absorbant si et seulement si A est un ensemble Φ absorbant. Dans le cas affirmatif l'ensemble A est aussi fermé par rapport à la topologie τ_Φ^o.

<u>**Démonstration**</u> : Partant de définition de l'ensemble Γ_x on déduit directement que la fonction $1_{\complement\Gamma_x}$ est décroissante suivant l'ordre $\leq_\Phi$. Puisque Γ_x est τ_Φ-fermé il résulte que la fonction $1_{\complement\Gamma_x}$ est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie τ_Φ. D'après le théorème 8 on déduit que cette fonction est excessive par rapport à la

résolvante $\mathcal{V}_\Phi$. Du même théorème on déduit que τ_Φ est plus fine que la topologie fine associée au cône $\mathcal{E}_{\mathcal{V}_\Phi}$. D'autre part on sait que l'ensemble

$$\{y \in X_o \,/\, 1\complement_{\Gamma_x}(y) < \frac{1}{2}\} = \Gamma_x$$

est un ensemble finement ouvert et bien sûre un ensemble finement fermé aussi. Donc pour tout $x \in X_0$ et tout $t_0 \in (0,\zeta(x))$ l'ensemble

$$\{\Phi(t,x) \,/\, t \in [0,t_o)\} = \Gamma_x \setminus \Gamma_{\Phi(t_o,x)}$$

est finement ouvert et fermé. Donc, en vertu de la définition de τ_Φ il résulte que τ_Φ est moins fine que la topologie fine. Donc les deux topologies coincident.

La porposition 10 et le point a) de l'énoncé nous indiquent que pour tout $x \in X_0$ l'ensemble Γ_x est $\mathcal{V}_\Phi$-absorbant. Il est aussi un ensemble Φ-absorbant. . Soit A un ensemble borélien, finement fermé et Φ-absorbant. Soit $x \in A$ et soit μ une mesure positive sur X_0 telle que $\mu(s) \leq s(x)$ pour tout $s \in \mathcal{E}_{\mathcal{V}_\Phi}$. Puisque A est Φ-absorbant on a $\Gamma_x \subset A$ et puisque Γ_x est $\mathcal{V}_\Phi$-absorbant on a $\mu(\complement_{\Gamma_x}) = 0$ se qui implique $\mu(\complement_A) = 0$. Donc A est $\mathcal{V}_\Phi$-absorbant. Si on suppose que A est $\mathcal{V}_\Phi$-absorbant alors d'après la proposition 10 la fonction $1\!\!1_{\complement_A}$ est $\mathcal{V}_\Phi$-excessive donc décroissante pour l'ordre $\leq_\Phi$. Puisque pour tout $x \in A$ on a $1_{\complement_A}(x) = 0$ on déduit que pour tout $y \in \Gamma_x$ on a $1\complement_A(y) = 0$ c'est à dire $y \in A$. Donc $\Gamma_x \subset A$ et par conséquent A est aussi Φ-absorbant . La dernière affirmation de l'énoncé est une conséquence du fait que chaque fonction de $\mathcal{E}_{\mathcal{V}_\Phi}$ est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie τ_Φ^o.

Pour l'énoncé suivant on considère de nouveau $\mathcal{W} = (W_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ une résolvante propre sous-markovienne sur l'espace mesurable X_0 telle que les fonctions excessives par rapport à $\mathcal{W}$ séparent les points de X_0, $\mathcal{E}_\mathcal{W}$ est min-stable et contient les fonctions constantes positives. Dans ces conditions la relation suivante :

$$x,y \in X_o\,,\; x \leq_\mathcal{W} y \overset{def}{\longleftrightarrow} s(y) \leq s(x) \;\; (\forall)\, s \in \mathcal{E}_\mathcal{W}$$

est une relation d'ordre sur X_0. On note

$$\mathcal{O}_\mathcal{W} = \{(x,y) \in X_o^2 \,/\, x \leq y\},\;\; \mathcal{O}_\mathcal{W}^o = \{(x,y) \in X_o^2 \,/\, x \leq y \; et \;\; x \neq y\}$$

<u>Proposition 13</u> : Les ensembles $\mathcal{O}_\mathcal{W}$ et $\mathcal{O}_\mathcal{W}^o$ sont des sous-ensembles mesurables dans X_o^2 si on munit X_o^2 de la tribu produit. L'ensemble $\mathcal{O}_\mathcal{W}$ est fermé si on munit X_0 de la topologie fine associée à $\mathcal{E}_\mathcal{W}$ et l'espace X_o^2 avec la topologie produit correspondente.

Dans le cas particulier où $(X, \mathfrak{B}, \omega, \Phi)$ est un système semi- dynamique transient et $\mathcal{W} \equiv \mathcal{V}_{\Phi}$ alors on a

$$x \leq_{\Phi} y \Longleftrightarrow x \leq_{\mathcal{V}_{\Phi}} y$$

l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{\Phi}}$ est fermé par rapport à la topologie produit $\tau_{\Phi}^{o} \times \tau_{\Phi}^{o}$ sur X_o^2 et l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{\Phi}}^{o}$ est ouvert par rapport à la topologie $\tau_{\Phi} \times \tau_{\Phi}$

Démonstration : Soient $x,y \in X_0$. D'après le théorème de Hunt on a $s(x) \leq s(y)$ $(\forall)$ $s \in \mathcal{E}_{\mathcal{W}} \Longleftrightarrow Wf(x) \leq Wf(y)$ $(\forall)$ $f : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable, bornée. Puisque la tribu $\mathfrak{B}$ (est par conséquent sa trace $\mathfrak{B}_0$ sur X_0) est dénombrablement générée et W est propre alors il existe une suite $(B_n)_n$ dans $\mathfrak{B}_0$ telle que la famille

$$\mathbb{A} = \{B_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$$

est un anneau d'ensembles sur X_0 avec les propriétés suivantes :

a) $W\, 1_{B_n}$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $X_0 = \cup\ \{B_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$

c) La tribu engendrée par $\mathbb{A}$ est identique à la tribu $\mathfrak{B}_0$

Soient $x,y \in X_0$ tels que $W\, 1_{B_n}(x) \leq W\, 1_{B_n}(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'application $\nu : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par :

$$\nu(B_n) := W\, 1_{B_n}(y) - W\, 1_{B_n}(x)$$

est additive et de plus

$$\nu(B_n) \leq W\, 1_{B_n}(y) \qquad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

Donc ν est même σ-additive. Le théorème de Carathéodory nous assure que ν est la restriction à l'anneau $\mathbb{A}$ d'une mesure unique positive, σ-finie $\overline{\nu}$ sur $\mathfrak{B}_0$. Puisque les mesures σ-finies sur $\mathfrak{B}_0 W_x + \overline{\nu}$ et W_y coincident sur l'anneau $\mathbb{A}$ alors elles coincident aussi sur la tribu $\mathfrak{B}_0$. Donc on aura, pour toute fonction $\mathfrak{B}_0$-mesurable, positive f sur X_0, $Wf(x) \leq Wf(y)$ c'est à dire $y \leq_{\mathcal{W}} x$. Donc l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathcal{W}}$ est mesurable et fermé pour la topologie fine produit puisque nous avons

$$(*) \qquad \mathcal{O}_{\mathcal{W}} = \{(x,y) \in X_o^2 \ / \ W1_{B_n}(y) \leq W1_{B_n}(x) \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}\}$$

La tribu $\mathfrak{B}_0$ étant dénombralement générée il résulte que l'ensemble

$$\Delta = \{(x,x) \ / \ x \in X_0\}$$

est mesurable dans l'espace mesurable produit X_o^2 . Donc le fait que $\mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{o}$ est mesurable résulte de l'égalité $\mathcal{O}_{\mathcal{W}}^{o} = \mathcal{O}_{\mathcal{W}} - \Delta$

Dans le cas où $\mathcal{W} = \mathcal{V}_{\Phi}$, d'après le théorème 8, chaque fonction excessive par rapport à $\mathcal{V}_{\Phi}$ est décroissante suivant l'ordre $\leq_{\Phi}$. Donc $x \leq_{\Phi} y \Longrightarrow x \leq_{\mathcal{V}_{\Phi}} y$.

Si $x,y \in X_0$ sont tels que $x \not\leq_{\Phi} y$ alors $y \notin \Gamma_x$ et par conséquent, en utilisant la proposition 12, a) la fonction $\mathcal{V}_{\Phi}$-excessive $1_{\complement\Gamma_x}$ vérifie la relation évidente $1_{\complement\Gamma_x}(y) = 1 > 1_{\complement\Gamma_x}(x) = 0$. Donc on a $x \not\leq_{\mathcal{V}_{\Phi}} y$ c'est à dire les deux relations d'ordre coincident.

Le fait que $\mathcal{O}_{\mathcal{V}_{\Phi}}$ est fermé pour la topologie $\tau^o_{\Phi} \times \tau^o_{\Phi}$ peut se déduire de l'égalité (*) et du théorème 8 qui affirme que les fonctions $V(1_{B_n})$ sont τ^o_{Φ}-continues pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient maintenant $x,y \in X_0$ tels que $x \leq y$, $x \neq y$. Donc il existe $t_0 \in (0,\zeta(x))$ tel que $y = \Phi(t_0,x)$ et par conséquent l'ensemble $U_x \times U_y$ où

$$U_x := \{\Phi(t,x) \ / \ 0 \leq t < t_0\}, \ U_y := \{\Phi(t,x) \ / \ t \in [t_0,\zeta(x))\}$$

est un voisinage de (x,y) pour la topologie $\tau_{\Phi} \times \tau_{\Phi}$ et $U_x \times U_y \subset \mathcal{O}^o_{\mathcal{V}_{\Phi}}$.

Le théorème suivant est une sorte de réciproque du théorème 8 et il assure, pour une résolvante $\mathcal{W} = (W_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ donnée sur $(X_0,\mathcal{B}_0)$, l'existence d'un système semi-dynamique transient $(X,\mathcal{B},\omega,\Phi)$ tel que $\mathcal{W} = \mathcal{V}_{\Phi}$.

La résolvante $\mathcal{W} = (W_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ sur $(X_0,\mathcal{B}_0)$ est soumise aux conditions suivantes :

a) $\mathcal{W}$ est sous-markovienne, $W1 < \infty$ sur (X_0,B_0) les fonctions constantes positives sont $\mathcal{W}$-excessives, le cône $\mathcal{E}_{\mathcal{W}}$ est min-stable et sépare les points de X_0

b) La relation d'ordre $\leq_{\mathcal{W}}$ sur X_0 est elle que pour chaque point $x \in X_0$ il existe $\alpha_x, \beta_x \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_x < \beta_x$ tels que l'ensemble $\Gamma^{\mathcal{W}}_x$ $\Gamma^w_x := \{y \in X \ / \ x \leq_{\mathcal{W}} y\}$ munie de la relation d'ordre $\leq_{\mathcal{W}}$ est isomorphe en tant que l'espace ordonné avec l'intervalle (α_x,β_x) et la fonction V1 restrictionnée à l'ensemble Γ^w_x réalise cet isomorphisme.

<u>**Remarque**</u> : Si $W \equiv (W_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ est la résolvante associée au système semi-dynamique $(X,\mathcal{B},\omega,\Phi)$ et W1 est finie sur X_0 alors evidemment que W1 est strictement décroissante sur Γ_x pour tout $x \in X_0$ et pour tout point $\Phi(t,x)$ de Γ_x (i.e $t \in [0,\zeta(x))$ nous avons

$$W1(\Phi(t,x)) = \int_o^{\zeta(\Phi(t,x))} du = \zeta(\Phi(t,x)) = \zeta(x) - t,$$

Donc $W1(\Gamma_x) = (0,\zeta(x)]$ et par conséquent la condition b) ci-dessus est entièrement justifiée.

<u>**Théorème 14**</u> : Si l'espace mesurable $(X,\mathcal{B})$ est de Lusin et la résolvante $\mathcal{W} = (W_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ satisfait les conditions a), b) ci-dessus alors il existe un système semi- dynamique $(X, \mathcal{B},\omega, \Phi)$ tel que $\mathcal{W} = \mathcal{V}_{\Phi}$ si et seulements si l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{W}}$ coincide avec l'ensemble des fonctions positives

décroissantes suivant l'ordre $\leq_{\mathcal{W}}$, boréliennes et semi-continues inférieurement par rapport à la topologie fine.

Démonstration : L'une des implication a déjà fait l'objet du théorème 8. Supposons donc que chaque fonction borélienne positive, décroissante par rapport à l'ordre $\leq_{\mathcal{W}}$ et finement semi continue inférieurement est une fonction excessive par rapport à la résolvante $\mathcal{W}$. Soit $x \in X_o$ arbitraire. D'après la proposition 13 l'ensemble Γ_x^w est borélienne et finement fermé. Donc la fonction $1_{\complement \Gamma_x^w}$ est décroissante borélien, semi-continue inférieurement par rapport à la topologie fine et par conséquent cette fonction est $\mathcal{W}$-excessive. Donc, d'après la proposition 10, l'ensemble Γ_x^w est $\mathcal{W}$-absorbant pour tout $x \in X_0$. Par l'hypothèse

$$W1(x)=\beta_x \quad et \quad inf\{W1(y) \;/\; y \in \Gamma_x^w\} = \alpha_x$$

Nous montrons d'abord que $\alpha_x = 0$. En effet, par l'hypothèse on a $\bigcap_{y \in \Gamma_x^w} \Gamma_y^w = \emptyset$ et de plus par la même hypothèse il existe une suite croissante $(y_n)_n$ dans Γ_x^w de sorte que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_{y_n}^w = \emptyset$.

On remarque le fait que pour tout $z \in X_o$ la mesure W^z est portée par l'ensemble Γ_z^w c'est à dire $W(\complement\Gamma_z^w)(z)=0$. En effet, pour $\lambda > 0$ nous avons

$$\lambda W_\lambda^z(s) \leq s(z) \quad (\forall)\, s \in \mathcal{E}_{\mathcal{W}}$$

et puisque l'ensemble Γ_z^w est $\mathcal{W}$-absorbant et $z \in \Gamma_z^w$ on déduit par la proposition 10

$$\lambda W_\lambda^z(\complement\Gamma_z^w)=0, \quad W_\lambda^z(\complement\Gamma_z^w)=0$$

En faisant tendre λ vers zéro on obtient $W(\complement_{\Gamma_z^w})(z)=0$. Donc, particulièrement, on aura :

$$inf\{W1(y) \;/\; y \in \Gamma_x^w\} = inf\{W^y(\Gamma_y^w) + W^y(\complement\Gamma_y^w) \;/\; y \in \Gamma_x\} =$$

$$= inf\{W^y(\Gamma_y^W) \;/\; y \in \Gamma_x\} \leq inf\{W^x(\Gamma_y^W) \;/\; y \in \Gamma_x\} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} W^x(\Gamma_{y_n}^W) = 0$$

Par suite l'application W1 restrictionnée à l'ensemble Γ_x^w est strictement décroissante et on a $W1(\Gamma_x^W) = (0, W1(x)]$.

Pour tout élément $t \in [0, W1(x))$ on note par $\Phi_o(t,x)$ l'unique élément de l'ensemble Γ_x^w tel que $W1(\Phi(t,x)) = W1(x) - t$.

Pour démontrer que l'application Φ_o posséde une certaine propriété de mesurabilité on considère le graphe G de Φ_o dans $\mathbb{R}_+ \times X_o \times X_o$

$$G = \{(t,x),y) \in (\mathbb{R}_+ \times X_o) \times X_o \;/\; x \leq y,\; y = \Phi_o(t,x)\} =$$

$$= \{((t,x),y) \in (\mathbb{R}_+ \times X_o) \times X_o \;/\; (x,y) \in \mathcal{O}_{\mathcal{W}},\; W1(y) = W1(x) - t\}$$

où, avec la notation de la proposition 13,

$$\mathfrak{O}_{\mathcal{W}} = \{(x,y) \in X_o^2 \,/\, x \leq_{\mathcal{W}} y\}$$

En utilisant cette proposition on déduit, de la forme précédente de G, que G est un sous-ensemble mesurable de l'espace $\mathbb{R}_+ \times X_0 \times X_0$. Puisque $\mathbb{R}_+ \times X_0$ est un espace de Lusin on déduit que la projection de G sur le produit $\mathbb{R}_+ \times X_0$ est mesurable, c'est à dire que l'ensemble $\bigcup_{x \in X_o} [0, W1(x)) \times \{x\}$ est mesurable dans le produit $\mathbb{R}_+ \times X_0$ et que l'application Φ_0 définit sur cet ensemble à valeurs dans X_0 est mesurable.

On prolonge l'application Φ_0 sur $\mathbb{R}_+ \times X_0$ a valeurs dans $X_0 \cup \{\omega\} = X$ par

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \Phi_o(t,x) & si \quad t \in [0, W1(x)) \\ \omega & si \quad t \geq W1(x) \end{cases}$$

Evidemment que Φ est mesurable et a cause du fait que la restriction de la fonction W1 sur chaque Γ_x^W réalise une bijection entre Γ_x^W et l'intervalle (0,W1(x)] on déduit que Φ satisfait les conditions d'un système semi-dynamique.

On démontre maintenant que la résolvante $\mathcal{W}$ coincide avec la résolvante associée au système semi-dynamique precédemment construit . Soit $V = V_\Phi$ le noyau associé au système semi-dynamique Φ.

On remarque les relations suivantes :

$$y \in \Gamma_x^W \Rightarrow W^x(\Gamma_y^W) = W^y(\Gamma_y^W)$$

$$W^x(1) = W^x(\Gamma_x^w) \qquad (\forall)\ x \in X_o$$

La deuxième propriété a été démontrée précedemment et la première est une conséquence du principe compléte de maximum pour le noyau W. Le même théorème de Lusin montre que l'ensemble Γ_x^W munit de la tribu trace de $\mathfrak{B}_0$ sur Γ_x^W et l'intervalle [0,W1(x)) sont isomorphes et l'application t ---> Φ(t,x) réalise un isomorphisme d'espaces mesurables entre [0,W1(x)) et Γ_x^W. L'inverse de cet isomorphisme est l'application y ---> W1(x) - W1(y). Soit $t_0 \in [0, W1(x))$ et soit $y_0 = \Phi(t_0, x)$

$$W^x[\Gamma_x^W \setminus \Gamma_{y_o}^W] = W^x(\Gamma_x^W) - W^x(\Gamma_{y_o}^W) = W1(x) - W^{y_o}(\Gamma_{y_o}^W) = W1(x) - W1(y_o)$$

$$V^x[\Gamma_x^W \setminus \Gamma_{y_o}^W] = \int_o^{W1(x)} 1_{\Gamma_x^W \setminus \Gamma_{y_o}^W}(\Phi(t,x))dt = \int_o^{W1(x)} 1_{\Gamma_x^W}(\Phi(t,x))dt$$

$$- \int_o^{W1(x)} 1_{\Gamma_{y_o}^W}(\Phi(t,x))dt = W1(x) - \int_{t_o}^{W1(x)} du = t_o = W1(x) - W1(y_o).$$

Donc, puisque les mesures W^x et V^x sont supportées par Γ_x^W et puisque sur les ensembles de Γ_x^W de la forme $\Phi_x([0,t_o)) = \Gamma_x \setminus \Gamma_{y_o}$ elles coincident, on déduit que $W^x \equiv V^x$.

Remarque 15 : a) De la démonstration du théorème 14 il résulte que dans les conditions a) et b) de l'énoncé, le fait que la résolvante $\mathcal{W}$ coincide avec $\mathcal{V}_\Phi$ pour un certain système semi-dynamique est équivalent avec le fait que pour tout $x \in X_0$ l'ensemble Γ_x^W est $\mathcal{W}$-absorbant.

b) Dans l'énoncé du théorème 14 le fait que l'espace mesurable $(X,\mathcal{B})$ soit un espace de Lusin peut être affaibli (par exemple on peut supposer que $(X,\mathcal{B})$ est un espace de Souslin...) à condition d'élargir les conditions sur Φ par exemple d'accepter que la fonction Φ soit analytique ou universellement mesurable.

Théorème 16 : Soit W une résolvante sous-markovienne propre sur $(X_0,\mathcal{B}_0)$ telle que le cône $\mathcal{E}_\mathcal{W}$ sépare les points de X_0, $\mathcal{E}_\mathcal{W}$ est minstable, les fonctions constantes positives sont $\mathcal{W}$-excessives. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{E}_\mathcal{W}$ coincide avec l'ensembles des fonctions décroissantes suivant l'ordre $\leq_\mathcal{W}$, boréliennes, positives, semi-continues inférieurement par rapport à la topologie fine

2) Pour toutes les deux éléments $s,t \in \mathcal{E}_\mathcal{W}$ on a $\sup(s,t) \in \mathcal{E}_\mathcal{W}$ et les fonctions positives constantes sont soustractibles : $s \in \mathcal{E}_\mathcal{W}$, $\alpha \leq s$ $\Longrightarrow s - \alpha \in \mathcal{E}_\mathcal{W}$

3) Pour tout ensemble borélien et finement ouvert D de X_0 on a $R^D 1 = 1_{\tilde{D}}$ où pour tout sous-ensemble A de X_0 on a noté

$$\tilde{A} = \{x \in X_0 \setminus (\exists)\ y \in A,\ x \leq_\mathcal{W} y\}$$

4) Pour tout ensemble borélien A de X_0 on a $R^A 1 = 1_{\tilde{A}}$

5) Pour tout $x \in X_0$ l'ensemble $\Gamma_x^W := \{y \in X_o \,/\, x \leq_\mathcal{W} y\}$ est $\mathcal{W}$-absorbant

6) Le cône $\mathcal{E}_\mathcal{W}$ est stable par produit i.e $s,t \in \mathcal{E}_\mathcal{W}$, $s < \infty$, $t < \infty$ $\Longrightarrow s.t \in \mathcal{E}_\mathcal{W}$.

Démonstration : Nous allons montrer les relations suivantes :

$$1) \Longrightarrow \begin{matrix} 2) \\ 6) \end{matrix} \qquad 4) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 5) \Longrightarrow 1$$

Les implications 1) ==> 2), 1) ==> 6), 4) ==> 3) sont évidentes. Pour montrer que 3) ==> 5) on considère $x_0 \in X_0$ arbitraire et on voit que l'ensemble $X_o \setminus \Gamma_{x_o}^W$ est borélien et ouvert par rapport à la topologie fine associée à $\mathcal{W}$. D'après 3) nous avons

$$R^{X_o \setminus \Gamma_{x_o}^W} 1 = 1_{\widetilde{X_o \setminus \Gamma_{x_o}^W}}$$

D'autre part on remarque aussitôt qu'on ait

$$\widetilde{X_o \setminus \Gamma^W_{x_o}} = X_o \setminus \Gamma^W_{x_o}$$

et par conséquent la fonction $R^{X_o \setminus \Gamma^W_{x_o}} 1$ étant $\mathcal{W}$-excessive on déduit que $1_{X_o \setminus \Gamma^w_{x_o}} \in \mathcal{E}_{\mathcal{W}}$ c'est à dire l'ensemble $\Gamma^w_{x_o}$ est $\mathcal{W}$-absorbant.

L'implication 5) =====> 1) peut se déduire de la manière suivante : Soit $x \in X_0$ arbitraire et soit $s : X_o \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction $\mathcal{B}_0$-mesurable, décroissante suivant l'ordre $\leq_{\mathcal{W}}$ et semi-continue inférieurement par rapport à la topologie fine associé à $\mathcal{W}$. Puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et toute $s \in \mathcal{E}_{\mathcal{W}}$ nous avons $\lambda W^x_\lambda(s) \leq s(x)$ alors d'après 5) la mesure W^x_λ est supportée par Γ^W_x. Donc, la fonction s étant décroissante pour l'ordre $\leq_\Phi$, on aura

$$\lambda W^x_\lambda(s) = \lambda W^x_\lambda(s\, 1_{\Gamma^w_x}) \leq s(x)$$

c'est à dire s est une fonction $\mathcal{W}$-surmédiane. Puisque s est aussi semi-continue inférieurement par rapport à la topologie fine associée à $\mathcal{W}$ on conclut que $s \in \mathcal{E}_{\mathcal{W}}$.

2) ==> 4) On considère une suite $(B_n)_n$ dans $\mathcal{B}$, $B_n \subset X_0$ telle que la famille $\mathbb{A} = \{B_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ est un anneau de parties de X_0 dont la tribu engendrée est identique à la tribu $\mathcal{B}_0$ et telle que $W(1_{B_n})$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère aussi et on le note par $\mathcal{D}$ le plus petit ensemble de fonctions bornées excessives par rapport à la résolvante $\mathcal{W}$ tel que : $\mathcal{D}$ est ministable, max-stable, stable pour l'addition et pour multiplication avec des scalaires positives rationnels ayant encore la propriété que quelque soit $s \in \mathcal{D}$ et r nombre rationnel positif, $r \leq s$, on a $s - r \in \mathcal{D}$ et de plus les fonctions constantes rationnelles et $W(1_{B_n})$ sont en $\mathcal{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On voit que l'ensemble $\mathcal{D}$ est dénombrable. Soit maintenant $A \in \mathcal{B}$ et soit $x \in X_0$, $x \notin \tilde{A}$. Alors pour chaque élément $a \in A$ on a $x \not\leq_{\mathcal{W}} a$ et par conséquent il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W(1_{B_n})(x) < W(1_{B_n})(a)$. Multipliant convenablement la fonction $W(1_{B_n})$ par un nombre rationnel positif α on aura

$$\alpha W 1_{B_n}(x) < 1 < \alpha W(1_{B_n})(a)$$

et par conséquent la fonction excessive par rapport à $\mathcal{W}$ $s := \max(1, \alpha W(1_{B_n}))$ appartient à $\mathcal{D}$, $s(x) = 1$, $s(a) > 1$, $1 \leq s(x)$ pour tout $x \in X_0$. Donc s-1 appartient à $\mathcal{D}$, $s(x) - 1 = 0 < s(a) - 1$. Multipliant de nouveau la fonction s-1 par un rationnel positif β, convenablement choisi, on aura

$$t(x) = 0,\ t(a) > 1,\ t \in \mathcal{D} \text{ où } t := \beta(s-1)$$

On considère maintenant la partie $\mathcal{D}_x$ de $\mathcal{D}$ définie par

$$\mathcal{D}_x = \{t \in \mathcal{D} \;/\; t(x) = 0 \text{ et } (\exists)\, a \in A \;;\; t(a) > 1\}$$

En s'appuyant sur l'hypothése 2) la fonction t_0 donnée par :

$$t_0 = \sup\{\inf(1,t) \;/\; t \in \mathcal{D}_x\}$$

est $\mathcal{W}$-excessive et on a $t_0 = 1$ sur A, $t_0(x) = 0$. Donc $R^A 1\ (x) = 0$ pour tout $x \in \tilde{A}$. Pour les éléments x de $\tilde{A}$ il est évidente que $R^A 1(x) = 1$. Donc $R^A 1 = 1_{\tilde{A}}$

6) ==> 4) On reconsidère la famille

$$\mathbb{A} = \{B_n \;/\; B_n \in \mathcal{B}_0,\ n \in \mathbb{N}\}$$

introduit au début de la démonstration de l'implication 2) ==> 4), et on note par $\mathcal{D}_1$ le plus petit ensemble de fonctions $\mathcal{W}$-excessives qui contient les fonctions constantes rationnelles positives, contient les fonctions $W(1_{B_n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est stable pour la multiplication avec des nombres rationnels positifs. Evidemment que $\mathcal{D}_1$ est dénombrable. On considère maintenant $A \in \mathcal{B}_0$ et $x \in X_0$, $x \notin \tilde{A}$. Alors, pour tout $a \in A$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W(1_{B_n})(x) < W(1_{B_n})(a)$. En multipliant convenablement la fonction $W(1_{B_n})$ on trouve une fonction $s \in \mathcal{D}_1$ telle que $s(x) < 1$, $s(a) > 1$. La fonction $s' = \inf(s,1)$ est $\mathcal{W}$-excessive et si on note $U_s = \{y \in X_0 \;/\; s(y) > 1\}$ on voit que l'ensemble U_s est borélien, finement ouvert et on a $s'(x) < 1$, $s' = 1$ sur U_s. Donc la fonction $\mathcal{W}$-excessive $R^{U_s} 1$ est dominée par la fonction excessive s'^m pour tout $m \in \mathbb{N}$. Donc $R^{U_s} 1\,(x) = 0$ et $a \in U_s$.

On considère l'ensemble $\mathcal{D}_1^x$ de fonctions $\mathcal{W}$-excessives donné par

$$\mathcal{D}_1^x = \{s \in \mathcal{D}_1 \;/\; s(x) < 1\}$$

Pour chaque élément $s \in \mathcal{D}_1^x$ on considère l'ensemble $U_s := [s > 1]$. D'après les considérations précédentes on aura :

$$R^{U_s}\, 1(x) = 0,\ \cup\, \{U_s \;/\; s \in \mathcal{D}_1^x\} \supset A$$

Puisque la famille $\mathcal{D}_1$ est dénombrable il résulte que la famille $(U_s)_{s \in \mathcal{D}_1^x}$ est aussi dénombrable. Pour tout système fini $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ de $\mathcal{D}_1^x$ nous aurons

$$R^{\cup\{U_{s_i} \,/\, i \leq k\}}\, 1 \leq_{\mathcal{E}_{\mathcal{W}}} \sum_{i=1}^{k} R^{U_{s_i}}\, 1$$

et par conséquent

$$R^{\cup\{U_{s_i} \,/\, i \leq k\}}\, 1(x) = 0$$

Par passage à la limite on obtient :

$$R^A 1(x) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} R^{U\{U_{s_i} / i \leq k)} 1(x) = 0$$

Comme il est évident que $R^A 1(x) = 1$ pour tout $x \in \tilde{A}$ il s'en suit que $R^A 1 = 1_{\tilde{A}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **BHATIA N.P, HAJEK O** : Local Semi-Dynamical Systems Lecture Notes in Math. Springer-Verlag (90), 1969

[2] **BOBOC. N, BUCUR GH, CORNEA. A** : Order and convexity in Potential Theory : H-cônes.
Lecture Notes in Math. Springer Verlag (853) 1981

[3] **DELLACHERIE C., MEYER. P.A** . Probabilités et Potentiel Hermann, Paris 1975.

[4] **HMISSI. M** : Cônes de Potentiels stables par produit et systémes semi-dynamiques : Expo-Math 7 (265-273), 1989.