INSTITUTUL DE MATEMATICA
"SIMION STOILOW"
AL ACADEMIEI ROMANE

PREPRINT SERIES OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS
OF THE ROMANIAN ACADEMY

ISSN 0250 3638

Cvasiidentităţile buclei Moufang nilpotente

by

Vasile I.Ursu

Preprint nr. 2/2006

BUCURESTI

Cvasiidentităţile buclei Moufang nilpotente

by

Vasile I. Ursu*

July, 2006

* Intitute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy, P.O. Box 1-764, 014700 Bucharest, Romania.
E-mail address: vasile.ursu@imar.ro

Cvasiidentităţile buclei Moufang nilpotente

Vasile I. Ursu

Una din direcţiile principale ale teoriei cvasivarietăţilor sistemelor algebrice este cercetarea bazei cvasiidentităţilor clasei concrete de sisteme algebrice, iniţiată de A.I. Maliţev ([1], [2]). Un rezultat important, în acest sens, pentru clasa de grupuri este obţinut de A.Iu. Olişanskii [3]: un grup finit are bază finită de cvasiidentităţi dacă şi numai dacă fiecare subgrup sylow al lui este abelian. In demonstraţia acestei afirmaţii s-a stabilit că cvasiidentităţile grupului finit ce conţine un subgrup nilpotent necomutativ nu are bază de cvasiidentităţi de la un număr finit de variabile. A.I. Budkin în [4] a obţinut un rezultat analogic: dacă un grup fără torsiuni conţine un subgrup nilpotent neabelian şi rangurile subgrupurilor abeliene ale lui în totalitate sunt mărginite, atunci cvasiidentităţile acestui grup nu au bază finită de cvasiidentităţi de la un număr finit de variabile. In [5] autorul a obţinut un rezultat similar pentru bucle Moufang comutative: o buclă Moufang comutativă finit generată are bază finită de cvasiidentităţi dacă şi numai dacă ea este un grup abelian finit.

In această lucrare, folosind ideile lucrărilor menţionate ţi tehnica combinată de asociatori şi comutatori pentru bucle Moufang nilpotente, s-a demonstrat că dacă o buclă Moufang conţine o subbuclă nilpotentă neasociativă sau necomutativă, atunci cvasiidentităţile acestei bucle nu au bază finită de cvasiidentităţi de la un număr finit de variabile. In particular, bucla Moufang nilpotentă are bază finită de cvasiidentităţi dacă şi numai dacă ea este un grup abelian cu exponent finit sau ea este un grup abelian cu exponent infinit în care nu pot fi incluse izomorfic doar un număr finit de grupuri ciclice de putere număr prim ce nu se conţin izomorfic unul în altul. De asemenea a fost stabilită condiţia de egalitate a unei cvasivarietăţi şi a unei varietăţi, ambele generate de aceeaşi buclă Moufang nilpotentă, şi s-a determinat puterea laticei subcvasivarietăţilor varietăţii de bucle Moufang local nilpotente.

Rezultatele formulate mai sus pun în evidenţă următoarea ipoteză: cvasiidentităţile unei bucle nilpotente neasociative sau necomutative nu au bază finită. In acest context, de asemenea menţionăm că problema existenţei bazei finite pentru identităile buclei nilpotente (finite) deocamdată nu este rezolvată.

1. Definiţii, rezultate preliminare, observaţii şi notaţii.

Vom utiliza unele noţiuni şi rezultate întîlnite la R.H. Bruck [6].

Bucla Moufang (BM) se numeşte o algebră $\mathbf{L} =< L, \cdot, ^{-1} >$ de tipul $< 2, 1 >$ operaţiile şi elementele căreia satisfac următoarele identităţi

$$x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z, \tag{1}$$

(2) $$x^{-1} \cdot xy = y = yx \cdot x^{-1},$$

unde prin x^{-1} notăm rezultatul operaţiei unare aplicată elementului x.

Observăm că identitatea (2) implică identitatea $y \cdot (x^{-1})^{-1} = yx$, care la rîndul ei implică identitatea $(x^{-1})^{-1} = x$, cu ajutorul căreia din (2) se deduce identitatea

(3) $$x \cdot x^{-1}y = y = yx^{-1} \cdot x.$$

Pentru un anumit element $x \in L$ notăm $e = x^{-1} \cdot x$. Atunci conform identităţilor (1) şi (2) vom avea

$$ye = x^{-1} \cdot x(ye) = x^{-1}[x \cdot y(xx^{-1})] = x^{-1}[(xy \cdot x)x^{-1}] = x^{-1} \cdot xy = y$$

pentru orice $y \in L$. De aici $e = y^{-1} \cdot y$ şi, prin urmare, e nu depinde de elementul x. Atunci, ţinînd seama de (3),

$$e \cdot y = yy^{-1} \cdot y = y$$

pentru orice $y \in L$, deci e este element unitate al BM **L**. In continuare BM **L** va fi cercetată în signatura $\langle \cdot, ^{-1}, e \rangle$, formată din trei simboluri operaţionale, respectiv, binar, unar şi nular, şi se va nota simplu prin L.

BM este diasociativă, adică orice subbuclă din ea generată de două elemente este asociativă ([6], teorema Moufang).

Pentru elementele x, y şi z din BM L asociatorul $[x, y, z]$ şi comutatorul $[x, y]$ se definesc respectiv de egalităţile $[x, y, z] = (x \cdot yz)^{-1} \cdot (xy \cdot z)$ şi $[x, y] = (yx)^{-1} \cdot (xy)$.

Asociant-comutantul BM L se numeşte subbucla generată în L de toţi asociatorii şi comutatorii din L şi vom nota-o prin L' sau $[L, L]$. Mulţimea

$$Z(L) = \{x \in L \mid [x, y, z] = e,\ [x, y] = e \text{ pentru orice } z \in L\}$$

se numeşte centrul BM L.

Pentru orice subbuclă H din bucla L prin $[H, A]$ vom nota subbucla generată în L de toate elementele de forma $[h, x, y]$ şi $[h, x]$, unde $h \in H$, $x, y \in L$.

Subbucla H a BM L se numeşte normală în L dacă $xH = Hx$, $x \cdot yH = xy \cdot H$ pentru orice $x, y \in L$. Uşor de convins că asociant-comutantul L' şi orice subbuclă a BM L, conţinută în centrul $Z(L)$, sunt normale în L.

Prin ipoteză de inducţie se definesc asociatori-comutatorii speciali de multiplicitatea n : x_1 este asociator-comutator special de multiplicitatea 1; dacă u este asociator special de multiplicitatea n în care sunt incluse strict i_n variabile, atunci $[u, x_{i_n+1}, x_{i_n+2}]$ este asociator-comutator special de multiplicitatea $n+1$.

BM L se numeşte (central-)nilpotentă de clasa n sau n-nilpotentă dacă pentru orice valori din L ale variabilelor valoarea oricărui asociator-comutator special de multiplicitatea $n+1$ este egală cu elementul unitate e, însă valoarea a cel puţin unui asociator-comutator special de multiplicitatea n este diferită de e.

Conform lui [7] în orice buclă Moufang nilpotentă de clasa 2 sunt adevărate identităţile

(4) $$[x, y, z] = [y, z, x] = [y, x, z]^{-1},$$

(5) $$[x \cdot y, z, t] = [x, z, t][y, z, t],$$

(6) $$[x^m, y, z] = [x, y, z]^m,$$

(7) $$[x, y, z]^6 = e,$$

(8) $$[xy, z] = [x, z][y, z][x, y, z]^3$$

şi

(9) $$[x^m, y] = [x, y]^m,$$

(10) $$[x, y] = [y, x]^{-1},$$

deoarece BM este diasociativă.

In baza identităţilor (4)-(10) evident în orice BM 2-nilpotente sunt adevărate următoarele implicaţii de identităţi

$$[x, y]^{p^k} = e \models [x^{p^{k-1}}, y]^p = e,$$

$$[x, y, z]^6 = e \models [x^2, y, z]^3 = e \wedge [x^3, y, z]^2 = e,$$

$$[x, y, z]^{2^k} = e \models [x, y, z^{2^{k-1}}]^2 = e,$$

$$[x, y, z]^{3^k} = e \models [x, y, z^{3^{k-1}}]^3 = e,$$

$$[x, y, z]^2 = e \& [x, y] = e \models [x, y, z] = e,$$

$$x^2 = e \models [y, z] = e,$$

$$x^2 = e \models [y, z, t] = e,$$

$$x^{p^k} = e \models [y, z, t] = e$$

pentru orice număr prim $p \geq 5$ şi $k = 1, 2, \ldots$ De unde uşor ne dăm seama că orice buclă Moufang nilpotentă (BMN) neasociativă sau necomutativă conţine o subbuclă nilpotentă de clasa 2 neasociativă sau necomutativă în care sunt adevărate identităţile uneia din mulţimile:

$$K_{1,0} = \{[x, y, z] = e\},$$

$$K_{1,p^k} = \{[x, y, z] = e, [x, y]^{p^k} = e\},$$

unde numărul prim $p \geq 2$ şi $k = 1, 2, \ldots$,

$$K_{2,0} = \{[x, y, z]^2 = e\},$$

$$K_{2,2^k} = \{[x, y, z]^2 = e, [x, y]^{2^k} = e\}, k = 1, 2, \ldots,$$

$$K_{3,0} = \{[x, y, z]^3 = e\},$$

$$K_{3,3^k} = \{[x, y, z]^3 = e, [x, y]^{3^k} = e\},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$K^k_{2,2^m} = \{x^{2^k} = e, [x, y, z]^2 = e, [x, y]^{2^m} = e\},\ 1 \leq m \leq k = 2, 3, \ldots,$$

$$K^k_{3,3^m} = \{x^{3^k} = e, [x, y, z]^3 = e, [x, y]^{3^m} = e\},\ 0 \leq m \leq k = 1, 2, \ldots,$$

$$K^k_{1,p^m} = \{x^{p^k} = e, [x, y, z] = e, [x, y]^{p^m} = e\},\ k = 1, 2, \ldots$$

pentru numărul prim $p \geq 3$ şi pentru $k = 2, 3, \ldots$ şi $m = 1, \ldots, k$. Notăm varietăţile definite de identităţile acestor mulţimi respectiv cu $\mathfrak{R}_{1,0}$, $\mathfrak{R}_{1,p^k}$, $\mathfrak{R}_{2,0}$, $\mathfrak{R}_{2,2^k}$, $\mathfrak{R}_{3,0}$, $\mathfrak{R}_{3,3^k}$, $\mathfrak{R}^k_{2,2^m}$, $\mathfrak{R}^k_{3,3^m}$, $\mathfrak{R}^k_{1,p^m}$. In continuare, dacă $\mathfrak{R}$ este o varietate din această colecţie, convenim să notăm prin F_n bucla liberă de rangul n din varietatea $\mathfrak{R}$ cu generatorii liberi $x_1, \ldots x_n$.

2. Leme de bază. In [5] este arătat că dacă partea periodică P a BM comutative finit generate L are exponentul 3^k, atunci subbucla Frattini $\phi(L) = L'P^3$. Vom demonstra la fel că o afirmaţie analogică este adevărată şi pentru BMN.

Lema 1. *Dacă partea periodică P a BMN finit generate L are exponentul p^k, atunci subbucla Frattini $\phi(L) = L'P^p$.*

Demonstraţie. La început vom arăta că $\phi(L) \supseteq L'P^p$. Conform teoremei 2.2 din [6] bucla-factor $L/\phi(L)$ este grup abelian, deci $\phi(L) \supseteq L'$. Acum arătăm că $\phi(L) \supseteq P^p$. Admitem prin absurd că există aşa element $x \in P$ încât $x^p \notin \phi(L)$. Intrucât intersecţia tuturor subbuclelor maximale ale BMN L coincide cu subbucla Frattini $\phi(L)$ ([6], p.97), există o subbuclă maximală H ce nu conţine elementul x^p. Conform proprietăţii de maximalitate, avem $\langle x, H\rangle = L$. Subbucla $H \supseteq L'$, deci este normală in BMN L. Atunci bucla-factor L/H conţine strict subgrupul ciclic $\langle x^p H\rangle$, proimaginea totală în L a căruia conţine strict H şi nu coincide cu L. Dar aşa ceva nu este adevărat, deoarece subbucla H este maximală în L. Prin urmare putem conchide că $\phi(L) \supseteq L'P^p$.

Acum demonstrăm că $\phi(L) \subseteq L'P^p$. In baza incluziunii evidente $L' \subseteq L'P^p$, subbucla $L'P^p$ este normală în L. Cercetăm bucla-factor $L/L'P^p = \bar{L}$. $\bar{L}$ este grup abelian finit generat cu elemente numai de ordinul p sau ∞. Conform teoremei 8.1.2 [8], $\bar{L}$ se descompune într-un produs direct de grupuri ciclice de ordinul p sau infinit. Insă subbucla Frattini a produsului direct de grupuri abeliene este produsul subbuclelor Frattini ale factorilor lui [10], deaceea este subbuclă unitate în $\bar{L}$. Acum pentru morfismul natural $\varphi : L \to \bar{L}$, conform lemei 2.1 din [6] (p.97), $\varphi(\phi(L)) \subseteq \phi(\varphi(L))$, de unde obţinem $\phi(L) \subseteq L'P^p$. Lema este demonstrată.

Corolaru 1. *Subbucla Frattini a BM libere n-nilpotente F_m de rangul m coincide cu asociant-comutantul F'_m.*

Intr-adevăr, conform lui (7) şi faptului că bucla-factor F_m/F'_m este grup abelian liber, toate elementele periodice se conţin în asociant-comutantul F'_m.

Lema 2. *Fie $F_n = F_n(x_1, \dots x_n)$-BM liberă 2-nilpotentă cu generatori liberi $x_1, \dots x_n$. Atunci asociant-comutantul F'_n buclei $F_n = F_n(x_1, \dots x_n)$ este generat de mulţimea*

$$\{[x_i, x_j, x_k], [x_l, x_p] \mid 1 \leq i < k \leq n, 1 \leq l < p \leq n\},$$

formată de C_n^3 asociatori şi de C_n^2 comutatori, adică de $C_n^3 + C_n^2 = n(n^2-1)/6$ elemente.

Demonstraţie. Conform identităţilor (4) - (10), ce sunt adevărate în bucla Moufang nilpotentă liberă F_n, orice asociator $[x,y,z]$ sau comutator $[x,y]$ se reprezintă ca produsul unor asociatori şi comutatori de generatorii $x_1, \dots x_n$. Totodată observăm că numărul asociatorilor de forma $[x_l, x_j, x_k]$ şi comutatorilor de forma $[x_1, x_p]$, $(1 \leq i < j < k \leq n,\ 1 \leq l < p \leq n)$ este egal cu suma dintre numărul total de combinaţii de 3 elemente din n elemente şi numărul total de combinaţii de 2 elemente din n elemente:

$$C_n^3 + C_n^2 = \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

Lema este demonstrată.

Lema 3. *Fie varietatea $\mathfrak{R}$ o varietate de BMN de clasa 2 în care sunt adevărate identităţile $[x,y,z]^p = e$ şi $[x,y]^p = e$, iar $F_n = F_n(x_1, \dots, x_n)$-BM $\mathfrak{R}$-liberă cu generatorii liberi $x_1, \dots, x_n$. Atunci:*

a) $F'_n \cap F_n^{p^k} = \langle e \rangle$, $k = 1, 2, \dots$;

b) pentru $n < 10m + 1$ în asociant-comutantul F'_n există un aşa element u care nu poate fi reprezentat sub forma

$$[y_1, y_2] \dots [y_{2m-1}, y_{2m}][y_1, y_2, y_3] \dots [y_{3m-2}, y_{3m-1}, y_{3m}]; \tag{11}$$

c) pentru $m \geq n(n^2-1)/6$ orice element din F'_n poate fi reprezentat sub forma (11).

Demonstraţie. a) Fie $z \in F'_n \cap F_n^{p^k}$, atunci $z \in F'_n$ şi $z \in F_n^{p^k}$. Intrucît BM este diasociativă, pentru orice elemente $x, y \in F_n$ avem

$$(xy)^{p^k} = xyxy \dots xy = x^2y^2 \dots xy[y,x] = x^3y^3xy \dots xy[x,y]^3 = \dots =$$

$$x^{p^k}y^{p^k}[x,y]^{1+2+\dots p^k-1} = x^py^p[x,y]^{p^k(p^k-1)/2} = x^{p^k}y^{p^k},$$

adică în bucla F_n este adevărată identitatea $(xy)^{p^k} = x^{p^k} y^{p^k}$. Conform acestei identităţi şi incluziuni $F_n^p \subseteq Z(F_n)$, elementul z poate fi reprezentat sub forma

$$z = x_1^{p^k \alpha_1} \ldots x_n^{p^k \alpha_n},$$

unde α_i este suma exponenţilor lui x_i în înscrierea iniţială a lui z. Avînd în vedere că orice egalitate de elemente în bucla $\mathfrak{R}$-liberă F_n' este o identitate şi că $z \in F_n'$, din ultima egalitate, pentru fiecare $i \leq n$, prin înlocuirea elementelor x_j cu e, $j \neq i$, $j \leq n$ obţinem $x_i^{p\alpha_i} = e$, iar de aici $z = e$.

b) Presupunem prin absurd că orice element din F_n' poate fi reprezentat sub forma (11).

Arătăm acum că pentru orice elemente $a, b \in F_n' F_n^p$ este adevărată implicaţia

$$aF_n' F_n^p = bF_n' F_n^p \to [a, x, y] = [b, x, y]\&[a, x] = [b, x].$$

Intr-adevăr, fie adevărată partea stîngă a acestei implicaţii, adică $aF_n' F_n^p = bF_n' F_n^p$. Atunci $a = bz$ unde $z \in F_n' F_n^p \subseteq Z(F_n)$ şi vom avea

$$[a, x, y] = [bz, x, y] = [b, x, y], [a, x] = [bz, x] = [b, x].$$

Bucla-factor $F_n / F_n' F_n^p$ este grup abelian liber cu exponentul p şi n generatori. Prin urmare are exact p^n elemente diferite. De aici conchidem că în bucla F_s asociatorul $[x, y, z]$ poate avea cel mult p^{3n} valori diferite, iar comutatorul $[x, y]$ - cel mult p^{2n} valori diferite.

Intrucît orice element din asociant-comutantul F_s' poate fi reprezentat sub forma (11), avem că $|F_s'| \leq p^{3sm} \cdot p^{2sm} = p^{5sm}$, iar pe de altă parte, conform lemei 2,

$$|F_s'| = p^{\varepsilon C_s^3} \cdot p^{\delta C_s^2} = p^{\varepsilon C_s^3 + \delta C_s^2} = p^{\varepsilon \frac{s(s-1)(s-2)}{6} + \delta \frac{s(s-1)}{2}} \geq p^{s(s-1)/2},$$

unde $s > 5$ şi $\varepsilon = \delta = 1$ dacă bucla F_s este neasociativă şi necomutativă, $\varepsilon = 1$ şi $\delta = 0$ dacă bucla F_s este comutativă şi $\varepsilon = 0$ şi $\delta = 1$ dacă bucla F_s este asociativă. De unde, pentru $n = s > 10m + 1$, obţinem în bucla F_n contradicţie.

c) Afirmaţia rezultă direct din lema 2.

Lema este demonstrată.

Corolarul 2. *Dacă varietatea $\mathfrak{R}$ este una din varietăţile de bucle Moufang neasociative sau necomutative nominalizate în secţiunea 1, atunci pentru bucla $\mathfrak{R}$ -liberă afirmaţiile din lema 4 sunt adevărate.*

Lema 4. *Fie K o clasă de bucle Moufang şi $C = < x_1, x_2, \cdots \| u_i(x_1, \cdots, x_n) = e, i \in I >$ o buclă Moufang cu generatorii $x_1, x_2, \ldots$ şi relaţiile de definire $u_i = e, i \in I$. Bucla C aparţine cvasivarietăţii generate de clasa de bucle K dacă şi numai dacă pentru orice element $u \in C, u \neq e$ există un omomorfism φ ce aplică C pe o buclă din clasa K astfel încât $u^\varphi \neq e$.*

Demonstraţie. Intr-adevăr, dacă toate elementele neunitate din bucla Moufang C sunt aproximabile de bucle din clasa K, atunci C este izomorf inclusă într-un produs cartezian de bucle din K, adică L aparţine cvasivarietăţii $Q(K)$ generată de clasa de bucle K.

Invers, fie $C \in Q(K)$ şi presupunem că un careva element $u \in C, u \neq e$ nu poate fi aproximabil de bucle din K. Atunci formula

$$\underset{i \in I}{\&} u_i = e \rightarrow u = e$$

este adevărată în orice buclă din K. Conform teoremei lui Maliţev (vezi Teorema 7.1.1 din [9]) bucla Moufang C este o subbuclă a unui produs filtrat $\prod_{j \in J} B_j/D$ de bucle $B_j \in K, j \in J$ generat de elementele $x_1 = (b_{ij})D, x_2 = (b_{2j})D, \cdots$. Conform definiţiei produsului filtrat mulţimea $J_0 = \{j \in J \mid u_i(b_{1j}, \cdots, b_{n_ij}) = e,$ $i \in I\}$ aparţine filtrului D. Insă pentru orice $j \in J_0$ relaţiile $u_i(j) = u_i(b_{1j}, \ldots,$ $b_{n_ij}) = e$, $i \in I$, adevărate în bucla $B_j \in K$, implică egalitatea $u(j) = u(b_{1j}, \cdots, b_{nj}) = e$, deci avem $\{j \in J | u(b_{1j}, \cdots, b_{nj})\} \supseteq J_0$ şi, prin urmare, această mulţime aparţine filtrului D. Aşadar, în C este adevărată egalitatea $u(x_1, \cdots, u_n) = e$; contradicţie. Lema este demonstrată.

3. Baza cvasiidentităţilor.

Teorema 1. *Dacă bucla Moufang L conţine o subbuclă nilpotentă neasociativă sau necomutativă, atunci cvasiidentităţile adevărate în L nu au bază de cvasiidentităţi de la un număr finit de variabile.*

Demonstraţie. Fie $\Re$ una din varietăţile descrise în secţiunea 1 şi $t > 1$ un număr natural, $m = t(t^2 - 1)/6$, iar pentru acest t fixăm un număr natural n astfel încâ t $n > 10m+1$. Fie $F_n^j = F_n^j(x_1^j, \cdots, x_n^j), j \in J$ cu $|J > |L|$, o colecţie de BMN $\Re$-libere de rangul n si $A_n = \prod_{j \in J} F_n^j$ - produsul lor cartezian. Conform lemei 3, pentru fiecare $j \in J$ în asociant-comutantul buclei F_n^j se va găsi astfel de element $u^j = u^j(x_1, \cdots, x_n)$, pe care îl fixăm, încît el nu poate fi reprezentat sub forma (11). Notăm cu u_j elementul din A_n pentru care $u_j(j) = u^j, u_j(i) = e$ oricare ar fi $i \in J \backslash \{j\}$, iar cu B subbucla generată în A_n de colecţia de elemente $u_j u_i^{-1} \in A_n$, pentru toţi $i, j \in J$ cu $i \neq j$. Este clar că elementele $u_j, j \in J$ aparţin asociant-comutantului $A'_n \subseteq Z(A_n)$, deci subbucla B este normală în A_n. Fie φ morfismul natural de la A_n pe bucla factor $C_n = A_n/B$, atunci în C_n este un astfel de element neunitate v încît $v = \varphi(u_j) \neq e$ pentru un $j \in J$. Notăm cu D_n BMN reprezentată în varietatea $\Re$ astfel:

$D_n =< x_i^l, l \in J, i = 1, \ldots, n \mid\mid [x_i^l, x_j^p, x_k^r] = e$ pentru

$1 \leq i < j < k \leq n \wedge (l \neq p \vee p \neq r \vee r \neq l)$,

$[x_i^l, x_j^p] = e$ pentru $1 \leq i < j \leq n \wedge (l \neq p), u^l = u^p$ pentru $p \neq l, p, r \in J >$

,unde u^l (sau u^p) sunt aceleaşi elemente fixate mai sus. Este clar că $C_n = D_n$, unde prin egalitate se subînțelege izomorfism.

Arătăm acum că orice subbuclă din C_n, generată de t generatori, aparţine cvasivarietăţii $Q(F_n^j)$. Intr-adevăr, fie subbucla $N \subseteq C_n$ generată de t generatori, iar K - proimaginea minimală a subbuclei N prin morfismul φ . Evident că K este generată de t generatori. Arătăm că $B \bigcap K \subseteq K'$. Intr-adevăr, fie că există aşa element $b \in B \bigcap K$ încât $b \notin K'$. Dacă admitem că $b \in \Phi(K)$, conform lemei 1, $b = cd$ unde $c \in K$, $d \in P(K)^p$. De aici, $d = c^{-1}b \in A'_n$. Aşadar $d \in A_n^p$ şi $d \in A'_n$. Insă, conform lemei 3 a), rezultă $A'_n \bigcap A^p =< e >$. Deci $d = e$ şi obţinem $b = c \in K'$; contradicţie. Prin urmare, $b \notin \phi(K)$, adică b nu este negenerator în K. Atunci există în K o subbuclă maximală H încât $b \notin H$ şi $K = (B \bigcap K)H$, de unde rezultă $K^\varphi = H^\varphi$. Astfel am obţinut că K nu este proimagine minimală a lui N prin φ; contradicţie. Aşadar $B \cap K \subseteq K'$. Conform lemei 3 c), fiecare element din K' se reprezintă sub forma (11). Prin urmare, $B \cap K =< e >$, dar aceasta implică $K \cong N$, de unde rezultă $N \in Q(F_n^j)$.

Conform ipotezei teoremei varietatea $V(L)$ generată de BM L conţine o subvarietate de BMN, deci conţine şi o varietate $\Re$ (din secţiunea 1). Teorema va fi demonstrată dacă vom arăta că pentru orice număr natural t există o BMN C astfel încît orice subbuclă din C , generată de t elemente, aparţine cvasivarietăţii $Q(L)$, dar însăşi bucla C nu aparţine lui $Q(L)$. Arătăm acum că astfel de buclă poate fi considerată bucla C_n. Deja s-a arătat că orice subbuclă din C_n generată de t elemente aparţine cvasivarietăţii $Q(F_n) \subseteq Q(L)$, unde $F_n = F_n(x_1, \ldots , x_n)$ este bucla liberă de rangul n din varietatea $\Re$. Demonstrăm acum că bucla C_n nu aparţine cvasivarietăţii $Q(L)$. Deoarece $C_n \cong D_n$, conform lemei 4, este suficient de arătat că C_n nu este inclusă izomorfic nici într-o putere carteziană a buclei L.

Presupunem că $C_n \in Q(L)$, deci şi $D_n \in Q(L)$. Conform lemei 4, există morfismul de bucle $\psi : D_n \to L$ astfel că $\psi(v) \neq e$. Pentru fiecare $i \in J$ prin π_i şi ψ_i notăm endomorfismele buclei A_n definite de condiţiile
$$\pi_i(u)(j) = \begin{cases} u(i) & amp; \text{dacă } i = j, \\ e & amp; \text{dacă } i \neq j \end{cases} \quad \text{şi } \overline{\pi_i}(u)(j) = \begin{cases} e & amp; \text{dacă } i = j, \\ u(j) & amp; \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$
pentru orice element $u = (u(j)|j \in J) \in A_n = \prod_{j \in J} F_n^j$. Analizăm acum următoarele două cazuri posibile.

1. Pentru orice indice $i \in J$ are loc $\psi\varphi\pi_i(A_n) \nsubseteq \psi\varphi\overline{\pi_i}(A_n) \subseteq L$.

In acest caz pentru orice indice $i \in J$ există un aşa element $a_i \in \psi\varphi\pi_i(A_n)$ şi $a_i \notin \psi\varphi\overline{\pi_i}(A_n)$. Cercetăm mulţimea formată din aceste elemente - $\{a_i|i \in J\}$. Deoarece pentru $j \neq i$, $\pi_j(A_n) \subset \overline{\pi_i}(A_n)$, rezultă $a_i \notin \pi_j(A_n)$ şi deci $a_i \neq a_j$. De aceea submulţimea $\{a_j|i \in J\} \subseteq L$ are puterea cardinală egală cu $|J|$, adică mai mare ca puterea cardinală a mulţimii L ce o conţine; contradicţie.

2. Există un indice $i \in J$ astfel nct $\psi\varphi\pi_i(A_n) \subseteq \varphi\overline{\pi_i}(A_n)$.

Atunci vom avea

$$\psi([\varphi\pi_i(A_n), \varphi\pi_i(A_n)]) = [\psi\varphi\pi_i(A_n), \psi\varphi\pi_i(A_n)] \subseteq [\psi\varphi\overline{\pi_i}(A_n), \psi\varphi\pi_i(A_n)] =$$

$$\psi\varphi([\overline{\pi_i}(A_n), \pi_i(A_n)]) =< e >$$

şi, deoarece $v = \varphi(u_i) \in [\varphi\pi_i(A_n), \varphi\pi_i(A_n)]$, rezultă $\psi(v) = e$, ceea ce contrazice ipoteza $\psi(v) \neq e$. Teorema este demonstrată.

Corolarul 3. *Cvasivarietatea generată de o buclă Moufang nilpotentă L are bază finită de cvasiidentităţi dacă şi numai dacă L este un grup abelian şi are exponent finit sau are exponentul infinit şi numărul de grupuri ciclice de putere număr prim, ce nu se conţin izomorfic unul în altul, neincluse izomorfic în L este finit.*

Intr-adevăr, dacă cvasivarietatea $Q(L)$ generată de BMN L are bază finită de cvasiidentităţi, atunci conform teoremei 1, L este grup abelian. Nu este greu de observat (vezi [11]) că cvasivarietatea $Q(L)$ formată numai din grupuri abeliene are bază finită dacă şi numai dacă: a) cvasivarietatea $Q(L)$ nu conţine grupul ciclic infinit Z şi conţine numai un număr finit de grupuri ciclice de putere număr prim -$Z_{p_i^{m_i}}$, $i = 1, \ldots, n$, adică cvasivarietatea $Q(L)$ coincide cu varietatea $V(L)$ generată de bucla L cu exponent finit, care evident este definită de identitatea

$$x^{p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_1^{m_n}} = e.$$

b) cvasivarietatea $Q(L)$ conţine grupul ciclic infinit Z şi nu conţine numai un număr finit de grupuri ciclice (ce nu se conţin izomorfic unul în altul) $Z_{p_i^{m_i}} (i = 1, \ldots, n)$, deci, evident, cvasivarietatea $Q(L)$ este definită de cvasiidentităţile

$$x^{p_i^{m_i+1}} = e \rightarrow x^{p_i^{m_i}} = e, i = 1, \ldots, n.$$

Observăm, de asemenea, că este adevărată şi următoarea afirmaţie.

Corolarul 4. *Cvasivarietatea generată de BMN L coincide cu varietatea generată de BMN L dacă şi numai dacă L este un grup abelian cu exponent finit.*

Aplicaţie. Fie $\mathfrak{S}$ o varietate de BM care conţine BMN neasociative sau necomutative şi fie $\mathfrak{R}$ subvarietatea formată numai din $\mathfrak{S}$-bucle Moufang nilpotente de clasa ce nu întrece 2 în care sunt adevărate identităţile

$$[x, y, z]^p = e, [x, y]^p = e,$$

unde p este un număr prim potrivit, iar F o buclă $\mathfrak{R}$-liberă neabeliană de rang finit. Atunci, conform lemei 3 a), bucla-factor 2-nilpotentă finită $L = F/F^{p^2} \in \mathfrak{R}$ nu este grup abelian. In demonstratia teoremei 1 este arătat că pentru orice număr natural t există aşa buclă finită $C_{n(t)}$ din varietatea $V(L)$, încât orice subbuclă t-generată din $C_{n(t)}$ se conţine n cvasivarietatea $Q(L)$, dar însăşi bucla $C_{n(t)}$ nu se conţine n cvasivarietatea generată de toate buclele din $V(L)$ de ordinul strict mai mic ca t. Punem $t_l = |L|$ şi construim şirul infinit de numere naturale $\{t_i | i \in N = \{1, 2, \ldots\}\}$ care verifică condiţiile $t_{i+1} = |C_i| + |L|$ (aici şi în continuare în loc de $C_{n(t_i)}$ vom scrie C_i).

Demonstrăm că $C_i \notin Q(\{C_j | j \in \{N \backslash \{i\}\})$. Intr-adevăr, dacă nu este aşa, atunci conform lemei 4, pentru orice $a \in C_i$, $a \neq e$, există morfismul de bucle

φ din bucla C_i într-o anumită buclă C_j încât $\varphi(a) \neq 1$. Dacă $i < j$, atunci $|\varphi(C_i)| < t_j$ şi, deoarece $\varphi(C_i) \subseteq C_j$, $\varphi(C_i) \in Q(L)$. Aceasta înseamnă că elementul a se aproximează de bucla L. Prin urmare, conform aceleiaşi leme 4, $C_i \in Q(\{L, C_j | 1 \leq j < i\})$. Insă aceasta contrazice definirea lui C_i, întrucât $|C_j| < t_i$, $|L| < t_i$ pentru $j < i$. Pentru fiecare i fixăm cvasiidentitatea Φ_i identic adevărată în cvasivarietatea $Q(\{L, C_j | j \in \{N \backslash \{i\}\})$ şi falsă în bucla C_i. Atunci sistemul $\Phi_i, i \in N$ de cvasiidentităţi este infinit, independent şi, în particular, laticea $L_q(\Im)$, a tuturor subcvasivarietă ţilor din varietatea $\Im$ are puterea continuului.

Considerăm acum toate buclele din $\Im$ grupuri abeliene. Dacă grupul ciclic infinit $Z \in \Im$, atunci în $\Im$ se conţine o colecţie de grupuri ciclice de putere primă Z_{p_i}, $i = 1, \ldots$ şi, prin urmare, $L_q(\Im)$ are puterea continuului. Dacă $Z \notin \Im$, atunci $\Im$ este generată de un grup ciclic finit şi, deoarece $\Im$ conţine un număr finit de grupuri neizomorfe ciclice de puterea număr prim, numărul de subcvasivarietă ţi diferite din $\Im$ este finit. Aşadar s-a demonstrat următoarea afirmaţie:

Teorema 2. *Pentru orice varietate $\Im$ de bucle Moufang local nilpotente laticea cvasivarietăţilor din $\Im$ este de puterea continuului sau ea este finită dacă şi numai dacă $\Im$ este generată de un grup finit.*

In încheiere, ţinând seama de teoremele 1, 2, corolarile 3 şi 4, generalizăm rezultatele pentru BMN finit generate prin

Corolarul 5. *Pentru BMN finit generată L sunt echivalente următoarele afirmaţii: (1) L are bază finită de cvasiidentităţi; (2) $Q(L) = V(L)$; (3) laticea cvasivarietăţilor $L_qV(L)$ este finită; (4) L este un grup abelian finit.*

Bibliografie

[1] Maliţev A.I. O vcliucenie associativnîh sistem v gruppah , I. - Matem. Sb., 6, N2(1939), 331-336.

[2] Maliţev A.I. O vcliucenie associativnîh sistem v gruppah,II. -Matem. Sb.,8, N2 (1940), 251-263.

[3] Olishanskii A. Iu. Uslovne tojdestva v conecnîh gruppah. - Sib. Matem., j., 1974, 15, N6, c. 1409-1413.

[4] Budkin A.I. Cvasitojdestva nilpotentnîh grupp i grupp s odnim opredeliaiuşcim sootnoşeniem. - Algebra i logica, 18, N2 (1979), 127-124.

[5] Ursu V.I. O cvasitojdestvah conecno-porojdennîh commutativnîh lup Moufang. - Algebra i logica, 30, N6 (1991), 726-724.

[6] Bruck R.H. A survey of binary systems. - Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1958.

[7] Ursu V.I. On identities of nilpotent Moufang loops. - Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 45(2000), Nr.3, 537-548.

[8] Kargapolov M.I., Merzliacov. Osnovî teorii grupp. M.: Nauca, 1982.
[9] Maliţev A.I. Algebraiceskie sistemî. M.: Nauca, 1970.
[10] Dlab V., Korinek V. The Frattini subgrup of a direct product of groups. - Chechosl. Math. J. , 10 (1960), 50-358.
[11] Vinogradov A.A. Cvasimnogoobrazia abelevîh grupp. - Algebra i logica, 5, vp.6 (1965), 15-18.

Vasile I. Ursu
Institutul de matematică "Simion Stoilow"
al Academiei Române
PO Box 1-764, Bucureşti
Vasile.Ursu@imar.ro