INSTITUTUL DE MATEMATICA
AL ACADEMIEI ROMANE

PREPRINT SERIES OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS
OF THE ROMANIAN ACADEMY

ISSN 0250 3638

ABSENCE DES VALUES PROPRES POUR LES MILIEUX PLURISTRATIFIES

by

YVES DERMENJIAN and VIOREL IFTIMIE

Preprint nr. 1/1999

BUCURESTI

ABSENCE DES VALUES PROPRES
POUR LES MILIEUX PLURISTRATIFIES

by

YVES DERMENJIAN * and VIOREL IFTIMIE **

February, 1999

* LAPT, CNRS/UMR no. 6632, CMI, Universite de Provence, 39 rue Joliot Curie 13453 Marseille cedex 13, France.

** Universite de Bucarest, 14, rue Academiei, Bucarest, Romania.

Absence des values propres pour les milieux pluristratifiés

Yves DERMENJIAN
LAPT, CNRS/UMR no. 6632 ,
CMI, Universite de Provence
39 rue Joliot Curic, 13453 Marseille cedex 13

Viorel IFTIMIE
Universite de Bucarest,
14, rue Academiei,
Bucarest

On donne des conditions suffisantes pour la décroissance exponentielle des fonctions propres et absence des valeurs propres supérieures à un certain seuil de l'opérateur (introduit dans [6]) $H = H(\rho, V) := \nabla^* \rho \nabla + V$ dans $L^2(X)$, où X est un espace euclidien réel de dimension finie, V un potentiel du type "N corps" associé à une famille finie $\mathcal{L}$ de sous-espaces vectoriels de X et ρ admet une décomposition suivant $\mathcal{L}$, compatible avec celle de V. En particulier, $H(1, V)$ est un opérateur de Schrödinger à N corps, tandis que $H(\rho, 0)$ est le propagateur d'un milieu pluristratifié. On utilise une variante de la méthode de Froese et Herbst [9].

1. Introduction

Soit X un espace euclidien réel de dimension finie dont on désigne le produit scalaire (étendu en tant que fonctionnelle bilinéaire au complexifié) de deux éléments x et y par $x \cdot y$. Si $x \in X \otimes \mathbb{C}$, on pose $|x|^2 := x \cdot \bar{x}$. On note par dx la mesure riemannienne sur X. Si ∇ est l'opérateur "gradient" et ∇^* est la "divergence" (l'adjoint formel de ∇), alors $\triangle := \nabla^* \nabla$ sera l'opérateur

On définit de façon standard les espaces de Sobolev usuels $\mathcal{H}^s(X), s \in \mathbb{R}$. En particulier, $\mathcal{H}^\circ(X) = L^2(X)$.

Si E est un espace vectoriel normé, on désigne par $\|\cdot\|_E$ sa norme; si E est un espace de Hilbert, on note $(\cdot,\cdot)_E$ son produit scalaire. Si $E = L^2(X)$, on écrit simplement $(\cdot,\cdot)$ pour $(\cdot,\cdot)_{L^2(X)}$ et $\|\cdot\|$ pour $\|\cdot\|_{L^2(X)}$.

Si E et F sont deux espaces de Banach, on désigne par $\mathcal{B}(E,F)$ (resp. $\mathcal{K}(E,F)$) l'ensemble des opérateurs linéaires et bornés (resp. compacts) de E à F. En particulier, $\mathcal{B}(E) := \mathcal{B}(E,E), \mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E,E)$.

On utilise les notations classiques pour certains espaces de fonctions et distributions. On désigne par le même symbole une fonction et l'opérateur de multiplication par la même fonction.

On considère une famille finie $\mathcal{L}$ de sous-espaces vectoriels de X, qui vérifie les conditions:

I i) $0 \in \mathcal{L}, X \in \mathcal{L}$.

ii) Pour tous $Y, Z \in \mathcal{L}$, la somme vectorielle $Y + Z \in \mathcal{L}$.

Si $Y \in \mathcal{L}$, on pose $\mathcal{L}(Y) := \{Z \in \mathcal{L}; Z \subset Y\}$ et $Y^\perp := X \ominus Y$.

On se donne une constante $\rho^\circ \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $Y \in \mathcal{L}$, les fonctions réelles δ^Y et V^Y définies sur Y, telles que $\delta^\circ = 0, V^\circ \in \mathbb{R}$ et les hypothèses suivantes soient vérifiées:

II i) $\delta^Y \in L^\infty(Y)$ et $\lim_{|y|\to\infty} \delta^Y(y) = 0$.

ii) Si ∇^Y représente le gradient sur Y, alors $y \cdot \nabla^Y \delta^Y \in L^\infty(Y)$ et $\lim_{|y|\to\infty} y \cdot \nabla^Y \delta^Y(y) = 0$.

iii) La fonction $\rho^Y := \rho^\circ + \sum_{Z\in\mathcal{L}(Y)} \delta^Z \otimes 1_{Y\ominus Z}$ est strictement positive et $1/\rho^Y \in L^\infty(Y)$.

iv) Les fonctions δ^Y et $y \cdot \nabla^Y \delta^Y$ sont lipschitziennes sur Y.

III i) L'opérateur de multiplication avec V^Y appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{H}^1(Y), \mathcal{H}^{-1}(Y))$.

ii) L'opérateur de multiplication avec la distribution $y \cdot \nabla^Y V^Y$ appartient à $\mathcal{B}(\mathcal{H}^1(Y), \mathcal{H}^{-1}(Y))$.

iii) Le même opérateur appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{H}^2(Y), \mathcal{H}^{-2}(Y))$.

iv) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε, telle que l'on ait

$$((y \cdot \nabla^Y V^Y)\varphi, \varphi) \leq \varepsilon \| \nabla \varphi\|^2 + C_\varepsilon \|\varphi\|^2, \varphi \in \mathcal{H}^1(Y). \tag{1.1}$$

On note $\rho := \rho^X$ et $V := \sum_{Y \in \mathcal{L}} V_Y$, où $V_Y := V^Y \otimes 1_{Y^\perp}$ est une fonction définie sur X. L'extension du produit scalaire de $L^2(X)$ en tant que fonctionnelle sesquilinéaire sur $\mathcal{H}^{-s}(X) \times \mathcal{H}^s(X)$ $(s \geq 0)$, ou bien sur $\mathcal{D}'(X) \times \mathcal{C}_0^\infty(X)$ sera désignée aussi par $(\cdot, \cdot)$.

Considérons la forme quadratique symétrique $h(\rho, V)$ sur $\mathcal{H} = L^2(X)$, de domaine $\mathcal{H}^1(X)$ et définie par

$$h(\rho, V)(u, v) := \int_X \rho \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx + (Vu, v), u, v \in \mathcal{H}^1(X). \tag{1.2}$$

La forme $h(\rho, 0)$ est fermée, $\mathcal{C}_0^\infty(X)$ en est un domaine essentiel et il existe une constante $c > 0$ telle que $h(\rho, 0)(u, u) \leq c\| \nabla u\|^2, u \in \mathcal{H}^1(X)$. Alors, d'après l'hypothèse III i), la forme $h(0, V)$ est relativement bornée par rapport à $h(\rho, 0)$, de borne relative égale à zéro. Donc $h(\rho, V)$ est symétrique, fermée, semi-bornée inférieurement, $\mathcal{C}_0^\infty(X)$ en étant un domaine essentiel. Elle définit un opérateur $H = H(\rho, V)$ auto-adjoint sur $\mathcal{H}$, semi-borné inférieurement. Un élément $u \in \mathcal{H}^1(X)$ appartient à son domaine $D(H)$ s'il existe $f \in L^2(X)$ tel que l'on ait $h(\rho, V)(u, v) = (f, v)$ pour tout $v \in \mathcal{H}^1(X)$; dans cette situation, $Hu = f$. Nous aurons donc

$$h(\rho, V)(u, v) = (Hu, v), u \in D(H), v \in \mathcal{H}^1(X). \tag{1.3}$$

On a aussi $D(|H|^{1/2}) = \mathcal{H}^1(X)$, donc on peut considérer $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}^{-1}(X))$ et alors

$$Hu = \nabla^* \rho \nabla u + Vu, u \in \mathcal{H}^1(X). \tag{1.4}$$

Remarque 1.1. $H(1, V)$ est un hamiltonien d'un système à N corps dans le formalisme de Agmon-Froese-Herbst (voir [8], [1]), tandis que $H(\rho, 0)$ est le propagateur associé à un milieu pluristratifié. En particulier, le cas d'un milieu simplement stratifié (voir [11], [10], [4], [2]) est obtenu pour $X = \mathbb{R}^{m+n}$ et $\mathcal{L} = \{0, \mathbb{R}^m \times \{0\}, \mathbb{R}^{m+n}\}$.

Certaines propriétés spectrales (un principe d'absorption limite y compris) de l'opérateur H ont été étudiées dans [6]. Pour formuler les résultats de ce papier on désigne par $\tau(H)$ l'ensemble des seuils de H (c'est-à-dire le complémentaire de l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où l'on vérifie l'inégalité de Mourre: voir la section suivante). Remarquons que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, l'opérateur $H - \beta\rho$ est du même type que H.

Théorème 1.2. *On suppose vérifiées les hypothèses I, II i) - iii), III i)-iii). Soient λ une valeur propre de H, ψ une fonction propre correspondante et*

$$\alpha_0 := \sup\{\alpha \geq 0; \exp(\alpha|x|)\psi \in L^2(X)\}. \tag{1.5}$$

Alors $\alpha_0 = \infty$ ou bien $\lambda \in \tau(H - \alpha_0^2\rho)$.

Théorème 1.3. *Sous les hypothèses I, II et III, si ψ est une fonction de $D(H)$ telle que l'on ait $H\psi = \lambda\psi$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ et*

$$\exp(\alpha|x|)\psi \in L^2(X) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

alors $\psi = 0$.

Corollaire 1.4. *Sous les hypothèses I, II et III, l'opérateur H n'a aucune valeur propre strictement supérieure à V°. En particulier, $H(\rho, 0)$ n'a pas de valeur propres.*

Les démonstrations de ces résultats sont basées sur une variante de la méthode de Froese et Herbst [9] (voir aussi [3], [7] pour les hamiltoniens à N corps et [5], [10] pour certains propagateurs des milieux simplement stratifiés). L'utilisation des formes quadratiques a permis l'affaiblissement des hypothèses sur ρ; en particulier, on obtient une amélioration des résultats de [5].

Le contenu du papier est le suivant: dans la seconde section on rappelle certains résultats nécessaires de [6]. La section 3 est consacrée à la démonstration du théorème 1.2. Dans la derniére section on prouve le théorème 1.3 et le corollaire 1.4.

2. Propriétés générales.

On note $\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}\backslash\{X\}$ et pour $Y \in \mathcal{L}$ soient $\rho_Y := \rho^Y \otimes 1_{Y^\perp}$, $S_Y := \sum_{Z\in\mathcal{L}(Y)} V_Z$ et $H_Y := H(\rho_Y, S_Y)$, opérateur auto-adjoint semi-borné inférieurement sur $L^2(X)$. On définit H^Y, opérateur auto-adjoint sur $L^2(Y)$, à partir des familles $\mathcal{L}(Y)$, $\{\delta^Z\}_{Z\in\mathcal{L}(Y)}, \{V^Z\}_{Z\in\mathcal{L}(Y)}$. Par convention, $L^2(0) = \mathbb{C}, H^\circ = V^\circ$, $H_\circ = \rho^\circ \triangle + V^\circ$.

Si T est un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on désigne par $\sigma(T)$ (resp. $\sigma_{ess}(T), \sigma_{sc}(T), \sigma_p(T)$) la spectre de T (resp. le spectre essentiel, singulièrement continu, l'ensemble des valeurs propres).

On suppose partout dans cette section que les hypothèses I, II i)-iii), III i)-iii) sont vérifiées. Les propriétés ci-dessous ont été prouvées dans [6] sous des hypothèses légérement differentes; les modifications nécessaires dans les démonstrations sont évidentes.

Théorème 2.1. *On a*

$$\sigma_{ess}(H) = \bigcup_{Y\in\mathcal{L}_1} \sigma_{ess}(H_Y).$$

En particulier, $\sigma(H(\rho, 0)) = [0, \infty)$.

On désigne par A le générateur des dilatations sur X, opérateur auto-adjoint sur $L^2(X); \mathcal{C}_0^\infty(X)$ est un domaine essentiel de A et

$$Au = \frac{1}{2}(x \cdot Du + D^*(xu)), u \in \mathcal{C}_0^\infty(X), D = -i\nabla, i = \sqrt{-1}. \tag{2.1}$$

On peut définir la forme quadratique $i[H, A]$ par

$$(i[H, A]u, v) := i(Au, Hv) - i(Hu, Av), \quad u, v \in D(H) \cap D(A). \tag{2.2}$$

Proposition 2.2. *La forme (2.2) définit un opérateur symétrique* $i[H, A] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}^{-1}(X))$.

Définition 2.3. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ n'est pas un seuil pour H (et on écrit $\lambda \notin \tau(H)$) s'il existe $a, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ et $K \in \mathcal{K}(L^2(X))$, tels que l'on vérifie l'inégalité de Mourre

$$E(\Lambda)i[H,A]E(\Lambda) \geq aE(\Lambda) + K, \tag{2.3}$$

où $\Lambda := [\lambda - \delta, \lambda + \delta]$ et $E(\Lambda)$ désigne le projecteur spectral de H associè à Λ.

Il est évident que $\tau(H)$ est fermé.

On note aussi

$$\tau_\circ(H) := \bigcup_{Y \in \mathcal{L}_1} \sigma_p(H^Y). \tag{2.4}$$

On voit que $V^\circ \in \tau_\circ(H)$.

Théorème 2.4. *a) $\tau_\circ(H)$ est un ensemble dénombrable et fermé.*

b) On a $\tau(H) \subset \tau_\circ(H)$.

c) Les éléments de $\sigma_p(H) \backslash \tau_\circ(H)$ sont des valeurs propres de multiplicité finie, qui ne peuvent s'accumuler qu'aux points de $\tau_\circ(H)$. En particulier, $\tau_\circ(H) \cup \sigma_p(H)$ est un ensemble dénombrable et fermé.

3. Démonstration du théorème 1.2.

En suivant [9] et [3] on considère un fonction réele $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, telle que l'on ait

$$f' \geq 0, |f^{(k)}(t)| \leq C_k t^{1-k} \text{ pour } t \geq 1, k \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

où C_k est une constante.

On définit maintenant la fonction réelle $F \in \mathcal{C}^\infty(X)$ par $F(x) := f(\langle x \rangle)$, $x \in X$. Il est évident que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante C'_k telle que l'on ait

$$|\nabla^k F(x)| \leq C'_k \langle x \rangle^{1-k}, x \in X \tag{3.2}$$

et de plus $\nabla F(x) = xg(x)$ avec $g(x) := \langle x\rangle^{-1} f'(\langle x\rangle), x \in X$. On a donc

$$(3.2') \qquad g \geq 0 \text{ et } |\nabla^k g(x)| \leq C''_k \langle x\rangle^{-1-k} \text{ pour } x \in X, k \in \mathbb{N},$$

avec C''_k constante.

Lemme 3.1 *Soient $\psi \in D(H)$ telle que $H\psi = \lambda\psi$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\psi_F := e^F\psi$. On suppose que $\psi_F \in L^2(X)$. Alors on a les propriétés suivantes:*

a) $\psi_F \in D(H)$.

b) $(H\psi_F, \psi_F) = ((\lambda + \rho|\nabla F|^2)\psi_F, \psi_F)$.

Démonstration. a) Remarquons d'abord que si $\varphi(x) := \theta(\langle x\rangle), x \in X$ où $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors $\varphi\psi \in D(H)$. En effet, en considérant $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}^{-1}(X))$, un calcul direct en formes montre que

$$(3.3) \quad H(\varphi\psi) = \lambda\varphi\psi - 2\rho(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi) + \rho(\Delta\varphi)\psi - \langle x\rangle^{-1}\theta'\langle x\rangle(x.\nabla\rho)\psi.$$

On a $\varphi\psi \in \mathcal{H}^1(X)$ et le terme du côté droit de (3.3) est dans $L^2(X)$, donc $\varphi\psi \in D(H)$.

On réécrit maintenant (3.3) sous la forme

$$(3.3') \quad H(\varphi\psi) = \lambda\varphi\psi + 2\nabla^*(\rho\psi\nabla\varphi) - \rho\psi\Delta\varphi + \langle x\rangle^{-1}\theta'(\langle x\rangle)(x\cdot\nabla\rho)\psi.$$

On choisit $\theta(t) = \theta_k(t) := \chi(t/k)e^{f(t)}, t \in \mathbb{R}, k \geq 1$, où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(t) = 1$ si $|t| \leq 2$. Alors $\varphi(x) = \varphi_k(x) = \chi_k(x)e^{F(x)}$, où $\chi_k(x) := \chi(\langle x\rangle/k)$. On voit facilement en utilisant (3.3') que

$$H(\chi_k\psi_F) = H(\varphi_k\psi) = \lambda\chi_k\psi_F + 2\nabla^*(\rho a_k\psi_F) - \rho b_k\psi_F + (x\cdot\nabla\rho)c_k\psi_F =: \alpha_k,$$

où

$$\lim_{k\to\infty} a_k\psi_F = \psi_F \nabla F \text{ dans } L^2(X, X),$$
$$\lim_{k\to\infty} b_k\psi_F = (\Delta F - |\nabla F|^2)\psi_F \text{ dans } L^2(X)$$

et

$\lim_{k\to\infty} c_k\psi_F = g\psi_F$ dans $L^2(X)$.

Il existe donc $\alpha \in \mathcal{H}^{-1}(X)$ tel que $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$ dans $\mathcal{H}^{-1}(X)$. Alors $(H+i)(\chi_k\psi_F) = \alpha_k + i\chi_k\psi_F$ et comme $H+i$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}^1(X)$ sur $\mathcal{H}^{-1}(X)$, nous avons $\chi_k\psi_F = (H+i)^{-1}(\alpha_k + i\chi_k\psi_F)$, donc $\psi_F \in \mathcal{H}^1(X)$ et $H\psi_F = \alpha$.

Maintenent on utilise (3.3) avec $\varphi = \varphi_k$ et on constate que $H(\chi_k\psi_F) = \beta_k$, où $\lim_{k\to\infty} \beta_k = \beta$ dans $L^2(X)$, où $\beta := \lambda\psi_F + \rho|\nabla F|^2\psi_F + \nabla^*(\rho(\nabla F)\psi_F) - \rho(\nabla F)\cdot(\nabla\psi_F)$. On en déduit comme ci-dessus que $\psi_F \in D(H)$ et que

$$H\psi_F = \lambda\psi_F + \rho|\nabla F|^2\psi_F + \nabla^*(\rho(\nabla F)\psi_F) - \rho(\nabla F)\cdot(\nabla\psi_F). \tag{3.3''}$$

b) En utilisant (3.3") on obtient

$$\begin{aligned}(H\psi_F,\psi_F) &= ((\lambda+\rho|\nabla F|^2)\psi_F,\psi_F) \quad +Re[(\rho\psi_F,(\nabla F)\cdot(\nabla\psi_F)) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -((\nabla F)\cdot(\nabla\psi_F),\rho\psi_F)] \\ &= ((\lambda+\rho|\nabla F|^2|\psi_F,\psi_F).\end{aligned}$$

q.e.d.

Lemme 3.2. *Soit ψ comme dans l'énoncé du lemme 3.1. Alors on a les propriétés suivantes:*

a) $g^{1/2}A\psi_F \in L^2(X)$.

b) Si $\tilde{A} := iA$, on a l'égalité

$$([H,\tilde{A}]\psi_F,\psi_F) = -4\|(\rho g)^{1/2}\tilde{A}\psi_F\|^2 + ((x\cdot\nabla G)\psi_F,\psi_F) + E_F(\psi), \tag{3.4}$$

où

$$G := -\rho|\nabla F|^2 + \rho(x\cdot\nabla g) \tag{3.5}$$

et

$$E_F(\psi) := -2Re(g\tilde{A}\psi_F,(x\cdot\nabla\rho)\psi_F). \tag{3.6}$$

Démonstration. Soient χ_k de la démonstration du lemme 3.1 et $u_k := \chi_k\psi$. On a $\psi_F \in D(H)$ et d'après la première partie de la démonstration du lemme 3.1 on a aussi $u_k \in D(H)$ et $u_{k,F} := \chi_k\psi_F \in D(H)$. Il est évident que $u_{k,F} \in D(\tilde{A})$ et alors un calcul direct mène à l'identité

$$
\begin{aligned}
([e^F\tilde{A}e^F, H-\lambda]u_k, u_k) := \; & -((H-\lambda)u_k, e^F\tilde{A}u_{k,F}) \\
& -(e^F\tilde{A}u_{k,F}, (H-\lambda)u_k) = \\
& -([H,\tilde{A}]u_{k,F}, u_{k,F}) - 4\|(\rho g)^{1/2}\tilde{A}u_{k,F}\|^2 \\
& +((x\cdot\nabla G)u_{k,F}, u_{k,F}) + E_F(u_k).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

En tenant compte du fait que

$$
\lim_{k\to\infty} u_{k,F} = \psi_F \text{ dans } \mathcal{H}^1(X) \tag{3.8}
$$

et des propriétés suivantes: $x\cdot\nabla\rho, x\cdot\nabla G \in L^\infty(X)$ et $g\tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), L^2(X))$, on déduit que

$$
\lim_{k\to\infty}((x\cdot\nabla G)u_{k,F}, u_{k,F}) = ((x\cdot\nabla)\psi_F, \psi_F) \text{ et } \lim_{k\to\infty} E_F(u_k) = E_F(\psi). \tag{3.9}
$$

La proposition 2.2 et (3.8) montrent que

$$
\lim_{k\to\infty}([H,\tilde{A}]u_{k,F}, u_{k,F}) = ([H,\tilde{A}]\psi_F, \psi_F). \tag{3.10}
$$

On a aussi

$$
(([e^F\tilde{A}e^F, H-\lambda]u_k, u_k) = 2Re(\langle x\rangle^{-1}\tilde{A}u_{k,F}, \langle x\rangle e^F(H-\lambda)u_k)
$$

et

$$
\langle x\rangle e^F(H-\lambda)u_k = \langle x\rangle e^F(-\rho(\nabla\chi_k)\cdot(\nabla\psi) + \nabla^*(\rho\psi\nabla\chi_k)),
$$

la dernière expression tendant vers 0 dans $L^2(X)$ si $k\to\infty$, car $e^F\psi \in \mathcal{H}^1(X)$. En tenant compte du fait que $\langle x\rangle^{-1}\tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), L^2(X))$ et de (3.8), on en déduit que

$$
\lim_{m\to\infty}([e^F\tilde{A}e^F, H-\lambda]u_k, u_k) = 0. \tag{3.11}
$$

Les relations (3.7) et (3.9) - (3.11) impliquent l'existence de la limite de $||(\rho g)^{1/2}\tilde{A}u_{k,F}||$ pour $k \to \infty$. Un raisonement standard (pour les détails voir la démonstration de la proposition 4.16 de [3]) montre que l'on a

$$(3.12) \quad \psi_F \in D((\rho g)^{1/2}\tilde{A}) \text{ et } \lim_{k\to\infty}(\rho g)^{1/2}\tilde{A}u_{k,F} = (\rho g)^{1/2}\tilde{A}\psi_F \text{ dans } L^2(X).$$

On en déduit a) et, par passage à la limite dans (3.7), b) aussi.

q.e.d.

Pour démontrer le théorème 1.2 on suppose, par l'absurde, que $\alpha_0 < \infty$ et que $\lambda \notin \tau(H - \alpha_0^2\rho)$. Alors pour tout $\gamma \in (0,1)$ on a $\exp((1-\gamma)\alpha_0|x|)\psi \in L^2(X)$ et $\exp((\gamma + \alpha_0)|x|)\psi \notin L^2(X)$. Dans les estimations ci-dessous les constantes seront indépendantes de γ. La manière usuelle de parvenir à une contradiction pour γ petit, est de minorer le premier terme de (3.4) en utilisant l'inégalité de Mourre pour l'opérateur $H - \alpha_0^2\rho$ en λ et de majorer l'expression du côté droit de la même relation, en tenant compte du fait que le premier terme de ce côté est ≤ 0. Pour ce faire, on a besoin d'un bon choix pour la fonction F et de certaines estimations.

En suivant [3], on définit pour tout $s \geq 0$ la fonction $\chi_s : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ par

$$\chi_s(t) := \int_0^1 \langle s\mu\rangle^{-2}d\mu.$$

Il est évident que $\chi_s(t) > 0$, que $\chi_s(t) \nearrow t$ si $s \searrow 0$ et que pour tout $s > 0$ il existe une constante C_s telle que $\chi_s(t) \leq C_s$ pour tout $t \geq 1$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_k, indépendante de s, telle que l'on ait

$$(3.13) \qquad |\chi_s^{(k)}(t)| \leq C_k t^{1-k}, t \geq 1, s \geq 0.$$

On introduit maintenant pour tout $\gamma \in (0,1)$ et tout $s \geq 0$, une fonction réelle croissante $f_s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que l'on ait

$$(3.14) \qquad f_s(t) = (1-\gamma)\alpha_0 t + \gamma(1+\alpha_0)\chi_s(t) \quad \text{pour } t \geq 1.$$

Cette fonction vérifie (3.1) avec des constantes indépendantes de $\gamma \in (0,1)$ et $s \geq 0$.

On note finalement avec F_s et g_s, les fonctions de $\mathcal{C}^\infty(X)$, définies par $F_s(x) := f_s(\langle x \rangle)$, respectivement $g_s(x) := \langle x \rangle^{-1} f_s'(\langle x \rangle), x \in X$. Les estimations (3.2) et (3.2') seront vérifiées elles aussi avec des constantes indépendantes de $\gamma \in (0,1)$ et $s \geq 0$.

En tenant compte des conditions vérifiées par α_0, nous aurons

$$e^{F_s}\psi \in L^2(X) \text{ pour tout } s > 0, \text{ mais } e^{F_0}\psi \notin L^2(X). \tag{3.15}$$

Pour $s > 0$ on note $\psi_s := e^{F_s}\psi$, $\Psi_s := \psi_s / ||\psi_s||$.

Lemme 3.3. *a) Pour tout borélien borné $B \subset X$,*

$$\lim_{s \searrow 0} \int_B (|\Psi_s|^2 + | \nabla \Psi_s|^2) dx = 0. \tag{3.16}$$

b) On a

$$\lim_{s \searrow 0} \Psi_s = 0 \text{ pour la topologie faible de } L^2(X). \tag{3.17}$$

c) Il existe une constante $C > 0$, indépendante de $s > 0$ et $\gamma \in (0,1)$ telle que l'on ait

$$||H\Psi_s|| \leq C \tag{3.18}$$

et

$$||(\rho g_s)^{1/2} \tilde{A} \Psi_s|| \leq C. \tag{3.19}$$

Démonstration. a) est une conséquence directe du fait que $\lim_{s \searrow 0} ||\psi_s|| = \infty$, tandis que b) résulte de a).

En utilisant le lemme 3.1 b) et le fait que V est Δ-borné au sens des formes avec la borne relative égale à 0, on obtient que $|| \nabla \Psi_s|| \leq C$ avec C constante indépendante de $\gamma \in (0,1)$ et $s > 0$. Alors (3.18) résulte de (3.3").

Pour obtenir (3.19) il suffit d'utiliser la relation (3.4) appliquée à Ψ_s, la proposition 2.2 ainsi que l'estimation ci-dessous pour $\| \bigtriangledown \Psi_s\|$ pour majorer le terme du côté gauche de (3.4), le fait que $x \cdot \bigtriangledown G \in L^\infty(X)$ et finalement l'inégalité

$$(3.20) \qquad |E_{F_s}(\psi| \leq \|(\rho g_s)^{1/2}\tilde{a}\psi_s\|^2 + \|(x \cdot \bigtriangledown\rho)(g_s/\rho)^{1/2}\psi_s\|^2,$$

divisée par $\|\psi_s\|^2$.

q.e.d.

Pour Λ borélien de $\mathbb{R}$ on désigne par $E^0(\Lambda)$ le projecteur spectral de $H - \alpha_0^2\rho$ associé à Λ.

Lemme 3.4. *a) Pour tout $s > 0$ on se donne une fonction $h_s : X \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée (uniformément par rapport à s), telle que $\lim_{|x|\to\infty} h_s(x) = 0$ uniformément en s. Alors on a*

$$(3.21) \qquad \lim_{s\searrow 0} \|h_s\Psi_s\| = 0, \quad \lim_{s\searrow 0} \|h_s(\rho g_s)^{1/2}\tilde{A}\Psi_s\| = 0.$$

b) Il existe une constante C indépendante de $\gamma \in (0,1)$, telle que l'on ait

$$(3.22) \qquad \overline{\lim}_{s\searrow 0}\|H - \lambda - \alpha_0^2\rho)\Psi_s\| \leq C\gamma.$$

c) Si $\Lambda := [\lambda-\delta, \lambda+\delta]$ avec $\delta > 0$, il existe une constante C indépendante de $\gamma \in (0,1)$ telle que l'on vérifie

$$(3.23) \qquad \overline{\lim}_{s\searrow 0}\|E^0(\mathbb{R}\backslash\Lambda)\Psi_s\| \leq C\gamma$$

et

$$(3.24) \qquad \overline{\lim}_{s\searrow 0}\|H - \alpha_0^2\rho)E^0(\mathbb{R}\backslash\Lambda)\Psi_s\| \leq C\gamma.$$

Démonstration. a) Pour tout $N \geq 1$ on désigne par $\chi_{N,s}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\{x \in X; h_s(x) < 1/N\}$; alors $1 - \chi_{N,s}$ a le support inclus dans un borné B de X, indépendant de s. Il existe donc une constante C telle que pour tout $N \geq 1$ on ait

$$\overline{\lim_{s\searrow 0}}\, \|h_s\Psi_s\| \leq \overline{\lim_{s\searrow 0}}(N^{-1/2}\|\Psi_s\| + C(\int_B |\Psi_s|^2 dx)^{1/2}) \leq N^{-1/2}$$

où l'on utilise (3.16). De la même façon on prouve l'autre égalité de (3.21) à partir des relations (3.16) et (3.19).

b) En tenant compte de (3.3"), de la relation $\nabla F_s = xg_s$ et de l'expression de $\tilde{A}$ on obtient facilement l'égalité

$$\begin{aligned}(H - \lambda - \alpha_0^2\rho)\Psi_s = & -[(x\cdot\nabla\rho)g_s + \rho(x\cdot\nabla g_s)]\Psi_s \\ & -\rho g_s\tilde{A}\Psi_s + \rho(|\nabla F_s|^2 - \alpha_0^2)\Psi_s.\end{aligned} \tag{3.25}$$

D'autre part, un calcul direct à partir de l'expression de F_s prouve que

$$|\nabla F_s|^2 - \alpha_0^2 = -\alpha_0^2\langle x\rangle^{-2} + \gamma R(x; s, \gamma), \tag{3.26}$$

où $R \in \mathcal{C}^\infty(X)$, R et $x.\nabla R$ étant bornées uniformément par rapport à $s \geq 0$ et $\gamma \in (0,1)$.

Les fonctions

$h'_s(x) := -(x\cdot\nabla\rho)g_s - \rho(x\cdot\nabla g_s) - \alpha_0^2\rho\langle x\rangle^{-2}, x \in X$ et $h''_s := -(\rho g_s)^{1/2}$

vérifient les hypothèses de a) et (3.25) implique

$$(H - \lambda - \alpha_0^2\rho)\Psi_s = h'_s\Psi_s + h''_s(\rho g_s)^{1/2}\tilde{A}\Psi_s - \gamma\rho R\Psi_s, \tag{3.26}$$

d'où l'on déduit (3.22).

c) Pour obtenir (3.23) il suffit d'utiliser (3.22) et l'inégalité

$$\|E^0(\mathbb{R}\backslash\Lambda)\Psi_s\| \leq \delta^{-1}\|E^0(\mathbb{R}\backslash\Lambda)(H - \lambda - \alpha_0^2\rho)\Psi_s\|.$$

L'inégalité (3.24) résulte directement de (3.22) et (3.23).

q.e.d.

Lemme 3.5. *Pour tout $\delta > 0$ il existe une constante C indépendante de $\gamma \in (0,1)$ telle que l'on ait*

$$\overline{\lim}_{s\searrow 0}(E^0(\Lambda)[H - \alpha_0^2\rho, \tilde{A}]E^0(\Lambda)\Psi_s, \Psi_s) \leq C\gamma. \tag{3.27}$$

Démonstration. *La proposition 2.2 montre que l'opérateur* $(H - \alpha_0^2\rho + i)^{-1}[H - \alpha_0^2\rho, \tilde{A}](H - \alpha_0^2\rho + i)^{-1}$ est borné sur $L^2(X)$. Alors, en utilisant

(3.24), on déduit l'existence d'une constante C, indépendante de $\gamma \in (0,1)$, telle que l'on ait

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{s\searrow 0}(E^0(\Lambda)[H-\alpha_0^2\rho,\tilde{A}]E^0(\Lambda)\Psi_s,\Psi_s) \leq \\ &\overline{\lim}_{s\searrow 0}([H-\alpha_0^2\rho,\tilde{A}]\Psi_s,\Psi_s) + C_1\gamma. \end{aligned} \tag{3.28}$$

D'autre part, en utilisant les relations (3.4) et (3.20) ainsi que l'égalité (au sens des formes)

$[H-\alpha_0^2\rho,\tilde{A}] = [H,\tilde{A}] + (x\cdot\nabla)(\rho|\nabla F_s|^2) + [\rho(|\nabla F_s|^2-\alpha_0^2),\tilde{A}]$,

on obtient que

$$([H-\alpha_0^2\rho,\tilde{A}]\Psi_s,\Psi_s) \leq (h_s\Psi_s,\Psi_s) - \gamma((x\cdot\nabla)(\rho R)\Psi_s,\Psi_s), \tag{3.29}$$

où R est défini par (3.26) et

$$\begin{aligned} h_s &:= (x\cdot\nabla\rho)(x\cdot\nabla g) + \rho(x\cdot\nabla)^2 g + (x\cdot\nabla\rho)^2 g_s/\rho \\ &-2\alpha_0^2\rho|x|^2\langle x\rangle^{-4} + \alpha_0^2(x\cdot\nabla\rho)\langle x\rangle^{-2}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

On voit que h_s a les propriétés du lemme 3.4 a) et alors, en tenant compte des propriétés de R, les inégalités (3.28) et (3.29) impliquent (3.27).

q.e.d.

Lemme 3.6. *Si $\delta > 0$ est assez petit, il existe les constantes $C_1 > 0$ et C_2 indépendantes de $\gamma \in (0,1)$, telles que l'on vérifie*

$$\underline{\lim}_{s\searrow 0}(E^0(\Lambda)[H-\alpha_0^2\rho,\tilde{A}]E^0(\Lambda)\Psi_s,\Psi_s) \geq C_1 - C_2\gamma. \tag{3.31}$$

Démonstration. On choisit δ tel que l'inégalité de Mourre (2.3) soit vérifiée pour $H-\alpha_0^2\rho$ et Λ. Il existe donc $a>0$ et $K\in\mathcal{K}(L^2(X))$ tels que l'on ait

$(E^0(\Lambda)[H-\alpha_0^2\rho,\tilde{A}]E^0(\Lambda)\Psi_s,\Psi_s) \geq a(1-\|E^0(\mathbb{R}\backslash\Lambda)\Psi_s\|^2) + (K\Psi_s,\Psi_s)$.

En utilisant (3.17) et (3.23) on déduit (3.31).

q.e.d.

La démonstration du théorème 1.2 est maintenent finie, car les inégalités (3.27) et (3.31) fournissent une contradiction pour $\gamma > 0$ assez petit.

4. Démonstration du théorème 1.3.

On suppose dès maintenant toutes les hypothèses I, II et III vérifiées. Soient $\psi \in D(H)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $H\psi = \lambda\psi$ et que l'on vérifie (1.6). En utilisant une idée de [5], on va s'occuper de la fonction $\varphi := \rho^{1/2}\psi$, qui sous l'hypothèse II iv) est dans $\mathcal{H}^1(X)$. Les hypothèses III i) et II iv) impliquent $\rho^{-1}V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}^{-1}(X))$. En même temps, $\nabla\rho \in L^\infty(X; X)$ et alors l'opérateur de multiplication avec la distribution $\triangle\rho$ appartient à $\mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}^{-1}(X)$; la même chose sera vraie pour $\rho^{-1} \triangle \rho$. Alors un calcul direct montre que l'on a

$$(4.1) \qquad \triangle\varphi + W\varphi = 0 \text{ dand } \mathcal{H}^{-1}(X),$$

où

$$(4.2) \quad W := \rho^{-1}V - \frac{1}{2}\rho^{-1} \triangle \rho - \frac{1}{4}\rho^{-2}|\nabla \rho|^2 - \lambda\rho^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}^{-1}(X)).$$

Lemme 4.1. *a) En considérant W en tant que forme sur $L^2(X)$, celle-ci sera $\triangle$-bornée avec la borne relative égale à 0.*

b) L'opérateur de multiplication avec la distribution $x \cdot \nabla W$ est dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}^{-1}(X))$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante C_ϵ, telle que l'on ait

$$(4.3) \qquad ((x \cdot \nabla W)\chi, \chi) \le \epsilon\|\nabla \chi\|^2 + C_\epsilon\|\chi\|^2, \chi \in \mathcal{H}^1(X).$$

Démonstration. a) L'hypothèse III i) implique le fait que V est $\triangle$-borné au sens des formes, avec la borne relative égale à 0. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante C'_ϵ telle que l'on ait

$$(4.4) \qquad |(V\theta, \theta)| \le \epsilon\|\nabla \theta\|^2 + C'_\epsilon\|\theta\|^2, \theta \in \mathcal{H}^1(X).$$

En choisissant ci-dessus $\theta = \rho^{-1/2}\chi, \chi \in \mathcal{H}^1(X)$, on trouve une autre constante C''_ϵ telle que l'on ait

$$(4.4') \qquad |(\rho^{-1}V\chi, \chi)| \leq \epsilon \| \nabla \chi\|^2 + C''_\epsilon \|\chi\|^2, \chi \in \mathcal{H}^1(X),$$

pour tout $\epsilon > 0$.

D'autre part, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante C'''_ϵ telle que l'on vérifie pour $\chi \in \mathcal{H}^1(X)$

$$(4.5) \qquad \begin{aligned} |(\rho^{-1}(\triangle\rho)\chi, \chi)| = & \ |(\rho^{-1}\chi, (\nabla\rho) \cdot (\nabla\chi)) + ((\nabla\rho) \cdot \nabla(\rho^{-1}\chi), \chi)| \\ & \leq \epsilon \| \nabla \chi\|^2 + C'''_\epsilon \|\chi\|^2. \end{aligned}$$

L'affirmation a) résulte de (4.4') et (4.5), car les deux derniers termes de (4.2) sont bornés.

b)Pour prouver cette affirmation il suffit de s'occuper de $W_1 := \rho^{-1}V$ et $W_2 := \rho^{-1} \triangle \rho$ car on peut estimer facilement $x \cdot \nabla(W - W_1 + 1/2W_2)$ en utilisant le fait que $x \cdot \nabla\rho \in L^\infty(X)$, $\nabla(x \cdot \nabla\rho) \in L^\infty(X; X)$.

D'après les hypothèses III ii) et iv), l'opérateur $x \cdot \nabla V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}^{-1}(X))$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante C^{IV}_ϵ telle que l'on vérifie l'inegalité

$$(4.6) \qquad ((x \cdot \nabla V)\theta, \theta) \leq \epsilon \| \nabla \theta\|^2 + C^{IV}_\epsilon \|\theta\|^2, \theta \in \mathcal{H}^1(X).$$

On a l'égalité $x \cdot \nabla W_1 = \rho^{-1}(x \cdot \nabla V) - \rho^{-2}(x \cdot \nabla\rho)V$, donc $x \cdot \nabla W_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}^{-1}(X))$. Il est évident aussi que W_1 vérifie une inégalité du type (4.3), car pour le premier terme de l'expression de $x \cdot \nabla W_1$ on applique (4.6) à $\theta = \rho^{-1/2}\chi, \chi \in \mathcal{H}^1(X)$, tandis que pour l'autre on utilise une polarisation de $(V\varphi, \varphi)$ et (4.4) et le fait que $\nabla\rho, \nabla(x \cdot \nabla\rho) \in L^\infty(X, X)$.

Pour finir on remarque l'identité en $\chi \in \mathcal{H}^1(X)$

$$\begin{aligned} ((x \cdot \nabla W_2)\chi, \chi) = & \ -((\rho^{-2}(x \cdot \nabla\rho) \triangle \rho)\chi, \chi) \\ & +((\rho^{-1} \triangle (x \cdot \nabla\rho))\chi, \chi) - 2((\rho^{-1} \triangle \rho)\chi, \chi) \end{aligned}$$

et on estime les trois termes du côté droit en utilisant des inégalités du type (4.5).

q.e.d.

On définit pour tout $\alpha \geq 0$ la fonction $F_\alpha : X \to \mathbb{R}$, $F_\alpha(x) := \alpha\langle x\rangle$, qui vérifie les conditions du §3, car $F_\alpha(x) = f_\alpha(\langle x\rangle)$ avec $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(t) := \alpha t, t \in \mathbb{R}$ et f_α a la propriété (3.1). On voit aussi que $\nabla F_\alpha = x g_\alpha$, où $g_\alpha : X \to \mathbb{R}$, $g_\alpha(x) := \alpha\langle x\rangle^{-1}$. Une application directe des lemmes 3.1 a) et 3.2 a) donne le

Lemme 4.2. *Si ψ vérifie les conditions du théorème 1.3 et $\varphi_\alpha := e^{F_\alpha}\rho^{1/2}\psi$, $\alpha \geq 0$, alors nous aurons:*

a) $\varphi_\alpha \in \mathcal{H}^1(X)$,

b) $g_\alpha^{1/2}\tilde{A}\varphi_\alpha \in L^2(X)$.

Remarquons maintenant que le lemme 4.1 a) et le théorème de représentation des formes quadratiques permettent de définir un opérateur $\widetilde{H}$ auto-adjoint sur $L^2(X)$ par:

$$\widetilde{H}u := \Delta u + Wu, u \in D(\widetilde{H}) := \left\{u \in \mathcal{H}^1(X); \Delta u + Wu \in L^2(X)\right\}. \tag{4.7}$$

Alors $\varphi := \rho^{1/2}\psi \in D(\widetilde{H})$ et $\widetilde{H}\varphi = 0$.

On vérifie aussi facilement, en utilisant le lemme 4.1 b), que le commutateur $[\widetilde{H}, \tilde{A}]$, calculé au sens des formes est défini par l'opérateur

$$[\widetilde{H}, \tilde{A}] := 2\,\Delta - x \cdot \nabla W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}^{-1}(X)). \tag{4.6}$$

Un calcul direct dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}^{-1}(X))$, du même type que celui utilisé dans la démonstration des lemmes 3.1 et 3.2, permet de prouver le

Lemme 4.3. *Les égalités suivantes sont vérifiées:*

$$(\widetilde{H}\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) = (|\nabla F_\alpha|^2\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) \tag{4.9}$$

et

$$([\widetilde{H}, \tilde{A}]\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) = -4\|g_\alpha^{1/2}\tilde{A}\varphi_\alpha\|^2 + (G_\alpha\varphi_\alpha, \varphi_\alpha), \tag{4.10}$$

où

$$G_\alpha := (x \cdot \nabla)^2 g_\alpha - (x \cdot \nabla)|\nabla F_\alpha|^2. \tag{4.11}$$

En revenant à la démonstration du théorème 1.3, on utilise d'abord (4.8), (4.3) et (4.10) pour écrire

$$\begin{aligned} 2\|\nabla \varphi_\alpha\|^2 &= ([\widetilde{H}, \tilde{A}]\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) + ((x \cdot \nabla W)\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) \\ &\leq (G_\alpha \varphi_\alpha, \varphi_\alpha) + \epsilon\|\nabla \varphi_\alpha\|^2 + C_\epsilon\|\varphi_\alpha\|^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

D'autre part, en utilisant (4.7), (4.9) et le lemme 4.1 a) on trouve que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C'_\epsilon > 0$ telle que l'on vérifie

$$\begin{aligned} \|\nabla \varphi_\alpha\|^2 &= (\widetilde{H}\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) - (W\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) \\ &\geq (|\nabla F_\alpha|^2 \varphi_\alpha, \varphi_\alpha) - \epsilon\|\nabla \varphi_\alpha\|^2 - C'_\epsilon\|\varphi_\alpha\|^2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

En choisissant $\epsilon > 0$ assez petit et en comparant (4.12) et (4.13) compte tenu de l'expression de F_α, on trouve qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de α, telle que l'on vérifie l'inégalité

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_X |\varphi_\alpha|^2[\alpha^2(|x|^2\langle x\rangle^{-2} + 2C|x|^2\langle x\rangle^{-4}) \\ &+C\alpha(|x|^2\langle x\rangle^{-3} - 3|x|^2\langle x\rangle^{-5} - 2C]dx \leq 0 \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \geq 0$. Mais pour α assez grand et $x \neq 0$ fixé l' expression de la paranthèse ci-dessus est croissante et tend vers ∞ si $\alpha \to \infty$. Ceçi implique $\psi = 0$.

q.e.d.

Démonstration de corollaire 1.4.

Prouvons que pour tout $Y \in \mathcal{L}$ et tout $\beta \geq 0$ on a

$$\sigma_p(H^Y - \beta\rho^Y) \cap (V^\circ - \beta\rho^\circ, \infty) = \emptyset. \tag{4.14}$$

On procède par récurrence sur $Y \in \mathcal{L}$. Pour $Y = 0$ c'est évident. Supposons maintenant (4.14) vérifié pour tout $Y \in \mathcal{L}_1$. Alors $\tau(H - \beta\rho) \cap (V^\circ - \beta\rho^\circ, \infty) = \emptyset$ pour tout $\beta \geq 0$. Supposons que pour un $\beta_\circ \geq 0$,

$H - \beta_\circ\rho$ admet une fonction propre ψ correspondant à une valeur propre $\lambda > V^\circ - \beta_\circ\rho^\circ$. Si l'on définit $\alpha_\circ \geq 0$ par (1.3), nous aurons, en utilisant le théorème 1.2, $\alpha_\circ = \infty$ ou bien $\lambda \in \tau(H - (\beta_\circ + \alpha_\circ^2)\rho)$. Le deuxième cas est impossible, car $\lambda > V^\circ - (\beta_\circ + \alpha_\circ^2)\rho^\circ$. Si $\alpha_\circ = \infty$, le théorème 1.3 nous dit que $\psi = 0$, donc ψ ne serait pas une fonction propre. Cette contradiction prouve (4.14) pour $Y = X$.

La première affirmation du corollaire résulte de (4.14) pour $Y = X$ et $\beta = 0$.

Pour la deuxième affirmation on utilise le théorème 2.1 qui nous dit que $\sigma(H(\rho, 0)) = [0, \infty)$. Pour $H(\rho, 0)$ on a $V^\circ = 0$, donc $\sigma_p(H(\rho, 0)) \subseteq \{0\}$. Or 0 n'est pas une valeur propre de $H(\rho, 0)$, car si $\psi \in D(H(\rho, 0))$ et $H\psi = 0$, on aura

$$\int_X \rho |\nabla \psi|^2 dx = (H(\rho, 0)\psi, \psi) = 0,$$

donc $\psi = 0$.

q.e.d.

Références.

1. Amrein, W.O., Boutet de Monvel, A., Georgescu, I.V.: C_0-groups, commutator methods and spectral theory of N-body hamiltonians, Birkhäuser 1996.

2. Boutet de Monvel, A., Manda, D.: Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media, J.Math.Anal. and Appl. 191(1995), 137-167

3.Cycon, H.L., Froese, R., Kirsch, W., Simon, B.: Schrödinger operators with applications to quantum mechanics and global geometry, Springer 1987.

4. De Bièvre, S., Pravica, D.W.: Spectral analysis for optical fibers and stratified fluids I, J.Funct. Anal. 98(1991), 404-436.

5. De Bièvre, S., Pravica, D.W.: Spectral analysis for optical fibers and stratified fluids II, Comm. P.D.E. 17(1992), 69-97.

6. Dermenjian, Y., Iftimie, V.: Méthodes "à N corps" pour un problème

de milieux pluristratifiés, Preprint Université de Provence, 1998.

7. Derezinski, J., Gèrard, C,: Scattering theory of classical and quantum N-particle systems, Springer 1997.

8. Froese, R., Herbst, I.: A new proof of the Mourre estimate, Duke Math. J. 49(1982), 1075-1085.

9. Froese, R. Herbst, I.: Exponential bounds and absence of positive eigenvalues ffor N-body Schrödinger operators, Comm. Math. Phys. 87(1982), 429-447.

10. Weder, R.: Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media, Springer 1991.

11. Wilcox, C.H.: Sound propagation in stratified fluids, Springer 1984.