INSTITUTUL DE MATEMATICA
AL ACADEMIEI ROMANE

PREPRINT SERIES OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS
OF THE ROMANIAN ACADEMY

ISSN 0250 3638

LIBERTE PAR RAPPORT A UN ENSEMBLE ARBITRAIRE D'ETATS

par

VALENTIN IONESCU

(version préliminaire)

Preprint No.17 /1995

BUCURESTI

LIBERTE PAR RAPPORT A UN ENSEMBLE ARBITRAIRE D'ETATS

par

VALENTIN IONESCU*)

(version préliminaire)

May, 1995

*) Centre of Mathematical Statistics of the Romanian Academy,

Bd. Magheru No.22, 70158, Bucharest 22, ROMANIA.

LIBERTE PAR RAPPORT A UN ENSEMBLE ARBITRAIRE D'ETATS

Valentin IONESCU

Résumé - On présente une généralisation de la notion de *liberté* de Voiculescu *par rapport* à un ensemble arbitraire d'états, à l'aide d'un produit libre amalgamé de C^*-espaces de probabilité, au sens de Voiculescu([28], [29], [30], [31]), en utilisant l'approche developpée par Bozejko et Speicher dans le cas scalaire par rapport à deux états([7], voir aussi [24]). Dans le cas scalaire, on récupére dans notre analogue du théorème central limite, non seulement la loi Gaussienne, comme dans les cas classique et tensoriel(bosonique)([8], [9], [11], [12]), et la loi de Wigner, comme dans le cas libre([23], [24], [28], [29], [30], [31]), mais également toutes les lois de probabilité réelles symétriques ayant des moments de tout ordre.

FREENESS WITH RESPECT TO AN ARBITRARY STATE SET

Abstract - *A generalization of Voiculescu's freeness with respect to an arbitrary state set is given. One constructs an amalgamated free product of C^*-probability spaces in Voiculescu's sense*([28], [29], [30], [31]),*using Bozejko and Speicher's method with respect to two states from the scalar case*([7], *see also* [24]). *As an application, in the scalar case concerning only one random variable, one recovers in our analogue to the central limit theorem not only the Gaussian law, as in both the classical and tensor(Boson) case*([8], [9], [11], [12]), *or Wigner's law, as in the free case* ([23], [24], [28], [29], [30], [31]), *but all symmetric probability laws on the real line having moments of all order.*

Abridged English Version - Let I be an index set, $(\Gamma_i)_{i\in I}$ a family of

$\Gamma_t := \prod_{k=1}^{n} \Gamma_{i_k}$.

Let also be given a countable family of maps $\gamma = (\gamma_n)_{n\geq 1}$, such that $\gamma_n : \coprod_{t\in I^n} \Gamma_t \longrightarrow \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$ and $\gamma_n(t,\alpha_t) \in \Gamma_{i_1}$, for all $(t,\alpha_t) \in \coprod_{t\in I^n} \Gamma_t$, if $t:=(i_1,\ldots,i_n)$. One denotes $\gamma_k^{(n)}(t,\alpha_t) := \gamma_{n-k+1}(t_k,\alpha_{t_k})$, where $t_k := (i_k,\ldots,i_n)$, $\alpha_{t_k} := (\alpha_{i_k},\ldots,\alpha_{i_n})$, $k=\overline{1,n}$, if $t:=(i_1,\ldots,i_n)$ and $\alpha_t := (\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_n})$.

Let B be a unital C^*-algebra(over **C**). Let us consider the category of the C^*-algebras over B, i.e. $A \supseteq B \ni 1$ with morphisms being the $*$-algebraic homomorphisms which are the identity on B. The free product with amalgamation of $(A_i)_{i\in I}$ over B, denoted $\star_B A_i$, is the coproduct(direct sum) in this category.

If A_i, $i\in I$, are C^*-algebras over B, and $\Phi_i = \{\varphi_i^{(\alpha_i)}; \alpha_i \in \Gamma_i\}$, $i \in I$, are sets of norm one projections([26]) of A_i onto B, then our generalization of freeness arises in this context from an amalgamated γ-free product (A,φ) of C^*-probability spaces over B in Voiculescu's sense([28], [30], [31]) (A_i,φ_i), $i\in I$.

Fix $\delta \in \Gamma$. Denote $\varphi_i := \varphi_i^{(\delta_i)}$ for all $i \in I$.

Theorem. - *There exists a C^*-algebra A over B, and a conditional expectation([27]) φ of A onto B satisfying:*

(i) there exists a morphism j_i of A_i into A, $i\in I$, such that A is generated by $\bigcup_{i\in I} j_i(A_i)$;

(ii) $\varphi\circ j_i = \varphi_i$, $i\in I$;

(iii) for all $n\geq 2$, and $t:=(i_1,\ldots,i_n)\in I^n$, $i_1\neq\cdots\neq i_n$:
$\varphi(j_{i_1}(a_1)\cdots j_{i_n}(a_n)) = \varphi(j_{i_1}(a_1)\cdots j_{i_{n-1}}(a_{n-1}))\varphi_{i_n}(a_n)$,
if $a_k \in Ker\varphi_{i_k}^{(\gamma_k^{(n)}(t,\delta_t))}$, $k=\overline{1,n}$, *where* $\delta_t := (\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_n})$.

One may denote $\varphi = \star_B^{(\gamma)}\varphi_i$, and $(A,\varphi) = \star_B^{(\gamma)}(A_i,\varphi_i)$.

Actually, this theorem can be established at the $*$-algebraic level over a unital $(*\text{-})C^*$-algebra, by using unbounded operators in (pre)Hilbert $(*\text{-})C^*$-modules as Powers([21]) did in the scalar case.

Studying the properties of this γ-free product with an amalgamation over $B=\mathbf{C}\cdot 1$, by the method used in [7] and [24], one may obtain([13], [14]) a limit theorem for γ-free, identically distributed random variables, and derive a γ-free analogue to the central limit theorem (and also a γ-free Poisson limit theorem) generalising the corresponding results of [7] and [24](see also [28], [29], [31]).

Let us present only our analogue to the central limit theorem in a simple case.

Some facts from [7], [10], [18] and [24] are necessary.

Denote by $\Pi(n)$ the lattice of all partitions of $\{1,\ldots,n\}$, and by NC(n) its sublattice of non-crossing partitions. In the sequel, we make a distinction between the outer and inner blocks of non-crossing partitions. The blocks in a partition are ordered by their first elements. Denote also by $\Pi_2(2p)$(respectively $NC_2(2p)$) the set of π belonging to $\Pi(2p)$(respectively NC(2p)), for which each block has two elements.

The natural correspondence $I^n \ni t \longrightarrow \pi^t \in \Pi(n)$ induces a bijection between $\Pi(n)$ and the set of the equivalence classes with respect to the following relation $\sim$ on I^n: $(i_1,\ldots,i_n) \sim (i'_1,\ldots,i'_n) \Longleftrightarrow (i_k = i_l \Leftrightarrow i'_k = i'_l)$.

There exists also a bijection between $\Pi_2(2p)$ and the set of the Catalan paths of length 2p, i.e. the words of the form $\nu = \nu_0\nu_1\ldots\nu_{2p}$ belonging to the free monoid $\mathbf{N}^*$, where $\nu_0 = 0 = \nu_{2p}$, and $\nu_k - \nu_{k-1} \in \{-1,1\}$.

Let $\gamma_n : \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{N}$, $n \geq 1$, be given, and $\gamma_n(\cdot,(0,\ldots,0)) =: \chi_n$, Denote $\gamma^{(n)}(\cdot,(0,\ldots,0)) =: \chi^{(n)}$.

Call $\gamma = (\gamma_n)_{n\geq 1}$ *adapted to the Catalan paths* if χ_n, $n \geq 1$, satisfy the following conditions:

(j) $\chi_k^{(n(l))}(t(l)) = \nu_k$, $\forall k \in \{\pi_l(2), l = \overline{1,p}\}$, for all t in $\mathbf{N}^{2p}$, $p \geq 1$, if the equivalence class of t corresponds to a partition $\pi \in NC_2(2p)$, $\pi = (\pi(l))_{l=\overline{1,p}}$, with $\pi(l) = (\pi_l(1),\pi_l(2))$, ν being the corresponding Catalan path, where $t(l)$ is the reduced sub-word of t, of length $n(l)$, preserving the order of t, and consisting of the letters corresponding to the blocks of π including $\pi(l)$ [or to the outer blocks of π situated after $\pi(l)$];

(jj) $\chi_n(t) = \chi_n(t')$ for all $t \sim t'$ in $\mathbf{N}^n$, otherwise.

Theorem. - *Let $(A,\varphi^{(0)})$ be a $*$-probability space, $\{\varphi^{(n)}, n \geq 1\}$ another state set specified on A, and $a \in A$ such that $\varphi^{(n)}(a) = 0$, $\varphi^{(n)}(a^2) > 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Consider a countable γ-free power $(\hat{A},\hat{\varphi})$ of $(A,\varphi^{(0)})$, with γ adapted to the Catalan paths.*

Denote $S_N := \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N j_i(a)$, $N \geq 1$, j_i being the canonical morphisms of $\hat{A}$. Then $\lim_{N\to\infty}\hat{\varphi}((S_N)^r) = \mu_r$, $r \geq 1$, where
$\mu_r := 0$, if r is odd, and $\mu_r := \sum_{\pi\in NC_2(2p)}\prod_{l=1}^p \varphi^{(\nu_{\pi_l(2)})}(a^2)$, if r=2p,
ν being the Catalan path corresponding to π.

The equivalence between the characteristic series of certain labelled paths in the plane and the universal Stieltjes-Jacobi continued fractions, noticed by Flajolet in the algebra $\mathbb{C}[[\mathcal{X}]]$ of the formal series over a non-commutative alphabet $\mathcal{X}$ with complex coefficients([10]), permit us to establish a connection between this γ-free central limit distribution set, and the classical moment problem([1]). Exploiting it one may conclude:

Corollary([14]). - *The central limit distribution set in this context is the set of all symmetric probability laws on the real line with moments of all order.*

Thus, applying the method of Bhat and Parthasarathy([3]), one may obtain models of operators possessing the combinatorics([24]) of this central limit theorem, by using only the number, creation and annihilation operators on a suitable L^2 Hilbert space.

0.C^*-modules de Hilbert

Quelques notions préliminaires concernant les C^*-modules de Hilbert([4], [17], [20], [22]) sont nécessaires.

Soit B une C^*-algèbre complexe unifère.

Un B-*module préhilbertien* X est un B-module (à droite) muni d'une structure compatible d'espace vectoriel complexe et d'un produit intérieur à valeurs dans B, $< \cdot, \cdot >: X \times X \longrightarrow B$ (c'est-à-dire, une application sesquilinéaire, hermitienne et positive).

La forme sous-linéaire $||x|| := || < x, x > ||^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur X et vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz: $|| < x, y > || \leq ||x|| \cdot ||y||$. Si X est complète par rapport à cette norme, alors X est un B-*module de Hilbert.*

B est un B-module de Hilbert par rapport au produit intérieur $< b_1, b_2 >= b_1^* b_2$.

Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de B-modules de Hilbert, alors *la somme directe de Hilbert*, $\bigoplus_{i \in I} X_i$, est le complété de la somme directe algébrique correspondante par rapport à la norme définie à l'aide du produit intérieur suivant:

$$< \oplus_{i\in I} x_i, \oplus_{i\in I} y_i >= \sum_{i\in I} < x_i, y_i > .$$

Si X est un B-module de Hilbert, alors on définit naturellement le complément orthogonale d'un B-sous-module de X.

Si X est un B-module de Hilbert, alors $L(X) := \{S : X \longrightarrow X; \exists S^* : X \longrightarrow X, t.q. < Sx, y >=< x, S^*y > \forall x, y \in X\}$.

Lemme([20])

1) $S \in L(X) \Longrightarrow S$ est une application de B-module linéaire, bornée et $< Sx, Sx >\leq \|S\|^2 < x, x >, \forall x \in X$;

2) $S \in L(X) \Longrightarrow S^*$ est bien défini et $S^* \in L(X)$;

3) L(X) est une C^*-algèbre complexe unifère, par rapport à la norme induite de l'espace des opérateurs linéaires bornés dans X.

Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de B-modules de Hilbert et $(S_i)_{i\in I}$ est une famille d'opérateurs $S_i \in L(X_i)$, $i \in I$, on construit naturellement *la somme directe* $\bigoplus_{i\in I} S_i$ dans $L(\bigoplus_{i\in I} X_i)$.

Si X et Y sont des B-modules de Hilbert et $\chi : B \longrightarrow L(Y)$ est un $*$-morphisme unitaire, alors on peut définir, sur le produit tensoriel algébrique $X \bigotimes_B Y$, un semi-produit intérieur à valeurs dans B:

$$< x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 >:=< y_1, \chi(< x_1, x_2 >_1) y_2 >_2,$$

où $< \cdot, \cdot >_1$ et $< \cdot, \cdot >_2$ sont les produits intérieurs de X et Y. Le complété séparé de $X \bigotimes_B Y$, par rapport à $< \cdot, \cdot >$, est *le produit tensoriel* de X et Y *sur* B, noté aussi $X \bigotimes_B Y$ (en fait, $X \bigotimes_B^{(x)} Y$).

Si X et Y sont des B-modules de Hilbert et $S \in L(X)$, alors on peut remarquer que $S \otimes Id \in L(X \bigotimes_B Y)$ (mais, en général, $Id \otimes S \notin L(X \bigotimes_B Y)$, si $S \in L(Y)$).

Soit $(H_i, \xi_i, \chi_i)_{i\in I}$ une famille de B-modules pointés de Hilbert (H_i, ξ_i), t.q. $< \xi_i, \xi_i >= 1_B$ et $\chi_i : B \longrightarrow L(H_i)$ soient des $*$-morphismes unitaires ($i \in I$). Alors on peut construire([13]) l'extension aux B-modules de Hilbert du produit tensoriel infini de von Neumann de [19], par une limite inductive (comme dans [16], par exemple, pour le cas scalaire).

On obtient ainsi $(H := \bigotimes_B^{\xi_i, \chi_i} H_i, \xi, \chi)$, un B-module pointé de Hilbert (H, ξ), t.q. $< \xi, \xi >= 1_B$, muni d'un $*$-morphisme unitaire $\chi : B \longrightarrow L(H)$.

Ce produit tensoriel infini est encore associatif et distributif par rapport aux sommes directes de B-modules de Hilbert.

1. Produit libre amalgamé d'espaces non commutatifs de probabilité au sens de Voiculescu, par rapport à des ensembles arbitraires d'états

On reprend des notations de [13] et [14].

Soient I un ensemble et $(\Gamma_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles.

Pour chaque t:=$(i_1,\ldots,i_n)\in I^n$ et $n\geq 1$, on pose $\Gamma_t:=\prod_{k=1}^n \Gamma_{i_k}$.

On note aussi $\Gamma := \prod_{i\in I}\Gamma_i$.

On se donne une famille dénombrable d'applications $\gamma=(\gamma_n)_{n\geq 1}$, telles que $\gamma_n : \coprod_{t\in I^n}\Gamma_t \longrightarrow \bigcup_{i\in I}\Gamma_i$ et $\gamma_n(t,\alpha_t)\in\Gamma_{i_1}$, pour tout $(t,\alpha_t)\in\coprod_{t\in I^n}\Gamma_t$, si t:=$(i_1,\ldots,i_n)$.

On pose $\gamma_k^{(n)}(t,\alpha_t) := \gamma_{n-k+1}(t_k,\alpha_{t_k})$, où $t_k := (i_k,\ldots,i_n)$, $\alpha_{t_k} := (\alpha_{i_k},\ldots,\alpha_{i_n})$, $k=\overline{1,n}$, si t:=$(i_1,\ldots,i_n)$ et $\alpha_t := (\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_n})$.

Soit B une C^*-algèbre complexe unifère. On considère la catégorie des C^*-algèbres sur B dont les objets sont les C^*-algèbres $A\supseteq B\ni 1$ et les morphismes sont les homomorphismes $*$-algébriques qui coïncident avec l'identité sur B.

Le produit libre amalgamé de $(A_i)_{i\in I}$ sur B, noté $*_B A_i$, est la somme directe(le coproduit) dans cette catégorie.

Si A_i est une C^*-algèbre sur B et $\Phi_i = \{\varphi_i^{(\alpha_i)};\alpha_i\in\Gamma_i\}$ un ensemble de projections de norme un([26]) de A_i sur B, pour chaque $i\in I$, alors notre généralisation de la liberté apparaît dans ce contexte à l'aide d'un produit γ-libre amalgamé, (A,φ), de C^*-espaces de probabilité sur B, dans le sens de Voiculescu([28], [30], [31]), (A_i,φ_i), $i\in I$.

Fixons $\delta\in\Gamma$ et posons $\varphi_i := \varphi_i^{(\delta_i)}$ pour chaque $i\in I$.

Théorème 1.1. - *Il existe une C^*-algèbre A sur B et une espérance conditionnelle([27]) φ de A sur B, telles que:*

(i) pour chaque $i\in I$, il existe un morphisme j_i de A_i dans A, tel que A soit engendrée par $\bigcup_{i\in I} j_i(A_i)$;

(ii) pour tout $i\in I$, $\varphi\circ j_i=\varphi_i$;

(iii) pour chaque $n\geq 2$ et $t:=(i_1,\ldots,i_n)\in I^n$, $i_1\neq\cdots\neq i_n$:

$\varphi(j_{i_1}(a_1)\cdots j_{i_n}(a_n)) = \varphi(j_{i_1}(a_1)\cdots j_{i_{n-1}}(a_{n-1}))\varphi_{i_n}(a_n)$,

si $a_k\in Ker\varphi_{i_k}^{(\gamma_k^{(n)}(t,\delta_t))}$, $k=\overline{1,n}$, *où* $\delta_t := (\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_n})$.

On peut noter $\varphi = \star_B^{(\gamma)}\varphi_i$ et $(A,\varphi) = \star_B^{(\gamma)}(A_i,\varphi_i)$.

Idée de la démonstration. - Suivant la construction GNS de Voiculescu realisée dans [28], pour une projection de norme un, on modifie la représentation du produit libre amalgamé $*$-algébrique ([28], [31]), d'une manière similaire à [7], pour le cas scalaire B=C·1.

Les C^*-modules de Hilbert interviennent comme un outil nécessaire.

Tout d'abord, on utilise l'extension du produit tensoriel infini de von Neumann de [19] aux B-modules de Hilbert.

Démonstration. Notons $D_n(I) := \{(i_1,\ldots,i_n) \in I^n; i_1 \neq \cdots \neq i_n\}$ $(n \geq 1)$; T:= $\bigcup_{n\geq 1} D_n(I)$; $T^{(i)} := \{(i_1,\ldots,i_n) \in T; i_1 \neq i\}$ $(i \in I)$. Pour $t := (i_1,\ldots,i_n) \in T$, on pose $H_t^0 := H_{i_1}^0 \bigotimes_B \cdots \bigotimes_B H_{i_n}^0$.

1^0 Soit $i \in I$ fixé. On considère les $*$-représentations $(\pi_i^{(\alpha_i)}, H_i, \xi_i, \chi_i, \chi_i^0)$, $\alpha_i \in \Gamma_i$, données par la construction GNS de Voiculescu ([28]), respectivement appliquée aux projections de norme un $\varphi_i^{(\alpha_i)}$, $\alpha_i \in \Gamma_i$, de la famille Φ_i, en prenant pour chaque $\alpha_i \in \Gamma_i$, le même B-module de Hilbert (à droite) $H_i = B \bigoplus H_i^0$ et le même vecteur (non ciclique, en général) $\xi_i = 1_B \oplus 0 \in B \bigoplus H_i^0$.

On peut procéder de cette façon, grâce à l'extension aux B-modules de Hilbert du produit tensoriel infini de von Neumann.

On observe que $\pi_i^{(\alpha_i)}(a)\xi_i \in H_i^0$, si $a \in Ker\varphi_i^{(\alpha_i)}$ $(\alpha_i \in \Gamma_i)$.

Les $*$-morphismes unitaires $\chi_i : B \longrightarrow L(H_i)$, $\chi_i^0 : B \longrightarrow L(H_i^0)$ vérifient $\chi_i(b')(b \oplus h) = b'b \oplus \chi_i^0(b')h$. On a $\pi_i^{(\alpha_i)}(b) \equiv b$, si $b \in B$.

2^0 Soit $(H,\xi,\chi,\chi^0) = \star_B(H_i,\xi_i,\chi_i,\chi_i^0)$ le produit libre des B-modules de Hilbert considérés ci-dessus. Donc([28]):

$H = B \bigoplus \bigoplus_{t\in T} H_t^0 =: B \bigoplus H^0$, $\xi = 1_B \oplus 0 \in B \bigoplus H^0 = H$,

$\chi : B \longrightarrow L(H)$, $\chi^0 : B \longrightarrow L(H^0)$ sont des $*$-morphismes unitaires t.q. $\chi(b')(b \oplus h) = b'b \oplus \chi^0(b')h$. $(\chi = \star_{i\in I}\chi_i$, $\chi^0 = \star_{i\in I}\chi_i^0$.)

On considère les deux décompositions suivantes de H.

$2^0.1$ $H \simeq H_i \bigotimes_B H_{(i)}$, où $H_{(i)} := B \bigoplus \bigoplus_{t\in T^{(i)}} H_t^0$, à l'aide des opérateurs unitaires $V_i : H \longrightarrow H_i \bigotimes_B H_{(i)}$, donnés par

$V_i\xi = \xi_i \otimes \xi$, $V_i H_i^0 = H_i^0 \bigotimes_B \xi$,

$V_i H_t^0 = \xi_i \bigotimes_B H_t^0$, $V_i(H_i^0 \bigotimes_B H_t^0) = H_i^0 \bigotimes_B H_t^0$, $\forall t \in T^{(i)}$ $(i \in I)$.

$2^0.2$ $H \simeq H_i \bigoplus K_i \bigoplus L_i$, en identifiant $\xi \equiv \xi_i$, où on note

$K_i := \bigoplus_{t\in T^{(i)}} H_t^0$, $L_i := \bigoplus_{t\in T^{(i)}} H_i^0 \bigotimes_B H_t^0$.

3^0 Soient les $*$-morphismes unitaires $\lambda_i : L(H_i) \longrightarrow L(H)$ définis par

$$\lambda_i(S) := V_i^*(S \otimes Id)V_i, \forall S \in L(H_i).$$

Alors

$\lambda_i(S)H_i \subset H_i$, $\lambda_i(S)H_t^0 \subset H_t^0 \bigoplus H_i^0 \bigotimes_B H_t^0$ et

$\lambda_i(S)(H_i^0 \bigotimes_B H_t^0) \subset H_t^0 \bigoplus H_i^0 \bigotimes_B H_t^0$, $\forall t \in T^{(i)}$ $(S \in L(H_i))$.

Donc les sous-modules H_i et $K_i \bigoplus L_i$ de H sont stables par rapport à $\lambda_i(S)$ pour $S \in L(H_i)$.

De plus, on voit que $\lambda_i(S)H_t^0 \subset H_i^0 \bigotimes_B H_t^0$, si $S\xi_i \in H_i^0$, $\forall t \in T^{(i)}$.

En particulier:

$\lambda_i(\pi_i^{(\delta_i)}(a))H_i \subset H_i$, $\forall a \in A_i$,

$\lambda_i(\pi_i^{(\alpha_i)}(a))H_t^0 \subset H_i^0 \bigotimes_B H_t^0$, $\forall a \in Ker\varphi_i^{(\alpha_i)}$, $t \in T^{(i)}$, $\alpha_i \in \Gamma_i$.

$(i \in I)$

Cette dernière propriété implique -induction !- la proprieté suivante:

$(\dagger)$ $\lambda_{i_1}(\pi_{i_1}^{(\alpha_{i_1})}(a_1)) \cdots \lambda_{i_{n-1}}(\pi_{i_{n-1}}^{(\alpha_{i_{n-1}})}(a_{n-1}))H_{i_n}^0 \subset H_t^0$,

$\forall n \geq 2$, $t := (i_1, \ldots, i_n) \in D_n(I)$, $a_k \in Ker\varphi_{i_k}^{(\alpha_{i_k})}$, $\alpha_{i_k} \in \Gamma_{i_k}$, $k = \overline{1, n-1}$.

4^0 Soient $\rho^{i,\delta_i} : A_i \longrightarrow L(H_i)$ les $*$-représentations définies par $\rho^{i,\delta_i}(a) := \lambda_i \circ \pi_i^{(\delta_i)}(a) \mid H_i$. Alors

$< \xi, \rho^{i,\delta_i}(a)\xi >= \varphi_i(a)$ et $\rho^{i,\delta_i}(a)\xi - \xi \cdot \varphi_i(a) \in H_i^0$, grâce à 1^0, $\forall a \in A_i$.

Posons $\Lambda_i^{(\gamma)} := \bigcup_{n \geq 2}\{\gamma_n(t, \alpha_t) \in \Gamma_i ; t = (i_1, \ldots, i_n) \in D_n(I), i_1 = i, \alpha_t \in \Gamma_t\} (\subset \Gamma_i)$.

Pour chaque $\alpha_i \in \Lambda_i^{(\gamma)}$, on considère les B-modules de Hilbert suivants:

$$K_i^{(\alpha_i)} := \bigoplus_{t \in T^{(\alpha_i)}} H_t^0, L_i^{(\alpha_i)} := \bigoplus_{t \in T^{(\alpha_i)}} H_i^0 \bigotimes_B H_t^0,$$

où $T^{(\alpha_i)} := \{t \in T^{(i)} ; \exists \alpha_t \in \Gamma_t, \gamma_{n+1}(i, t; \delta_i, \alpha_t) = \alpha_i, n := \mid t \mid\}$.

Alors

$\lambda_i \circ \pi_i^{(\alpha_i)}(a)(K_i^{(\alpha_i)} \bigoplus L_i^{(\alpha_i)}) \subset K_i^{(\alpha_i)} \bigoplus L_i^{(\alpha_i)}$ $(\alpha_i \in \Lambda_i^{(\gamma)}, a \in A_i)$, grâce à 3^0.

Par suite, pour chaque $\alpha_i \in \Lambda_i^{(\gamma)}$, on peut considérer les $*$-représentations $\rho_i^{\delta_i,\alpha_i} : A_i \longrightarrow L(K_i^{(\alpha_i)} \bigoplus L_i^{(\alpha_i)})$, $\rho_i^{\delta_i,\alpha_i}(a) := \lambda_i \circ \pi_i^{(\alpha_i)}(a) \mid (K_i^{(\alpha_i)} \bigoplus L_i^{(\alpha_i)})$.

La propriété $(\dagger)$ implique alors

$$\rho_{i_1}^{\delta_{i_1},\alpha_{i_1}}(a_1) \cdots \rho_{i_{n-1}}^{\delta_{i_{n-1}},\alpha_{i_{n-1}}}(a_{n-1})H_{i_n}^0 \subset H_t^0,$$

$\forall n \geq 2$, $\forall t = (i_1, \ldots, i_n) \in D_n(I)$, $\forall a_k \in Ker\varphi_{i_k}^{(\alpha_{i_k})}$, où $\alpha_{i_k} := \gamma_k^{(n)}(t, \delta_t)$, $k = \overline{1, n-1}$.

Mais $K_i \bigoplus L_i = \bigoplus_{\alpha_i \in \Lambda_i^{(\gamma)}} (K_i^{(\alpha_i)} \bigoplus L_i^{(\alpha_i)})$. Donc les $*$-représentations $\rho_i^{\delta_i}$: $A_i \longrightarrow L(K_i \bigoplus L_i)$, définies par $\rho_i^{\delta_i} := \bigoplus_{\alpha_i \in \Lambda_i^{(\gamma)}} \rho_i^{\delta_i, \alpha_i}$ ont la propriété:

$$\rho_{i_1}^{\delta_{i_1}}(a_1) \cdots \rho_{i_{n-1}}^{\delta_{i_{n-1}}}(a_{n-1}) H_{i_n}^0 \subset H_t^0,$$

$\forall n \geq 2$, $\forall t = (i_1, \ldots, i_n) \in D_n(I)$, $\forall a_k \in Ker\varphi_{i_k}^{(\gamma_k^{(n)}(t,\delta_t))}$, $k = \overline{1, n-1}$.

Par rapport à la décomposition orthogonale $2^0.2$ de H, on obtient alors, pour chaque $i \in I$, une $*$-représentation $\sigma^{i,\delta_i} : A_i \longrightarrow L(H)$, $\sigma^{i,\delta_i} := \rho^{i,\delta_i} \oplus \rho_i^{\delta_i}$.

Il est visible que $< \xi, \sigma^{i,\delta_i}(a)\xi > = < \xi, \rho^{i,\delta_i}(a)\xi > = \varphi_i(a)$, $\forall a \in A_i$.

Pour tout $n \geq 2$, $\forall t = (i_1, \ldots, i_n) \in D_n(I)$, $\forall a_k \in Ker\varphi_{i_k}^{(\gamma_k^{(n)}(t,\delta_t))}$, $k = \overline{1, n-1}$ et $a_n \in A_{i_n}$, il s'ensuit que:

$< \xi, \sigma^{i_1,\delta_{i_1}}(a_1) \cdots \sigma^{i_n,\delta_{i_n}}(a_n)\xi > =$
$= < \xi, \sigma^{i_1,\delta_{i_1}}(a_1) \cdots \sigma^{i_{n-1},\delta_{i_{n-1}}}(a_{n-1})\rho^{i_n,\delta_{i_n}}(a_n)\xi > =$
$= < \xi, \rho_{i_1}^{\delta_{i_1}}(a_1) \cdots \rho_{i_{n-1}}^{\delta_{i_{n-1}}}(a_{n-1})(\rho^{i_n,\delta_{i_n}}(a_n)\xi - \xi \cdot \varphi_{i_n}(a_n)) > +$
$+ < \xi, \sigma^{i_1,\delta_{i_1}}(a_1) \cdots \sigma^{i_{n-1},\delta_{i_{n-1}}}(a_{n-1})\xi \cdot \varphi_{i_n}(a_n) > =$
$= < \xi, \sigma^{i_1,\delta_{i_1}}(a_1) \cdots \sigma^{i_{n-1},\delta_{i_{n-1}}}(a_{n-1})\xi > \varphi_{i_n}(a_n)$.

De plus, $\sigma^{i,\delta_i}(b) \equiv b$, $\forall b \in B$.

5^0 On peut remarquer que:

$< \xi, \sigma^{i_1,\delta_{i_1}}(a_1)\sigma^{i_2,\delta_{i_2}}(a_2)\xi > = \varphi_{i_1}(a_1)\varphi_{i_2}(a_2)$, $\forall i_1 \neq i_2, a_1 \in A_{i_1}, a_2 \in A_{i_2}$;

$< \xi, \sigma^{i_1,\delta_{i_1}}(a_1)\sigma^{i_2,\delta_{i_2}}(a_2)\sigma^{i_3,\delta_{i_3}}(a_3)\xi > = \varphi_{i_1}(a_1)\varphi_{i_2}(a_2)\varphi_{i_3}(a_3)$,

$\forall t = (i_1, i_2, i_3) \in D_3(I), a_k \in Ker\varphi_{i_k}^{(\gamma_k^{(3)}(t,\delta_t))}, k = 1, 2, a_3 \in A_{i_3}$.

Mais, pour $n \geq 4$, on n'obtient pas une telle formule, en général.

Supposons que $\gamma_k^{(n)}(t, i_n; \delta_t, \delta_{i_n}) = \gamma_k^{(n-1)}(t, \delta_t)$, $k = \overline{1, n-2}$ $(n \geq 3)$, $\forall (t, i_n) \in D_n(I)$. Cette condition est équivalente à $\gamma_n(t, i_n; \delta_t, \delta_{i_n}) = \gamma_{n-1}(t, \delta_t)$, $\forall (t, i_n) \in D_n(I)$, $n \geq 2$, donc à la condition:

$\gamma_n(t, \delta_t) = \gamma_2(i_1, i_2; \delta_{i_1}, \delta_{i_2})$, $\forall t = (i_1, \ldots, i_n) \in D_n(I)$ $(n \geq 2)$.

Si $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 1}$ satisfait cette dernière condition, alors de 4^0 on obtient:

(iv) $< \xi, \sigma^{i_1,\delta_{i_1}}(a_1) \cdots \sigma^{i_n,\delta_{i_n}}(a_n)\xi > = \varphi_{i_1}(a_1) \cdots \varphi_{i_n}(a_n)$,

$\forall n \geq 2$, $\forall t = (i_1, \ldots, i_n) \in D_n(I)$, $\forall a_k \in Ker\varphi_{i_k}^{(\gamma_2(i_k, i_{k+1}; \delta_{i_k}, \delta_{i_{k+1}}))}$, $k = \overline{1, n-1}$, $\forall a_n \in A_{i_n}$.

6^0. On a construit les $*$-morphismes σ^{i,δ_i} de A_i dans L(H) (sur B), $i \in I$.

Dans la catégorie des C^*-algèbres sur B, il existe alors un $*$-morphisme $\sigma^{(\delta)} : \star_B A_i \longrightarrow L(H)$, t.q. $\sigma^{(\delta)} \circ j_i = \sigma^{i,\delta_i}$, $\forall i \in I$.

En prenant pour A le produit libre amalgamé de $(A_i)_{i \in I}$ sur B et, pour φ, $\omega_\xi \circ \sigma^{(\delta)}$, où ω_ξ est la projection de L(H) sur sa C^*-sous- algèbre B, donée par

$\omega_\xi(S) :=< \xi, S\xi >$, on obtient un produit γ-libre amalgamé (*total*) (A, φ) de $(A_i, \varphi_i)_{i\in I}$ sur B. Il satisfait donc (i), (ii),(iii)(et (iv), dans un cas spécial). $\diamond$

Remarques 1.2. - Ce produit γ-libre amalgamé (*total*) généralise le produit libre amalgamé de Voiculescu([31]) et le produit libre "spatial" introduit par Avitzour([2]) dans le cas scalaire B = $\mathbf{C}\cdot 1$.

1.3. - En prenant pour A la C^*- algèbre engendrée par $\bigcup_{i\in I} \sigma^{i,\delta_i}(A_i)$ dans L(H) et pour $\varphi : A \longrightarrow B$ la restriction à A de la même projection ω_ξ de L(H) sur sa C^*-sous- algèbre B, $\omega_\xi(S) :=< \xi, S\xi >$, on obtient un produit γ-libre amalgamé *réduit* (A, φ) de $(A_i, \varphi_i)_{i\in I}$; il satisfait donc (i), (ii), (iii). Dans le même cas spécial, il satisfait aussi (iv).

Ce produit γ-libre amalgamé *réduit* généralise le produit libre amalgamé réduit de Voiculescu([28]) et le 'ψ-produit' réduit introduit par Bozejko et Speicher ([7]) dans le cas scalaire.

1.4. - On peut faire plusieurs choix sur $T^{(\alpha_i)}$ et $\Lambda_i^{(\gamma)}$.

Prenons le cas $\Gamma_i = J$, $\forall i \in I$.

Soit $\gamma_n : I^n \times J^n \longrightarrow J$ $(n \geq 1)$. Notons $\gamma_n(\cdot, (\delta, \ldots, \delta)) = \chi_n$.

Etant donné $i \in I$, pour chaque

$\alpha \in J_i^{(\gamma)} := \bigcup_{n\geq 1}\{\chi_n(t) \in J; t \in T^{(i)}, n :=\mid t \mid\}$,

on peut choisir

$T^{(\alpha)} = \{t \in T^{(i)}; \chi_n(t) = \alpha, n :=\mid t \mid\}$.

Le produit γ-libre amalgamé correspondant $\varphi := \star_B^{(\gamma)} \varphi_i$ vérifit alors (iii) sous la forme suivante:

(iii)' pour chaque $n \geq 2$ *et* $t := (i_1, \ldots, i_n) \in I^n$, $i_1 \neq \cdots \neq i_n$,

$\varphi(j_{i_1}(a_1)\cdots j_{i_n}(a_n)) = \varphi(j_{i_1}(a_1)\cdots j_{i_{n-1}}(a_{n-1}))\varphi_{i_n}(a_n)$,

si $a_k \in Ker\varphi_{i_k}^{(\chi_k^{(n)}(t))}$, $k = \overline{1, n-1}$, $a_n \in A_{i_n}$,

où $\chi_k^{(n)}(t) := \chi_{n-k}(t_{k+1})$, $k = \overline{1, n-1}$.

1.5. - Par commodité, on a préféré ici le niveau C^*-algébrique(i.e. le contexte de Voiculescu de [28], [29], [31]). En fait, le Théorème 1.1 peut être établi au niveau $*$-algébrique sur une $(*\text{-})C^*$-algèbre unifère, à l'aide des opérateurs non bornés à domaine dense stable commun dans les $(*\text{-})C^*$-modules (pré)hilbertiens, étendant la construction GNS de Voiculescu d'après Powers([21]).

1.6. - Signalons([15]) qu'on peut aussi réaliser une généralisation des résultats principaux de Boca de [6] et [5].

Soient B une C^*-algèbre complexe unifère, $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et χ:B $\longrightarrow L(\mathcal{H})$ un $*$-homomorphisme unitaire.

Considérons cette fois, pour chaque $i \in I$, une C^*-algèbre A_i sur B, un ensemble d'applications complètement positives([25]) et B-linéaires([6]) $\Phi_i = \{\varphi_i^{(\alpha_i)}; \alpha_i \in \Gamma_i\}$ de A_i dans $L(\mathcal{H})$ et un ensemble de projections de norme un, $\Psi_i = \{\psi_i^{(\alpha_i)}; \alpha_i \in \Gamma_i\}$ de A_i sur B.

Fixons $\delta \in \Gamma$. Notons $\varphi_i := \varphi_i^{(\delta_i)}$ pour chaque $i \in I$, γ étant la même.

Théorème. - *Il existe une C^*-algèbre A sur B et une application complètement positive et B-linéaire φ de A dans $L(\mathcal{H})$, telles que:*

(i) pour chaque $i \in I$, il existe un morphisme j_i de A_i dans A, tel que A soit engendrée par $\bigcup_{i\in I} j_i(A_i)$;

(ii) pour tout $i \in I$, $\varphi \circ j_i = \varphi_i$;

(iii) pour chaque $n \geq 2$ et $t := (i_1, \ldots, i_n) \in I^n$, $i_1 \neq \cdots \neq i_n$:

$\varphi(j_{i_1}(a_1)\cdots j_{i_n}(a_n)) = \varphi(j_{i_1}(a_1)\cdots j_{i_{n-1}}(a_{n-1}))\varphi_{i_n}(a_n)$,

si $a_k \in Ker\psi_{i_k}^{(\gamma_k^{(n)}(t,\delta_t))}$, $k = \overline{1,n}$, *où* $\delta_t := (\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_n})$.

Cette fois, on modifie la représentation Stinespring([25]) du produit libre amalgamé $*$-algébrique, construite par Boca dans [6], d'une manière analogue à la démonstration du Théorème 1.1 .

1.7. - Grâce au Théorème 1.1, on peut désormais introduire la définition suivante.

Définition - Soit (A, φ) un B-espace non commutatif de probabilité au sens de Voiculescu ([28], [30], [31]) et Ψ un ensemble supplementaire d'états spécifiés dans A. Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-algèbres de A est appelée *Ψ-libre*, si pour toute suite finie $a_1 \in A_{i_1}, \ldots, a_n \in A_{i_n}$ satisfaisant $\psi(a_j)$=0, $j = \overline{1,n}$, pour tout $\psi \in \Psi$, et $i_1 \neq \cdots \neq i_n$, on a $\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1)\cdots\varphi(a_n)$.

Une famille de sous-ensembles $X_i \subset A, i \in I$, est dite *Ψ-libre*, si la famille de sous-algèbres $A_i, i \in I$, respectivement engendrées par $B \bigcup X_i$, $i \in I$, est Ψ-libre.

1.8. - Dans les notations du Théorème 1.1, en supposant $\gamma_n(t, \delta_t) \in \Gamma_{i_1} \setminus \{\delta_{i_1}\}$, pour tout $(t, \delta_t) \in \coprod_{t\in I^n} \Gamma_t$, prenons $\Psi_i := \Phi_i \setminus \{\varphi_i\}$, $i \in I$, et $\Psi := \{\psi^{(\lambda)}; \lambda \in \Gamma \setminus \{\delta\}\}$, où $\psi^{(\lambda)} := \star_B \varphi_i^{(\lambda_i)}$ signifie le produit libre amalgamé de Voiculescu([31]).

Alors, par exemple, la famille $(j_i(A_i))_{i\in I}$ est Ψ-libre dans (A,φ).

On peut parler de *γ-liberté*, si l'ensemble d'états qui conditionnent est spécifié par γ (i.e. (iii) du Théorème **2.1**).

Pour $|\ \Psi\ |=1$ et $\varphi \notin \Psi$, on obtient la notion de liberté conditionnée par un seul état supplementaire, introduite par Bozejko et Speicher dans le cas scalaire B=C·1.

La liberté (pure) de Voiculescu s'obtient pour $\Psi = \{\varphi\}$.

(On utilise le mot *liberté*, d'aprés Skandalis([23]), pour le terme anglais *freeness*, introduit par Voiculescu.)

2.Calculs des moments des variables aléatoires dans un produit γ-libre d'espaces non commutatifs de probabilité

Examinons maintenant notre produit amalgamé γ- libre. Prenons, pour la simplicité, le cas scalaire B=C·1.

On utilise la méthode développée par Bozejko et Speicher dans [7] et [24], á l'aide du treillis des partitions non croisées ([18]), et une terminologie similaire.

Il suffit de travailler au niveau $*$-algébrique.

En utilisant le monoïde libre I^*, appelons *lettres* les éléments de I et mots *réduits* les mots de $\bigcup_{n\geq 2} D_n(I)$.

Notons par $\Pi(n)$ le treillis des partitions de $\{1,\ldots,n\}$, constituées des ensembles ordonnés et mutuellement disjoints, qu'on applera *blocs*, et par $NC(n)$ son sous-treillis des partitions non croisées, en distinguant entre les blocs intérieurs et extérieurs([7]) d'une partition non croisée.

La correspondance naturelle $I^n \ni t \longrightarrow \pi^t \in \Pi(n)$ induit une bijection entre $\Pi(n)$ et l'ensemble des classes d'équivalence par rapport à la relation $\sim$, définie sur I^n comme il suit: $(i_1,\ldots,i_n) \sim (i'_1,\ldots,i'_n) \Longleftrightarrow (i_k = i_l \Leftrightarrow i'_k = i'_l)$.

On peut dire que $t \in I^n$ est *croisé* (respectivement, *non croisé*), ssi π^t est croisé (respectivement, non croisé).

Considérons un espace (non commutatif) de probabilité (A,φ) donné par le Théorème 1.1, où A est muni seulement de sa structure subjacente de $*$-algèbre unifère, fixant $\delta \in \Gamma$.

Désormais on identifie souvant A_i et $j_i(A_i)$, grâce à l'injectivité des j_i.

D'après Voiculescu ([28], [29], [30], [31]), on peut appeler *variables aléatoires* (non commutatives) les éléments de A.

Pour une variable aléatoire $w = j_{i_1}(a_1)\cdots j_{i_n}(a_n)$, $n \geq 1$, telle que $t := (i_1, \ldots, i_n) \in D_n(I)$ et $a_k \in A_{i_k}$, $k = \overline{1,n}$, appelons *moments élémentaires* de w les espérances de la forme $\varphi_{i_l}(a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(r)})$ ou $\varphi_{i_l}^{(\gamma_l^{(n')}(t',\delta_{t'}))}(a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(r)})$, telles que $a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(r)} \in A_{i_l}$ et t' soit un sous-mot de t de longueur n', préservant l'ordre de t, où $\delta_{t'} := (\delta_{i'_1}, \ldots, \delta_{i'_{n'}})$, si $t' = (i'_1, \ldots, i'_{n'})$.

En décomposant, pour chaque $k = \overline{1,n}$, $a_k = \varphi_{i_k}^{(\gamma_k^{(n)}(t,\delta_t))}(a_k)\cdot 1 + a_k^o$, où $a_k^o \in Ker\varphi_{i_k}^{(\gamma_k^{(n)}(t,\delta_t))}$ dépend de γ, t_k et $\delta_{t_k} := (\delta_{i_k}, \ldots, \delta_{i_n})$, on observe que chaque moment élémentaire de la variable aléatoire $w^0 = j_{i_1}(a_1^0)\cdots j_{i_n}(a_n^0)$, peut être exprimé comme une somme de produits de moments élémentaires de w et réciproquement.

On peut écrire

$(\ddagger)$ $\varphi(a_1\cdots a_n) =$

$= \sum_{(\pi,\sigma)\in\Pi(n)} \varphi_{i_{\pi(1)}}^{(\gamma_{\pi(1)}^{(n)}(t,\delta_t))}(a_{\pi(1)})\cdots\varphi_{i_{\pi(r)}}^{(\gamma_{\pi(r)}^{(n)}(t,\delta_t))}(a_{\pi(r)})\varphi(a^0_{\sigma(1)}\cdots a^0_{\sigma(n-r)})$,

où $\pi = (\pi(1), \ldots, \pi(r))$, $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n-r))$, $(i_{\pi(1)}, \ldots, i_{\pi(r)})$ et $(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(n-r)})$ étant des sous-mots de t qui préservent l'ordre de t.

On fait la convention: "$r = 0 \Leftrightarrow \pi = \emptyset$" et "$r = n \Leftrightarrow \sigma = \emptyset$".

Ainsi, il est facile à voir que la proprieté de γ-liberté dans (A,φ) assure le calcul de tous les moments de w, par rapport à φ, si les moments élémentaires de w sont donnés.

Le calcul des moments des variables aléatoires dans (A,φ) suit un algorithme similaire à [7] et [24](comparer aussi à [28] ou [31]).

C'est pourquoi les propriétés suivantes peuvent aussi être établies par induction, comme leurs correspondantes de [7] et [24].

Lemme 2.1. - *Soient $n \geq 1$, $i_1, \ldots, i_n \in I$, tels que $i_k \neq i_l$, pour tous $k \neq l$ et $a_k \in A_{i_k}$ $(k = \overline{1,n})$. Alors $\varphi(a_1\cdots a_n) = \varphi_{i_1}(a_1)\cdots\varphi_{i_n}(a_n)$.*

Preuve. Pour $n = 2$, on fait appel à **1.**(5^0).

Supposons l'affirmation vraie pour tout $m < n$. Essayons la montrer pour n.

On utilise $(\ddagger)$. Le terme de la somme correspondant à $r = 0$ est $\varphi(a_1^0\cdots a_n^0) = \varphi(a_1^0\cdots a_{n-1}^0)\varphi_{i_n}(a_n^0)$, grâce à la γ-liberté.

Mais $\varphi(a_1^0\cdots a_{n-1}^0) = \varphi_{i_1}(a_1^0)\cdots\varphi_{i_{n-1}}(a_{n-1}^0)$, par l'hypothèse d'induction.

Chaque terme de la somme correspondant à un $r \geq 1$ contient un facteur

$\varphi(a^0_{\sigma(1)}\cdots a^0_{\sigma(n-r)})$. En appliquant l'hypotèse d'induction, on déduit

$\varphi(a^0_{\sigma(1)}\cdots a^0_{\sigma(n-r)}) = \varphi_{i_{\sigma(1)}}(a^0_{\sigma(1)})\cdots\varphi_{i_{\sigma(n-r)}}(a^0_{\sigma(n-r)})$.

Par suite, on obtient $\varphi(a_1\cdots a_n) = \varphi_{i_1}(a_1)\cdots\varphi_{i_n}(a_n)$. $\diamondsuit$

Lemme 2.2. - *Soient $n \geq 1$, $i_1,\ldots,i_n \in I$, tels que $i_1 \neq \cdots \neq i_n$ et $p:=\sharp\{i_1,\ldots,i_n\}$. Considérons $a_k \in A_{i_k}$ $(k = \overline{1,n})$ et $w = a_1\cdots a_n$. Alors l'espérance $\varphi(w)$ peut être exprimée comme une somme de produits de moments élémentaires de w, chaque terme contenant au moins p facteurs.*

Preuve. On procède de la même façon.

En tout cas $\sharp\{i_1,\ldots,i_{n-1}\} \geq p-1$.

En utilisant (‡), on voit que $\sharp\{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(n-r)}\} \geq p-r$, si $r \geq 1$.

La propriété de γ-liberté intervient seulement pour le terme correspondant à $r=0$. $\diamondsuit$

Lemme 2.3. - *Soient $n \geq 3$, $t := (i_1,\ldots,i_n) \in I^n$, tels que $i_1 \neq \cdots \neq i_n$. Supposons qu'il existe $j \in \{1,\ldots,n\}$ pour lequel $i_j \neq i_k$ pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{j\}$ et $l,l' \in \{1,\ldots,n\}$, tels que $l < j < l'$, mais $i_l = i_{l'}$. Notons $p := \sharp\{i_1,\ldots,i_n\}$. Considérons $a_k \in A_{i_k}$, $k = \overline{1,n}$ et $w = a_1\cdots a_n$. Alors l'espérance $\varphi(w)$ peut être exprimée sous la forme:*

$\varphi(w) = \varphi_{i_j}^{(\gamma_j^{(n)}(t,\delta_t))}(a_j)\varphi(a_1\cdots a_{j-1}a_{j+1}\cdots a_n) + \Sigma$,

où Σ est une somme de produits de moments élémentaires de w, dont chaque terme contient au moins $p+1$ facteurs, et $\delta_t := (\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_n})$.

Preuve. En décomposant $a_j = \varphi_{i_j}^{(\gamma_j^{(n)}(t,\delta_t))}(a_j)\cdot 1 + a_j^o$, on écrit

$\varphi(w) = \varphi_{i_j}^{(\gamma_j^{(n)}(t,\delta_t))}(a_j)\varphi(a_1\cdots a_{j-1}a_{j+1}\cdots a_n) + \varphi(a_1\cdots a_{j-1}a_j^o a_{j+1}\cdots a_n)$.

Pour $n=3$, on voit par calcul direct que le deuxième terme est de la forme proposée.

Supposons l'assertion vraie pour tout $m < n$. Vérifions la pour n.

On développe le deuxième terme d'après (‡). Dans chaque terme de ce développement correspondant à un $r \geq 1$, t. q. $l,l' \in \sigma$, on peut appliquer l'hypothèse d'induction à $a^0_{\sigma(1)}\cdots a^0_{\sigma(n-r)}$. Chaque terme correspondant à un $r \geq 1$, t. q. $l \in \pi$ ou $l' \in \pi$ contient un facteur $\varphi(a^0_{\sigma(1)}\cdots a^0_{\sigma(n-r)})$ t.q. $\sharp\{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(n-r)}\} \geq p-r+1$, et on lui applique le lemme **2.2**. La propriété de γ-liberté intervient à nouveau seulement pour le terme correspondant à $r = 0$. Si $l' = n$, on lui applique le lemme **2.2**. Sinon, on utilise l'hypothèse inductive. $\diamond$

En dissociant notre analyse pour les éléments croisés et ceux non croisés, on peut déduire, par des arguments similaires à [7] et [24], les particularités suivantes des propriétés anterieurs.

Corollaire 2.4. - *Soient $n \geq 4$, $t := (i_1, \ldots, i_n) \in I^n$, $i_1 \neq \cdots \neq i_n$ tel que t soit croisé, et $p := \sharp\{i_1, \ldots, i_n\}$. Considérons $a_k \in A_{i_k}$, $k = \overline{1,n}$ et $w = a_1 \cdots a_n$. Alors l'espérance $\varphi(w)$ peut être exprimée comme une somme de produits de moments élémentaires de w, dont chaque terme contient au moins $p+1$ facteurs.*

Preuve. On applique les lemmes **2.2** et **2.3**. $\diamond$

Corollaire 2.5. - *Soient $n \geq 3$, $t := (i_1, \ldots, i_n) \in I^n$, $i_1 \neq \cdots \neq i_n$ tel que t soit non croisé , et $p := \sharp\{i_1, \ldots, i_n\}$. Considérons $a_k \in A_{i_k}$, $k = \overline{1,n}$ et $w = a_1 \cdots a_n$. Alors l'espérance $\varphi(w)$ peut être exprimée sous la forme:*

$$\varphi(w) = \prod_{l=1}^{p} \varphi_{i_l}^{(\tilde{\chi}_{\pi(l)}(t,\delta_t))}(w_{\pi(l)}) + \Sigma,$$

où $\pi(l) = (\pi_l(1), \ldots, \pi_l(n_l)) := (k = \overline{1,n}; i_k = i(l))$, $w_{\pi(l)} := a_{\pi_l(1)} \cdots a_{\pi_l(n_l)} (\in A_{i(l)})$,

$$\tilde{\chi}_{\pi(l)}(t,\delta_t) := \begin{cases} \gamma_{\pi_l(n_l)}^{(n(l))}(t(l), \delta_{t(l)}) & \textit{si } \pi(l) \textit{ est intérieur,} \\ \delta_{i(l)} & \textit{sinon} \end{cases}, \quad l = \overline{1,p},$$

où $t(l)$ est le sous-mot réduit de t, préservant l'ordre de t, formé des lettres qui correspondent aux blocs de π contenant $\pi(l)$ [ou aux blocs extérieurs de π situés après $\pi(l)$], $n(l)$ est la longueur de $t(l)$, $\pi = (\pi(l))_{l=\overline{1,p}}$ étant la partition non croisée correspondant à t, Σ est une somme de produits de moments élémentaires de w, dont chaque terme contient au moins $p+1$ facteurs, et $\delta_t := (\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_n})$. (La place de $i_{\pi_l(n_l)}$ dans $t(l)$ est notée par $\pi_l(n_l)$.)

N.B. Ici on ordonne les blocs de π suivant leurs premiers éléments $\pi_l(1)$, $l = \overline{1,p}$. Un bloc $\pi(l')$ *est situé après* $\pi(l)$ dans π ssi $\pi_l(1) < \pi_{l'}(1)$.

Preuve. Soit $t := (i_1, \ldots, i_n)$ réduit et non croisé. Notons par $\pi \in NC(n)$ la partition correspondant à t. Il résulte que $t := (t_1, \ldots, t_m)$, où chaque t_r est un sous-mot réduit de t, non croisé, qui contient un seul bloc extérieur de π. De plus, les ensembles des lettres de t_r et $t_{r'}$ sont disjoints, si $r \neq r'$. Soit π_r la sous-partition de π associée à t_r $(r = \overline{1,m})$.

On a $\varphi(w) = \varphi(w_1 \cdots w_m)$, où les w_r sont les sous-variables aléatoires de w respectivement associées aux t_r $(r = \overline{1,m})$.

Pour obtenir le terme au nombre minime de facteurs de $\varphi(w)$, on peut procéder(d'après le lemme **2.2**) de la manière suivante.

On fait "sortir" successivement de $\varphi(w_1 \cdots w_m)$ toutes les sous-variables aléatoires $w_{\pi(l)}$ correspondant aux blocs intérieurs $\pi(l)$ de π, en parcourant $w = w_1 \cdots w_m$ dans l'ordre $w_m, w_{m-1}, \ldots, w_1$ et en travaillant dans chaque w_r de la même façon (de la droite à gauche).

Chaque $w_{\pi(l)}$ correspondant à un bloc intérieur $\pi(l)$ de π_r "sort" de $\varphi(w_1 \cdots w_r \cdots w_m)$ comme un "singleton".

Le lemme **2.3** et la forme de $(\gamma^{(n)})_{n \geq 1}$ nous précisent que ce $w_{\pi(l)}$ "sort" sous $\varphi_{i(l)}^{(\gamma_{\pi_l(n_l)}^{(n(l))}(t(l),\delta_{t(l)}))}$, où $t(l)$ est le sous-mot réduit de $(t_r, \ldots, t_m)$, formé des lettres correspondant à tous les blocs de π_r qui contiennent $\pi(l)$, ou aux blocs extérieurs de π situés après $\pi(l)$ (dans $\pi_{r+1}, \ldots, \pi_m$).

Dès que toutes les sous-variables aléatoires de w_r correspondant aux blocs intérieurs de π_r sont sorties de $\varphi(w_1 \cdots w_r \cdots w_m)$, le bloc extérieur de π_r transfère toutes ses composants sur des places consécutives, dans le sous-mot non réduit de t résultant.

Après la réduction de ce sous-mot, le bloc extérieur de π_r est équivalent à un "singleton" w'_r, qui reste dans $\varphi(w_1 \cdots w'_r \cdots w'_m)$, $r \leq m$.

Après la sortie de toutes les $w_{\pi(l)}$ correspondant aux blocs intérieurs de π, il reste ainsi finalement $\varphi(w'_1 \cdots w'_r \cdots w'_m)$, où $w'_1, \ldots, w'_m$ sont les sous-variables aléatoires de w correspondant aux blocs extérieurs de π.

On applique alors le lemme**2.1**. $\diamondsuit$

Remarque 2.6. - En fait, le lemme **2.1** peut être étendu, par un raisonnement similaire, sous la forme suivante(même pour $\varphi = \star_B^{(\gamma)} \varphi_i$).

Proposition. - *Soit $(t_1, \ldots, t_m)$ un mot réduit, t.q. les ensembles des lettres de ses sous-mots t_r et $t_{r'}$ soient disjoints, si $r \neq r'$. Soit $w_r \in A$ une variable aléatoire canoniquement associée à t_r $(r = \overline{1,m})$. Alors $\varphi(w_1 \cdots w_m) = \varphi(w_1) \cdots \varphi(w_m)$.*

En utilisant cette propriété dans le Corollaire **2.5**, on obtient une autre identification du terme ayant le nombre minime de facteurs de $\varphi(w)$. Ainsi, on peut prendre, pour chaque $t(l)$, le sous-mot réduit de t, préservant l'ordre de t, formé des lettres qui correspondent aux blocs de π contenant $\pi(l)$.

3. Théorèmes limite pour les variables aléatoires γ-libres et identiquement distribuées

Exploitant les propriétés décrites dans la séction précédente, on obtient un théorème limite pour les variables aléatoires γ-libres et identiquement distribuées, qui généralise les théorèmes limite de [7] et [24].

Spécialisons le cadre de **2.**.

Soit A une $*$-algèbre complexe unifère et $\Phi = \{\varphi^{(\iota)}; \iota \in J\}$ un ensemble d'états spécifiés dans A.

Fixons $\delta \in J$ et notons $\varphi := \varphi^{(\delta)}$.

Considérons un espace de probabilité $(\hat{A}, \hat{\varphi}) := *_{i \in I}^{(\gamma)}(A_i, \varphi_i)$, oú $\gamma_n : I^n \times J^n \longrightarrow J$, $(A_i, \varphi_i) := (A, \varphi)$, pour chaque $i \in I$, et $\hat{A}$ est muni seulement de sa structure de $*$-algèbre.

Notons $\gamma_n(\cdot, (\delta, \ldots, \delta))$ par χ_n et $\gamma^{(n)}(\cdot, (\delta, \ldots, \delta))$ par $\chi^{(n)}$.

A l'aide des décompositions canoniques du type $A = \mathbf{C} \cdot 1 \oplus Ker\varphi_{i_k}^{(\chi_k^{(n)}(t))}$, on peut remarquer le fait suivant.

Lemme 3.1. - *Soient $n \geq 1$ et $a_1, \ldots, a_n \in A$. Supposons que $\chi_k(t) = \chi_k(t')$, pour tout $t \sim t'$ dans $D_k(I)$, $k = \overline{1,n}$. Alors l'espérance $\hat{\varphi}(w)$ de la variable aléatoire $w = j_{i_1}(a_1) \cdots j_{i_n}(a_n)$ dépend seulement de la classe d'équivalence par rapport à $\sim$, dont un représentant est $(i_1, \ldots, i_n) \in D_n(I)$ (donc, seulement de la partition correspondante).*

Preuve. On utilise (‡), en appliquant l'induction.◇

Dans la suite, prenons $I = \mathbf{N}$.

Dans notre théorème limite, les moments des variables aléatoires sont calculés, d'aprés Bozejko et Speicher, à l'aide des partitions non croisées, en distinguant entre leurs blocs intérieurs et extérieurs.

Les propriétés établies dans **2.** nous assurent que seulement les termes qui contiennent le nombre minime de facteurs vont survivre à l'infini.

C'est pourquoi *la démonstration*, dans notre contexte, est entièrement similaire aux démonstrations des théorèmes limite de [7] et [24].

Théorème 3.2([14]). - *Pour chaque $N \geq 1$ soient donnés m éléments $a_{N,k}$ de A, $k = \overline{1,m}$, et considérons $S_{N,k} := \sum_{i=1}^{N} j_i(a_{N,k})$. Pour tout $r \geq 1$, $\sigma(1), \ldots, \sigma(r)$ de $\{1, \ldots, m\}$ et $\iota \in J$, supposons que*

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot \varphi^{(\iota)}(a_{N,\sigma(1)} \cdots a_{N,\sigma(r)}) =: Q^{(\iota)}(\sigma(1), \ldots, \sigma(r)) \qquad (*)$$

existe et $\chi_r(t) = \chi_r(t')$, pour tout $t \sim t'$ dans $\mathbf{N}^r$. Alors, pour tout $r \geq 1$ et $\sigma(1), \ldots, \sigma(r) \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\varphi}(S_{N,\sigma(1)} \cdots S_{N,\sigma(r)}) = \sum_{p=1}^{r} \sum_{\pi \in NC(r)} \prod_{l=1}^{p} Q_\pi(\pi(l)),$$

où

$$Q_\pi(\pi(l)) := Q^{(\tilde{\chi}_{\pi(l)}(t))}(\sigma(\pi_l(1)), \ldots, \sigma(\pi_l(r_l))),\ \pi(l) = (\pi_l(1), \ldots, \pi_l(r_l)),$$
$$\tilde{\chi}_{\pi(l)}(t) := \begin{cases} \chi^{(r(l))}_{\pi_l(r_l)}(t(l)) & si\ \pi(l)\ est\ intérieur, \\ \delta & sinon \end{cases},\ l = \overline{1,p},$$

$t(l)$ est le sous-mot réduit de t, préservant l'ordre de t, formé des lettres qui correspondent aux blocs de π contenant $\pi(l)$ [ou aux blocs extérieurs de π situés après $\pi(l)$], $r(l)$ est la longueur de $t(l)$, $t \in \mathbf{N}^r$ étant un représentant de la classe d'équivalence correspondant à $\pi = (\pi(l))_{l=\overline{1,p}}$.

Preuve. Soient $r \geq 1$, $a_1, \ldots, a_r \in A$ et $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 1$.

Si $\chi_r(t) = \chi_r(t')$, pour tout $t \sim t'$ dans $\{1, 2, \ldots, N\}^r$, alors
$\hat{\varphi}((\sum_{i_1=1}^{N} j_{i_1}(a_1)) \cdots (\sum_{i_r=1}^{N} j_{i_r}(a_r))) =$
$\sum_{p=1}^{r} A_N^p \sum_{(\pi(1),\ldots,\pi(p)) \in \Pi(r)} \hat{\varphi}(\pi(1), \ldots, \pi(p); a_1, \ldots, a_r)$,
grâce au lemme **3.1**, en groupant les termes correspondant à la même classe d'équivalence. La classe d'équivalence correspondant à $(\pi(1), \ldots, \pi(p))$ contient $A_N^p = \frac{N!}{(N-p)!}$ représentants.

(Ici on note, d'aprés le lemme **3.1**, pour chaque $\pi \in \Pi(n)$, $\hat{\varphi}(\pi; a_1, \ldots, a_n) := \hat{\varphi}(j_{i_1}(a_1) \cdots j_{i_n}(a_n))$, où $(i_1, \ldots, i_n)$ est un représentant de la classe d'équivalence correspondant à π.) $\diamondsuit$

En spécialisant ce thórème limite, on déduit des analogues γ-libres du théorème central limite et du théorème limite de Poisson (comparer à [7], [24], et [28], [29], [31]). Par $NC_2(2p)$ on note les partitions $\pi \in NC(2p)$ dont chaque bloc a deux éléments.

Corollaire 3.3(Théorème central limite). - *Soient données m variables aléatoires a_k de A, $k = \overline{1,m}$, et pour chaque $N \geq 1$ et $k = \overline{1,m}$, considérons $S_{N,k} := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} j_i(a_k)$. Pour tout $1 \leq k, \sigma(1), \sigma(2) \leq m$ et $\iota \in J$, supposons que*

$$\varphi^{(\iota)}(a_k) = 0, \varphi^{(\iota)}(a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}) = Q^{(\iota)}(\sigma(1), \sigma(2)) \qquad (*)$$

et $\chi_r(t) = \chi_r(t')$, pour tout $t \sim t'$ dans $\mathbf{N}^r$. Alors, pour tout $r \geq 1$ et $\sigma(1), \ldots, \sigma(r) \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\varphi}(S_{N,\sigma(1)} \cdots S_{N,\sigma(r)}) = \begin{cases} \sum_{\pi \in NC_2(r)} \prod_{l=1}^{p} Q_\pi(\pi(l)) & si\ r = 2p, \\ 0 & si\ r\ est\ impaire, \end{cases}$$

où

$$Q_\pi(\pi(l)) := Q^{(\tilde{\chi}_{\pi(l)}(t))}(\sigma(\pi_l(1)), \sigma(\pi_l(2))),\ \pi(l) = (\pi_l(1), \pi_l(2)),$$

$$\tilde{\chi}_{\pi(l)}(t) := \begin{cases} \chi_{\pi_l(2)}^{(r(l))}(t(l)) & si\ \pi(l)\ est\ intérieur, \\ \delta & sinon \end{cases},\ l = \overline{1,p},$$

$t(l)$ est le sous-mot réduit de t, préservant l'ordre de t, formé des lettres qui correspondent aux blocs de π contenant $\pi(l)$ [ou aux blocs extérieurs de π situés après $\pi(l)$], $r(l)$ est la longueur de $t(l)$, $t \in \mathbf{N}^r$ étant un représentant de la classe d'équivalence correspondant à $\pi = (\pi(l))_{l=\overline{1,p}}$.

Corollaire 3.4(Théorème limite de Poisson). - *Soient données les variables aléatoires a_N de A, et considérons, pour chaque $N \geq 1$, $S_N := \sum_{i=1}^{N} j_i(a_N)$. Pour tout $r \geq 1$, et $\iota \in J$, supposons que*

$$\lim_{N\to\infty} N \cdot \varphi^{(\iota)}((a_N)^r) =: \alpha^{(\iota)} \qquad (*)$$

ne dépend pas de r et $\chi_r(t) = \chi_r(t')$, pour tout $t \sim t'$ dans $\mathbf{N}^r$. Alors, pour tout $r \geq 1$:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{\varphi}((S_N)^r) = \sum_{p=1}^{r} \sum_{\pi \in NC(r)} \prod_{l=1}^{p} \alpha^{(\tilde{\chi}_{\pi(l)}(t))},$$

où

$$\tilde{\chi}_{\pi(l)}(t) := \begin{cases} \chi_{\pi_l(r_l)}^{(r(l))}(t(l)) & si\ \pi(l)\ est\ intérieur, \\ \delta & sinon \end{cases},$$

$\pi(l) = (\pi_l(1), \ldots, \pi_l(r_l))$, $l = \overline{1,p}$,

$t(l)$ est le sous-mot réduit de t, préservant l'ordre de t, formé des lettres qui correspondent aux blocs de π contenant $\pi(l)$ [ou aux blocs extérieurs de π situés après $\pi(l)$], $r(l)$ est la longueur de $t(l)$, $t \in \mathbf{N}^r$ étant un représentant de la classe d'équivalence correspondant à $\pi = (\pi(l))_{l=\overline{1,p}}$.

Remarque 3.5. - Les conditions $(*)$ peuvent être remplacées par des conditions plus faibles, en les supposant vraies seulement pour $\iota = \delta$ et $\iota = \chi_j^{(r)}(t)$, où $t \in \mathbf{N}^r$ et $j = \overline{1,r}$.

En particulier, si on suppose, pour tout $r \geq 1$ que

$\lim_{N \to \infty} N \cdot \varphi((a_N)^r) =: \xi$ et $\lim_{N \to \infty} N \cdot \varphi^{(\chi_j^{(r)}(t))}((a_N)^r) =: \eta$

ne dépennent pas de r, χ, $t \in \mathbf{N}^r$ et $j = \overline{1,r}$, alors le Corollaire 3.4 afirme que, pour tout $r \geq 1$:

$\lim_{N \to \infty} \hat{\varphi}((S_N)^r) = \sum_{p=1}^{r} \sum_{\pi \in NC(r)} \xi^{o(\pi)} \eta^{i(\pi)}$,

où $o(\pi)$ et $i(\pi)$ sont le nombre des blocs extérieurs et respectivement intérieurs de π (comparer à [7]).

4.Lois limite du théorème central limite γ-libre et les chemins de Catalan

Ensuite, en tant qu'application, on montre qu'on peut récupérer, par notre analogue du théorème central limite, toutes les lois de probabilité réelles symétriques ayant des moments de tout ordre.

En effet, on établit une connexion entre l'ensemble des lois limite du Corollaire 3.3, les fractions continues universelles de Stieltjes et le problème classique des moments, grâce à un résultat obtenu dans un contexte d'analyse combinatoire par Flajolet([10]).

Il s'agit de l'équivalence entre les séries caractéristiques des certains chemins marqués dans le plan et les fractions continues universelles de Stieltjes-Jacobi, qui a lieu dans l'algèbre $\mathbf{C}[[\mathcal{X}]]$ des séries formelles sur un alphabet non commutatif $\mathcal{X}$ à coefficients complexes.

Rappelons quelques faits de [10].

Les chemins de Catalan de longueur 2p sont les mots de la forme $\nu = \nu_0\nu_1 \ldots \nu_{2p}$, où $\nu_0 = 0 = \nu_{2p}$ et $\nu_k - \nu_{k-1} \in \{-1, 1\}, k = \overline{1,2p}$, du monoïde libre $\mathbf{N}^*$.

Notons par $\mathcal{C}$ l'ensemble de tous les chemins de Catalan.

Si l'alphabet $\mathcal{X}$ est formé des indéterminées non comutatives arbitraires $\mathcal{X}=\{\alpha(n), n \geq 0\} \bigcup \{\beta(n+1), n \geq 0\}$, alors *le chemin marqué*, noté $\lambda(\nu)$, d'un chemin de Catalan ν de longueur 2p est défini comme un mot du monoïd libre $\mathcal{X}^*$, par $\lambda(\nu) := u_1 u_2 \ldots u_{2p}$, où $u_k = \alpha(\nu_{k-1})$, si $\nu_k - \nu_{k-1} = 1$, et $u_k = \beta(\nu_{k-1})$, si $\nu_k - \nu_{k-1} = -1$, $k = \overline{1, 2p}$.

Notons $\mathcal{P}:=\lambda(\mathcal{C})$.

La série caractéristique de $\mathcal{P}$ est $char(\mathcal{P}) := \sum_{\nu \in \mathcal{C}} \lambda(\nu)$, considérée dans $\mathbf{C}[[\mathcal{X}]]$.

A l'aide de la bijection entre l'ensemble des chemins de Catalan de longueur 2p et $\Pi_2(2p)$, l'ensemble de $\pi \in \Pi(2p)$ dont chaque bloc a deux éléments, il n'est pas difficile d'observer le fait suivant sur $NC_2(2p)$. (Un résultat similaire peut être établi dans le cas général.)

Lemme 4.1([14]). - *Soient* $\pi \in \Pi_2(2p)$ *et* ν^π, *le chemin de Catalan associé. Alors* $\pi \in NC_2(2p)$ *ssi* $\nu_{\pi_l(1)} - \nu_{\pi_l(2)} = 1$, $l = \overline{1,p}$.*(De plus, si* $\pi(l)$ *est bloc extérieur dans* π, *alors* $\nu_{\pi_l(2)} = 0$, $\nu_{\pi_l(1)} = 1$.*)*

Spécialisons notre théorème central limite γ-libre.

Prenons J=N, $\delta = 0$ et considérons le cas d'une seule variable aléatoire $a \in A$, avec les notations de **3.**.

Pour tout $r \geq 1$, on note

$\mu_r := 0$, si r est impaire, et $\mu_r := \sum_{\pi \in NC_2(2p)} \prod_{l=1}^p Q_\pi(\pi(l))$, si r=2p.

Supposons que l'alphabet $\mathcal{X}$ est formé des indéterminées $\alpha(n) \cdot \beta(n+1) = \varphi^{(n)}(a^2)$, $n \geq 0$, appartenant au semigroupe multiplicatif $\mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$.

Soit $\pi = (\pi(l))_{l=\overline{1,p}} \in NC_2(2p)$, où $\pi(l) = (\pi_l(1), \pi_l(2))$, $l = \overline{1,p}$, et notons respectivement par [t] et $\nu^\pi = \nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{2p}$, la classe d'équivalence et le chemin de Catalan correspondant à π, $p \geq 1$ étant fixé.

Si de plus $\chi_k^{(r(l))}(t(l)) = \nu_k$, pour $k \in \{\pi_l(2), l = \overline{1,p}\}$, où $t(l)$ est le sous-mot de t associé à $\pi(l)$ par **3.3**(appelons γ *adaptée aux chemins de Catalan*, dans ce cas), alors $\lambda(\nu^\pi) = \prod_{l=1}^p Q_\pi(\pi(l))$, grâce au Lemme 4.1.

Donc μ_{2p} coïncide avec la série caractéristique des chemins de Catalan marqués de longueur 2p.

Notre théorème central limite prend ainsi la forme suivante(comparer à [7],

[23], [24], [28], [29], [30], [31]).

Théorème 4.2([14]). - *Soient* $(A, \varphi^{(0)})$ *un* $*$*-espace de probabilité,* $\{\varphi^{(n)}, n \geq 1\}$ *un ensemble supplementaire d'états spécifiés dans* A *et* $a \in A$, *tel que* $\varphi^{(n)}(a) = 0$, $\varphi^{(n)}(a^2) > 0$, *pour tout* $n \in \mathbf{N}$.

Considérons une puissance γ*-libre dénombrable* $(\hat{A}, \hat{\varphi})$ *de* $(A, \varphi^{(0)})$, *telle que* γ *soit adaptée aux chemins de Catalan, et notons* $S_N := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} j_i(a)$, $N \geq 1$, *où* j_i *sont les morphismes canoniques de* $\hat{A}$.
Alors $\lim_{N \to \infty} \hat{\varphi}((S_N)^r) = \mu_r$, $r \geq 1$, *où* $\mu_r = 0$, *si* r *est impaire, et* $\mu_r = \sum_{\pi \in NC_2(2p)} \prod_{l=1}^{p} \varphi^{(\nu_{\pi_l(2)})}(a^2)$, *si* r*=2*p, ν *étant le chemin de Catalan correspondant à* $\pi = (\pi(l))_{l=\overline{1,p}}$, *où* $\pi(l) = (\pi_l(1), \pi_l(2))$.

De plus, en appliquant le résultat fondamental de [10], il s'ensuit que:

Corollaire 4.3([14]). - *La série formelle* $\sum_{r \geq 0} \mu_r z^r$ *est équivalente à la fraction continue de Stieltjes*

$$S(\mathcal{X}, z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\varphi^{(0)}(a^2) z^2}{1 - \cfrac{\varphi^{(1)}(a^2) z^2}{1 - \ddots}}}$$

(Ici $\mu_0 = 1$.*)*

A ce point, rappelons une terminologie([1], [31]) qui vient du probléme classique des moments.

Notons par $\mathbf{C}$[X] l'algèbre des polynômes complexes d'une variable.

Appelons *lois de probabilité* dans $\mathbf{C}$[X] toutes les fonctionelles linéaires μ de $\mathbf{C}$[X] dans $\mathbf{C}$, telles que $\mu(1) = 1$. Disons qu'une loi de probabilité μ dans $\mathbf{C}$[X] est *positive*, si $\mu(P(x)) > 0$ pour tout polynôme $P \neq 0$, tel que $P(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, et *symétrique*, si tous ses moments d'ordre impaire sont nuls ($\mu(X^{2p+1}) = 0, \forall p \in \mathbf{N}$).

Un fait classique nous dit alors qu'une loi positive de probabilité dans $\mathbf{C}$[X] est donnée par une solution de Hamburger du problème classique des moments([1]).

Grâce à l'équivalence entre les séries formelles considérées et les fractions continues de Stieltjes, on conclut:

Corollaire 4.4([14]). - *L'ensemble des lois limite du théorème central limite γ-libre coïncide, dans ce contexte, avec l'ensemble des lois de probabilité réelles symétriques ayant des moments de tout ordre.*

Ainsi, on peut appliquer l'approche de Bhat et Parthasarathy([3]), pour réaliser dans cette situation des modèles d'opérateurs qui ont *la combinatoire*([24]) du théorème central limite γ-libre, en utilisant seulement les opérateurs de nombre, création et annihilation dans un espace L^2 de Hilbert adéquat.

Plus précisément, pour chaque loi de probabilité réelle symétrique μ, ayant des moments de tout ordre et t.q. l'espace des polynômes soit dense dans $L^2(\mu)$, considérons la suite des polynômes moniques orthonormaux e_n, $n \geq 0$, correspondant à μ.

Par rapport à cette base orthonormale de $L^2(\mu)$, l'opérateur auto-adjoint Z de multiplication par x à domaine maximal dans $L^2(\mu)$, a une matrice bidiagonale de Stieltjes, $[z_{ij}]$, t.q. $z_{i,i+1} = z_{i+1,i} \doteq g(i)$ et $z_{ij} = 0$ au cas contraire, où $g(i) :=< e_i, Ze_{i+1} >> 0$, $0 \leq i < dim L^2(\mu)$.

Ainsi, Z est égal à $g(\mathcal{N})\mathcal{L} + \mathcal{L}^* g(\mathcal{N})$ sur l'espace des polynômes, où $\mathcal{N}$ et $\mathcal{L}$ sont les opérateurs standard de nombre et respectivement d'annihilation ($\mathcal{N} = \sum_j j \mid e_j >< e_j \mid$, $\mathcal{L} = \sum_j \mid e_j >< e_{j+1} \mid$, dans la notation de Dirac).

La loi de Z dans l'état vide e_0 est alors μ.

N.B. - Cet ouvrage est une version revisée et corrigée de certains résultats de [13] et [14].

Remerciements. - A l'origine de ce travail se trouve un problème posé par Professeur Philippe Biane, qui m'a donné de nombreuses idées concernant son résolution. Je voudrais remercier Professeur Biane et lui exprimer ma gratitude pour avoir fait possible ce travail. Je voudrais remercier chaleureusement Professeur Dan Voiculescu pour ses conseils précieux concernant cet ouvrage, son encouragement et sa générosité. Je tiens remercier chaleureusement Professeurs Ioan Cuculescu, Marius Iosifescu et Ioan Suciu pour les discussions fructueuses sur le sujet. Je remercie également Professeurs Doina Cioranescu, Christian Duhamel et Marius Iosifescu pour la possibilité d'étudier à Paris VI dans le cadre du projet MATAROU et les conseils judicieux.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] N.I.AKHIESER, *THE CLASSICAL MOMENT PROBLEM*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1965.

[2] D.AVITZOUR, *Free products of C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 271(1982), 423-435.

[3] B.V.R.BHAT, K.R.PARTHASARATHY, *Generalized harmonic oscillators in quantum probability*, dans " Séminaire de Probabilités XXV (J.Azéma, P.A.Meyer, M.Yor (eds.)) ", Lect.Notes in Math. , 1485, Springer Verlag, 1991, 39-51.

[4] B.BLACKADAR, *K-THEORY for OPERATOR ALGEBRAS*, Mathematical Sciences Research Institute Publication Series, 5, Springer-Verlag, 1986.

[5] F.BOCA, *Free products of completely positive maps and spectral sets* , J. Funct. Anal. , 97(1991), 251-263.

[6] F.BOCA, *Completely positive maps on amalgamated products C^*-algebras*, Math. Scand. ,72(1993), 212-222.

[7] M.BOZEJKO,R.SPEICHER, *ψ-independent and symmetrized white noises* , dans " Quantum Probability and Related Topics VI (L.Accardi (ed.)) ", World Scientific, 1992, 219-236.

[8] A.M.COCKROFT, R.L.HUDSON, *Quantum mechanical Wiener process*, J.Multivariate Anal., 7(1977), 107-124.

[9] C.D.CUSHEN, R.L.HUDSON, *A quantum-mechanical central limit theorem*, J.Appl.Probab., 8(1971), 454-469.

[10] P.FLAJOLET, *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math. , 32(1980), 125-161.

[11] N.GIRI, W. von WALDENFELS, *An algebraic version of the central limit theorem*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 42(1978), 129-134.

[12] G.C.HEGERFELD, *Noncommutative analogs of probabilistic notions and results*, J.Funct. Anal., 64(1985), 436-456.

[13] V.IONESCU, *Free product of C^*-algebras via a family of maps*, Preprint, Bucharest, 1993.

[14] V.IONESCU, *Free independence with respect to a family of state sets*,

Preprint, Bucharest, 1994.

[15] V.IONESCU, *Conditionally free product of completely positive maps*, en préparation.

[16] R.V.KADISON, J.R.RINGROSE, *FUNDAMENTALS of THE THEORY of OPERATOR ALGEBRAS, vol.II*, Academic Press, Inc., 1986.

[17] G.G.KASPAROV, *Hilbert C^*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Theory, 4(1980), 133-150.

[18] G.KREWERAS, *Sur les partitions non croisées d'un cycle*, Discrete Math., 1(1972), 333-350.

[19] J. von NEUMANN, *On infinite direct products*, Compositio Math., 6(1938), 1-77.

[20] W.L.PASCHKE, *Inner product modules over B^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 182(1973), 443-468.

[21] R.T.POWERS, *Self-adjoint algebras of unbounded operators*, Comm. Math. Phys., 21(1971), 85-124.

[22] M.A.RIEFFEL, *Induced representations of C^*-algebras*, Adv. in Math., 13(1974), 176-257.

[23] G.SKANDALIS, *Algèbres de von Neumann de groupes libres et probabilités non commutatives [d'apres Voiculescu et al.]*, Séminaire Bourbaki, exposé 764, Novembre 1992.

[24] R.SPEICHER, *A new example of 'independence' and 'white noise'*, Probab. Th. and Rel. Fields, 84(1990),141-159.

[25] W.F.STINESPRING, *Positive functions on C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 6(1955),211-216.

[26] J.TOMIYAMA, *On the projection of norm one in W^*-algebras*, Proc. Jap. Acad., 33(1957), 608-612.

[27] H.UMEGAKI, *Conditional expectation in an operator algebra*, Tôhoku Math. J. , 6(1954), 358-362.

[28] D.VOICULESCU, *Symmetries of some reduced free product C^*-algebras*, dans "Operator Algebras and Their Connections with Topology and Ergotic Theory (H.Araki, C.C.Moore, S.Stratila, D.Voiculescu (eds.))", Lect. Notes in Math. 1132, Springer Verlag, New York, 1985, 556-588.

[29] D.VOICULESCU, *Free noncommutative random variables, random matrices and the II_1 factors of free groups*, dans " Quantum Probability and Related Topics VI (L.Accardi (ed.)) ", World Scientific, 1992, 473-487.

[30] D.VOICULESCU, *Operations on certain non -commutative operator-valued random variables*, Preprint, Berkeley, 1992.

[31] D.V.VOICULESCU, K.J.DYKEMA, A.NICA, *FREE RANDOM VARIABLES*, Centre de Recherches Mathématiques, Montréal, AMS 1992.

Centre de Statistique Mathématique de l'Académie Roumaine,
Bd. Magheru n^o 22, 70158, Bucarest 22, Roumanie.