INSTITUTUL DE MATEMATICA
"SIMION STOILOW"
AL ACADEMIEI ROMANE

PREPRINT SERIES OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS
OF THE ROMANIAN ACADEMY

ISSN 0250 3638

Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement

by

Anca Capatina

Preprint nr.10/2011

BUCURESTI

Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement

by

Anca Capatina

Preprint nr.10/2011

November, 2011

Anca Capatina, Institute of Mathematics “Simion Stoilow” of the Romanian Academy, P.O. Box 1-764, RO-010145 Bucharest 1, Romania
E-mail: Anca.Capatina@imar. ro

Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement

Anca Capatina

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Inéquations variationnelles et problèmes de contact - expression devenue syntagme grâce à la puissance d'instrumentation fournie par les méthodes variationnelles en même temps que les formulations variationnelles des problèmes de contact sont des inéquations variationnelles.

C'est la raison pour laquelle j'ai considéré comme nécessaire d'écrire ce livre où le lecteur trouvera de nombreux résultats sur les inéquations variationnelles mais aussi une étude détaillée de certains problèmes de Signorini avec frottement non local de Coulomb.

Dans les cinquante dernières anées, les inéquations variationnelles sont devenues un outil redoutable dans l'étude mathématique de nombreux problèmes non linéaires en physique et en mécanique, la compléxité des conditions aux limites et la diversité des équations constitutives conduisant aux formulations variationnelles de type inéquations.

Les bases de la théorie des inéquations variationnelles ont été faites à partir des résultats concernant les problèmes unilatéraux obtenus par Signorini [107] et Fichera [50] avec les résultats de Ting [122] pour le problème d'élastoplasticité. Les fondements mathématiques de la théorie ont été élargis par les contributions précieuses de Stampacchia [116], Lions et Stampacchia [78] et puis développés par l'école française et italienne: Brézis [20], [19], Stampacchia [117], Lions [74], Mosco [86], Kinderlehrer et Stampacchia [65]. Concernant l'approximation des inéquations variationnelles on rappelle, pour citer quelques-uns, les contributions de Mosco [85], Glowinski, Lions et Trémolières [54] ou Glowinski [53].

Nous ne prétendons pas de faire ici l'étude en détail des inéquations variationnelles. Ce sujet immense est présenté dans cet ouvrage sous une forme unifiée qui permet au lecteur d'avoir une idée d'ensemble sur les théorèmes d'existence, d'unicité, de régularité ou d'approximation pour les inéquations variationnelles ou quasi-variationnelles, statiques ou quasi statiques, dans le cas des opérateurs de diverses classes de régularité.

La dernière partie de ce livre est consacrée à l'étude de certains problèmes statiques et quasi statiques de frottement dont les formulations faibles s'ecrivent en termes des inéquations variationnelles ou quasi-variationnelles. Les résultats présentés s'obtiennent, la plupart du temps, en appliquant la théorie développée dans la première partie de ce livre.

On va considérer des problèmes de contact avec frottement non local de Coulomb entre un corps élastique qui, sous l'influence des forces volumiques et surfaciques, est en contact unilatéral contre un support rigide.

Les premiers résultats de l'approche mathématique de ce problème, dans le cas de frottement de Tresca (i.e. frottement donné), ont été obtenus par Duvaut et Lions [46]. Dans le cas statique, des résultats importants concernant l'étude des problèmes de type Signorini avec frottement local ou non local ont été obtenus par Nečas, Jarusek et Haslinger [88], Oden et Pires [93], [94], Demkowicz et Oden [40] et Cocu [35].

Dans le cas quasi statique, les premiers résultats d'existence ont été obtenus par Andersson [6] et Klarbring, Mikelič, Shillor [68] pour le probléme de compliance normale en élasticité. L'existence d'une solution, dans [6], est obtenue par passage à la limite dans une suite de problèmes incrémentaux obtenus en discrétisant l'inéquation quasi-variationnelle par une schéma implicite. La même approche incrémentale a été utilisée par Cocu, Pratt et Raous [37], Rocca [101], Andersson [7] et Cocu et Rocca [38] pour prouver l'existence d'une solution des problèmes de type Signorini avec frottement non local ou local ou frottement et adhésion.

Les travaux de Panagiotopoulos [96], Glowinski, Lions et Trémolières [54], Glowinski [53], Campos, Oden et Kikuchi [23], Kikuchi et Oden [64], Haslinger, Hlaváček et Nečas [57], Hlaváček, Haslinger, Nečas et Lovišek [59] ont enrichi, théoriquement et numériquement, l'étude des problèmes de contact. Parmi ceux qui ont développé des algorithmes de résolution des problèmes de contact unilatéral avec frottement, on rapelle Raous, Chabrand et Lebon [99] et Lebon et Raous [72].

Le livre est divisé en 3 parties et 8 chapitres.

La Partie I reprend, de façon générale, les définitions, les notations et les résultats fondamnentaux dans l'analyse fonctionnelle qui seront essentiels pour comprendre les parties suivantes. Cela a été aussi fait au début de chaque chapitre où il a été nécessaire. Les Chapitres 1 et 2 de cette partie, dédiés aux espaces fonctionnels, respectivement, aux espaces des fonctions vectorielles, sont des présentations classiques de ces sujets qui peuvent être trouvés, comme on renvoie sur place, dans de nombreuses monographies.

La Partie II est consacrée à l'étude des inéquations variationnelles.

Le Chapitre 3 présente des résultats, en général connus, d'existence et d'unicite.

Ainsi, dans la Section 3.1, on considère les inéquations variationnelles stationnaires (de nature "elliptique") de première et deuxième espèce dans le cas des opérateurs linéaires et continus dans des espaces de Hilbert (paragraph 3.11) ou des opérateurs monotones et hémicontinus dans des espaces de Banach (paragraph 3.12). L'étude est basée sur l'utilisation des opérateurs de projection ou de proximité et des théorèmes de Weierstrass, de Lax-Milgram, de point fixe de Schauder ou Banach.

La Section 3.2 étudie les inéquations quasi-variationnelles stationnaires abordant, dans le paragraph 3.21, le cas des opérateurs monotones et hemicontinus, l'existence étant obtenue par l'application du théorème de point fixe de Kakutani tandis que l'unicité, seulement pour des opérateurs fortement monotones, par le théorème de point fixe de Banach. Le paragraph 3.22 considère le cas des opérateus potentiels, en définissant le concept de solution généralisée d'une inéquation quasi-variationnelle. Dans le paragraph 3.23, en applicant le résultat obtenu, on prouve l'existence et l'unicité de la solution généralisée d'un problème de contact avec frottement pour l'opérateur de la théorie de Hencky-Nadai.

La Section 3.3 présente une stratégie, assez récente, pour l'étude d'une classe d'inéquations quasi-variationnelles d'évolution implicites abstraites qui couvre la formulation variationnelle de nombreux problèmes quasi statiques de contact. La méthode utilisée s'appuie, comme dans les cas particuliers, sur les formulations incrémentales.

Le Chapitre 4 donne deux propriétés remarquables vérifiées par les solutions de certaines inéquations variationnelles. Dans Section 4.1 on met en évidence un certain principe de maximum qui est appliqué ensuite au problème d'écoulement d'un fluid à travers un milieux poreux et au problème de l'obstacle. La Section 4.2 établit, en utilisant la méthode des translations due à Nirenberg [90], un résultat de régularité.

Dans le Chapitre 5, nous faisons une étude rapide de la théorie de la dualité développée par Mosco, Cappuzo-Dolcetta et Matzeu [31] et adaptée par Telega [119] aux inéquations quasi-variationnelles implicites.

Le Chapitre 6 étudie l'approximation interne des inéquations variationnelles. Pour les inéquations quasi-variationnelles considérées au paragraph 3.21 on démontre, dans la Section 6.1, la convergence de l'approximation et, dans la Section 6.2, on donne une estimation abstraite de l'erreur de l'approximation. Les inéquations quasi-variationnelles d'évolution implicites, considérées en section 3.3, font l'objet de la Section 6.3 où on obtient un résultat de convergence pour l'approximation interne spatiale et la discrétisation en temps par un schéma aux différences en arrière.

Dans la Partie III on étudie, de manière assez exhaustive, le problème de Signorini avec frottement non local de Coulomb en élasticité.

Le Chapitre 7 est consacré au problème statique. Le problème mécanique est décrit dans la Section 7.1 et sa formulation variationnelle s'obtient dans la Section 7.2. L'existence et, dans certaines hypothèses sur les donnés, l'unicité de la solution s'obtiennent dans la Section 7.3 en appliquant les théorèmes établis au paragraph 3.21.

Utilisant les résultats de régularité donnés dans le paragraph 4.22 et un argument dûe à Fichera [51], on montre, dans la Section 7.4 un résultat de régularité local pour la solution du problème statique.

Dans la Section 7.5 on considère deux formulations duales du problème statique (dit primal), donc des formulations ayant comme inconnue le champ des contraintes au lieu du champ des déplacements. La première formulation duale s'obtient, comme dans le cas de la formulation primale en déplacements, partant du problème mécanique mais en cherchant la formulation variationnelle en contraintes. La deuxième formulation duale, appellée duale condensée, s'obtient en appliquant la théorie de dualité M-CD-M développée dans le paragraphe 5.2 et a comme inconnue le champ des contraintes définis seulement sur le bord de contact.

Dans la Section 7.6 on étudie l'approximation par la méthode des éléments finis du problème primal. On obtient, soit directement, soit en appliquant le résultat d'estimation du section 6.3, une estimation de l'erreur et on montre qu'une choix convenable de la régularisation donnée par le caractère local de la loi de Coulomb, conduit à un ordre plus élevé de l'erreur. La discrétisation de la formulation duale en contraintes ou de la formulation duale condensée fait l'objet de la Section 7.7 où on prouve la convergence de l'approximation par la méthode d'éléments finis équilibre et on obtient des estimations de l'erreur dans des cas particuliers.

La Section 7.8 est dédiée à l'étude d'un problème de contrôle optimal associé au problème de Signorini avec frottement non local. Plus pécisement, on caractèrise le coefficient de frottement qui mène à un champ désiré du déplacement sur la partie de la frontière qui en contact unilatéral. Le contrôle optimal gouverné par une inéquation quasi-variationnelle est, semble-t-il, étudié ici pour la première fois.

Enfin, dans le Chapitre 8 on étudie le problèmes quasi statique. En appliquant les résultats établis dans les Sections 3.3 et 6.3, on obtient l'existence de la solution, dans la Section 8.1, respectivement, la convergence de l'approximation, dans Section 8.2.

Les résultats présentés dans ce livre sont partiellement basés sur nos travaux de recherche originaux.

Partie I

Rappels et préliminaires

Chapitre 1

Espaces fonctionnels

Nous rappelons ci-dessous quelques définitions et théorèmes classiques (pour les démonstrations on renvoie à la bibliographie) d'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans les chapitres ultérieurs. Ici et partout dans ce livre, toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Pour un point $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on va noter l'opérateur différentiel $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ par D_i.

Si $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est un multi-entier, alors on définie l'opérateur différentiel $D^{\boldsymbol{\alpha}}$ d'ordre $\boldsymbol{\alpha}$, avec $|\boldsymbol{\alpha}| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, par

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Évidemment, D_i^0 représente l'identité.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$, on va noter par $C(A)$ l'espace des fonctions réelles continues sur A.

Soit Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un sous-ensemble de Ω. On notera $K \subset\subset \Omega$ si K est relativement compact dans Ω i.e. l'adhérence de K, noté $\bar{K}$, est un compact (i.e., borné et fermé) inclus dans Ω.

Pour tout m entier positif, on peut considérer les espaces $C^m(\Omega)$, respectivement $C^m(\bar{\Omega})$, des fonctions réelles m fois continûment différentiables sur Ω, respectivement $\bar{\Omega}$, c'est-à-dire

$$C^m(\Omega) = \{v \in C(\Omega)\,;\ D^{\boldsymbol{\alpha}} v \in C(\Omega) \text{ pour } |\boldsymbol{\alpha}| \leq m\}\,. \tag{1.1}$$

Lorsque $m = 0$, on abrège souvent $C(\Omega) \equiv C^0(\Omega)$ et $C(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega})$.

On appelle le support d'une fonction v définie dans Ω, l'ensemble fermé

$$supp\; v = \overline{\{\boldsymbol{x} \in \Omega\,;\; v(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}\,. \tag{1.2}$$

On dit que la fonction v est à support compact dans Ω s'il existe un compact K dans Ω tel que $v(\boldsymbol{x}) = 0\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \backslash K$ ou, équivalente, $supp\; v \subset\subset \Omega$.

Alors on va noter par $C_0^m(\Omega)$, respectivement $C_0^m(\bar{\Omega})$ le sous-espace de $C^m(\Omega)$, respectivement $C^m(\bar{\Omega})$ formé des fonctions à support compact dans Ω. De façon évidente, pour m entier fini et Ω borné, $C^m(\bar{\Omega})$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} \sup_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}} |D^{\boldsymbol{\alpha}} v(\boldsymbol{x})|\,. \tag{1.3}$$

Soit

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω.

Pour mieux comprendre quel est le sens de l'opérateur différentiel $D^{\boldsymbol{\alpha}} v$ pour des fonctios v qui ne sont pas dérivables, nous rappelerons brièvement la définition des distributions sur Ω (cf. [105], [3], [95], [123]).

On va désigner par $\mathcal{D}(\Omega)$, appelé l'espace des fonctions test, l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω muni de la topologie de limite inductive comme dans la théorie des distributions de L. Schwartz [105] i.e. on dit qu'une suite $\{\varphi_n\}_n \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge vers une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si les conditions suivantes sont satisfaites:

i) Il existe un compact K fixe de Ω tel que supp $(\varphi_n - \varphi) \subset K\,,\ \forall n$

ii) $D^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi_n \to D^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi$ uniformément sur $\Omega\,,\ \forall \boldsymbol{\alpha}$ multi-entier positif.

On va noter par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, donc l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (i.e. $\langle f, \varphi_j \rangle \to 0$ si $\varphi_j \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$). On appèlle $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions (ou fonctions généralisées) sur Ω et l'on munit de la topologie forte de dual (i.e. $f_j \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si $\langle f_j, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$).

Toute distribution est indéfiniment dérivable dans le sens suivant: si $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle la dérivée au sens des distributions (ou dérivée faible) d'ordre $\boldsymbol{\alpha}$ (pour tout $\boldsymbol{\alpha}$) sur Ω, la distribution notée $D^{\boldsymbol{\alpha}} f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ définie par

$$\langle D^{\boldsymbol{\alpha}} f, \varphi \rangle = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \langle f, D^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \tag{1.4}$$

ce qui donne une application linéaire continue de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On y voit que cette formule génaralise la dérivée partielle (classique) d'ordre $\boldsymbol{\alpha}$, obtenue par intégration par parties, dans le cas d'une fonction $v \in C^{|\boldsymbol{\alpha}|}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} D^{\boldsymbol{\alpha}} v(\boldsymbol{x})\, \varphi(\boldsymbol{x})\, \mathrm{dx} = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \int_{\Omega} v(\boldsymbol{x})\, D^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi(\boldsymbol{x})\, \mathrm{dx} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,. \tag{1.5}$$

Certainement, dans le cas ci-dessus, $D^{\boldsymbol{\alpha}} v$ représente aussi la dérivée au sens des distributions d'ordre $\boldsymbol{\alpha}$ de v. Néanmois il faut remarquer que la dérivée au sens des distributions d'une fonction, même assez régulière, peut exister sans qu'elle existe dans le sens classique.

Pour p donné avec $1 \leq p < +\infty$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions v mesurables sur Ω et telles que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(\boldsymbol{x})|^p \, \mathrm{dx} \right)^{1/p} < \infty\,, \tag{1.6}$$

(il s'agit d'une intégrale au sens de Lebesque).

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme (1.6) est un espace de Banach (évidemment, (1.6) n'est pas une norme si $0 < p < 1$). De plus, il est séparable et, pour $1 < p < \infty$, reflexif.

Les éléments de $L^p(\Omega)$, comme classes d'équivalence de fonctions mesurables, seront identifier si elles sont égales presque partout dans Ω. Mais, pour simplifier l'écriture, on note $v \in L^p(\Omega)$ pour tout v satisfaisant (1.6) et on fait la convention $v = 0$ dans $L^p(\Omega)$ si $v(x) = 0$ p.p. dans Ω.

Pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondante à la norme (1.6) étant donné par

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\boldsymbol{x})\, v(\boldsymbol{x})\, \mathrm{dx}\,. \tag{1.7}$$

On va identifier l'espace $L^2(\Omega)$ à son dual (ce qui n'est pas vrais dans d'autres cas, pour $p \neq 2$).

Pour $p=\infty$, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions v mesurables et essentiellement bornées sur Ω i.e. il existe une constant C telle que $|v(\boldsymbol{x})| \leq C$ p.p. sur Ω. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega} \text{ ess } |v(\boldsymbol{x})| = \inf\{C;\, |v(\boldsymbol{x})| \leq C \text{ p.p. } \boldsymbol{x}\in\Omega\}\,. \tag{1.8}$$

On dit qu'une fonction v définie presque partout dans Ω est p-localement intégrable, en écrivant $v \in L^p_{loc}(\Omega)$, si $v \in L^p(A)$ pour tout ensemble mesurable A tel que $A \subset\subset \Omega$.

Pour $p \in (0,\infty)$, l'exposant conjugué p' de p est défini par la relation: $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$ et on utilise la convention

$$p' = \begin{cases} \dfrac{p}{p-1} & \text{si } p\in(0,\infty)\,,\\ \infty & \text{si } p=0\,,\\ 0 & \text{si } p=\infty\,. \end{cases}$$

Théorème 1.1 *On a les propriétés suivantes*

1) Soit $1<p,q<\infty$.

Si $u\in L^p(\Omega)$ *et* $v\in L^q(\Omega)$, *alors* $uv \in L^{\frac{pq}{p+q}}(\Omega)$.

Si $u_n \to u$ *dans* $L^p(\Omega)$ *et* $v_n\to v$ *dans* $L^q(\Omega)$, *alors* $u_nv_n \to uv$ *dans* $L^{\frac{pq}{p+q}}(\Omega)$.

Si $u\in L^p(\Omega)$ *et* $v \in L^{p'}(\Omega)$ *où* p' *est l'exposant conjugué de* p, *alors* $uv\in L^1(\Omega)$ *et on a l'inégalité de Hölder*

$$\int_\Omega u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{dx} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}\,.$$

(Lorsque $p=p'=2$ *on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)*

2) De toute suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, *avec* $1\leq p\leq\infty$, *on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout dans* Ω.

3) $L^p(\Omega)\subset L^1_{loc}(\Omega) \quad \forall\, 1\leq p\leq\infty$.

4) Soit $v\in L^1_{loc}(\Omega)$ *tel que* $\displaystyle\int_\Omega v(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{dx}=0 \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. *Alors* $v(\boldsymbol{x})=0$ *p.p. dans* Ω.

5) Pour tout $p\in[1,\infty)$, *l'espace dual de* $L^p(\Omega)$ *est l'espace* $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$ *où* p' *est l'exposant conjugué de* p. *L'espace dual de* $L^\infty(\Omega)$ *est plus large que* $L^1(\Omega)$ *(pour détails, voir [3], p.43).*

6) $C_0^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega) \quad \forall\, 1\leq p<\infty$.

Le théorème suivant donne des propriétés d'inclusion de Sobolev pour les espaces $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.2 *Supposons que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est un ouvert avec vol* $(\Omega) = \int_\Omega \mathrm{dx} < \infty$. *Alors*

1) $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \forall\, 1 \leq p \leq q \leq \infty$, *i.e., il existe une constante* C *(dans notre cas,* $C = (\mathit{vol}\ \Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$*) telle que*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|v\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall\, v \in L^q(\Omega)\,.$$

2) $\lim\limits_{p\to\infty} \|v\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall v \in L^\infty(\Omega)$.

3) Supposons que, pour tout $1 \leq p < \infty$, *on a* $v \in L^p(\Omega)$ *et qu'il existe une constante* C *telle que* $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C$. *Alors* $v \in L^\infty(\Omega)$.

Ici et partout dans ce livre, $X \hookrightarrow Y$, pour $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaces normés, signifie $X \subset Y$ avec l'injection continue, c'est-à-dire il existe une constante C telle que

$$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X \qquad \forall u \in X\,.$$

En outre, on ecrit $X \hookrightarrow_{compacte} Y$ si de toute suite bornée dans X on peut extraire une sous-suite qui converge dans Y et $X \hookrightarrow_{dense} Y$ si pour tout $y \in Y$ il existe une suite $\{x_n\}_n \subset X$ telle que $x_n \to y$ dans Y.

À tout $f \in L^p(\Omega)$ (en fait, suffisamment, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$) on associe la distribution $\hat{f}$ définie par

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \int_\Omega f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{dx} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,. \tag{1.9}$$

On obtient ainsi une aplication $f \longmapsto \hat{f}$ de $L^p(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui est linéaire continue et biunivoque. Cela permet d'identifier la distribution $\hat{f}$ à l'élément f et la même identification peut etre fait pour $\mathcal{D}(\Omega)$ d'où

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Grâce à cette relation, on peut définir la dérivée au sens des distributions $D^\alpha f$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$ par (1.4). Partant de ce résultat, S. L. Sobolev [110] a pensé à étendre d'une manière naturelle les espaces $L^p(\Omega)$ en considérant des fonctions qui ne sont pas seulement dans $L^p(\Omega)$ mais qui ont tous les dérivées au sens des distributions jusqu'à un certain ordre

m, avec m un entier positif, qui sont également dans $L^p(\Omega)$. C'est la définition de l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v\,;\ D^{\boldsymbol{\alpha}} v \in L^p(\Omega)\,,\ \ \text{pour } |\boldsymbol{\alpha}| \leq m\}\,.$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq m} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \qquad \text{si } p \in [1,\infty)\,, \\ \|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq m} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} v\|_{L^\infty(\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

De façon évidente, on a $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. La semi-norme sur $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par

$$\begin{aligned} |v|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|= m} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \qquad \text{si } p \in [1,\infty)\,, \\ |v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{|\boldsymbol{\alpha}|= m} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} v\|_{L^\infty(\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

On va noter par $W_0^{m,p}(\Omega)$, l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ (voir [3], p.45). Pour tout $p \in [1,\infty)$, nous avons la chaîne d'injections

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)\,.$$

et, parce que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, il est clair qu'on a $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Il est facile à voir que la semi-norme $|\cdot|_{W^{m,p}(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{m,p}(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Dans le cas $p = 2$, on utilise la notation

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)\,.$$

Muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\leq m} (D^{\boldsymbol{\alpha}} u, D^{\boldsymbol{\alpha}} v)_{L^2(\Omega)}\,, \tag{1.12}$$

l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On posera aussi $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$. Si Ω est borné, alors, sans aucune hypothèse concernant la régularité de Ω, on a

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \qquad \text{avec l'injection compacte.}$$

Souvent, pour simplifier l'écriture, on va noter $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ ou $\|\cdot\|_{m,p}$ au lieu de $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$. De même façon, $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ ou $\|\cdot\|_m$ au lieu de $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ ou $\|\cdot\|_0$ au lieu de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

Les espaces de Sobolev négatives sont les espaces duals des espaces $W_0^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $m \geq 1$ entier. On pose

$$W^{-m,q}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))'$$

où q est l'exposant conjugué de p. Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{-m,q}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{m,p}(\Omega)} \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}} \,,$$

l'espace $W^{-m,q}(\Omega)$ est un espace de Banach (séparable et refléxive, si $1 < p < \infty$). On a noté par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'application de dualité sur $W^{-m,q}(\Omega) \times W^{m,p}(\Omega)$.

Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)\,.$$

Maintenant, il faut noter que la plupart des résultats dans des espaces de Sobolev s'obtient en considérant d'abord des fonctions régulières puis à étendre ces résultats par une raisonnement par densité. Ce sont les théorèmes d'injection et de densité qui montrent comme les fonctions des espaces de Sobolev peuvent être approchées par des fonctions régulières. Parceque ces théorèmes demandent des hypothèses suplimentaires sur Ω, rappellons quelques définitions.

On dit que Ω vérifie la propriété du cône s'il existe un recouvrement fini $\{O_i\}_{i\in I}$ de la frontière Γ de Ω, par des ouverts bornés O_i et, pour tout i, il existe un cône C_i de sommet 0, tel que, $\boldsymbol{x} + C_i$ ne rencontre pas $O_i \cap \Gamma$ pour tout $\boldsymbol{x} \in O_i \cap \Omega$.

On dit que Ω a la propriété du segment s'il existe une couverture localement finie des ouverts $\{U_j\}_j$ de la frontière Γ et une suite correspondante $\{y_j\}_j$ de vecteurs non nules tels que si $\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega} \cap U_j$ pour certain j, alors $\boldsymbol{x} + ty_j \in \Omega$ pour $0 < t < 1$.

Soit Ω un ouvert borné (ou non borné mais de frontière Γ bornée). On dit que Ω est de classe C^r si la frontière Γ est une variété de dimension $(n-1)$ qui est r fois continûment différentiable et Ω est situé localement d'un seul côté de Γ.

On démontre (voir [77], [3], [118] pour les démonstrations et des résultats complémentaires) les suivantes propriétés d'injections de Sobolev:

Théorème 1.3 *Supposons que Ω vérifie la propriété du cône et $1 \leq p < \infty$. Alors*
1) $C^\infty(\bar{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$ avec l'injection dense.
2) Si $mp < n$ alors
i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ où q est l'exposant conjugué de p, soit $q = \dfrac{np}{n-mp}$.
ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec l'injection compacte quel que soit q avec $1 \leq q < \dfrac{np}{n-mp}$.
3) Si $mp = n$ alors
$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec l'injection compacte, quel que soit $q \geq 1$ fini arbitrairement.
4) Si $mp > n$ alors
$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$ quel que soit k entier avec $\dfrac{mp-n}{p} - 1 \leq k < \dfrac{mp-n}{p}$.

En particulier, pour Ω un ouvert régulier, on a

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \text{ avec l'injection compacte} \quad \text{si } n = 1\,.$$
$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ avec l'injection compacte} \quad \text{où} \quad \begin{cases} q \in [1,\infty) & \text{si } n = 2\,, \\ q = 6 & \text{si } n = 3\,, \end{cases}$$
$$H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}) \text{ avec l'injection compacte} \quad \text{si } n \in \{1,2\}\,,$$

De plus, si Ω est de classe C^1, alors (voir [77]) on a

$$C^1(\bar{\Omega}) \hookrightarrow H^1(\Omega) \text{ avec l'injection dense}\,.$$

Pour une fonction $v \in H^1(\Omega)$ (qui n'est pas nécessairement continue dans Ω, ni a fortiori $\bar{\Omega}$), on ne peut pas définir les valeurs de v sur la frontière de Ω. Plus précis, on ne peut pas considérer la restriction d'une fonction de $L^2(\Omega)$ à un ensemble de mesure nulle car ces foctions sont justement définies à un ensemble de mesure nulle près. Les théorèmes de trace montrent qu'ils n'est pas nécessaire qu'une fonction ait continue pour que l'on puisse définir, dans le sens de la trace, sa restriction sur le bord de Ω.

Soit

$$L^2(\Gamma) = \{f\,;\; f \text{ mesurable et de carré sommable sur } \Gamma \text{ pour la mesure superficielle sur } \Gamma\}$$

muni par le produit scalaire

$$(f,g)_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma f\,g\,\mathrm{ds}\,.$$

Le théorème suivant (voir [46] p.40 ou [118] p.9) permet de définir toute fonction $v \in H^1(\Omega)$ presque partout sur Γ.

Théorème 1.4 Théorème de traces dans $\mathbf{H^1(\Omega)}$.

Supposon que Ω est un ouvert de classe C^1. Alors on peut définir de façon unique la trace $\gamma_0 v$ de $v \in H^1(\Omega)$ sur Γ de façon que $\gamma_0 v$ coincide avec la définition usuelle

$$\gamma_0 v(x) = v(x) \quad x \in \Gamma\,, \tag{1.13}$$

si $v \in C^1(\bar{\Omega})$. De plus, l'application

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$$

est linéaire, continue mais elle n'est pas surjective et l'apllication

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$$

est linéaire, continue et surjective.

Pour $v \in C^m(\bar{\Omega})$, on définit la trace $\boldsymbol{\gamma} v$ de u par

$$\boldsymbol{\gamma} v = (\gamma_0 v, \ldots, \gamma_{m-1} v)$$

où $\gamma_0 v$ est "la trace de v" sur Γ et $\gamma_j v\,,\ j = 1, \ldots, m-1$ est "la trace d'ordre j de v" définie comme la dérivée normale d'ordre j de v sur Γ, i.e.

$$\begin{aligned} \gamma_0 v(x) &= v(x) \quad x \in \Gamma\,, \\ \gamma_j v(x) &= \frac{\partial^j v(x)}{\partial \boldsymbol{\nu}^j} \quad x \in \Gamma\,, \end{aligned} \tag{1.14}$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur unitaire normal à Γ orienté vers l'extérieur de Ω.

Lorsque $v \in H^m(\Omega)$ il est possible de prolonger par continuité la définition "intuitive" (1.14) de la trace et définir la trace $\boldsymbol{\gamma} v$.

Si Ω de classe C^∞, alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$ et on a la forme suivante du théorème de traces (voir [77] p.44 ou [95] p.142).

Théorème 1.5 Théorème de traces dans $\mathbf{H^m(\Omega)}$.

Supposons que Ω est de classe C^∞. Alors, quel que soit $m > 0$ entier, l'application

$$\boldsymbol{\gamma} : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \to (\mathcal{D}(\Gamma))^m$$

se prolonge par continuité en une application, encore notée $\boldsymbol{\gamma}$, linéaire et continue de

$$\boldsymbol{\gamma} : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)\,. \tag{1.15}$$

De plus, cette application est surjective et il existe un relèvement linéaire continu

$$\boldsymbol{\gamma}^{-1} : \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) \to H^m(\Omega)$$

tel que

$$\boldsymbol{\gamma}_j(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\mathbf{g}) = g_j \quad 0 \leq j \leq m-1\,, \quad \forall \mathbf{g} \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)\,.$$

Les espaces de Soboles $H^s(\Omega)$ sont souvent appellés espaces de Sobolev d'ordre fractionnaires et sont définis (voir [77], p. 45, par exemple) en utilisant la transformation de Fourier. En fait, $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ est l'image de $H^m(\Omega)$ par l'application (1.15).

On montre aussi (voir [118] p.11 ou [47] p.74) le théorème de traces suivant.

Théorème 1.6 Théorème de traces dans $\mathbf{W^{m,p}(\Omega)}$.

Soit Ω un ouvert de classe C^{m+1}. Alors, quel que soit $m > 0$ entier et $p \geq 1$, il existe l'application linéaire continue

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}) : W^{m,p}(\Omega) \to (L^p(\Gamma))^m\,, \tag{1.16}$$

de façon que $\boldsymbol{\gamma}v$ coincide avec la définition (1.14) usuelle si $v \in C^m(\bar{\Omega})$

Dans ce cas (Ω un ouvert régulier), le noyau de l'application (1.16) (i.e. l'espace des $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tels que $\gamma_j u = 0$, $0 \leq j \leq m-1$) coincide avec $W_0^{m,p}(\Omega)$ qui est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, donc

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega)\,;\ \gamma_j u = 0\,,\ 0 \leq j \leq m-1\}\,.$$

De plus, on montre (voir [3], p.114) le résultat suivant:

Théorème 1.7 *On suppose que Ω est de classe C^m. Alors*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Gamma)$$

où $q = \dfrac{np-p}{n-mp}$ si $mp < n$ et $q \geq 1$ fini arbitrairement si $mp = n$.

En particulier, on a

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Gamma) \quad \text{où} \quad \begin{cases} q \in [1, \infty) & \text{si } n = 2\,, \\ q = 4 & \text{si } n = 3\,, \end{cases}$$

Chapitre 2

Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Nous allons introduire maintenant d'outils supplémantaires qui sont fondamentaux pour l'étude des problèmes d'évolution. On considère un espace de Banach X de norme $\| \cdot \|_X$ et un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

On note $C(I;X)$ l'espace des fonctions continues de I dans X. Pour $k \geq 0$ entier, on désigne par $C^k(I;X)$ (resp. $C^k(\bar{I};X)$) l'espace des fonctions de I (resp. $\bar{I}$) dans X qui sont k fois continûment différentiables, soit

$$C^k(I,X) = \{v : I \to X \,;\; D^{\boldsymbol{\alpha}} v \in C(I;X) \text{ pour } |\boldsymbol{\alpha}| \leq k\}$$

Sans aucun doute, $C^k(\bar{I};X)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{C^k(\bar{I};X)} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \sup_{\boldsymbol{x} \in \bar{I}} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} v(\boldsymbol{x})\|_X \,. \tag{2.1}$$

On notera ensuite par $C^\infty(I;X)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur I à valeurs dans X et par $\mathcal{D}(I;X)$ l'espace $C_0^\infty(I;X)$, i.e. l'espace des fonctions de $C^\infty(I;X)$ à support compact dans I muni par la topologie limite inductive. On dèsigne par $\mathcal{D}'(I;X)$ l'espace des distributions sur I à valeurs dans X défini par

$$\mathcal{D}'(I;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(I;X);X)$$

où $\mathcal{L}(U,V)$ dèsigne l'espace des fonctions linéaires et continues de U dans V.

On dit qu'une fonction $f : I \to X$ est mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset I$ de mesure nulle et une suite $\{f_n\}_{n\geq 0} \subset C_0(I;X)$ telles que $f_n(t) \to f(t)$ quand $n \to \infty$, pour tout $t \in I \backslash E$.

Il est facile à prouver les propriétés suivants (voir [32]):

Proposition 2.1 *1) Si $f : I \to X$ est mesurable, alors $\|f\|_X : I \to \mathbb{R}$ est mesurable.*

2) Soient $\{f_n\}_{n\geq 0}$ une suite des fonctions mesurables de I dans X et $f : I \to X$ est une fonction telles que $f_n(t) \to f(t)$ quand $n \to \infty$, pour presque tout $t \in I$. Alors f est mesurable.

3) Soit $f : I \to X$ une fonction faiblement continue (si $t_n \to t$, alors $f(t_n) \rightharpoonup f(t)$ faiblaiment dans X). Alors f est mesurable.

Une fonction mesurable $f : I \to X$ est dite intégrable s'il existe une suite $\{f_n\}_{n\geq 0} \subset C_0(I;X)$ telle que

$$\int_I \|f_n(t) - f(t)\|_X \,\mathrm{dt} \to 0$$

quand $n \to \infty$ (on a $\|f_n(t) - f(t)\|_X$ mesurable et positive et, par conséquant, $\int_I \|f_n(t) - f(t)\|_X \,\mathrm{dt}$ a un sens).

Proposition 2.2 *Soient $f : I \to X$ une fonction intégrable et $\{f_n\}_{n\geq 0} \subset C_0(I;X)$ une suite telle que $\int_I \|f_n(t) - f(t)\|_X \,\mathrm{dt} \to 0$. Alors il existe un élément dans X, noté $\int_I f(t)\,\mathrm{dt}$, tel que $\int_I f_n(t)\,\mathrm{dt} \to \int_I f(t)\,\mathrm{dt}$ quand $n \to \infty$.*

Proposition 2.3 Théorème de Bochner

Soit $f : I \to X$ une fonction mesurable. Alors f est intégrable si et seulement si $\|f\|_X$ est intégrable. De plus, nous avons

$$\left\| \int_I f(t)\,\mathrm{dt} \right\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X \,\mathrm{dt}\,.$$

Proposition 2.4 Lemme de Fatou

Soit $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions mesurables et non-négatives. Alors*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{dt} \geq \int_I \left(\liminf_{n\to\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{dt}\,.$$

Proposition 2.5 Théorème de la convergence monotone

Soit $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *une suite croissante de fonctions positives intégrables,* $f_n : I \to X$*. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{dt} = \int_I \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{dt}\,.$$

Proposition 2.6 Théorème de la convergence dominée

Soit $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions intégrables,* $f_n : I \to X$ *telle que*

$$\begin{cases} \exists\, g : I \to X \text{ une fonction intégrable telle que } \|f_n\|_X \leq g \quad \text{presque partout sur } I\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\\ \exists\, f : I \to X \text{ une fonction telle que } \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \quad \text{pour presque tout } t \in I\,. \end{cases}$$

Alors f *est intégrable et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{dt} = \int_I \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{dt} = \int_I f(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Soit $p \in [1, \infty]$. On dèsigne par $L^p(I; X)$ l'espace des (classe de) fonctions $f : \bar{I} \to X$ mesurables telles que l'application $t \to \|f(t)\|_X$ soit dans $L^p(I)$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^p(I;X)} = \left(\int_I \|f(t)\|_X^p\,\mathrm{dt}\right)^{1/p} < \infty \quad \text{si } p \neq \infty\,, \tag{2.2}$$

$$\|f\|_{L^\infty(I;X)} = \sup_{t\in(0,T)} \text{ess}\, \|f(t)\|_X\,, \tag{2.3}$$

Si $(X, (\cdot,\cdot))_X$ est un espace de Hilbert, alors $L^2(I; X)$ est aussi un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par

$$(f, g)_{L^2(I;X)} = \int_I (f(t), g(t))_X\,\mathrm{dt}\,.$$

On peut montrer les propriétés suivantes:

Théorème 2.1 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors*

1) $\mathcal{D}(I;X) \subset L^p(I;X) \subset \mathcal{D}'(I;X)$.

2) Si $p < \infty$ *alors*

$$\mathcal{D}(I;X) \text{ est dense dans } L^p(I;X)\,.$$

3) Si $p < \infty$ *et* X *est réflexif ou* X *est séparable alors* $(L^p(I;X))' = L^{p'}(I;X')$, p' *étant l'exposant conjugué de* p.

Dans le cas particulier d'un espace de Hilbert $(X, (\cdot,\cdot)_X)$, *on a* $(L^p(I;X))' = L^{p'}(I;X)$ *et le produit du dualité entre* $L^p(I;X)$ *et* $L^{p'}(I;X)$ *est donné par*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^T (f(t), g(t))_X \,\mathrm{dt} \quad \forall f \in L^{p'}(I;X)\,,\ \forall g \in L^p(I;X)\,.$$

4) Si $f \in L^p(I;X)$ *et* $g \in L^{p'}(I;X')$ *alors* $t \to \langle g(t), f(t)\rangle_{X'\times X}$ *est intégrable et*

$$\int_I |\langle g(t), f(t)\rangle_{X'\times X}|\,\mathrm{dt} \leq \|f\|_{L^p(I;X)} \|g\|_{L^{p'}(I;X')}\,.$$

5) Si I *est est borné alors* $L^q(I;X) \hookrightarrow L^p(I;X)$ *pour* $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

6) Soient $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée dans* $L^p(I;X)$ *et* $f : I \to X$ *tels que* $f_n(t) \to f(t)$ *dans* X *faible pour presque tout* $t \in I$. *Alors* $f \in L^p(I;X)$ *et*

$$\|f\|_{L^p(I;X)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p(I;X)}\,.$$

7) Soit $f \in L^p(\mathbb{R};X)$. *Si on pose*

$$f_h(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)\,\mathrm{ds}\,, \quad \textit{pour } t \in \mathbb{R} \textit{ et } h \neq 0\,,$$

alors $f_h \in L^p(\mathbb{R};X) \cap C_b(\mathbb{R};X)$ *et* $f_h \to f$ *quand* $h \to 0$ *dans* $L^p(\mathbb{R};X)$ *et presque partout,* $C_b(\mathbb{R};X)$ *désignant l'espace des fonctions continues bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* X.

On note $L^p_{loc}(I;X)$ l'ensemble des fonctions $f : I \to X$ mesurables telles que pour tout sous-intervalle compact J de I on a $f/J \in L^p(J;X)$.

Proposition 2.7 *Soit* $f \in L^1_{loc}(I;X)$ *telle que* $f = 0$ *dans* $\mathcal{D}'(I,X)$. *Alors* $f = 0$ *presque partout.*

On dèsigne par $W^{1,p}(I;X)$ l'espace des (classe de) fonctions $f \in L^p(I;X)$ telles que $\dot{f} \in L^p(I;X)$ où $\dot{f}$ est la dérivée faible de f. Muni par la norme

$$\|f\|_{W^{1,p}(I;X)} = \|f\|_{L^p(I;X)} + \|\dot{f}\|_{L^p(I;X)}\,,$$

$W^{1,p}(I;X)$ est un espace de Banach.

Proposition 2.8 *Pour tout $p \geq 1$, on a*

1) $W^{1,p}(I;X) \subset L^\infty(I;X) \cap C(\bar{I};X)$.

2) Si I est borné, alors $C^\infty(\bar{I};X)$ est dense dans $W^{1,p}(I;X)$.

Proposition 2.9 *Soient X un espace de Banach réflexif et $1 \leq p \leq \infty$.*

1) Soit $f \in L^p(I;X)$. Alors $f \in W^{1,p}(I;X)$ si et seulement si il existe $g \in L^p(I;X)$ tel que

$$\|f(\tau) - f(t)\|_X \leq \left| \int_t^\tau g(s)\,\mathrm{ds} \right| \quad p.p.\ t,\tau \in I\,.$$

2) Soit $f : I \to X$ une fonction lipschitzienne et bornée. Alors $f \in W^{1,\infty}(I;X)$ et $\|\dot{f}\|_{L^\infty(I;X)} \leq C$ avec C la constante de Lipschitz de f.

3) Soient $p > 1$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(I;X)$ une suite bornée et $f : I \to X$ tels que $f_n(t) \to f(t)$ dans X faible quand $n \to \infty$, pour presque tout $t \in I$. Alors $f \in W^{1,p}(I;X)$ et

$$\liminf_{n\to\infty} \|\dot{f}_n\|_{L^p(I;X)} \geq \|\dot{f}\|_{L^p(I;X)}\,.$$

Partie II

Inéquations variationnelles

Chapitre 3

Théorèmes d'existence et d'unicité

Ce chapitre présente le cadre fonctionnelle des inéquations variationnelles. Ainsi, dans la première section on présente les résultats, en général connus, d'existence et d'unicité pour la solution des inéquations variationnelles de première et deuxième espèce.

La deuxième section de ce chapitre est dévoué aux inéquations quasi-variationnelles. On va considérer deux classes d'opérateurs: hémicontinus et potentiellles.

Enfin, dans section 3.2, on présente l'analyse variationnelle d'une classe abstraite d'inéquations quasi-variationnelles d'évolution.

3.1 Inéquations variationnelles stationnaires

Dans cette section nous rappelons quelques résultats de base d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de première et deuxième espèce. D'abord nous donnons un compte rendu succint de la théorie mathématique exposée dans le cadre des opérateurs linéaires définies sur des ensembles convexes dans des espaces de Hilbert. Ensuite, nous étendons les résultats à la classe des opérateurs non linéaires définis sur des ensembles convexes dans des espaces de Banach réflexif.

Les résultats présentés ont été sélectionnés pour être utilisés dans les chapitres suivants.

3.11 Inéquations variationnelles linéaires

Soit V un espace de Hilbert (sur le corps $\mathbb{R}$ des réels) avec V^* son dual. Le produit scalaire dans V est noté $(\cdot,\cdot)$ et la norme associée $\|\cdot\|$. Soit K un ensemble non vide, covexe et fermé de V.

Nous considérons la forme bilinéaire continue $a : V \times V \to \mathbb{R}$, donc vérifiant

$$a(u,v) \leq M\|u\|\,\|v\| \quad \forall u,v \in V\,, \tag{3.11.1}$$

où M est une constante positive.

On donne une fonctionnelle $j : K \to \bar{\mathbb{R}}$ convexe sémicontinue inférieurement et propre (i.e. j non identiquement égale à $+\infty$ et $j(v) > -\infty \quad \forall v \in V$).

Soit $f \in V^*$ donné. Grâce au théoreme de Riesz ([3], pag.5), on peut identifier l'espace de Hilbert V avec son dual V^* et alors on désigne encore par f l'elément de V qui représente uniquement la forme linéaire et continue f.

Le problème considéré est

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in K \text{ tel que}\\ a(u,v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K\,,\end{array}\right\} \tag{3.11.2}$$

appellé inéquation variationnelle de deuxième espèce. Un cas particulière, pour $j \equiv 0$, est l'inéquation variationnelle de première espèce

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in K \text{ tel que}\\ a(u,v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K\end{array}\right\} \tag{3.11.3}$$

D'abord, nour prouvons le lemme suivant:

Lemme 3.11.1 *On suppose que la forme bilinéaire et continue a est positive (c'est-à-dire $a(v,v) \geq 0\,,\ \forall v \in V$). Alors l'inéquation variationnelle (3.11.2) et l'inéquation*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Trouver } u \in K \textit{ tel que}\\ a(v,v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K\end{array}\right\} \tag{3.11.4}$$

sont équivalentes.

De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquations variationnelle (3.11.2) est fermé convexe (il peut être vide).

Démonstration. Si u est une solution de (3.11.2) alors, de la positivité de a, il résulte

$$a(v,v-u)+j(v)-j(u)\geq a(u,v-u)+j(v)-j(u)\geq (f,v-u)\quad \forall v\in K$$

soit u est solution de (3.11.4).

Inversement, en utilisant la convexité de K et prenant $v=(1-\lambda)u+\lambda w\in K$ dans (3.11.4) avec $w\in K$ quelconque et $\lambda\in(0,1)$, de la convexité de j on obtient

$$a((1-\lambda)u+\lambda w,w-u)+j(w)-j(u)\geq (f,w-u)\quad \forall w\in K$$

d'où, en passant à la limite avec $\lambda\to 0$ on obtient (3.11.2).

De cette équivalence il en résulte que l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (3.11.2) s'écrit

$$\chi=\{u\in K\,;\; a(v,v-u)+j(v)-j(u)\geq (f,v-u)\quad \forall v\in K\}\,.$$

Il est aisé alors de vérifier que l'ensemble χ est convexe (la fonctionnelle j étant convexe). Pour montrer qu'il est fermé, soit $\{u_n\}_n\subset\chi$ telle que $u_n\to u$. Évidemment $u\in K$ et on a

$$\begin{aligned}&a(v,v-u)+j(v)-j(u)\geq \lim_{n\to\infty}a(v,v-u_n)+j(v)-\liminf_{n\to\infty}j(u_n)\\ &\geq \limsup_{n\to\infty}(a(v,v-u_n)+j(v)-j(u_n))\geq \lim_{n\to\infty}(f,v-u_n)=(f,v-u)\quad \forall v\in K\end{aligned}$$

soit $u\in\chi$. ■

Rappelons aussi un résultat d'existence dans le cas de dimension finie dûe à Hartmann-Stampacchia [56].

Théorème 3.11.1 *Soit K un sous-ensemble non vide convexe compact d'un espace de dimension finie V. Supposons que $A:K\longrightarrow V$ est une application continue et $j:K\longrightarrow(-\infty,+\infty]$ une fonction convexe sémi-continue inférieurement et propre. Alors, pout tout $f\in V$ il existe $u\in K$ tel que*

$$(Au,v-u)+j(v)-j(u)\geq (f,v-u)\quad \forall v\in K \tag{3.11.5}$$

où $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire dans V.

Démonstration. On considère la fonction convexe sémi-continue inférieurement et propre $\varphi:V\longrightarrow(-\infty,+\infty]$ définie par

$$\varphi(v)=\begin{cases} j(v) & \text{si } v\in K\,,\\ +\infty & \text{sinon}\,.\end{cases} \tag{3.11.6}$$

Soit $Prox_\varphi : V \to V$ l'opérateur de proximité [83], [84] défini par $Prox_\varphi(w) = u$, $\forall w \in V$, $u \in V$ étant l'élément unique tel que

$$\Phi_w(u) = \min_{v \in V} \Phi_w(v)$$

où

$$\Phi_w(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \varphi(v) - (w, v) \quad \forall v \in V\,.$$

L'opérateur de proximité est monotone et continu et, évidemment, une caractérisation équivalente pour $u = Prox_\varphi(w)$ est

$$(w - u, v - u) \leq \varphi(v) - \varphi(u) \quad \forall v \in V\,.$$

Si on considère l'opérateur $T : K \to K$ défini par $T(w) = Prox_\varphi(w - Aw + f)$, alors on voit que l'inéquation (3.11.5) est équivalente à $u = T(u)$.

Les opérateurs A et $Prox_\varphi$ sont continus d'où T est continu sur l'ensemble convexe compact K. D'après le théorème de point fixe de Schauder ([63], pag.530) il résulte qu'il existe $u \in K$ tel que $u = T(u)$, soit le résultat cherché.

■

On a le résultat suivant d'existence.

Théorème 3.11.2 *On suppose que la forme bilinéaire continue a est positive et l'ensemble convexe et fermé K est borné. Alors l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (3.11.2) est un convexe faiblement compact non vide.*

Démonstration. D'après lemme 3.11.1 l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (3.11.2) s'écrit

$$\chi = \bigcap_{v \in K} S(v) \quad \text{où} \quad S(v) = \{u \in K\,;\; a(v, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)\}\,.$$

L'ensemble χ est convexe et fermé donc il est faiblement fermé dans K. D'autre part, l'ensemble K est faiblement compact étant borné et fermé dans un espace de Banach réflexif. Alors on prouve que $\chi \neq \emptyset$ en montrant que la famille $\{S(v)\}_{v \in K}$ possède la propriété de l'intersection finie. Soient $\{v_1, \cdots, v_p\}$ une partie finie de K et $K_P = K \cap P$ où P est l'espace de dimension finie généré par la famille $\{v_1, \cdots, v_p\}$. Alors, d'après le théorème 3.11.1 de

Hartman et Stampacchia valable dans le cas de dimension finie, il résulte qu'il existe une solution $u \in K_P \subset K$ de

$$a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K_P\,,$$

soit il existe $u \in S(v)\,,\ \forall v \in K_P$ d'où $\bigcap_{v \in K_P} S(v) \neq \emptyset$.

$\blacksquare$

Dans le cas des ensembles compacts le résultat d'existence a une très jolie et simple démonstration comme on peut voir à la suite.

Proposition 3.11.1 *Sous les hypothèses du théorème 3.11.2, si l'ensemble K est compact, alors l'ensemble des solutions des solutions de l'inéquation (3.11.2) est un convexe non vide compact de V.*

Démonstration. La démonstration de la proposition 3.11.1 est une conséquence du théorème de point fixe de Schauder. En effet, soit $T : K \to K$ l'opérateur défini par $T(w) = Prox_\varphi(w - Aw + f)$ où la fonction φ est définie par (3.11.6) et $A \in \mathcal{L}(V, V)$ est l'opérateur associé à la forme bilinéaire continue $a(\cdot, \cdot)$, c'est-à-dire

$$(Au, v) = a(u, v) \quad \forall u, v \in V\,. \tag{3.11.7}$$

D'après le théorème de Schauder il résulte qu'il existe $u \in K$ tel que $u = T(u)$, c'est-à-dire

$$((u - Au + f) - u, v - u) \leq j(v) - j(u) \quad \forall v \in K$$

donc l'ensemble des solutions du problème (3.11.2) est non vide. De plus, il est convexe et compact étant fermé dans le compact K.

Dans le cas particulier de l'inéquation variationnelle de première espèce (3.11.3) on considère l'opérateur $T : K \to K$ définie par $T(v) = P_K(v - Av + f)$ oú l'opérateur de projection $P_K : V \to K$ sur l'ensemble non vide convexe et fermé K dans l'espace de Hilbert V est défini, pour tout $w \in V$, par

$$\|w - P_K w\| = \min_{v \in K} \|w - v\|\,.$$

Alors, en tenant compte du théorème de la caractérisation de la projection (voir [33], pag.33), de $u = Tu$ il vient

$$(u - (u - Au + f), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K\,.$$

En fait, il suffit à remarquer que l'opérateur de projection est un cas particulier de l'opérateur de proximité : $P_K = Prox_{I_K}$ oú I_K désigne la fonction indicatrice de K:

$$I_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in K \\ +\infty & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

■

Mais les cas plus intéresants impliquent des ensembles K qui ne sont pas bornés. Dans ces cas, pour compléter un théorème d'existence, il faut demander que la forme a est V-elliptique, soit

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in V\,, \tag{3.11.8}$$

avec α une constante positive.

Théorème 3.11.3 *On suppose que la forme bilinéaire continue a est V-elliptique et que l'ensemble K est non vide convexe et fermé. Alors il existe et est unique un élément $u \in K$ solution de l'inéquation variationnelle (3.11.2).*

Démonstration.

1) Si $a(u, v) = (u, v)\,,\ \forall u, v \in V$ alors le théorème 3.11.3 se réduit au théorème d'existence et d'unicité de l'opérateur de proximité attaché à la fonctionnelle φ définie par (3.11.6) (respectivement de la projection de $f \in V$ sur un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert dans le cas $j \equiv 0$ donc inéquation variationnelle de première espèce (3.11.3)). En effet, dans ce cas l'inéquation variationnelle (3.11.2) devient

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ (f - u, v - u) \leq j(v) - j(u)\,, \quad \forall v \in K \end{array}\right\}$$

ce qui équivaut à

$$u = Prox_\varphi(f) \quad (\text{respectivement } u = P_K f \text{ pour (3.11.3)})\,.$$

2) Si la forme $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique alors, un calcul immédiat, montre que le problème (3.11.2) est équivalente au problème

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ J(u) = \inf\limits_{v \in K} J(v) \end{array}\right\}$$

où la fonctionnelle $J : V \to \bar{\mathbb{R}}$ est définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + j(v) - (f, v) \quad \forall v \in V \, .$$

On remarque que cette équivalence a lieu sans l'hypothèse de V-ellipticité de la forme a mais en demandant qu'elle soit positive.

Le théorème 3.11.3 prend maintenant la forme d'un théorème de type Weierstrass ([91], page 1181) d'existence et d'unicité du point de minimum sur K pour la fonctionnelle J. Vraiment, il est facile à vérifier (voir, par exemple [113], pag.44) que la fonctionnelle J ainsi définie est convexe et semi-continue inférieurement donc elle est faiblement semi-continue inférieurement. Elle est aussi coercive ($\lim\limits_{\|v\| \to \infty} J(v) = +\infty$) et propre ce qui assure l'existence d'un minimum dans K. De plus, grâce à l'hypothèse (3.11.8) de V-ellipticité de la forme a, la fonctionnelle J est strictement convexe d'où l'unicité de point de minimum.

3) Si $K = V$ et $j = 0$ alors l'inéquation (3.11.2) devient, grâce au thérème de Riesz,

$$Au = f$$

où A est l'opérateur associé à la forme a défini par (3.11.7). Ainsi, le théorème 3.11.3 exprime une corollaire du théorème de Lax-Milgram ([33], pag. 42-44): l'opérateur A admette un inverse $A^{-1} \in \mathcal{L}(V, V)$ (il satisfait l'hypothèse d'inversabilité $\|Av\| \geq \alpha \|v\| \, , \; v \in V$) et donc l'equation $Au = f$ admet une solution unique $u = A^{-1}f$.

4) Dans le cas général, pour tout $\rho > 0$, l'inéquation (3.11.2) peut s'écrire sous la forme

$$(u - (u - \rho(Au - f)), v - u) \geq \rho\varphi(v) - \rho\varphi(u) \quad \forall v \in V$$

ou encore $u = Prox_{\rho\varphi}(u - \rho(Au - f))$ (respectivement, $u = P_K(u - \rho(Au - f))$ dans le cas (3.11.3) où $j \equiv 0$). L'existence et l'unicité de u découle du théorème de point fixe de Banach (voir, par exemple [113] pag.16), en montrant que, pour certains valeurs de ρ, l'opérateur $T_\rho : K \to K$ défini par

$$T_\rho(v) = Prox_{\rho\varphi}(v - \rho(Av - f)) \quad \text{(respectivement, } T_\rho(v) = P_K(v - \rho(Av - f))\text{)} \qquad (3.11.9)$$

est contractante (application k-lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$) sur l'ensemble fermé K d'un espace de Banach. En effet, utilisant la propriété de non-expansivité de l'opérateur de proximité ou de l'opérateur de projection et les relations (3.11.1), (3.11.8) on a

$$\|T_\rho(v_1) - T_\rho(v_2)\| \leq \sqrt{1 + \rho^2 M^2 - 2\alpha\rho}\, \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, \, v_2 \in K \, ,$$

d'où, en choisissant $\rho \in (0, \frac{2\alpha}{M^2})$, on obtient $1 + \rho^2 M^2 - 2\alpha\rho \in (0, 1)$ soit T_ρ est contractante.

■

3.12 Inéquations variationnelles nonlinéaire

Cette séction est consacrée à l'etude d'existence et d'unicité des solutions des inéquations variationnelles pour une classe plus vaste d'opérateurs non linéaires nommément les opérateurs monotones et hémicontinus qui englobent la plupart des opérateurs non linéaires utilisés dans les applications des problèmes aux limites elliptiques.

Soient $(V, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach réel réflexif avec son dual $(V^*, \|\cdot\|_*)$ et $K \subset V$ un ensemble non vide convexe et fermé. On considère $j : K \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe sémicontinue inférieurement propre et un opérateur $A : V \to V^*$ monotone et hémicontinu, c'est-à-dire

$$\left.\begin{array}{l} \langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in V\,, \\ \forall u, v \in V, \text{ l'application } t \in [0,1] \longrightarrow \langle A((1-t)u + tv, u - v\rangle \text{ est continue,} \end{array}\right\} \tag{3.12.1}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit de dualité entre V^* et V.

On va établir les conditions qui assure l'existence des solutions de l'inequation variationnelle

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \langle Au, v - u\rangle + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall v \in K \end{array}\right\} \tag{3.12.2}$$

pour $f \in V^*$ donné.

D'abord, procédant de même façon comme dans la démostration du lemme 3.11.1, on obtient:

Lemme 3.12.1 *Dans les hypothèses ci-dessus, un élément $u \in K$ satisfait l'inéquation (3.12.2) si et seulement si il satisfait l'inéquation*

$$\langle Av, v - u\rangle + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall v \in K\,. \tag{3.12.3}$$

De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation (3.12.2) est un convexe fermé de V.

Le résultat essentiel de cette section est le suivant théorème d'existence et d'unicité.

Théorème 3.12.1 *Dans les hypotèses ci-dessus, si une des trois conditions est satisfaite*

$$i)\ K\ \textit{est borné}\ , \tag{3.12.4}$$

$$ii)\ 0 \in K\ ,\ j(0) = 0\ \textit{et}\ \lim_{\substack{\|v\|\to+\infty \\ v\in K}} \frac{\langle Av, v\rangle + j(v)}{\|v\|} = +\infty\,, \tag{3.12.5}$$

$$iii)\ \exists v_0 \in K\ \textit{tel que}\ \lim_{\substack{\|v\|\to+\infty \\ v\in K}} \frac{\langle Av, v - v_0\rangle + j(v) - j(v_0)}{\|v\|} = +\infty \tag{3.12.6}$$

alors, pour tout $f \in V^*$, il existe $u \in K$ solution de (3.12.2). De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation variationnelle (3.12.2) est un convexe fermé et borné de V (donc faiblement compact).

Si, de plus, j est strictement convexe ou A est strictement monotone, soit

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \quad \forall u, v \in V\ ,\ u \neq v\,,$$

alors la solution de l'inéquation variationnelle (3.12.2) est unique.

Démonstration.

Dans l'hypothèse (i) la démonstration est analoque à celle théorème 3.11.2 en tenant compte que, de lemme 3.12.1, l'ensemble des solutions de (3.12.2) s'ecrit

$$\chi = \bigcap_{v\in K} S(v) \quad \text{où} \quad S(v) = \{u \in K\,;\ \langle Av, v - u\rangle + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u\rangle\}\,.$$

Évidement χ est borné ayant $\chi \subset K$.

Supposons l'hypothèse (ii) ou (iii) satisfaite. Considérons l'ensemble convexe fermé borné

$$K_R = K \cap \Sigma_R$$

où $\Sigma_R = \{v \in V\,;\ \|v\| \leq R\}$. Si R est assez grand alors l'ensemble Σ_R est non vide. Alors, de la première partie de la démonstration, il existe $u_R \in K_R$ tel que

$$\langle Au_R, v - u_R\rangle + j(v) - j(u_R) \geq \langle f, v - u_R\rangle \quad \forall v \in K_R\,. \tag{3.12.7}$$

Nous allons montrer que les hypothèses de coercivité (ii) ou (iii) implique $\|u_R\| < R$. Supposons $\|u_R\| = R$.

Si la condition (3.12.5) est satisfaite, alors

$$\langle Au_R, u_R\rangle + j(u_R) > \langle f, u_R\rangle \,,$$

ce qui est contraire à

$$\langle Au_R, u_R\rangle + j(u_R) \le \langle f, u_R\rangle \,,$$

obtenu de (3.12.7) pour $v = 0 \in K_R$.

Si (3.12.6) a lieu, alors on a

$$\langle Au_R, u_R - v_0\rangle + j(u_R) - j(v_0) > \langle f, u_R - v_0\rangle \,,$$

Mais, en supposant $R \ge \|v_0\|$ (on peut toujours trouver R assez grand), de (3.12.7) pour $v = v_0 \in K_R$ s'obtient la contradiction

$$\langle Au_R, v_0 - u_R\rangle + j(v_0) - j(u_R) \ge \langle f, v_0 - u_R\rangle \,.$$

En conséquence, $\|u_R\| < R$.

Pour tout $w \in K$ il existe $\epsilon = \epsilon(w) \in (0, 1]$ tel que $v = u + \epsilon(w - u) \in K_R$. En effet, si $w \in K_R$ on prend $\epsilon = 1$ et si $w \notin K_R$ alors prenant $0 < \epsilon \le \dfrac{R - \|u_R\|}{\|w\| - \|u_R\|} \in (0, 1)$ on obtient $v \in K_R$. Alors de (3.12.7) et la convexité de j, il vient

$$\langle Au_R, w - u_R\rangle + j(w) - j(u_R) \ge \langle f, w - u_R\rangle \quad \forall w \in K \,,$$

soit u_R est solution de (3.12.2).

L'ensemble des solutions χ est convexe et fermé. Montrons qu'il est borné. Sinon, pour tout $R > 0$, il existe $u_R \in \chi$ tel que $\|u_R\| > R$. Mais alors, pour R assez grand, les relations de coercivité (3.12.5), (3.12.6) et l'inéquation (3.12.2) donnent, comme ci-dessus, une contradiction. La première partie de la démonstration est achevée.

Enfin, pour montrer l'unicité de la solution dans des cas particuliers, supposons que l'inéquations (3.12.2) a deux solutions u_1, $u_2 \in K$. Prenand $v = \dfrac{u_1 + u_2}{2}$ dans les inéquations correspondantes, par adition et en utilisant la monotonie de A et la convexité de j, il vient

$$0 \le \frac{1}{2}\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle + j(u_1) + j(u_2) - 2j\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \le 0 \,.$$

Il en résulte que $u_1 = u_2$ si A est strictement monotone ou j est strictement convexe.

$\blacksquare$

On peut renoncer aux hypothèses (3.12.4)-(3.12.6) en demandant de plus pour l'opérateur A.

Corollaire 312.1 *Soient $j : K \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe sémicontinue inférieurement propre et un opérateur $A : V \to V^*$ hémicontinu et fortement monotone, i.e.*

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \langle Au - Av, u - v\rangle \geq \alpha \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in V\,. \tag{3.12.8}$$

Alors, pour tout $f \in V^*$, il existe $u \in K$ unique vérifiant (3.12.2).

Démonstration. On montre que l'hypothèse de coercivité (3.12.6) est satisfaite. De l'hypothèse (3.12.8) on obtient

$$\lim_{\substack{\|v\|\to+\infty \\ v\in K}} \frac{\langle Av, v - v_0\rangle}{\|v\|} = +\infty \quad \forall v_0 \in K\,. \tag{3.12.9}$$

D'autre part, les hypothèses faites sur j impliquent qu'ils existent $\lambda \in V^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$j(v) \geq \lambda(v) + \mu \geq -\|\lambda\|_* \|v\| + \mu \quad \forall v \in K\,. \tag{3.12.10}$$

De (3.12.9) et (3.12.10) nous obtenons (3.12.6) en prenant $v_0 \in$ dom $j = \{v \in K\,;\ j(v) < +\infty\}$ (évidemment, la fonctionnelle j étant propre, on a: dom $j \neq \emptyset$).

$\blacksquare$

Remarquons qu'un opérateur A monotone hémicontinu et borné (c'est-à-dire transforme les bornés en des bornés) est pseudo-monotone (voir [47], pag. 42) dans le sens de Brézis [19]:

i) A est borné

ii) $\forall \{u_n\}_n \subset K$, $\forall u \in K$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans V faile et $\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0$
alors on a $\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle \quad \forall v \in K$.

Le théorème 3.12.1 est encore valable pour A un opérateur pseudo-monotone (voir [86] ou [91]) sans différences majores de la démonstration.

3.2 Inéquations quasi-variationnelles stationnaires

Nous considérons une classe plus large d'inéquations variationnelles, nommément inéquations quasi-variationnelles qui ont été introduit initialement pour l'étude des problemes de contrôle impulsionel. Il y a déjà de nombreux travaux sur les inéquations quasi-variationnelles et leur application en mécanique. Nous n'allons pas faire ici la liste de tous les types d'inéquations quasi-variationnelle. Nous abordons seulement deux cas: celui d'opérateurs monotones et hémicontinus et celui d'opérateurs potentiels.

3.21 Inéquations quasi-variationnelles pour opérateurs hémicontinus

Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réflexif, $(V^*, \|\cdot\|_*)$ son dual et K un sous-ensemble non vide convexe fermé de V.

On considère un opérateur $A : V \to V^*$ et une fonctionnelle $j : V \times V \to (-\infty, +\infty]$.

Pour $f \in V^*$ donné nous considererons l'inéquation quasi-variationnelle:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ \langle Au, v-u\rangle + j(u,v) - j(u,u) \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in V\,, \end{array}\right\} \tag{3.21.1}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit de dualité entre V^* et V.

Dans ce paragraphe on cherche à trouver des classes les plus larges pour A et j qui assurent l'existence et, eventuéllement, l'unicité de la solution.

Observation 3.21.1 *L'inéquation (3.21.1) est nommé (voir, par exemple [91]) l'inéquation quasi-variationnelle de deuxième espèce.*

Observation 3.21.2 *Dans le cas particulier $K = V$ (ou, suffisamment, dom $j = K \times K$ où dom $j = \{(u,v) \in V \times V\,;\, j(u,v) < +\infty\}$) et $j(u,v) = \delta(Q(u),v) = \begin{cases} 0 & si\ v \in Q(u)\,, \\ +\infty & si\ v \notin Q(u) \end{cases}$ où $Q : V \to 2^V$ est une application plurivalente telle que pour tout $u \in V$, $Q(u)$ est un ensemble non vide convexe fermé de V, alors l'inéquation (3.21.1) devient*

$$\begin{cases} u \in Q(u) \\ \langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in Q(u)\,. \end{cases}$$

Cette inéquation est appelée inéquation quasi-variationnelle de première espèce et elle a éte introduite par Bensoussan et Lions [15], initialement pour l'étude des problèmes de contrôle impulsionnel.

Théorème 3.21.1 *On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites:*

$$A \text{ est un opérateur monotone et hémicontinu ,} \tag{3.21.2}$$

$$\text{la fonction } j \text{ est faiblement semicontinue inférieurement sur } K \times K\,, \tag{3.21.3}$$

$$\left.\begin{array}{r} \forall v \in V\,, \quad \text{la fonction } j(\cdot, v) : K \to (-\infty, +\infty] \\ \text{est faiblement semicontinue supérieurement sur } K\,, \end{array}\right\} \tag{3.21.4}$$

$$\left.\begin{array}{r} \forall u \in K, \text{ la fonction } j(u, \cdot) : K \to (-\infty, +\infty] \text{ est convexe,} \\ \text{propre et semicontinue inférieurement sur } K\,. \end{array}\right\} \tag{3.21.5}$$

Alors pour tout $f \in V^*$, l'ensemble des solutions de l'inéquation quasi-variationnelle (3.21.1) est non vide et faiblement compact de K si une des deux conditions est satifaite:

$$i) \qquad K \text{ est borné;} \tag{3.21.6}$$

$$ii) \qquad \exists v_0 \in K \ t.q. \ \lim_{\substack{\|v\| \to +\infty \\ v \in K}} \frac{\langle Av, v - v_0 \rangle + j(v, v) - j(v, v_0)}{\|v\|} = +\infty\,. \tag{3.21.7}$$

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons les suivants définitions et résultats (voir [63]) pour applications plurivalentes.

Définition 3.21.1 *Soient X et Y deux espaces topologiques et $S : X \to 2^Y$ une application plurivalente.*

L'application S s'appelle semi-continue supérieurement dans un point $x_0 \in X$ si quelque soit U un sous-ensemble ouvert de Y tel que $S(x_0) \subset U$, il existe un voisinage ouvert V de x_0 dans X tel que $S(V) \subset U$ où $S(V) = \bigcup_{v \in V} S(v)$.

L'application S s'appelle semi-continue supérieurement dans X si elle est semi-continue supérieurement dans tout point $x \in X$.

Définition 3.21.2 *Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques.*

L'application plurivalente $S : X \to 2^Y$ s'appelle K-application (ou, application de type Kakutani) si elle satisfait les hypothèses :

(i) S est semi-continue supérieureent dans X;

(ii) $\forall x \in X$, $S(x)$ est un ensemble non vide convexe compact de Y.

Définition 3.21.3 *On dit que l'application S est férmée si son graphe*

$$\mathcal{G}_S = \{(x, y) \in X \times Y;\, y \in S(x)\}$$

est un sous-ensemble férmé de $X \times Y$.

Proposition 3.21.1 *Soit X un espace local convexe et $C \subset X$ un sous-ensemble compact. Soit $S : C \to 2^C$ une application plurivalente fermée.*

Alors S est semi-continue supérieurement dans X et $S(x)$ est un sous-ensemble compact de C pour tout $x \in C$.

Théorème 3.21.2 Le théorème de point fixe de Kakutani

Soient E un espace local convexe et C un sous-ensemble non vide, convexe et compact de E. Soit $S : C \to 2^C$ une application de type Kakutani.

Alors S a au moins un point fixe dans C i.e. il existe $x \in C$ tel que $x \in S(x)$.

Démonstration du théorème 3.21.1

i) On suppose que l'hypothèse (3.21.6) est satisfaite.

Pour tout $u \in K$, on définit

$$S(u) = \{w \in K;\, \langle Aw, v - w\rangle + j(u, v) - j(u, w) \geq \langle f, v - w\rangle \quad \forall v \in K\}. \tag{3.21.8}$$

De (3.21.2) et (3.21.5), en appliquant le lemme 3.12.1, on résulte

$$S(u) = \{w \in K;\, \langle Av, v - w\rangle + j(u, v) - j(u, w) \geq \langle f, v - w\rangle \quad \forall v \in K\}\,.$$

En appliquant le théorème 3.12.1 nous obtenons que $S(u)$ est un sous-ensemble non vide convexe et faiblement compact de K.

Nous montrerons que l'application multivalente $S : K \to 2^K$ ainsi défini est faiblement férmé. Soit $(u_n, w_n)_n \subset K \times K$ tel que $w_n \in S(u_n)$, $\forall n \in N$ et $u_n \rightharpoonup u$, $w_n \rightharpoonup w$ faible dans V quand $n \to +\infty$, . Alors nous avons

$$\langle Av, v - w_n\rangle + j(u_n, v) - \langle f, v - w_n\rangle \geq j(u_n, w_n) \quad \forall v \in K \,,$$

d'où, en passant à la limite et en utilisant (3.21.4) et (3.21.3), on obtient

$$\langle Av, v - w\rangle + j(u, v) - \langle f, v - w\rangle \geq \limsup_{n\to+\infty}[\langle Av, v - w_n\rangle + j(u_n, v) - \langle f, v - w_n\rangle]$$

$$\geq \liminf_{n\to+\infty} j(u_n, w_n) \geq j(u, w) \quad \forall v \in K \,,$$

soit $w \in S(u)$.

On peut maintenant appliquer la proposition 3.21.1 et le téorème 3.21.2 en prenant $E = V$ muni de la topologie faible et, parceque l'ensemble K est faiblement compacte de V, on peut choisir $C = K$. Nous obtenons alors, en tenant compte de (3.21.8), que l'inéquation quasi-variationnelle (3.21.1) admets au moins une solution $u \in K$.

À la suite on va montrer que l'ensemble des solutions de l'inégalité (3.21.1) est faiblement férmé dans K. Soit $(u_n)_n \subset K$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ dans V faible et

$$\langle Au_n, v - u_n\rangle + j(u_n, v) - j(u_n, u_n) \geq \langle f, v - u_n\rangle \quad \forall v \in K \,.$$

Conformément à la caracterization antérieure on a $u_n \in S(u_n)$, $\forall n \in N$ d'où, en tenant compte que l'application S est faiblement férmé, on déduit que $u \in S(u)$ soit u est une solution de l'inéquation quasi-variationnelle (3.21.1).

Puisque l'ensemble K est faiblement compact, le théorème est prouvé.

ii) On considère maintenant que l'hypothèse de coercivité (3.21.7) est satisfaite. Soit $R > \|v_0\|$ suffisamment grand tel que $K_R = K \cap B(0, R) \neq \emptyset$ où $B(0, R) = \{v \in V;\ \|v\| \leq R\}$. En appliquant la première partie de la démonstration pour l'ensemble non vide, convexe, férmé et borné K_R on obtient l'existence d'un élément $u_R \in K_R$ tel que

$$\langle Au_R, v - u_R\rangle + j(u_R, v) - j(u_R, u_R) \geq \langle f, v - u_R\rangle \quad \forall v \in K_R \,. \tag{3.21.9}$$

Procédant comme dans la démostration du théorème 3.12.1, on montre que l'hypothèse de coercivité (3.21.7) implique $\|u_R\| < R$.

On va montrer que u_R est une solution de l'inéquation (3.21.1). Soit $w \in K \backslash K_R$. En prenant alors $0 < \epsilon \leq \dfrac{R - \|u_R\|}{\|w\| - \|u_R\|}$ et $v = u_R + \epsilon(w - u_R)$, il résulte $v \in K_R$. En écrivant (3.21.9) pour v ainsi choisi, nous obtenons

$$\epsilon\langle Au_R, w - u_R\rangle + j(u_R, u_R + \epsilon(w - u_R)) - j(u_R, u_R) \geq \epsilon\langle f, w - u_R\rangle \quad \forall w \in K\,,$$

d'où, en utilisant la convexité de $j(u_R, \cdot)$ et en divisant par $\epsilon > 0$, on déduit

$$\langle Au_R, w - u_R\rangle + j(u_R, w) - j(u_R, u_R) \geq \langle f, w - u_R\rangle \quad \forall w \in K\,,$$

soit u_R est solution de l'inéquation quasi-variationnelle (3.21.1).

En procédant comme dans la première partie de la démonstration, on obtient que l'ensemble des solutions de l'inéquation (3.21.1) est faiblement fermé. D'autre part, toute solution u de l'inéquation (3.21.1) vérifie l'inéquation (3.21.9) pour tout $R > 0$. Choisissant $R > \|v_0\|$ suffisamment grand, de (3.21.9) et de la condition de coercivité (3.21.7), il résulte $\|u\| < R$. On conclut alors qu'il existe $R > 0$ tel que l'ensemble des solutions de l'inéquation (3.21.1) est fermé dans K_R, c'est-à-dire il est faiblement compact. Le théorème est démontré.

■

Dans des hypothèses plus restrictives sur A on obtient le suivant résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 3.21.3 *Soit $A : V \longrightarrow V^*$ un opérateur hémicontinu et fortement monotone, c'est-à-dire*

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \langle Au - Av, u - v\rangle \geq \alpha\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in V\,. \tag{3.21.10}$$

On considère une fonction $j : V \times V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ satisfaisant les conditions:

$$\left.\begin{array}{r} \forall u \in V,\ j(u, \cdot) : V \to (-\infty, +\infty] \text{ est une fonction} \\ \text{convexe, propre et semi-continue inférieurement,} \end{array}\right\} \tag{3.21.11}$$

$$\left.\begin{array}{r} \exists k < \alpha \text{ tel que } |j(u_1, v_1) + j(u_2, v_2) - j(u_1, v_2) - j(u_2, v_1)| \\ \leq k\|u_1 - u_2\|\,\|v_1 - v_2\| \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in K\,. \end{array}\right\} \tag{3.21.12}$$

Alors, pour tout $f \in V^*$, l'inéquation quasi-variationnelle (3.21.1) a une solution et une seule.

Observation 3.21.3 *Si la fonctionnelle j est de classe C^2 alors la condition (3.21.12) s'ecrit:*

$$\int_0^1 \int_0^1 \partial_1\partial_2 j(u_2 + s(u_2 - u_1), v_1 + t(v_2 - v_1))(u_1 - u_2)(v_2 - v_1)\, ds\, dt \leq k\|u_1 - u_2\|\,\|v_1 - v_2\|$$

soit la condition (3.21.12) se rapporte à l'existence et au bornement des dérivés mixtes d'ordre deux dans le même mode que la lipshitzianeité se rapporte à la dérivabilité d'ordre un.

Démonstration du théorème 3.21.3 La démonstration se rélie sur le théorème de point fixe de Banach et le théorème (3.12.1).

L'opérateur A étant fortement monotone, nous obtenons

$$\frac{\langle Aw, w - v_0\rangle}{\|w\|} \geq \alpha\|w\| - 2\alpha\|v_0\| - \|Av_0\|_* + \frac{\alpha\|v_0\|^2 - \|Av_0\|_*\|v_0\|}{\|w\|} \quad \forall w, v_0 \in K \quad (3.21.13)$$

d'où

$$\lim_{\|w\|\to+\infty} \frac{\langle Aw, w - v_0\rangle}{\|w\|} = +\infty\,. \quad (3.21.14)$$

De (3.21.11) il résulte que, pour tout $u \in K$ il existe $\lambda \in V^*$ ($\lambda = \lambda(u)$) et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$j(u, w) \geq \langle\lambda, w\rangle + \mu \geq -\|\lambda\|_*\|w\| + \mu \quad \forall w \in K\,. \quad (3.21.15)$$

De (3.21.14) et (3.21.15) on déduit que pour tout $u \in K$ on a

$$\lim_{\|w\|\to+\infty} \frac{\langle Aw, w - v_0\rangle + j(u, w) - j(u, v_0)}{\|w\|} = +\infty \quad \forall v_0 \in \text{ dom } j(u, \cdot) \quad (3.21.16)$$

où dom $j(u, \cdot) = \{v \in K;\, j(u, v) < \infty\}$.

Maintenant, désignons par S l'application $S : K \to K$ qui associe à tout élément $w \in K$ la solution de l'inéquation variationnelle de deuxième espèce

$$\left.\begin{array}{l} Sw \in K \\ \langle A(Sw), v - Sw\rangle + j(w, v) - j(w, Sw) \geq \langle f, v - Sw\rangle \quad \forall v \in K\,. \end{array}\right\} \quad (3.21.17)$$

De (3.21.16) et (3.21.10)-(3.21.12), en appliquant le théorème 3.12.1, on obtient l'existence et l'unicité de la solution de l'inéquation (3.21.17) donc l'application S est bien définie.

Remarquons que l'ensemble des points fixes de l'application S coincide à l'ensemble des solutions de l'inéquation quasi-variationnelle (3.21.1). Ainsi, l'existence et l'unicité des solutions de l'inéquation quasi-variationnelle (3.21.1) se réduit à l'existence et l'unicité des points fixes de l'application S.

On va montrer que l'application S est une contraction. En effet, pour w_1, $w_2 \in K$ arbitraires, soient Sw_1 et Sw_2 les solutions correspondantes de l'inéquation (3.21.17). Par additions des deux inégalités pour $v = Sw_2$ et, respectivement, $v = Sw_1$, on obtient, en utilisant (3.21.10) et (3.21.12):

$$\|Sw_1 - Sw_2\| \leq q\|w_1 - w_2\| \tag{3.21.18}$$

avec $q = \dfrac{k}{\alpha} < 1$.

Il en résulte, du théorème de point fixe de Banach (voir [12] ou [113], pag.16), que l'application S a un point fixe unique soit la solution unique de l'inequation quasi-variationnelle (3.21.1).

∎

La démonstration ci-dessus suggère l'application d'un algorithm de type Bensoussan-Lions [15] pour l'approximation de la solution de l' inéquation quasi-variationnelle (3.21.1) : pour $u^0 \in K$ choisi arbitrairement, on défini la séquence $u^n = Su^{n-1}$ donc u^n est la solution unique de l'inégalité:

$$\langle Au^n, v - u^n\rangle + j(u^{n-1}, v) - j(u^{n-1}, u^n) \geq \langle f, v - u^n\rangle \quad \forall v \in K\,. \tag{3.21.19}$$

De (3.21.18) nous obtenons que

$$\|u^n - u\| \leq q^n\|u^0 - u\| \leq Cq^n \tag{3.21.20}$$

où $u = Su$ est la solution unique de l'inéquation (3.21.1), C est une constante positive, indépendente de n et $q < 1$. On a alors $u^n \to u$ dans V fort.

3.22 Inéquations quasi-variationnelles pour opérateurs potentiels

Les méthodes variationnelles sont d'une grande importance dans l'étude des équations opératorials linéaires et nonlinéaires. Le résultat classique de Friedrichs (voir [52] ou [43], pag.134) sur l'extension de tout opérateur A linéaire, symétrique et positivement défini par un autre opérateur $\tilde{A}$, aussi positivement défini mais surjectif, a permis l'introduction du concept de solution génaralisée au sens de Sobolev de l'équation $Au = f$ comme solution classique de l'équation $\tilde{A}u = f$. La classe des opérateurs pour laquelle on peut défini la solution généralisée, a été élargie à celle des opérateurs linéaires avec la différientielle définie positif [79], [97] et encore aux opérateurs non-linéaires [70], [44].

D'autre généralizations ont été obtenu pour des opérateurs plurivalents, des équations suggérées par des problèmes pratique de la mécanique des milieux continus. Ainsi dans [112] est étudié l'équation $Au + \partial j(u) \ni f$ avec A un opérateur linéaire à différentielle symétrique et positivement définie, dans [42] pour un opérateur non-linéaire à différentielle positivement définie ou dans [60] pour des problèmes K-variationnels de type $Pu \ni f$.

Dans la théorie variationnelle, les inéquations variationnelles jouent une importante place grâce au caractérization de la solution classique de l'équation $Au + \partial j(u) \ni f$ comme solution de l'inéquation variationnelle

$$\langle Au, v - u\rangle + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u\rangle \,.$$

À la suite on va introduire [25] le concept de solution généralisée pour des inéquations quasi-variationnelles non-linéaires. Notre approche diffère des téchniques standards parceque une telle inéquation n'est pas équivalente à une équation opératorielle de type $Pu \ni f$. De façon plus précis, on va définir une suite $(u^n)_n$ par : pour $u^0 \in V$ quelconque et en supposant u^{n-1} connu, on pose $j_n(\cdot) = j(u^{n-1}, \cdot)$ et on défini u^n comme la solution généralisée de l'inéquation variationnelle

$$\langle Au^n, v - u^n\rangle + j_n(v) - j_n(u^n) \geq \langle f, v - u^n\rangle \quad \forall v \in V \,.$$

On va montrer que la suite $(u^n)_n$ ainsi définie est convergente et sa unique limite ne dépend pas de u^0 choisi. On va nommer cette limite la solution généralisée de l'inéquation quasi-variationnelle

$$\langle Aw, v - w\rangle + j(w, v) - j(w, w) \geq \langle f, v - w\rangle \,, \forall v \in V \,.$$

Cette définition est justifiée par les propriétés de cette limite.

On va commencer par rappeler quelques résultats.

Soient $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace de Hilbert réel et $\mathcal{D}(P) \subset V$ un sous-espace linéaire dense de V. Pour $f \in V$ donné, on considère le problème

$$(P + \partial\varphi)(u) \ni f \tag{3.22.1}$$

où $P : \mathcal{D}(P) \to V$ est un opérateur nonlinéaire et $\varphi : \mathcal{D}(P) \to (-\infty, +\infty]$ est une fonction satisfaisant les hypothèses :

$$\left.\begin{array}{l}\text{l'opérateur } P \text{ est potentiel c'est-à-dire il existe une fonction} \\ \beta : \mathcal{D}(P) \to \mathbb{R} \text{ telle que } D\beta(u) \cdot v = (Pu, v) \quad \forall u \in \mathcal{D}(P)\,, \forall v \in V\,,\end{array}\right\} \tag{3.22.2}$$

$\mathcal{D}\beta$ étant la différentielle Gâteaux de β,

$$\text{l'opérateur } P \text{ est monotone}\,, \tag{3.22.3}$$

$$\text{la fonction } \varphi \text{ est convexe, propre et semi-continue inférieurement} \tag{3.22.4}$$

Observation 3.22.1 *Dans les hypothèses (3.22.2) et (3.22.3) on peut montrer (voir, par exemple, [42]) que*

$$\beta(v) = \int_0^1 (P(tv), v)dt + const.$$

Définition 3.22.1 *On appelle solution classique de l'équation (3.22.1) un élément $u \in \mathcal{D}(P)$ qui vérifie l'inéquation variationnelle de deuxième espèce*

$$(Pu, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in \mathcal{D}(P)\,.$$

Nous avons la caractérization suivante de la solution classique.

Proposition 3.22.1 *Un élément $u \in \mathcal{D}(P)$ est solution classique de l'équation (3.22.1) si et seulement si u minimise sur $\mathcal{D}(P)$ la fonction*

$$F_f(v) = \beta(v) + \varphi(v) - (f, v)\,. \tag{3.22.5}$$

On considère à la suite une hypothèse plus forte sur P, nommément

$$\left.\begin{array}{l}\text{l'opérateur } P \text{ est fortement monotone c'eat-à-dire il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ (Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|^2 \quad \forall u_1,\, u_2 \in \mathcal{D}(P)\,.\end{array}\right\} \tag{3.22.6}$$

Lemme 3.22.1 *On suppose que les hypothèses* (3.22.2), (3.22.4) *et* (3.22.6) *sont satisfaites. Soit F_f la fonctionnelle définie par* (3.22.5). *Alors*

(1) La fonction F_f est bornée inférieurement sur $\mathcal{D}(P)$.

(2) Toute suite minimisante pour F_f sur $\mathcal{D}(P)$ converge dans V.

(3) Toutes les suites minimisantes pour F_f sur $\mathcal{D}(P)$ ont la même limite dans V.

Le lemme (3.22.1) suggère la suivante définition :

Définition 3.22.2 *On appelle solution généralisée au sens de Sobolev de l'équation (3.22.1) la limite dans V de toute suite minimisante pour la fonction F_f sur $\mathcal{D}(P)$.*

Nous avons la caractérisation :

Proposition 3.22.2 *Dans les hypothèses* (3.22.2), (3.22.4) *et* (3.22.6), *on a:*

(1) Pour tout $f \in V$, la solution généralisée au sens de Sobolev de l'équation (3.22.1) existe et elle est unique.

(2) Si la solution généralisée au sens de Sobolev de l'équation (3.22.1) appartient à $\mathcal{D}(P)$ alors elle est aussi solution classique.

(3) La solution classique (si elle existe) est solution généralisée.

(4) Si $\mathcal{D}(P) = V$ alors, pour tout $f \in V$, la solution classique de l'inéquation (3.22.1) existe et elle est unique.

On va maintenant considérer l'inéquation quasi-variationnelle

$$(Pu, v-u) + j(u,v) - j(u,u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in \mathcal{D}(P) \tag{3.22.7}$$

où $j : V \times \mathcal{D}(P) \to (-\infty, +\infty]$ est une fonction telle que

$$\begin{cases} \forall u \in V,\ j(u,\cdot) : \mathcal{D}(P) \to (-\infty,\ +\infty] \text{ est une fonction} \\ \qquad \text{convexe, propre et semi-continue inférieurement}\,, \end{cases} \tag{3.22.8}$$

$$\begin{cases} \exists k < \alpha \text{ tel que } |j(u_1,v_1) + j(u_2,v_2) - j(u_1,v_2) - j(u_2,v_1)| \\ \qquad \leq k\|u_1 - u_2\|\,\|v_1 - v_2\|\,,\ \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{D}(P)\,. \end{cases} \tag{3.22.9}$$

Observation 3.22.2 *Les hypothèses (3.22.6) et (3.22.9) assurent l'unicité de la solution classique de l'inéquation (3.22.7). En effet, supposant qu'on a deux solutions u_1, $u_2 \in \mathcal{D}(P)$, alors prenant $v = u_2$, respectivement $v = u_1$ dans l'inéquation (3.22.7) satisfaite par u_1, respectivement u_2, on obtient*

$$\begin{aligned} \alpha\|u_1 - u_2\|^2 &\leq (Pu_1 - Pu_2, u_1 - u_2) \leq j(u_1,u_2) + j(u_2,u_1) - j(u_1,u_1) - j(u_2,u_2) \\ &\leq k\|u_1 - u_2\|^2 \end{aligned} \tag{3.22.10}$$

ce qui donne, grâce à l'hypothèse $k < \alpha$, $u_1 = u_2$.

Pour introduire le concept de solution généralisée de l'inéquation (3.22.7), on va noter par $S : V \to V$ l'application qui attache à tout élément $w \in V$ la solution généralisée $u = Sw \in V$, qui existe et est unique, de l'équation:

$$(P + \partial j_w)(u) \ni f\,, \tag{3.22.11}$$

où $j_w(v) = j(w, v)\,,\ \forall v \in \mathcal{D}(P)$.

Lemme 3.22.2 *L'application S est une contraction.*

Démonstration. Soit $w_1,\ w_2 \in V$ arbitraires et soient $Sw_1,\ Sw_2 \in V$ les solutions généralisées correspondantes i.e. $Sw_i\ (i = 1, 2)$ est la limite dans V de toute suite minimisante pour la fonction $F_f^i : \mathcal{D}(P) \to (-\infty, +\infty]$ d'efinie par

$$F_f^i(v) = \beta(v) + j(w_i, v) - (f, v)\,.$$

Soient $(w_n^1)_n$, $(w_n^2)_n \subset \mathcal{D}(P)$ deux suites minimisantes pour F_f^1, respectivement pour F_f^2 donc $w_n^i \to Sw^i\ (i = 1, 2)$ dans V fort lorsque $n \to \infty$.

Il est facile à vérifier que l'hypothèse (3.22.6) implique l'uniforme convéxité de β et, donc, l'uniforme convéxité de F_f^i, c'est-à-dire :

$$\lambda F_f^i(v)+(1-\lambda)F_f^i(u)-F_f^i(\lambda v+(1-\lambda)u) \geq \alpha\lambda(1-\lambda)\|u-v\|^2\,,\ i = 1, 2\,,\ \forall\lambda \in (0, 1)\,,\ \forall u, v \in \mathcal{D}(P)\,.$$

En prenant $v = w_n^i$ et $u = w_n^{3-i}$ $(i = 1, 2)$ dans la relation ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\alpha\lambda(1-\lambda)\|w_n^1 - w_n^2\|^2 &\leq \lambda F_f^i(w_n^i) + (1-\lambda)F_f^i(w_n^{3-i}) - F_f^i(\lambda w_n^i + (1-\lambda)w_n^{3-i})\\ &\leq \lambda F_f^i(w_n^i) + (1-\lambda)F_f^i(w_n^{3-i}) - d_i \qquad i = 1, 2\,,\end{aligned} \tag{3.22.12}$$

où

$$d_i = \inf_{v\in\mathcal{D}(P)} F_f^i(v) \leq F_f^i(\lambda w_n^i + (1-\lambda)w_n^{3-i})\,.$$

Par addition les inéquations (3.22.12) pour $i = 1, 2$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&2\alpha\lambda(1-\lambda)\|w_n^1 - w_n^2\|^2 \leq \lambda\left((F_f^1(w_n^1) - d_1) + (F_f^2(w_n^2) - d_2)\right)\\ &\quad+(1-\lambda)\left(F_f^1(w_n^2) + F_f^2(w_n^1) - d_1 - d_2\right)\,.\end{aligned} \tag{3.22.13}$$

De la définition de F_f^i nous avons :

$$F_f^i(w_n^{3-i}) = F_f^{3-i}(w_n^{3-i}) + j(w_i, w_n^{3-i}) - j(w_{3-i}, w_n^{3-i}) \qquad i = 1, 2$$

d'où, en utilisant (3.22.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &F_f^1(w_n^2) + F_f^2(w_n^1) - d_1 - d_2 \leq (F_f^1(w_n^1) - d_1) + (F_f^2(w_n^2) - d_2) \\ &\quad + k\|w_1 - w_2\| \, \|w_n^1 - w_n^2\| \, . \end{aligned} \tag{3.22.14}$$

D'autre part, de la définition de la solution généralisée Sw_i $(i = 1, 2)$, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n^1 - w_n^2\| = \|Sw_1 - Sw_2\| \tag{3.22.15}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} F_f^i(w_n^i) = d_i \, . \tag{3.22.16}$$

En passant à la limite dans (3.22.13) et en utilisant (3.22.14)-(3.22.16), on déduit

$$2\alpha\lambda\|Sw_1 - Sw_2\| \leq k\|w_1 - w_2\| \, ,$$

d'où, en prenant $\lambda = \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$\|Sw_1 - Sw_2\| \leq q\|w_1 - w_2\| \tag{3.22.17}$$

avec $q = \dfrac{k}{\alpha} < 1$. Le lemme est ainsi démontré. ■

On en déduit alors que l'application S a un point fixe et ce point est unique. On désigne par u le point fixe de l'application S.

Le lemme 3.22.2 suggère la définition de la suite suivante : pour $u^0 \in V$ quelconque, on met $u^n = Su^{n-1}$, soit u^n est la solution généralisé de l'équation :

$$(P + \partial j_n)(v) \ni f \, , \tag{3.22.18}$$

où $j_n(v) = j(u^{n-1}, v)$, $\forall v \in \mathcal{D}(P)$.

Observation 3.22.3 *La suite $(u^n)_n$ ainsi définie est convergente. De plus, quiconque u^0, toute suite $(u^n)_n$ a la même limite à savoir le point fixe unique u de l'application S. En effet, de (3.22.17) on a*

$$\|u^n - u\| = \|Su^{n-1} - Su\| \leq \frac{k}{\alpha}\|u^{n-1} - u\| \leq \ldots \leq (\frac{k}{\alpha})^n\|u^0 - u\| \, .$$

Définition 3.22.3 *On appelle solution généralisée de l'inéquation quasi-variationnelle (3.22.7), la limite u dans V de la suite $(u^n)_n$ des solutions généralisées des équations (3.22.18).*

Cette définition est justifiée par le suivant résultat :

Théorème 3.22.1 *Supposons que les hypothèses* (3.22.2), (3.22.6), (3.22.8) *et* (3.22.9) *sont satisfaites. Alors on a:*

(1) Pour tout $f \in V$, la solution généralisée au sens de Sobolev de l'inéquation quasi-variationnelle (3.22.7) existe et elle est unique.

(2) Si la solution généralisée au sens de Sobolev de l'inéquation quasi-variationnelle (3.22.7) appartient à $\mathcal{D}(P)$ alors elle est aussi solution classique.

(3) La solution classique de l'inéquation quasi-variationnelle (3.22.7) (si elle existe) est solution généralisée.

Démonstration.

(1) Il résulte comme une conséquence de la définition 3.22.3 et de l'observation 3.22.3.

(2) Si $u \in \mathcal{D}(P)$ est solution généralisée de l'inéquation quasi-variationnelle (3.22.7) alors, conformément à l'observation 3.22.3, $u = Su$ donc la solution généralisée Su de l'equation (3.22.1), pour $\varphi(v) = j(u,v) \quad \forall v \in \mathcal{D}(P)$, appartient à $\mathcal{D}(P)$. En appliquant la proposition 3.22.2-(2), il résulte que Su est aussi solution classique c'est-à-dire

$$(P(Su), v - Su) + j(u,v) - j(u, Su) \geq (f, v - Su) \quad \forall v \in \mathcal{D}(P)\,,$$

d'où, en tenant compte que $u = Su$, on obtient que u est solution classique de (3.22.7).

(3) Si u est solution classique de l'inéquation quasi-variationnelle (3.22.7) alors u est solution classique de l'équation

$$(P + \partial j_u)(v) \ni f \tag{3.22.19}$$

où $j_u(v) = j(u,v)\,, \forall v \in \mathcal{D}(P)$. En appliquant la proposition 3.22.2-(3) on obtient que u est solution généralisée de l'équation (3.22.19). D'autre part, de la définition de l'application S, la solution généralisée unique de l'équation (3.22.19) est Su. En conclusion $u = Su$ ce qui, grâce à l'observation 3.22.3, donne que u est solution généralisée de l'inéquation quasi-variationnelle (3.22.7). ■

Corollaire 32.1 *Si $\mathcal{D}(P) = V$ alors, pour tout $f \in V$, il existe et est unique une solution (classique) de l'inéquation quasi-variationnelle (3.22.7).*

3.23 Exemple

Nous considérerons ici un problème de contact avec frottement dans la théorie des petites déformations élasto-plastique dont la formulation variationnelle est une inéquation quasi-variationnelle de type (3.22.7) avec P l'opérateur non-linéaire de la théorie de Hencky-Nadai [41]. En appliquant le méthode variationnelle developpée dans section 3.22, on va prouver l'existence et l'unicité de la solution généralisée du problème.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $p = 2, 3$, un ouvert occupé par l'intérieur d'un corps élastique dans sa forme initiale, non-déformé. On suppose que Ω est borné par une frontière Γ assez régulière qui est décomposé en trois parties Γ_0, Γ_1, Γ_2 ouvertes et disjointes telles que $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$. Sur Γ_2 le corps est en contact unilatéral contre un support rigide. On suppose que le support ne permet pas le détachement de Ω sur Γ_2 ainsi que la composante normale du déplasement est zero tandis que la composante tangentielle sur Γ_2 est un déplacement avec frottement. Sur Γ_0 on suppose que le corps est fixé.

Le corps est soumis à une densité de forces volumique $\boldsymbol{f}$ donnée dans Ω et à une densité de forces surfacique $\boldsymbol{t}$ donnée sur Γ_1.

La formulation classique de ce problème mécanique est:

Problème $\boldsymbol{\mathcal{P}}$: Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ tel que

$$\left.\begin{array}{l}
-\sigma_{ij,j}(\boldsymbol{u}) = f_i \quad \text{dans } \Omega\,, \\
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \Gamma_0\,, \\
\sigma_{ij}\nu_j(\boldsymbol{u}) = t_i \quad \text{sur } \Gamma_1\,, \\
u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2\,, \\
|\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u})| \leq \mu|\sigma^*_\nu(\boldsymbol{u})| \ \text{ et} \\
\qquad |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u})| < \mu|\sigma^*_\nu(\boldsymbol{u})| \ \Rightarrow\ \boldsymbol{u}_\tau = 0 \qquad\qquad \text{sur } \Gamma_2 \\
\qquad |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u})| = \mu|\sigma^*_\nu(\boldsymbol{u})| \ \Rightarrow\ \exists\lambda \geq 0\,,\ \boldsymbol{u}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau
\end{array}\right\} \tag{3.23.1}$$

où μ est le coefficient de frottement et $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ est le champ tensoriel des contraintes qui est lié du champ tensoriel des déformations $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_{ij})$ par la loi de Hooke généralisée nonlinéaire:

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = 2g(\gamma(\boldsymbol{u}))\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) + \left(k - \frac{2}{3}g(\gamma(\boldsymbol{u}))\right)\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\delta_{ij} \tag{3.23.2}$$

avec $k = \lambda + \dfrac{2}{3}\theta$, λ et θ étant les coefficients de Lamé du matériau. On a désigné par g une fonction donnée et par γ la forme:

$$\begin{aligned} &\gamma(\boldsymbol{u}) = \bar{\gamma}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\,, \\ &\bar{\gamma}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) - \frac{2}{3}\epsilon_{ii}(\boldsymbol{u})\epsilon_{jj}(\boldsymbol{v})\,. \end{aligned} \tag{3.23.3}$$

Dans (3.23.1), σ_ν^* représente une régularisation de σ_ν (pour plusieurs details, voir la section 7.1).

On utilise une décomposition classique en composantes normales et tangentielles du vecteur déplacement et du vecteur contrainte sur Γ:

$$\begin{array}{ll} u_\nu = u_i\nu_i\ , & \boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu} \\ \sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_i\nu_j\ , & \sigma_{\tau_i} = \sigma_{ij}\nu_j - \sigma_\nu \nu_i \end{array}$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale unitaire extérieure à Γ.

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème (3.23.1), nous faisons les hypothèses:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_n^*(\boldsymbol{u}) \in C^1(\Gamma_2) \quad \forall \boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega))^p\,, \\ &\mu \in L^\infty(\Gamma_2) \text{ tel que } \mu \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_2\,, \\ &g \in C^2[0, +\infty)\,, \\ &\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^p\,,\ \boldsymbol{t} \in (L^2(\Gamma_1))^p\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.23.4}$$

En utilisant la même téchnique comme dans [93] ou Section 7.2, on démontre qu'une formulation variationnelle du problème (3.23.1) est la suivante inéquation quasi-variationnelle non-linéaire:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(P)\,, \\ &(P\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq \mathbf{L}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(P) \end{aligned}\right\} \tag{3.23.5}$$

où

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^p\,;\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_0\,,\ v_n = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_2\}\,,\\
&\boldsymbol{\mathcal{D}}(P) = \boldsymbol{V} \cap (C^2(\Omega))^p \cap (C^0(\bar{\Omega}))^p\,,\\
&(P\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx} \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(P)\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,,\\
&j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_2} \mu|\sigma_n^*(\boldsymbol{u})|\,|\boldsymbol{v}_\tau|\,\mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(P)\,,\\ +\infty \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in V\backslash\boldsymbol{\mathcal{D}}(P)\,,\end{cases}\\
&\mathbf{L}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,.
\end{aligned}$$

Théorème 3.23.1 *On suppose que les hypothèses (3.23.4) sont satisfaitent. De plus, on suppose qu'il existe les constantes g_0 et g_1 tels que:*

$$0 < g_0 \le g(s) \le \frac{3}{2}k \quad \forall s \ge 0\,, \tag{3.23.6}$$

$$g(s) + 2sg'(s) \ge g_1 > 0 \quad \forall s \ge 0\,. \tag{3.23.7}$$

Alors il existe une constante $\mu_1 > 0$ tel que pour tout $\mu \in L^\infty(\Gamma_2)$ avec $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \le \mu_1$, le problème (3.23.5) a une solution généralisée unique $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$. De plus, si la solution généralisée $\boldsymbol{u}$ appartient à $\boldsymbol{\mathcal{D}}(P)$, alors $\boldsymbol{u}$ est la solution classique du problème (3.23.1).

Démonstration. On va montrer que les hypothèses du théorème 3.22.1 sont satisfaitent.

Soit $\beta : \boldsymbol{\mathcal{D}}(P) \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par:

$$\beta(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\left(k\epsilon_{ii}^2(\boldsymbol{v}) + \int_0^{\gamma(\boldsymbol{v})} g(s)\,\mathrm{ds}\right)\mathrm{dx}\,.$$

En utilisant les relations (3.23.2) et (3.23.3) on obtient la différentielle Gâteaux de la fonctionnelle β:

$$\begin{aligned}
D\beta(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} &= \lim_{t\to 0}\frac{\beta(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}) - \beta(\boldsymbol{u})}{t} = \int_\Omega [k\epsilon_{ii}(\boldsymbol{u})\epsilon_{jj}(\boldsymbol{v}) + g(\gamma(\boldsymbol{u}))\bar{\gamma}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})]\,\mathrm{dx}\\
&= \int_\Omega \left[k\epsilon_{ii}(\boldsymbol{u})\epsilon_{jj}(\boldsymbol{v}) + g(\gamma(\boldsymbol{u}))(-\frac{2}{3}\epsilon_{ii}(\boldsymbol{u})\epsilon_{jj}(\boldsymbol{v}) + 2\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v}))\right]\mathrm{dx}\\
&= \int_\Omega \left[(k - \frac{2}{3}g(\gamma(\boldsymbol{u}))\epsilon_{ii}(\boldsymbol{u})\epsilon_{jj}(\boldsymbol{v}) + 2g(\gamma(\boldsymbol{u}))\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\right]\mathrm{dx}\\
&= (P\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{D}(P)\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}
\end{aligned} \tag{3.23.8}$$

soit l'opérateur P est potentiel.

Pour montrer que l'opérateur P est fortement monotone, en utilisant (3.23.8), on a:

$$\begin{aligned}
D^2\beta(\boldsymbol{u}); \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} &= \lim_{t\to 0}\frac{D\beta(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{w})-D\beta(\boldsymbol{u})}{t}\cdot\boldsymbol{v}\\
&= \int_\Omega k\lim_{t\to 0}\frac{\epsilon_{ii}(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{w})-\epsilon_{ii}(\boldsymbol{u})}{t}\epsilon_{jj}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx}\\
&+\int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{g(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{w}))-g(\gamma(\boldsymbol{u}))}{t}\left(2\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})-\frac{2}{3}\epsilon_{ii}(\boldsymbol{u})\epsilon_{jj}(\boldsymbol{v})\right)\mathrm{dx}\\
&+\int_\Omega \lim_{t\to 0} g(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{w}))\left(2\epsilon_{ij}(\boldsymbol{w})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})-\frac{2}{3}\epsilon_{ii}(\boldsymbol{w})\epsilon_{jj}(\boldsymbol{v})\right)\mathrm{dx}\\
&= \int_\Omega (k\epsilon_{ii}(\boldsymbol{w})\epsilon_{jj}(\boldsymbol{v})+2g'(\gamma(\boldsymbol{u}))\gamma(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\gamma(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+g(\gamma(\boldsymbol{u}))\gamma(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}))\,\mathrm{dx}
\end{aligned}\tag{3.23.9}$$

d'où

$$\begin{aligned}
(P(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})-P\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= D\beta(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}-D\beta(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} = \int_0^1 D^2\beta(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v});\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dt}\\
&= \int_0^1\left(\int_\Omega k\epsilon_{ii}^2(\boldsymbol{v})+2g'(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}))\gamma^2(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})+g(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}))\gamma(\boldsymbol{v})\,dx\right)\mathrm{dt}\\
&= \int_0^1\left(\int_{\Omega_+} E(\boldsymbol{x})\,dx+\int_{\Omega_-} E(\boldsymbol{x})\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dt}
\end{aligned}\tag{3.23.10}$$

où

$$E(\boldsymbol{x}) = (k\epsilon_{ii}^2(\boldsymbol{v})+2g'(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}))\gamma^2(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})+g(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}))\gamma(\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{x})\,,$$

$$\Omega_+ = \{\boldsymbol{x}\in\Omega\,;\ g'(\gamma(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{x})\geq 0\}\,,$$

$$\Omega_- = \{\boldsymbol{x}\in\Omega\,;\ g'(\gamma(\boldsymbol{u}))(\boldsymbol{x})< 0\}\,.$$

Pour $\boldsymbol{x}\in\Omega_+$ nous obtenons en utilisant (3.23.6) et la définition (3.23.3) de γ:

$$E(\boldsymbol{x}) \geq \frac{2}{3}g_0\epsilon_{ii}(\boldsymbol{v})+g_0\gamma(\boldsymbol{v}) = 2g_0\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})$$

d'où

$$\int_0^1\int_{\Omega_+} E(\boldsymbol{x})\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt}\geq 2g_0\int_{\Omega_+}\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx}\,.\tag{3.23.11}$$

Pour $\boldsymbol{x} \in \Omega_-$ nous avons:

$$E(\boldsymbol{x}) \geq \frac{2}{3} g_0 \epsilon_{ii}^2(\boldsymbol{v}) - 2|g'(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}))|\gamma^2(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) + g(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}))\gamma(\boldsymbol{v})$$

ce qui donne, en utilisant l'inégalité de Schwartz:

$$\gamma^2(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \leq \gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v})\gamma(\boldsymbol{v})$$

et la condition (3.23.7), les relations:

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{x}) &\geq \frac{2}{3} g_0 \epsilon_{ii}^2(\boldsymbol{v}) - 2|g'(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}))|\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v})\gamma(\boldsymbol{v}) + g(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}))\gamma(\boldsymbol{v})\\
&= \frac{2}{3} g_0 \epsilon_{ii}(\boldsymbol{v}) = \left(g(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v})) + 2g'(\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\gamma(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v})\right)\gamma(\boldsymbol{v})\\
&\geq \frac{2}{3} g_0 \epsilon_{ii}(\boldsymbol{v}) + g_1\gamma(\boldsymbol{v}) = \frac{2}{3} g_0 \epsilon_{ii}(\boldsymbol{v}) + g_1(2\epsilon_{ij}^2(\boldsymbol{v}) - \frac{2}{3}\epsilon_{ii}^2(\boldsymbol{v}))\\
&= \frac{2}{3}(g_0 - g_1)\epsilon_{ii}^2(\boldsymbol{v}) + 2g_1\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\,.
\end{aligned}$$

Comme on peut supposer que $g_0 \geq g_1$, nous obtenons

$$\int_0^1 \int_{\Omega_-} E(\boldsymbol{x})\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} \geq 2g_1 \int_{\Omega_-} \epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx}\,. \tag{3.23.12}$$

Alors, utilisant (3.23.11) et (3.23.12) dans (3.23.10), il résulte

$$(P(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) - P\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \geq 2g_1 \int_\Omega \epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx}$$

d'où, par l'inégalité de Korn, on déduit que l'opérateur P satisfait la relation (3.22.6) soit il est fortement monotone.

Finalement, il est facile à voir que la fonctionnelle j satisfait l'hypothèse (3.22.8). Pour vérifier (3.22.9), remarquons qu'on peut écrire:

$$\begin{aligned}
&|j(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_2) + j(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_1) - j(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_1) - j(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_2)|\\
&\quad\leq \int_{\Gamma_2} \mu\,\big|\,|\sigma_\nu^*(\boldsymbol{u}_1)| - |\sigma_\nu^*(\boldsymbol{u}_2)|\,\big|\;\big|\,|\boldsymbol{v}_{1\tau}| - |\boldsymbol{v}_{2\tau}|\,\big|\,\mathrm{ds}\\
&\quad\leq \int_{\Gamma_2} \mu|\sigma_\nu^*(\boldsymbol{u}_1) - \sigma_\nu^*(\boldsymbol{u}_2)|\;|\boldsymbol{v}_{1\tau} - \boldsymbol{v}_{2\tau}|\,\mathrm{ds}\\
&\quad\leq C\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|\,\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\| \quad \forall \boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2\, \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{D}(P)\,.
\end{aligned}$$

Choisissant $\mu_1 < \frac{2g_1}{C}$, alors, pour tout $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)} < \mu_1$, on obtient la relation (3.22.9) satisfaite avec $k = \frac{C\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}}{2g_1} < 1$.

On peut alors appliquer le théorème 3.22.1 et en déduire le résultat. ■

3.3 Inéquations quasi-variationnelles d'évolution implicites

Cette section est consacrée à l'analyse mathématique d'une clasee d'inéquations variationnelles d'évolution implicites abstraites [28] qui constitue une généralization des inéquations variationnelles liées à divers problèmes quasi statique de contact et de certain inéquations variationnelles parabolique de deuxième espèce.

La formulation incrémentale du problème considéré est obtenue, comme d'habitude pour des problèmes quasi statiques et dynamiques, par une schéma de discrétisation en temps. On va prouver que la formulation incrémentale a une solution et une seule et des estimations a-priori pour cette solution sont obtenues. À partir de la solution incrémentale, nous construissons une suite de problèmes définis dans l'intervalle de temps considéré. L'existence d'une solution du problème quasi statique est obtenue en montrant que la suite de solutions de cette famille a une limite faible qui vérifie le problème quasi statique.

Dans Chapitre 8 on va montrer comme on peut appliquer ces résultats au problème quasi statique de contact unilatérale avec frottement non local entre un corps élastique et un support rigide. On peut, également, appliquer ces résultas à divers problèmes de contact frottant avec normale compliance ou problèmes de contact bilatérale (voir [55], [106] et les références qui y sont).

On désigne par $(V, (\cdot,\cdot))$ un espace de Hilbert réel de norme $\|\cdot\|$ dans lequel on a un cône K convexe fermé de sommet 0 donc $\rho v \in K$, $\forall v \in K$, $\forall \rho \geq 0$. On note que K étant un cône de sommet 0 alors K est un cône convexe si et seulement si $u + v \in K$, $\forall u, v \in K$. En effet, si K est un cône convexe alors $\frac{u+v}{2} \in K$, $\forall u, v \in K$. Mais K étant cône de sommet 0, il en résulte que $2\frac{u+v}{2} = u + v \in K$, $\forall u, v \in K$. Réciproquement, si $u, v \in K$ alors, K étant cône de sommet 0, il vient $-v \in K$, d'où $u - v \in K$. Alors $\rho(u - v) \in K$, $\forall \rho \geq 0$ et donc $\rho(u - v) + v \in K$, $\forall \rho \geq 0$.

On se donne sur V une forme bilinéaire et symétrique $a : V \times V \to \mathbb{R}$. On suppose que la forme $a(\cdot,\cdot)$ est V-elliptique et continue, donc

$$\left.\begin{array}{ll} \text{il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 & \forall v \in V, \\ \text{il existe } M > 0 \text{ tel que } a(u,v) \leq M\|u\|\,\|v\| & \forall u,v \in V. \end{array}\right\} \tag{3.3.1}$$

Soit maintenant $\{K(g)\}_{g\in V}$ une famille de sous-ensembles convexes non vides de K telle que $0 \in K(0)$. On note $D_K = \{(g,v)/g \in V,\, v \in K(g)\} \subset V \times K$.

À la suite on va supposer que l'ensemble D_K est fortement-faiblement fermé dans $V \times V$ dans le sens suivant

$$\left.\begin{array}{ll} \forall (g_n,v_n) \in D_K \text{ tel que} & \\ g_n \to g \text{ dans } V \text{ fort} & \Longrightarrow (g,v) \in D_K\,. \\ v_n \rightharpoonup v \text{ dans } V \text{ faible} & \end{array}\right\} \tag{3.3.2}$$

Remarque 3.3.1 *De l'hypothèse ci-dessus il résulte que, pour tout $g \in V$, l'ensemble $K(g)$ est faiblement fermé dans V.*

On désigne par $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ un espace de Hilbert réel de norme $\|\cdot\|_H$ et on considère un opérateur $\beta : D_K \to H$. On suppose que l'opérateur β satisfait les conditions

• β est fortement-faiblement continu, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{ll} \forall (g_n,v_n) \in D_K \text{ tel que} & \\ g_n \to g \text{ dans } V \text{ fort} & \Longrightarrow \beta(g_n,v_n) \to \beta(g,v) \text{ dans } H \text{ fort}, \\ v_n \rightharpoonup v \text{ dans } V \text{ faible} & \end{array}\right\} \tag{3.3.3}$$

• $$\|\beta(g_1,v_1) - \beta(g_2,v_2)\|_H \leq k_1(\|g_1 - g_2\| + \|v_1 - v_2\|) \qquad \forall (g_1,v_1),(g_2,v_2) \in D_K \tag{3.3.4}$$

où k_1 est une constante positive.

En outre, on se donne une fonction $j : D_K \times V \to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions:

• $\forall (g,v) \in D_K$, la fonction $j(g,v,\cdot) : V \to \mathbb{R}$ est sous-additive et positivement homogène, donc

$$j(g,v,w_1+w_2) \leq j(g,v,w_1) + j(g,v,w_2) \qquad \forall\, w_1,w_2 \in V, \tag{3.3.5}$$

$$j(g,v,\lambda w) = \lambda j(g,v,w) \qquad \forall w \in V,\, \forall \lambda \geq 0, \tag{3.3.6}$$

• $$j(0,0,w) = 0 \qquad \forall w \in V, \tag{3.3.7}$$

et

- $$\begin{aligned}&|j(g_1, v_1, w_2) + j(g_2, v_2, w_1) - j(g_1, v_1, w_1) - j(g_2, v_2, w_2)|\\ &\leq k_2(\|g_1 - g_2\| + \|\beta(g_1, v_1) - \beta(g_2, v_2)\|_H)\|w_1 - w_2\| \\ &\qquad \forall\, (g_i, v_i) \in D_K,\ \forall w_i \in V,\ i = 1,\ 2,\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

où k_2 est une constante positive.

Lemme 3.3.1 *La fonction j a les propriétés:*

(i) $$j(g, v, 0) = 0 \quad \forall (g, v) \in D_K\,, \tag{3.3.9}$$

(ii) $\forall (g, v) \in D_K$ la fonction $j(g, v, \cdot) : V \to \mathbb{R}$ est convexe,
(iii) $\forall (g, v) \in D_K$ la fonction $j(g, v, \cdot) : V \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne. Plus précisement, on a

$$\begin{aligned}&|j(g, v, w_1) - j(g, v, w_2)| \leq |j(g, v, w_1 - w_2)| \\ &\quad \leq ((1 + k_1)k_2\|g\| + k_1k_2\|v\|)\, \|w_1 - w_2\| \qquad \forall w_1, w_2 \in V,\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

(iv) La fonction j possède les suivantes propriétés de continuité:

$$\left.\begin{array}{l}\forall (g_n, v_n) \in D_K,\ \forall w_n \in V \ \textit{tels que} \\ g_n \to g \ \textit{dans } V \textit{ fort}, \\ v_n \rightharpoonup v \ \textit{dans } V \textit{ faible}\,, \\ w_n \to w \ \textit{dans } V \textit{ fort}\end{array} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} j(g_n, v_n, w_n) = j(g, v, w) \right\} \tag{3.3.11}$$

et

$$\left.\begin{array}{l}\forall (g_n, v_n) \in D_K,\ \forall w_n \in V \ \textit{tels que} \\ g_n \to g \ \textit{dans } V \textit{ fort}, \\ v_n \rightharpoonup v \ \textit{dans } V \textit{ faible}\,, \\ w_n \rightharpoonup w \ \textit{dans } V \textit{ faible}\end{array} \quad \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} j(g_n, v_n, w_n) \geq j(g, v, w). \right\} \tag{3.3.12}$$

Démonstration. Il est immédiat que l'hypothèse (3.3.6) imlique (i) et les hypothèses (3.3.5) et (3.3.6) impliquent (ii).

Pour prouver (iii), on utilise d'abord (3.3.5)

$$j(g, v, w_1) - j(g, v, w_2) = j(g, v, w_1 - w_2 + w_2) - j(g, v, w_2) \leq j(g, v, w_1 - w_2)$$

d'où, en prenant dans (3.3.8), $g_1 = g, g_2 = 0, v_1 = v, v_2 = 0, w_1 = w_1 - w_2, w_2 = 0$ et en utililisant (3.3.4) on obtient (3.3.10).

Maintenant, prenant $g_1 = g_n$, $g_2 = g$, $v_1 = v_n$, $v_2 = v$, $w_1 = w_n$, $w_2 = w$ dans (3.3.8) il vient:

$$|j(g_n, v_n, w_n) - j(g, v, w)| \leq k_2(\|g_n - g\| + \|\beta(g_n, v_n) - \beta(g, v)\|_H)\|w_n - w\|$$

d'où, en tenant compte de (3.3.3), on obtient (3.3.11).

Enfin, de (ii) et (iii) il résulte que, pour tout $(g, v) \in D_K$, la fonction $j(g, v, \cdot)$ est faiblement semi-continue inférieurement. D'autre part, de l'hypothèse (3.3.8) écrite pour $g_1 = g_n$, $g_2 = g$, $v_1 = v_n$, $v_2 = v$, $w_1 = 0$, $w_2 = w_n$, en tenant compte que la suite $\{w_n\}_n$ est bornée et en utilisant (3.3.3), il vient

$$\lim_{n\to\infty} (j(g_n, v_n, w_n) - j(g, v, w_n)) = 0\,.$$

En conséquence, on obtient

$$\liminf_{n\to\infty} j(g_n, v_n, w_n) \geq \lim_{n\to\infty} (j(g_n, v_n, w_n) - j(g, v, w_n)) + \liminf_{n\to\infty} j(g, v, w_n) \geq j(g, v, w)\,.$$

■

On va maintenant considérer une fonction $b : D_K \times V \to \mathbb{R}$ qui satisfait les conditions suivantes

•
$$\forall (g, v) \in D_K,\ \ b(g, v, \cdot) \text{ est linéaire sur } V, \tag{3.3.13}$$

•
$$\left.\begin{array}{ll} \forall (g_n, v_n) \in D_K \quad \forall w_n \in V \text{ tels que} & \\ g_n \to g \text{ in } V \text{ fort }, & \\ v_n \rightharpoonup v \text{ in } V \text{ faible }, & \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b(g_n, v_n, w_n) = b(g, v, w), \\ w_n \to w \text{ in } V \text{ fort} & \end{array}\right\} \tag{3.3.14}$$

et

•
$$\begin{array}{c} |b(g_1, v_1, w) - b(g_2, v_2, w)| \leq k_3(\|g_1 - g_2\| + \|v_1 - v_2\|)\|w\| \\ \forall\,(g_i, v_i) \in D_K,\ \forall w \in V,\ i = 1,\, 2, \end{array} \tag{3.3.15}$$

où k_3 est une constante positive.

Pour tout $g \in V$, $d \in K$ on définit l'application $S_{g,d} : K(g) \to K$ par $S_{g,d}(w) = u_w$, $\forall w \in K(g)$ où u_w est la solution unique, d'après le Téorème 3.11.3, de l'inéquation variationnelle

$$\left.\begin{array}{l} u_w \in K \\ a(u_w, v - u_w) + j(g, w, v - d) - j(g, w, u_w - d) \geq 0 \qquad \forall v \in K\,. \end{array}\right\} \tag{3.3.16}$$

On va supposer que la famille $\{K(g)\}_{g \in V}$ est stable, dans le sens suivant: pour tout $g \in V$, $d \in K$, l'ensemble $K(g)$ est stable sous l'application $S_{g,d} : K(g) \to K$, donc

$$S_{g,d}(K(g)) \subset K(g). \tag{3.3.17}$$

À la suite on va supposer que les constantes k_1 k_2 et α satisfaient la condition

$$k_1\, k_2 < \alpha. \tag{3.3.18}$$

Remarque 3.3.2 *Pour tout $g \in V$, $d \in K$ il existe et est unique $u = S_{g,d}(u) \in K(g)$ donc*

$$\left.\begin{array}{l} u \in K(g) \\ a(u, v - u) + j(g, u, v - d) - j(g, u, u - d) \geq 0 \quad \forall v \in K\,. \end{array}\right\} \tag{3.3.19}$$

En effet, si $w_1, w_2 \in K$ et $u_1 = S_{g,d}(w_1)$, $u_2 = S_{g,d}(w_2)$, alors, par addition les inéquations (3.3.16) écrites pour u_1 et $v = u_2$, respectivement pour u_2 et $v = u_1$, de (3.3.1), (3.3.4), (3.3.8) et (3.3.17), on obtient

$$\begin{array}{l} \alpha\|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq j(g, w_1, u_2 - d) + j(g, w_2, u_1 - d) - j(g, w_1, u_1 - d) - \\ -j(g, w_2, u_2 - d) \leq k_2 k_1 \|w_1 - w_2\|\, \|u_1 - u_2\| \end{array}$$

d'où

$$\|S_{g,d}(w_1) - S_{g,d}(w_2)\| \leq \frac{k_1\, k_2}{\alpha}\|w_1 - w_2\|.$$

En conséquence, de (3.3.18) il résulte que l'application $S_{g,d}$ est contractante et donc il existe $u \in K(g)$ unique tel que $u = S_{g,d}(u)$. ∎

Pour $g \in V$, $d \in K$ on considère les problèmes suivantes

Problème $(\tilde{\mathbf{P}})$: Trouver $u \in K(g)$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} a(u, v - u) + j(g, u, v - d) - j(g, u, u - d) \geq b(g, u, v - u) \quad \forall v \in V, \\ b(g, u, z - u) \geq 0 \quad \forall z \in K \end{array}\right\} \tag{3.3.20}$$

et

Problème ($\tilde{\mathbf{Q}}$) : Trouver $u \in K(g)$ tel que

$$a(u, v-u) + j(g, u, v-d) - j(g, u, u-d) \geq 0 \quad \forall v \in K. \tag{3.3.21}$$

On fait l'hypothèse

$$\text{si } u \text{ est solution de } (\tilde{\mathbf{Q}}) \text{ alors } u \text{ est solution de } (\tilde{\mathbf{P}}). \tag{3.3.22}$$

Remarque 3.3.3 *Si u satisfait ($\tilde{\mathbf{P}}$), alors, évidemment, u satisfait ($\tilde{\mathbf{Q}}$).*

Soient $f \in W^{1,2}(0,T;V)$ donné et $u_0 \in K(f(0))$ la solution unique, conformément à la Remarque 3.3.2, de l'inéquation implicite elliptique suivante

$$a(u_0, w-u_0) + j(f(0), u_0, w) - j(f(0), u_0, u_0) \geq 0 \quad \forall\, w \in K. \tag{3.3.23}$$

Remarque 3.3.4 *En tenant compte que K est un cône de sommet 0, on peut prendre dans (3.3.23) $w = 2u$ et $w = 0$. On conclût que l'inéquation (3.3.23) est équivalente au système*

$$\begin{cases} a(u_0, u_0) - j(f(0), u_0, u_0) = 0, \\ a(u_0, w) + j(f(0), u_0, w) \geq 0 \quad \forall\, w \in K. \end{cases}$$

On va considérer le suivant système d'évolution d'inéquations variationnelles couplées:
Problème (P2) : Trouver $u \in W^{1,2}(0,T;V)$ tel que

$$\left.\begin{aligned} & u(0) = u_0\,,\; u(t) \in K(f(t)) \quad \forall\, t \in [\,0, T\,], \\ & a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(f(t), u(t), v) - j(f(t), u(t), \dot{u}(t)) \\ & \qquad \geq b(f(t), u(t), v - \dot{u}(t)) \quad \forall\, v \in V \text{ p.p. dans }]0, T[, \\ & b(f(t), u(t), z - u(t)) \geq 0 \quad \forall\, z \in K,\; \forall\, t \in [\,0, T\,] \end{aligned}\right\} \tag{3.3.24}$$

où un point au-dessus d'une variable désigne la dérivée par rapport au temps, c'est-à-dire, $\dot{u} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

L'objet principal de cette section est de prouver l'existence d'une solution du problème (**P2**). L'idée est d'aprocher (**P2**) par une famille de problèmes $(\mathbf{P2})_\mathbf{n}$ construits par un "prolongement" des formulations incrementales obtenues en utilisant une schéma implicite de discrétisation en temps. On va démontrer que chaque problème de cette famille a une solution et que la suite des solutions converge, sur une sous-suite, vers un élément qui vérifie le problème (**P2**).

Pour $n \in N^*$, on pose $\Delta t = T/n$ et $t_i = i\,\Delta t$ pour $i = 0, 1, ..., n$. Si θ est une fonction continue de $t \in [\,0, T\,]$ à valeurs dans un espace vectoriel, on utilise les notations

$$\theta^i = \theta(t_i),\ \forall\, i \in \{0, 1, ..., n\}, \quad \partial\theta^i = \frac{\theta^{i+1} - \theta^i}{\Delta t},\ \forall\, i \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

On pose aussi $K^i = K(f(t_i))\ \ \forall\, i \in \{0, 1, ..., n\}$ et $u^0 = u_0$. Alors nous approchons le probème (**P2**) en utilisant la sequence suivante de problèmes incrémentals $\{(\mathbf{P2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}\}_{i=0,1,...,n-1}$

Problème $(\mathbf{P2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$: Trouver $u^{i+1} \in K^{i+1}$ tel que

$$\left.\begin{aligned} & a(u^{i+1}, v - \partial u^i) + j(f^{i+1}, u^{i+1}, v) - j(f^{i+1}, u^{i+1}, \partial u^i) \\ & \qquad \geq b(f^{i+1}, u^{i+1}, v - \partial u^i) \quad \forall\, v \in V, \\ & b(f^{i+1}, u^{i+1}, z - u^{i+1}) \geq 0 \quad \forall\, z \in K. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.25}$$

Lemme 3.3.2 *Si u est une solution de* (**P2**) *et u^{i+1} est une solution de* $(\mathbf{P2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$*, alors*

$$b(f(t), u(t), u(t)) = 0 \qquad dans\ \ [\,0, T\,] \tag{3.3.26}$$

$$b(f^{i+1}, u^{i+1}, u^{i+1}) = 0 \quad \forall\, i \in \{0, 1, ..., n-1\}. \tag{3.3.27}$$

$$b(f(t), u(t), \dot{u}(t)) = 0 \quad p.p.\ dans\ \ [\,0, T\,], \tag{3.3.28}$$

Démonstration. K étant un cône de sommet 0, on peut prendre dans la deuxième inéquation de (**P2**) et $(\mathbf{P2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$, $z = 2u(t)$ et $z = 0$, respectivement $z = 2u^{i+1}$ et $z = 0$ d'où nous obtenons les relations (3.3.26) et (3.3.27).

On déduit aussi de la deuxième inéquation de (**P2**) que, pour tout $t \in]\,0, T[$ et pour tout $\Delta t > 0$ assez petit, on a

$$b(f(t), u(t), \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t}) \geq 0$$

et

$$b(f(t), u(t), \frac{u(t - \Delta t) - u(t)}{-\Delta t}) \leq 0.$$

d'où la relation (3.3.28). ■

Prenant $v = \dfrac{w - u^i}{\Delta t}$ avec w quelconque dans V, il est facile à voir que la première inéquation de $(\mathbf{P2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$ peut être écrite sous la forme

$$a(u^{i+1}, w - u^{i+1}) + j(f^{i+1}, u^{i+1}, w - u^i) - j(f^{i+1}, u^{i+1}, u^{i+1} - u^i) \geq b(u^{i+1}, w - u^{i+1}) \quad \forall w \in V\,.$$

On en déduit alors, de l'hypothèse (3.3.22) et de Remarque 3.3.3 pour $g = f^{i+1}$ et $d = u^i$, que le problème $(\mathbf{P2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$ équivaut à la suivante inéquation variationnelle

Problème $(\mathbf{Q2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$: Trouver $u^{i+1} \in K^{i+1}$ tel que

$$\left.\begin{aligned} &a(u^{i+1}, w - u^{i+1}) + j(f^{i+1}, u^{i+1}, w - u^i) \\ &\qquad\qquad -j(f^{i+1}, u^{i+1}, u^{i+1} - u^i) \geq 0 \quad \forall\, w \in K. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.29}$$

Proposition 3.3.1 *Il existe $u^{i+1} \in K^{i+1}$ unique, solution du problème $(\mathbf{Q2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$.*

Démonstration. Utilisant les hypothèses (3.3.1), (3.3.4), (3.3.8) et (3.3.18), on obtient que l'application $S_{f^{i+1},u^i} : K^{i+1} \to K^{i+1}$ est contractante. En conséquence, l'inéquation $(\mathbf{Q2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$ a une solution et cette solution est unique. ■

Utilisant le fait que la fonction f est absolument continue, nous obtenons les estimations suivantes

Lemme 3.3.3 *Soit $u^{i+1} \in K^{i+1}$ la solution de $(\mathbf{Q2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$, $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Alors*

$$\|u^0\| \leq C\|f\|_{C([0,T];V)}, \quad \|u^{i+1}\| \leq C\|f\|_{C([0,T];V)}\,, \tag{3.3.30}$$

$$\|u^{i+1} - u^i\| \leq C \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot f(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \leq C\sqrt{\Delta t}\|\dot f\|_{L^2(0,T;V)}\,, \tag{3.3.31}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \|u^{i+1} - u^i\|^2 \leq C^2 \Delta t \|\dot f\|^2_{L^2(0,T;V)}\,, \tag{3.3.32}$$

où

$$C = \frac{(k_1 + 1)k_2}{\alpha - k_1 k_2}\,. \tag{3.3.33}$$

Démonstration. D'àprès Remarque 3.3.4, (3.3.1), (3.3.10) pour $w_1 = u^0$, $w_2 = 0$ et Lemme 3.3.1$_1$ on obtient

$$\alpha\|u^0\|^2 \leq |j(f^0, u^0, u^0)| \leq \big((1+k_1)k_2\|f^0\| + k_1k_2\|u^0\|\big)\,\|u^0\|.$$

Mais comme $f \in W^{1,2}(0,T;V) \subset L^\infty((0,T);V) \cap C([0,T];V)$, on a

$$\|f^i\| = \|f(t_i)\| \leq \max_{t\in[0,T]} \|f(t)\| = \|f\|_{C([0,T];V)}\,,\ \forall i \in \{0,1,...,n\},$$

d'où la première partie de (3.3.30).

Maintenant, en prenant $w = 0$ dans $(\mathbf{Q2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$ il vient

$$a(u^{i+1}, u^{i+1}) \leq |j(f^{i+1}, u^{i+1}, -u^i) - j(f^{i+1}, u^{i+1}, u^{i+1} - u^i)|$$

ce qui, grâce à (3.3.1) et (3.3.10), donne l'estimation $(3.3.30)_2$.

Puis on prend $w = u^i$ dans $(\mathbf{Q2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$ et $w = u^{i+1}$ dans $(\mathbf{Q2})^{\mathbf{i-1}}_{\mathbf{n}}$ d'où, en utilisant (3.3.5), (3.3.8), (3.3.9) et (3.3.4), on a

$$\begin{aligned}\alpha\|u^{i+1} - u^i\|^2 &\leq j(f^i, u^i, u^{i+1} - u^{i-1}) - j(f^i, u^i, u^i - u^{i-1}) - j(f^{i+1}, u^{i+1}, u^{i+1} - u^i)\\ &\leq j(f^i, u^i, u^{i+1} - u^i) - j(f^{i+1}, u^{i+1}, u^{i+1} - u^i)\\ &\leq ((1+k_1)k_2\|f^{i+1} - f^i\| + k_1k_2\|u^{i+1} - u^i\|)\|u^{i+1} - u^i\|.\end{aligned}$$

Ça entraîne (3.3.31) en tenant compte que, de la régularité de f, de Théorème de Bochner et en appliquant Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned}\|f(t) - f(s)\| &= \|\int_t^s \dot{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\| \leq \int_s^t \|\dot{f}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\\ &\leq C\sqrt{t-s}\,\|\dot{f}\|_{L^2(0,T;V)} \quad \forall s,t \in [0,T],\ s<t.\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

La dernière estimation s'obtient sans difficulté en écrivant

$$\|u^{i+1} - u^i\|^2 \leq C^2(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{f}(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau)(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{d}\tau) = C^2\Delta t \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{f}(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau\,.$$

■

À la suite on va définir les suites de fonctions $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}, \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{\hat{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $[0,T]$ par

$$\left.\begin{array}{l} u_n(0) = \hat{u}_n(0) = u^0, \;\; f_n(0) = f^0 \\ \left.\begin{array}{l} u_n(t) = u^{i+1} \\ \hat{u}_n(t) = u^i + (t-t_i)\partial u^i \\ f_n(t) = f^{i+1} \end{array}\right\} \forall\, i \in \{0,1,...,n-1\} \quad \forall\, t \in]t_i, t_{i+1}]\,. \end{array}\right\} \tag{3.3.35}$$

Évidemment on a la régularité $u_n\,, f_n \in L^2(0,T;V)$ et $\hat{u}_n \in W^{1,2}(0,T;V)$. De $(\mathbf{P2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$ on déduit imédiatement que les fonctions ainsi définies, satisfaient, pour tout $t \in [\,0,T\,]$, la suivante formulation incrémentale

Problème $(\mathbf{P2})_{\mathbf{n}}$: Trouver $u_n(t) \in K(f_n(t))$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} a(u_n(t), v - \dfrac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) + j(f_n(t), u_n(t), v) \\ \quad -j(f_n(t), u_n(t), \dfrac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) \geq b(f_n(t), u_n(t), v - \dfrac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) \;\; \forall\, v \in V, \\ b(f_n(t), u_n(t), z - u_n(t)) \geq 0 \quad \forall\, z \in K. \end{array}\right\} \tag{3.3.36}$$

Remarque 3.3.5 *De (3.3.35), (3.3.13) et la deuxième inéquation de* $(\mathbf{P2})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$ *on obtient*

$$\begin{array}{l} b(f_n(t), u_n(t), v - \dfrac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) = b(f^{i+1}, u^{i+1}, v - \partial u^i) = b(f^{i+1}, u^{i+1}, v) \\ \quad +\dfrac{1}{\Delta t} b(f^{i+1}, u^{i+1}, u^i - u^{i+1}) \geq b(f_n(t), u_n(t), v) \;\; \forall\, t \in]t_i, t_{i+1}[\,, \; \forall\, v \in V. \end{array}$$

Les résultats suivants jouent un rôle essentiel dans l'obtention de l'existence d'une solution du problème $(\mathbf{P2})$.

Lemme 3.3.4 *Pour tout* $t \in [\,0,T\,]$ *nous avons*

$$\|u_n(t)\| \leq C\|f\|_{C([\,0,T\,];V)}, \tag{3.3.37}$$

et, pour tout $s,t \in [\,0,T\,]$, $s < t$ *nous avons*

$$\|u_n(s) - u_n(t)\| \leq C \int_s^{\min\{t+\frac{T}{n}, T\}} \|\dot{f}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{3.3.38}$$

De plus, on a

$$\|\hat{u}_n\|_{L^2(0,T;V)} \leq C\sqrt{T}\|f\|_{C([0,T];V)}\,, \tag{3.3.39}$$

$$\|u_n - \hat{u}_n\|_{L^2(0,T;V)} \leq C\frac{\Delta t}{\sqrt{3}}\|\dot{f}\|_{L^2(0,T;V)}\,, \tag{3.3.40}$$

$$\|\frac{d}{dt}\hat{u}_n\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{V})} \leq C\|\dot{f}\|_{L^2(0,T;V)}\,. \tag{3.3.41}$$

où C est la constante définie par (3.3.33).

Démonstration. L'estimation (3.3.37) découle de la définition (3.3.35) et de l'estimation (3.3.30). Pour prouver (3.3.38), soient $s,\, t \in [\,0, T\,]$ avec $s < t$ et $0 \leq i \leq j \leq n-1$ tels que $s \in (t_i, t_{i+1}]$, $t \in (t_j, t_{j+1}]$. Alors, d'après (3.3.31), on a

$$\|u_n(s) - u_n(t)\| = \|u^{i+1} - u^{j+1}\| = \|(u^{j+1} - u^j) + (u^j - u^{j-1}) + ... + (u^{i+2} - u^{i+1})\|$$
$$\leq \sum_{k=i+1}^{j} \|u^{k+1} - u^k\| \leq C \sum_{k=i+1}^{j} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\dot{f}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau = C \int_{t_{i+1}}^{t_{j+1}} \|\dot{f}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \leq C \int_{s}^{min\{t+\Delta t, T\}} \|\dot{f}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau.$$

L'estimation (3.3.39) est immédiate par les calculs

$$\|\hat{u}_n\|^2_{L^2(0,T;V)} = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|(1 - \frac{t-t_i}{\Delta t})u^i + \frac{t-t_i}{\Delta t}u^{i+1}\|^2\,\mathrm{dt}$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big((1 - \frac{t-t_i}{\Delta t})\|u^i\| + \frac{t-t_i}{\Delta t}\|u^{i+1}\|\Big)^2\,\mathrm{dt} \leq C^2 T\|f\|^2_{C([0,T];V)}\,.$$

Enfin, de (3.3.35) et (3.3.32), on a

$$\|u_n - \hat{u}_n\|^2_{L^2(0,T;V)} = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u^{i+1} - u^i - \frac{t-t_i}{\Delta t}(u^{i+1} - u^i)\|^2\,\mathrm{dt}$$
$$= \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=0}^{n-1} \|u^{i+1} - u^i\|^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - t)^2\,\mathrm{dt} = \frac{\Delta t}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \|u^{i+1} - u^i\|^2 \leq \frac{C^2\Delta t^2}{3}\|\dot{f}\|^2_{L^2(0,T;V)},$$

d'où (3.3.40) et, en tenant compte que $\|\frac{d\hat{u}_n}{dt}\|_{L^2(0,T;V)} = \frac{\sqrt{3}}{\Delta t}\|u_n - \hat{u}_n\|_{L^2(0,T;V)}$, on a aussi (3.3.41). ■

Lemme 3.3.5 *Il existe deux sous-suites* $\{u_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\{\hat{u}_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}^*}$ *et un élément* $u \in W^{1,2}(0,T;V)$ *tels que*

$$u_{n_p}(t) \rightharpoonup u(t) \quad \text{dans } V \text{ faible} \quad \forall\, t \in [\,0,T\,], \tag{3.3.42}$$

$$\hat{u}_{n_p} \rightharpoonup u \quad \text{dans } W^{1,2}(0,T;V) \text{ faible.} \tag{3.3.43}$$

De plus, pour tout $s \in [\,0,T\,]$, *on a*

$$\liminf_{p\to\infty} \int_0^s a(u_{n_p}(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_{n_p}(t))\,\mathrm{dt} \geq \int_0^s a(u(t),\dot{u}(t))\,\mathrm{dt}\,, \tag{3.3.44}$$

$$\liminf_{p\to\infty} \int_0^s j(f_{n_p}(t), u_{n_p}(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_{n_p}(t))\,\mathrm{dt} \geq \int_0^s j(f(t),u(t),\dot{u}(t))\,\mathrm{dt}. \tag{3.3.45}$$

Démonstration. Appliquant un processus diagonal, de (3.3.37) et (3.3.38), on déduit qu'on peut extraire une sous-suite $\{u_{n_p}\}_p \subset \{u_n\}_n$ telle que $u_{n_p}(t) \rightharpoonup u(t)$ dans V faible $\forall\, t \in [\,0,T\,]$, où $u \in L^2(0,T;V)$. En effet, soit $E = \{\tau_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$ un sous-ensemble dénombrable dense. De (3.3.37) on a, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n(\tau_j)\| \leq C_1$ où $C_1 = C\|f\|_{C([0,T];V)}$. Alors, par un processus diagonal, on peut extraire $\{u_{n_p}\}_p \subset \{u_n\}_n$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $\{u_{n_p}(\tau_j)\}_p$ converge faiblement vers un élément de V noté par $u(\tau_j)$. Pour simplifier l'écriture dans la suite, on supprime l'indice p.

On va montrer que, pour tout $t \in [0,T]$, la suite $\{u_n(t)\}_n$ est faiblement Cauchy. Pour $\varphi \in V$, $t \in [0,T)$, $q > 0$ et $\tau_j \in E$ quelconques, on a

$$\begin{aligned}
&|(u_{n+q}(t) - u_n(t),\varphi)| \leq |(u_{n+q}(t) - u_{n+q}(\tau_j),\varphi)| + |(u_{n+q}(\tau_j) - u_n(\tau_j),\varphi)| + |(u_n(\tau_j) - u_n(t),\varphi)| \\
&\leq \|\varphi\|(\|u_{n+q}(t) - u_{n+q}(\tau_j)\| + \|u_n(\tau_j) - u_n(t)\|) + |(u_{n+q}(\tau_j) - u_n(\tau_j),\varphi)|.
\end{aligned}$$

Choisissant $\tau_j > t$ et utilisant (3.3.38), on en déduit

$$
\begin{aligned}
|(u_{n+q}(t) - u_n(t), \varphi)| &\leq C\|\varphi\|(\int_t^{min\{\tau_j + \frac{T}{n+q}, T\}} \|\dot{f}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \\
&+ \int_t^{min\{\tau_j + \frac{T}{n}, T\}} \|\dot{f}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau) + |(u_{n+q}(\tau_j) - u_n(\tau_j), \varphi)| \\
&\leq 2C\|\varphi\| \int_t^{min\{\tau_j + \frac{T}{n}, T\}} \|\dot{f}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau + |(u_{n+q}(\tau_j) - u_n(\tau_j), \varphi)| \\
&\leq 2C\|\varphi\| \sqrt{\frac{T}{n} + \tau_j - t} \|\dot{f}\|_{L^2(0,T;V)} + |(u_{n+q}(\tau_j) - u_n(\tau_j), \varphi)|.
\end{aligned}
\tag{3.3.46}
$$

Mais, comme $E = \{\tau_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[0, T]$, on peut choisir $\tau_j > t$ tel que $\tau_j - t$ est assez petit. D'autre part, la suite $\{u_n(\tau_j)\}_n$ étant faiblement convergent il est faiblement Cauchy. Alors, de (3.3.46), il en résulte que la suite $\{u_n(t)\}_n$ est faiblement Cauchy, donc $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ dans V faible. Évidement, K étant faiblement fermé, $u(t) \in K$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(0, T; V)$ faible .

D'autre part, de (3.3.39) et (3.3.41), on obtient qu'il existe une sous-suite de $\{\hat{u}_n\}_n$, encore notée $\{\hat{u}_n\}_n$, et un élément $\hat{u} \in W^{1,2}(0, T; V)$ telle que $\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u}$ dans $W^{1,2}(0, T; V)$ faible (en fait, on considère que $\|\hat{u}_{n_k}\|_{W^{1,2}(0,T;V)}$ est bornée pour ces indices n_k pour les queles la sous-suite $u_{n_k}(t)$ converge faiblement et on extrait de cette suite une suite $\hat{u}_{n_{k_p}}$ qui converge faiblement dans $W^{1,2}(0, T; V)$ vers $\hat{u}$). On montre que $u = \hat{u}$. En effet, on a

$$
\begin{aligned}
\left|(\hat{u}_n - u_n, \varphi)_{L^2(0,T;V)}\right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (u^i + \frac{t - t_i}{\Delta t}(u^{i+1} - u^i) - u^{i+1}, \varphi(t)) \, \mathrm{dt} \right| \\
\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u^{i+1} - u^i\| \, \|\varphi(t)\| \, \mathrm{dt} &\leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|u^{i+1} - u^i\|^2 \, \mathrm{dt} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\varphi(t)\|^2 \, \mathrm{dt} \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{T}{n} \|\dot{f}\|_{L^2(0,T;V)} \|\varphi\|_{L^2(0,T;V)}
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire, $\hat{u}_n$ et u_n ont la même limite faible dans $L^2(0, T; V)$.

On va maintenant déduire (3.3.44). Soit $s \in]\,0, T\,]$ et $i \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $s \in (t_i, t_{i+1}]$.

Utilisant les définitions (3.3.35) et les propriétés de a, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^s a(u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} &= \int_0^{t_{i+1}} a(u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} - T_n \\ = \sum_{j=0}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(u^{j+1}, \frac{u^{j+1}-u^j}{\Delta t})\,\mathrm{dt} - T_n &\geq \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{i}\big(a(u^{j+1},u^{j+1}) - a(u^j,u^j)\big) - T_n \\ = \frac{1}{2}\big(a(u^{i+1},u^{i+1}) - a(u^0,u^0)\big) - T_n &= \frac{1}{2}\left(a(u_n(s),u_n(s)) - a(u_n(0),u_n(0))\right) - T_n\end{aligned} \tag{3.3.47}$$

où $T_n = \int_s^{t_{i+1}} a(u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt}$.

Tout d'abord, grâce à (3.3.1), (3.3.30) et (3.3.31), on a

$$|T_n| \leq M\frac{t_{i+1}-s}{\Delta t}\|u^{i+1}\|\|u^{i+1}-u^i\| \leq C^2 M\sqrt{\Delta t}\,\|f\|_{C([0,T];V)}\|\dot{f}\|_{L^2(0,T;V)}$$

d'où $\lim_{n\to\infty} T_n = 0$. Alors, en passant à la limite dans (3.3.47) et tenant compte que la symétrie de a implique

$$\int_0^s a(u(t),\dot{u}(t))\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{\mathrm{dt}} a(u(t),u(t))\,\mathrm{dt} = \frac{a(u(s),u(s)) - a(u(0),u(0))}{2},$$

on obtient (3.3.44).

Il reste à démontrer (3.3.45). La fonction $j(f,u,\cdot)$ étant convexe et semi-continue infériuerement pour tout $f,u \in V$, il résulte (voir [20], pag.160) que l'application $v \mapsto \int_0^s j(f(t),u(t),v(t))\,\mathrm{dt}$ est convexe et semi-continue inférieurement dans $L^2(0,T;V)$. Alors

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^s j(f(t),u(t),\frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} \geq \int_0^s j(f(t),u(t),\dot{u}(t))\,\mathrm{dt}. \tag{3.3.48}$$

D'autre part, de (3.3.8) et (3.3.41) on obtient

$$\left|\int_0^s \left(j(f_n(t),u_n(t),\frac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) - j(f(t),u(t),\frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\right)\mathrm{dt}\right|$$
$$\leq Ck_2\|\dot{f}\|_{L^2(0,T;V)}\,(\int_0^s (\|\beta(f_n(t),u_n(t)) - \beta(f(t),u(t))\|_H$$
$$+\|f_n(t)-f(t)\|)^2\,\mathrm{dt})^{\frac{1}{2}},$$

d'où, parce que $f, u \in W^{1,2}(0,T;V) \subset C([0,T];V)$ et $f_n(t) \to f(t)$ in $V \quad \forall t \in [0,T]$, en utilisant la propriété (3.3.3) de β, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^s \left(j(f_n(t), u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) - j(f(t), u(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) \right) \mathrm{dt} \;=\; 0. \tag{3.3.49}$$

En combinant les relations (3.3.48) et (3.3.49), on obtient

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \int_0^s j(f_n(t), u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} \\
&\quad \geq \lim_{n\to\infty} \int_0^s \left(j(f_n(t), u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) - j(f(t), u(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) \right) \mathrm{dt} \\
&+ \liminf_{n\to\infty} \int_0^s j(f(t), u(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} \geq \int_0^s j(f(t), u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

On va maintenant prouver le suivant résultat d'existence d'une solution du problème (**P2**).

Théorème 3.3.1 *On suppose que les hypothèses (3.3.1)-(3.3.8), (3.3.13)-(3.3.15), (3.3.17), (3.3.18) et (3.3.22) sont satisfaites. Alors il existe les sous-suites* $\{u_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\{\hat{u}_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}^*}$ *telles que*

$$u_{n_p}(t) \to u(t) \quad \text{dans } V \text{ fort} \quad \forall\, t \in [0,T], \tag{3.3.50}$$

$$\hat{u}_{n_p} \to u \quad \text{dans } L^2(0,T;V) \text{ fort,} \tag{3.3.51}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_{n_p} \rightharpoonup \dot{u} \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;V) \text{ faible,} \tag{3.3.52}$$

où $u \in W^{1,2}(0,T;V)$ *est une solution du problème* (**P2**).

Démonstration. Soit $\{u_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}^*}$ la sous-suite donée par Lemme 3.3.5. Pour des raisons de simplicité, on la note encore par $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Nous allons d'abord montrer que sa limite faible u est une solution du problème (P).

Il est facile à voir que $u(t) \in K(f(t))$, $\forall t \in [0,T]$. En effet, ayant $(f_n(t), u_n(t)) \in D_K$, $\forall t \in [0,T]$, alors, les convergences: $f_n(t) \to f(t)$ dans V fort, $\forall t \in [0,T]$ et $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ dans V faible, $\forall t \in [0,T]$ impliquent, grâce à l'hypothèse (3.3.2) sur l'ensemble D_K, l'assertion.

Soit $s \in [\,0, T\,]$. Integrant les deux parties de la première inéquation de $(\mathbf{P2})_\mathbf{n}$ sur $[\,0, s\,]$ et en tenant compte de Remarque 3.3.5, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^s a(u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} + \int_0^s j(f_n(t), u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} \le \int_0^s a(u_n(t), v)\,\mathrm{dt} \\ + \int_0^s j(f_n(t), u_n(t), v)\,\mathrm{dt} - \int_0^s b(f_n(t), u_n(t), v)\,\mathrm{dt} \quad \forall\, v \in L^2(0, T; V)\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

Mais, de (3.3.11) et (3.3.14), on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^s j(f_n(t), u_n(t), v)\,\mathrm{dt} = \int_0^s j(f(t), u(t), v)\,\mathrm{dt}\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^s b(f_n(t), u_n(t), v)\,\mathrm{dt} = b(f(t), u(t), v)\,\mathrm{dt},$$

de sorte que, comme on a les convergences (3.3.44) et (3.3.45), on déduit de (3.3.53) que

$$\begin{aligned}\int_0^s a(u(t), v(t) - \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} + \int_0^s j(f(t), u(t), v(t)\,\mathrm{dt} - \int_0^s j(f(t), u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} \\ \ge \int_0^s b(f(t), u(t), v(t))\,\mathrm{dt} \quad \forall\, v \in L^2(0, T; V)\,, \quad \forall s \in [0, T]\,.\end{aligned} \tag{3.3.54}$$

Si on prend maintenant, $v \in L^2(0, T; V)$ défini par

$$v(t) = \begin{cases} w & \text{si } t \in [s, s+h] \\ \dot{u}(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $w \in V$ quelconque et $s \in [0, T]$, $h > 0$ tels que $s + h \le T$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_s^{s+h} a(u(t), w - \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} + \int_s^{s+h} j(f(t), u(t), w)\,\mathrm{dt} - \int_s^{s+h} j(f(t), u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} \\ \ge \int_s^{s+h} b(f(t), u(t), w)\,\mathrm{dt} \quad \forall\, w \in V\,, \quad \forall s \in [0, T]\end{aligned}$$

ce qui donne, en passant à la limite avec $h \to 0$, l'inéquation

$$\begin{aligned}a(u(t), w - \dot{u}(t)) + j(f(t), u(t), w) - j(f(t), u(t), \dot{u}(t)) \\ \ge b(f(t), u(t), w) \quad \forall\, w \in V \ \text{ p.p. dans }]0, T]\,.\end{aligned} \tag{3.3.55}$$

Il est facile à obtenir que u satisfait la deuxième inéquation de (**P2**). En effet de la deuxième inéquation de $(\mathbf{P2})_\mathbf{n}$ il vient

$$b(f_n(t), u_n(t), z) \geq b(f_n(t), u_n(t), u_n(t))$$

d'où, en passant à la limite et tenant compte de (3.3.12) et (3.3.11), on obtient

$$b(f(t), u(t), z - u(t)) \geq 0 \quad \forall\, z \in K\,, \quad \forall\, t \in [\,0, T\,] \tag{3.3.56}$$

d'où, procedant comme dans la démonstration du Lemme 3.3.2, on obtient aussi

$$b(f(t), u(t), \dot{u}(t)) = 0. \tag{3.3.57}$$

On conclut, de (3.3.55), (3.3.56) et (3.3.57) que u est une solution de (**P2**).

Il reste à démontrer la premiére partie du théorème. Nous utiliserons un argument dû à Andersson [6] pour des problèmes de contact avec compliance normale. On va montrer d'abord que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^s a(u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} = \int_0^s a(u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} \quad \forall\, s \in [\,0, T\,]. \tag{3.3.58}$$

Prenant $v = 0$ dans la première inéquation de $(\mathbf{P2})_\mathbf{n}$ et $w = 0$, $w = 2\dot{u}(t)$ dans (3.3.55) et intégrant ces inéquations sur $[0, s]$ pour $s \in [0, T]$, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &\geq \limsup_{n\to\infty} \int_0^s \left(a(u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) + j(f_n(t), u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) \right) \mathrm{dt} \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \int_0^s \left(a(u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) + j(f_n(t), u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t)) \right) \mathrm{dt} \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \int_0^s a(u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} + \liminf_{n\to\infty} \int_0^s j(f_n(t), u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} \\
&\geq \int_0^s a(u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} + \int_0^s j(f(t), u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} = 0
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (3.3.6), (3.3.13), (3.3.57), (3.3.44) et (3.3.45). On conclut

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^s a(u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} = \int_0^s a(u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt}\,, \tag{3.3.59}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^s j(f_n(t), u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} = \int_0^s j(f(t), u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt}\,. \tag{3.3.60}$$

D'autre part, prenant $v = \dot{u}(t)$ dans $(\mathbf{P2})_{\mathbf{n}}$ et intégrant sur $[0, s]$, de (3.3.60), (3.3.14), (3.3.57), Remarque 3.3.5 et (3.3.59) on a

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int_0^s a(u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} \le \lim_{n\to\infty} \int_0^s a(u_n(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} \int_0^s j(f_n(t), u_n(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} - \liminf_{n\to\infty} \int_0^s j(f_n(t), u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt} \\
&\quad - \lim_{n\to\infty} \int_0^s b(f_n(t), u_n(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} = \int_0^s a(u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} \\
&\quad = \liminf_{n\to\infty} \int_0^s a(u_n(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_n(t))\,\mathrm{dt}
\end{aligned} \tag{3.3.61}$$

d'où (3.3.58). Évidemment, de (3.3.58) et (3.3.47), on déduit

$$\int_0^s a(u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} a(u_n(s), u_n(s)) - \frac{1}{2} a(u(0), u(0)) \quad \forall s \in [0, T]$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} a(u_n(s), u_n(s)) \le a(u(s), u(s)) \quad \forall\, s \in [\,0, T\,]\,.$$

Alors, grâce à l'ellipticité de a, on en déduit la convergence forte (3.3.50). Comme (3.3.50) implique

$$u_n \to u \text{ dans } L^2(0, T; V) \text{ fort}\,,$$

de (3.3.40), on obtient (3.3.51). Enfin, la suite $\{\hat{u}_n\}_n$ étant bornée dans $W^{1,2}(0, T; V)$, de (3.3.51) il résulte (3.3.52). ■

Chapitre 4

Propriétés des solutions

Dans ce chapitre on se propose d'étudier diverses propriétés des solutions d'inéquations variationnelles de première et deuxième espèce. Nous allons d'abord considérer une classe d'inéquations variationnelles de première espèce et on met en évidence (voir [24]) une propriété de la solution, analogue à un principe de maximum . On illustre l'application du résultat au problème d'écoulement d'un fluid à travers un milieux poreux et au problème de l'obstacle.

La Section 4.2 est dévouée à l'analyse d'une clasee d'inéquations variationnelles de deuxième espèce. En utilisant la méthode des translations, on démontre des résultats de régularité locale et globale pour la solution (voir [36]). Dans la Section 7.4, on va appliquer ces résultats au problème de Signorini.

4.1 Un pricipe de maximum pour la solution d'une classe d'inéquations variationnelles

4.11 Le résultat général

La classe d'inéquations variationnelles à étudier dans ce paragraph est caractériseée par la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{dx} \qquad \forall u, v \in H^1(\Omega) \tag{4.11.1}$$

et par un ensemble des contraintes de type 4.11.2.

On démontre l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnelle considéré et on obtient ensuite une caractérisation remarquable de cette solution, propriété nommée dans la littérature de specialité, dans le cas homogène, la propriété de "super solution". À l'aide de cette propriété on énonce et démontre le résultat essentiel de ce paragraph donné par le théorème 4.11.1. En corrollaire, on obtient un certain principe de maximum.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^p$, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On va considérer le suivant sous-ensemble de $H^1(\Omega)$ qui va jouer le rôle d'ensemble des contraintes

$$K = \{v \in H^1(\Omega); v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } v = g \text{ p.p. sur } \partial\Omega\} \tag{4.11.2}$$

où g est une fonction donnée à valeurs réelles, définie sur $\partial\Omega$, dont la régularité on va préciser. Pour le moment, nous supposons que g s'annule sur un sous-ensemble régulier et ouvert Γ_0 de $\partial\Omega$, avec mesure strictement positive et que $g \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Avec ces suppositions, on observe que l'ensemble K peut s'écrire sous la forme

$$K = \{v \in V; v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } v = g \text{ p.p. sur } \Gamma_1\} \tag{4.11.3}$$

où

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_0\}, \tag{4.11.4}$$

Γ_0 et Γ_1 étant des ensembles ouverts et disjoints tels que $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$.

Pour f donné dans $L^2(\Omega)$, considérons la suivante inéquation variationnelle :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K \end{array}\right\} \tag{4.11.5}$$

où $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire définie par (4.11.1) et $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire usuel dans $L^2(\Omega)$.

Proposition 4.11.1 *Dans les hypothèses ci-dessus, si $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ alors l'inéquation variationnelle (4.11.5) admet une solution unique.*

Démonstration. Nous démontrons que les hypothèses du théorème 3.11.3 sont satisfaites.

On vérifie immédiatement que l'ensemble K est convexe.

Nous montrons qu'il est fermé en choisissant une suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ telle que $v_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$ et en démontrant que $v \in K$. Puisque $v_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$ il en résulte, évidemment, que $v_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$ et alors il existe une sous-suite $\{v_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ de la suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que v_{n_p} converge ponctuellement p.p. dans Ω vers v (voir, par exemple, [3], pag.27). Ayant $v_{n_p}(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in \Omega$ car $v_{n_p} \in K$, il en résulte que la limite ponctuelle v de la suite v_{n_p} a aussi la même propriété, donc

$$v \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega\,. \tag{4.11.6}$$

Puisque l'opérateur de traces $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ (en fait, $\gamma = \gamma_0$ du théorème de traces 1.4 de la page 21) est continue et, de plus, $H^{1/2}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$, alors de la convergence $v_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$ nous obtenons la convergence $\gamma v_n \to \gamma v$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Mais $\gamma v_n = g$ car $v_n \in K$ et donc

$$\gamma v = g \tag{4.11.7}$$

De (4.11.6) et (4.11.7) nous concluons que $v \in K$ et donc K est fermé.

Montrons maintenant que l'ensemble K est non vide. Soit $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ une fonction ayant la propriété $\gamma\tilde{g} = g$. Il existe une telle extension de g puisque, conformément a l'hypothèse, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ et l'opérateur de traces $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ est surjectif. Alors $\tilde{g}^+ = sup(\tilde{g}, 0)$ est aussi dans $H^1(\Omega)$ et, évidemment, $\tilde{g}^+ \geq 0$ p.p. dans Ω. Pour prouver que $\tilde{g}^+ \in K$, il faut encore vérifier que $\gamma\tilde{g}^+ = g$, ce qui est facile à voir : $\gamma\tilde{g}^+ = \sup\limits_{\partial\Omega}(\gamma\tilde{g}, 0) = \sup\limits_{\partial\Omega}(g, 0) = g$ (conformément à l'hypothèse $g \geq 0$ sur $\partial\Omega$). En conclusion $\tilde{g}^+ \in K$ et donc K n'est pas vide.

Le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_1$ de $H^1(\Omega)$, défini par:

$$(u, v)_1 = \int\limits_\Omega u\, v \,\mathrm{dx} + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} \qquad \forall u, v \in H^1(\Omega)\,,$$

induit sur V une structure d'espace de Hilbert sur lequel, de plus, la seminorme $|\cdot|_1$ donnée par:

$$|u|_1 = \left(\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 \,\mathrm{dx} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in H^1(\Omega)$$

est équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$ induite par le produit scalaire $(\cdot\,,\,\cdot)_1$ (cf., par exemple, [34], pag.12 ou, en fait, on a une conséquence de l'iégalité de Poincaré-Friedrichs), c'est-à-dire:

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } 1 \cdot |u|_1 \leq \|u\|_1 \leq \alpha|u|_1 \qquad \forall u \in V\,. \tag{4.11.8}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème 3.11.3, il faut encore démontrer que la forme $a(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire, continue et V-elliptique. La bilinéarité est immédiate et la continuité se déduit à l'aide de l'inégalité de Schwartz:

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \, \mathrm{dx} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 \, \mathrm{dx} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} (\frac{\partial v}{\partial x_i})^2 \, \mathrm{dx} \right)^{1/2} \tag{4.11.9}$$

$$= |u|_1 \cdot |v|_1 \leq \|u\|_1 \cdot \|v\|_1 \qquad \forall u, v \in V \, .$$

Puisque

$$a(u,u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 \, \mathrm{dx} = |u|_1^2 \qquad \forall u \in V \, , \tag{4.11.10}$$

en utilisant la deuxième inéquation de (4.11.8), nous obtenons:

$$a(u,u) \geq \frac{1}{\alpha^2} \|u\|_1^2 \, , \quad \forall u \in V \, , \tag{4.11.11}$$

donc la V-ellipticité de $a(\cdot,\cdot)$.

Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer le théorème 3.11.3 qui nous assure que le problème (4.11.5) a une solution et cette solution est unique. ■

On va montré ci-après que la solution $u \in K$ de l'inéquation variationnelle (4.11.5) admet une caractérisation indépendante de la fonction g qui intervient dans la définition de l'ensemble K des contraintes. De façon plus précise, nous démontrons que u satisfait l'inéquation variationnelle dont l'ensemble des contraintes est constitué par des fonctions positives de $H_0^1(\Omega)$.

Nous désignons par K_u l'ensemble suivant:

$$K_u = \{ w \in H^1(\Omega) \, ; \, \exists v \in K \text{ et } \exists \epsilon \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que } w = \epsilon(v-u) \} \tag{4.11.12}$$

où u est la solution de (4.11.5).

L'ensemble K étant convexe, non vide et fermé dans $H^1(\Omega)$, il en résulte, sans difficulté, que l'ensemble K_u a les mêmes propriétés. De plus, il est immédiat que $K_u \subset H_o^1(\Omega)$.

Proposition 4.11.2 *Soit $u \in K$ la solution d'inéquation variationnelle (4.11.5). Soit K_u l'ensemble défini par (4.11.12). Alors*

$$a(u,w) \geq (f,w) \qquad \forall w \in K_u \, . \tag{4.11.13}$$

Démonstration. Soit $w \in K_u$. Il existe alors $v \in K$ et $\epsilon > 0$ tels que $w = \epsilon(v - u)$. En multipliant l'inéquation variationnelle (4.11.5), écrite pour ce v, par ϵ et en utilisant ensuite la linéarité de la forme $a(\cdot,\cdot)$ et du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, on obtient (4.11.13). ■

En conséquence, la solution $u \in K$ du problème (4.11.5) satisfait l'inéquation (4.11.13) pour tout $w \in K_u$ où l'ensemble K_u dépend de la fonction u à laquelle il est attaché. Mais cette dépendance est apparente comme il résultera de l'inclusion suivante

$$\{w \in H_0^1(\Omega)\,;\, w \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\} \subset K_u\,. \tag{4.11.14}$$

Pour démontrer cette chose, soit $w \in H_0^1(\Omega)$ avec $w \geq 0$ p.p. dans Ω. Soit $v = w + u$ où u est la solution de (4.11.5). Compte tenu de la définition (4.11.3) de l'ensemble K, il résulte que $v \in K$. Par conséquent, en choisissant $\epsilon = 1$, il existe $v \in K$ tel que $w = \epsilon(v - u)$. Conformément à la définition (4.11.12) de l'ensemble K_u nous obtenons $w \in K_u$.

De la proposition 4.11.2 et de l'inclusion (4.11.14), il vient

Proposition 4.11.3 *Soit $u \in K$ la solution de l'inéquation variationnelle (4.11.5).Alors*

$$a(u, w) \geq (f, w) \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega) \text{ avec } w \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\,. \tag{4.11.15}$$

Remarque 4.11.1 *Une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{dx} \geq 0 \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega) \text{ avec } w \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega$$

s'appelle (cf. [73], par exemple) supersolution pour l'opérateur A défini par :

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{4.11.16}$$

Selon cette définition, nous observons que la proposition 4.11.3 affirme que la solution de l'inéquation variationnelle (4.11.5) est, dans le cas $f = 0$, une supersolution pour l'opérateur A défini comme ci-dessus.

Ayant maintenant la caractérisation désirée de la solution u, sur un ensemble des contraintes indépendant de la fonction donnée g , nous sommes en mesure de démontrer le résultat essentiel suivant

Théorème 4.11.1 *Soit u la solution de l'inéquation variationnelle (4.11.5). Soit $h \in H^1(\Omega)$ qui satisfait les conditions*

$$\left.\begin{array}{l} a(h,w) \geq (f,w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \quad w \geq 0 \ \textit{p.p. dans } \Omega, \\ h \geq 0 \quad \textit{dans } \Omega, \\ h \geq g \quad \textit{sur } \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{4.11.17}$$

Alors

$$u \leq h \quad \textit{p.p. dans } \Omega.$$

Remarque 4.11.2 *Compte tenu des hypothèses faites au début du paragraphe sur g, la condition (4.11.17)$_3$ peut s'écrire sous la forme équivalante*

$$\left\{\begin{array}{ll} h \geq 0 & \textit{sur } \Gamma_0, \\ h \geq g & \textit{sur } \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{4.11.18}$$

Démonstration du théorème 4.11.1. Soit $v = min(h,u) = u-(u-h)^+$ où $v^+ = sup(v,0)$ est la partie positive de la fonction v. Nous avons $v \in H^1(\Omega)$. Selon les hypothèses (4.11.17)$_2$, (4.11.17)$_3$ sur h et les propriétés de u comme élément de l'ensemble K, il résulte $v \geq 0$ p.p. dans Ω et $v = g$ sur $\partial\Omega$ et donc $v \in K$. Cela nous permet de remplacer v dans (4.11.5), d'où l'on obtient

$$a(u, -(u-h)^+) \geq (f, -(u-h)^+)\,. \tag{4.11.19}$$

D'autre part, puisque la différence des deux fonctions de K est dans $H_0^1(\Omega)$, nous obtenons $(u-h)^+ = u - v \in H_0^1(\Omega)$. De même, nous avons $(u-h)^+ \geq 0$ p.p. dans Ω. En prenant $w = (u-h)^+$ dans la relation (4.11.17)$_1$, nous obtenons

$$a(h, (u-h)^+) \geq (f, (u-h)^+)\,. \tag{4.11.20}$$

Par addition de (4.11.19) et (4.11.20) il résulte

$$a(u-h, (u-h)^+) \leq 0\,. \tag{4.11.21}$$

Remarquons maintenant que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ a la propriété : $a(v^+, v^-) = 0\,,\quad \forall v \in H^1(\Omega)$ et donc $a(v, v^+) = a(v^+, v^+)\,,\quad \forall v \in H^1(\Omega)$. Cela implique, grâce à la V-ellipticité de $a(\cdot,\cdot)$, que

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \alpha \|v^+\|_V^2 \leq a(v, v^+) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \text{ avec } v^+ \in V\,. \tag{4.11.22}$$

Mais $(u-h)^+ \in H_0^1(\Omega) \subset V$ et alors, de (4.11.21) et (4.11.22) nous obtenons

$$\alpha \|(u-h)^+\|_V^2 \leq a(u-h,(u-h)^+) \leq 0 \tag{4.11.23}$$

ce qui implique $(u-h)^+ = 0$ p.p. dans Ω, c'est-à-dire $u \leq h$ p.p. dans Ω. Le théorème est ainsi démontré. ■

Quand la fonction $f \in L^2(\Omega)$ donnée est négative, on obtient une conséquence de ce théorème sous la forme du principe de maximum suivant

Corollaire 4.11.1 *Soit $u \in K$ la solution de l'inéquation variationnelle (4.11.5) pour $f \leq 0$ p.p. dans Ω. Si la fonction $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ est majorée d'une constante positive C alors $u \leq C$ p.p. dans Ω.*

Démonstration. On applique le théorème 4.11.1 pour $h = C$. ■

Remarque 4.11.3 *L'hypothése "$f \leq 0$ p.p. dans Ω" du corrolaire ci-dessus a la justification suivante : Pour pouvoir prendre à la place de h dans le théorème 4.11.1, la constante C doit vérifiér l'hypothése (4.11.17) qui revient à : $(f,w) \leq 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$ avec $w \geq 0$ p.p. dans Ω.*

À la suite nous étendrons les résultats obtenus en considérant l'ensemble des contraintes, dans le problème (4.11.5), sous la forme

$$K(\psi,g) = \{v \in H^1(\Omega)\,; \quad v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega\,, \quad v = g \text{ sur } \partial\Omega\} \tag{4.11.24}$$

avec ψ et g des fonctions données, régulières, définies dans Ω, respectivement sur $\partial\Omega$.

Nous montrerons que de telles inéquations variationnelles admettent des solutions uniques et que pour ces solutions on peut mettre en évidence une propriété analogue à celle donnée par le théorème 4.11.1 et le corollaire 4.11.1.

Proposition 4.11.4 *Soit $\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ telle que $\psi \leq 0$ sur $\partial\Omega$. Alors l'inéquation variationnelle*

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Trouver } u \in K(\psi,g) \textit{ tel que} \\ a(u,v-u) \geq (f,v-u) \quad \forall v \in K(\psi,g) \end{array}\right\} \tag{4.11.25}$$

admet une solution unique.

Démonstration. Observons d'abord que l'ensemble $K(\psi, g)$ peut s'écrire sous la forme

$$K(\psi, g) = \{v \in V\,; \quad v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega\,,\, v = g \text{ sur } \Gamma_1\} \tag{4.11.26}$$

où V est l'espace de Hilbert défini par (4.11.4). On a démontré que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, qui intervient dans (4.11.26) et qui est défini par (4.11.1), est continue et V-elliptique. Pour obtenir le résultat énoncé, il reste à démontrer (conformément au théorème 3.11.3) que l'ensemble $K(\psi, g)$ est convexe, non vide et fermé dans V. La convexité de $K(\psi, g)$ est immédiate et la fermeture est une conséquence du fait que toute suite convergente dans $H^1(\Omega)$ contient une sous-suite convergente ponctuellement p.p. dans Ω. Pour démontrer que l'ensemble $K(\psi, g)$ n'est pas vide, nous considérerons $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ une extension de $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ donnée par le théorème de traces. En posant alors $v = \tilde{g}^+ + \psi^+$, où $\tilde{g}^+$ et ψ^+ sont les partie positives de $\tilde{g}$, respectivement de ψ, nous obtenons $v \in K(\psi, g)$.

Il en résulte que l'inéquation variationnelle (4.11.25) a une solution et cette solution est unique. ■

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans le cas du problème (4.11.5) (on peut observer que la condition $v \geq \psi$ p.p. dans Ω de (4.11.24) par laquelle nous avons remplacé la condition $v \geq 0$ p.p. dans Ω de (4.11.3) ne produit aucune difficulté majeure), on obtient la caractérisation (4.11.15) de la solution $u \in K(\psi, g)$ de l'inéquation variationnelle (4.11.25), le théorème 4.11.1 et le corollaire 4.11.1 dans les variantes suivantes :

Théorème 4.11.2 *Sous les hypothèses ci-dessus, soient $u \in K(\psi, g)$ la solution de l'inéquation variationnelle (4.11.25) et $h \in H^1(\Omega)$ une fonction qui satisfait les relations $(4.11.17)_1$, $(4.11.17)_3$ et*

$$h \geq \psi \quad \textit{p.p. dans } \Omega\,. \tag{4.11.27}$$

Alors $u \leq h$ p.p. dans Ω.

Démonstration. L'hypothése (4.11.27) sur h et l'appartenance de u à $K(\psi, g)$ impliquent $v \geq \psi$ p.p. dans Ω où $v = min(u, h)$. Avec cette observation, la démonstration du théorème 4.11.2 est la même que celle du théorème 4.11.1, en remplaçant seulement K par $K(\psi, g)$. ■

Corollaire 4.11.2 *Soit $u \in K(\psi, g)$ la solution de l'inéquation variationnelle (4.11.25) pour $f \in L^2(\Omega)$ tel que $f \leq 0$ p.p. dans Ω. Soit C_1 une constante qui majore la fonction ψ dans Ω. Si la fonction g est majorée sur $\partial\Omega$ d'une constante C_2, alors $u \leq C$ p.p. dans Ω où $C = max(C_1, C_2)$.*

Démonstration. On choisit dans le théorème 4.11.2 sur la place de h la constante C. ■

Remarque 4.11.4 *Une condition suffisante pour l'existence de C_2 est $g \in C(\partial\Omega)$. L'existence de C_1 est assurée quand $\psi \in C(\bar{\Omega})$ or $\psi \in H^2(\Omega)$ dans le cas $p = 2$.*

4.12 Exemples

À la suite nous examinerons, sur deux examples, l'application des résultats obtenus.

Example 1.

Considérons le problème (voir [10], [11], [91] ou [9]) d'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux homogène qui sépare deux réservoirs de niveaux différents H et h avec $H > h \geq 0$. Le milieu qui sépare les deux réservoirs est borné par des parois parallèles et a une base horizontale imperméable fixe. Soit a l'épaisseur du milieu poreux, $a > 0$. Soit $\varphi : [0, a] \to [0, H]$ la fonction continue, strictement decroissante qui décrit la frontière libre formée dans le milieu poreux, c'est-à-dire $\varphi(0) = H$, $\varphi(a) \geq h$. La géométrie du problème, en tenant compte que l'écoulement est le même pour toute section normale dans le milieux poreux, est donnée dans la figure 1.

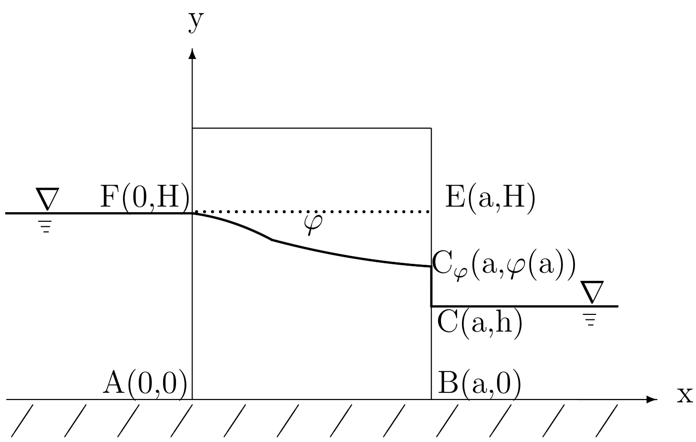

Figure 4.1

La région d'écoulement de ce problème 2-dimensionnel est l'ouvert Ω défini par

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad 0 < x < a \, , 0 < y < \varphi(x)\} \, . \tag{4.12.1}$$

Le mouvement dans le milieu poreux est décrit à l'aide de la vitesse de filtration, soit $\mathbf{v}$. De l'équation de continuité et de la loi de Darcy valable pour des milieux homogènes et isotropes, on déduit

$$-\Delta u = 0 \qquad \text{dans } \Omega \, , \tag{4.12.2}$$

où $\mathbf{v} = \nabla u$

D'après les conditions à la limite de hydrodynamique souterraine, on obtient l'ensemble des conditions (en utilisant les notations de la fig. 1)

$$\left.\begin{array}{ll} u = H & \text{sur } [AF] \, , \\ u = h & \text{sur } [BC] \, , \\ u_y = 0 & \text{sur } [AB[\, , \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{sur la courbe } \widehat{\mathrm{FC}}_\varphi \, , \\ u(x,y) = y & \text{sur la courbe } \widehat{\mathrm{FC}}_\varphi \, , \\ u(a,y) = y & \text{sur la ``partie humide'' } [CC_\varphi] \, , \end{array}\right\} \tag{4.12.3}$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \nu_x \dfrac{\partial u}{\partial x} + \nu_y \dfrac{\partial u}{\partial y}$ dénote la dérivée normale et où $\boldsymbol{\nu} = (\nu_x, \nu_y)$ est le vecteur unité normal à la frontière de Ω dirigé vers l'extérieur et u_y dénote la dérivée partielle par rapport à y.

Le problème (4.12.2), (4.12.3) a comme inconnue, en fait, le triplet (φ, Ω, u) donc il est un problème de frontière libre. Baiocchi [9] a montré, cependant, qu'après un changement convenable de la fonction inconnue u, ce problème peut se réduire à une inéquation variationnelle de type (4.11.5). À savoir, en considérant que la solution $u(x,y)$, dans le sens faible, du problème (4.12.2), (4.12.3) est un élément de l'espace $H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, Baiocchi a introduit la fonction

$$w(x,y) = \int_y^H (\tilde{u}(x,t) - t) \, \mathrm{dt} \qquad \forall (x,y) \in D \tag{4.12.4}$$

où

$$D = (0,a) \times (0,H) \tag{4.12.5}$$

et

$$\tilde{u}(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & \text{si } (x,y) \in \bar{\Omega} \, , \\ y & \text{si } (x,y) \in D \setminus \bar{\Omega} \, . \end{cases} \tag{4.12.6}$$

Évidemment, on a $w = 0$ dans $\bar{D} \backslash \bar{\Omega}$. Il est facile de voir que la fonction w est la solution de l'inéquation

$$\int_D \nabla w \cdot \nabla (v - w) \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy} \geq - \int_D (v - w) \, \mathrm{dx} \, \mathrm{dy} \quad \forall v \in K \tag{4.12.7}$$

où

$$K = \{v \in H^1(D);\ v = g \text{ sur } \partial D\,,\ v \geq 0 \text{ p.p. dans } D\} \tag{4.12.8}$$

et

$$g(x, y) = w(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \partial D\,. \tag{4.12.9}$$

Par un calcul immédiat, de (4.12.3), (4.12.6), et (4.12.4) on obtient

$$g = \begin{cases} \dfrac{H^2}{2} - \dfrac{H^2 - h^2}{2a} x & \text{sur }]AB[\,, \\ \dfrac{1}{2}(H - y)^2 & \text{sur } [AF]\,, \\ \dfrac{1}{2}(h - y)^2 & \text{sur } [BC[\,, \\ 0 & \text{sur } \partial D - ([FA] \cup]AB[\cup [BC[)\,. \end{cases}$$

Il est connu (voir [11] ou on peut appliquer le théorème 3.11.3) que le problème (4.12.7) a une solution w unique qui, en particulier appartient à $C^1(\bar{D})$. Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.12.2)-(4.12.3), posons

$$\Omega = \{(x, y);\ (x, y) \in D;\ w(x, y) > 0\}\,,$$

$$\varphi(x) = \sup\{y;\ (x, y) \in \Omega\} \qquad 0 < x < a\,,$$

$$\varphi(0) = \lim_{x \searrow 0} \varphi(x) \qquad \varphi(a) = \lim_{x \nearrow a} \varphi(x)\,,$$

$$u(x, y) = U(x, y) \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \qquad \text{où} \quad U(x, y) = y - \frac{\partial w}{\partial y}\,.$$

Alors, il résulte que le triplet (φ, Ω, u) est une solution du problème (4.12.2)-(4.12.3) et que cette solution est unique.

La fonction g a les propriétés : g est Lipschitz-continue donc $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ [73], $g \geq 0$ sur ∂D et $g = 0$ sur $\Gamma_0 =]FE] \cup [EC]$. On obtient ainsi une inéquation variationnelle de type

(4.11.5) avec $f = -1$, pour lequel l'application des résultats démontrés dans le paragraphe 1 signifie que

$$w(x, y) \leq \frac{H^2}{2} \quad \text{dans } D$$

.

Exemple 2.

Considérons le problème de l'obstacle qui consiste à déterminer la position d'équilibre d'une membrane élastique qui est fixée à la longue d'une courbe Γ (Γ étant la frontière d'un ouvert Ω de plan horizontal de coordonée (x, y)). La membrane est soumise à une force de densité F et elle doit passer pardessus un obstacle représenté par une fonction $\psi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$.

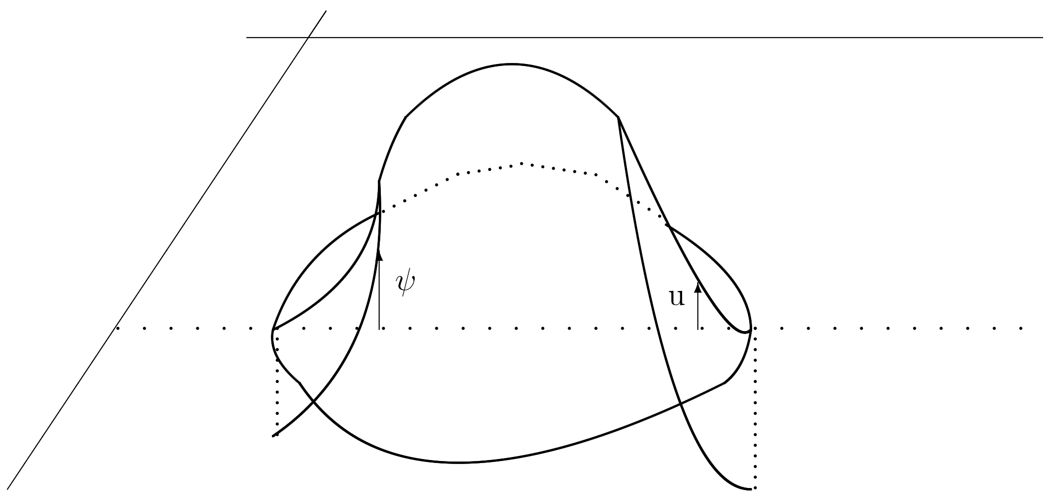

Figure 4.2: Le problème de l'obstacle

En notant avec t la tension de membrane et $f = F/t$, le problème aux conditions à la limite qui décrit ce phénomène est le suivant

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta u \geq f \quad \text{dans } \Omega \\ u \geq \psi \quad \text{dans } \Omega \\ (-\Delta u - f)(u - \psi) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ u^+ = u^0 \text{ sur } \gamma \end{array}\right\} \tag{4.12.10}$$

où γ est l'interface des ensembles $\Omega^+ = \{x \in \Omega\,;\, u(x) > \psi(x)\}$ et $\Omega^0 = \{x \in \Omega\,;\, u(x) = \psi(x)\}$ donc $\gamma = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^0$ et $u^+ = u/\Omega^+$, $u^0 = u/\Omega^0$. Le problème est de trouver la frontière libre γ et la position de membrane donnée par la fonction u telles que les conditions (4.12.10) soient vérifiées. On démontre (par exemple [53], pag.26) que la solution formale de ce problème correspond, pour $f \in L^2(\Omega)$ donné, à la solution d'une inéquation variationnelle de type (4.11.5) avec les données

$$\left.\begin{aligned} &V = H_0^1(\Omega)\,,\ K = \{v \in V\,;\, v \geq \psi \text{ p.p. dans } \Omega\}\,,\\ &a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \quad \forall u, v \in V\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.12.11}$$

Si l'obstacle est décrit par une fonction $\psi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ avec $\psi \leq 0$ sur Γ , alors l'inéquation variationnelle (4.11.5) avec les données (4.12.11) entre dans la classe d'inéquations variationnelles considérées dans le paragraphe 4.11, avec $g = 0$ (on peut toujours supposer que $f \leq 0$ p.p. dans Ω). En appliquant le théorème 4.11.1 et le corollaire 4.11.1 on retrouve les résultats démontrés dans [73] pour des inéquations variationnelles du type (4.11.5) avec les données (4.12.11) et avec $f = 0$. À savoir, on obtient que la solution de cette inéquation variationnelle est une super-solution pour l'opérateur A défini par (4.11.16) est elle a aussi la propriété d'être la plus petite parmi les super-solutions qui satisfont les conditions $(4.11.17)_{2,3}$ et (4.11.27). En particulier, cette solution est plus petite, presque partout dans Ω, que la constante $C = \sup_{x \in \Omega} \psi(x)$.

4.2 Un résultat de régularité

Dans cette Section nous obtenerons des résultats de régularité pour les solutions d'une classe d'inéquations variationnelles de deuxième espèce.

La régularité des solutions d'inéquation variationnelle pour un opérateur elliptique du second order a été bien étudier par de nombreux auteurs parmi lesquels Lions [74] , Brézis-Stampacchia [21], Necas [87], Duvaut [45].

Au debut de la Section nous tenons à rappeler des résultats essentiels dont nous avons besoin par la suite.

Dans le paragraphe II.2.2 nous formulons l'inéquation variationnelle pour laquelle nous obtenons des résultats de régularité local et globale. La démonstration est basée sur la méthode des translations due à Niremberg [90] mais comme elle a été utilisé par Brézis dans sa thése [20] pour un opérateur scalar elliptique du second ordre.

Dans Section 7.4 nous appliquerons les résultats obtenus pour la solution d'un problème de Signorini avec une loi de frottement non local.

4.21 Rappels et résultats préliminaires

Pour une fonction v définie sur $\mathbb{R}^p$ on introduit la notation

$$v_h^i(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i)\,,$$

où $\mathbf{e}_i$ est le vecteur unité $(\delta_{1i}, \delta_{2i}, ..., \delta_{pi})$, δ_{ij} étant le symbol de Kronecker et h est un nombre réel.

Nous reprenons d'abord quelques résultats (pour les démonstrations on renvoit, par exemple, à [4]).

Proposition 4.21.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $v \in H^1(\Omega)$ et $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$. Alors $v\varphi \in H^1(\Omega)$ et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(v\varphi) = \frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi + v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,, \quad i \in \{1, ..., p\}\,.$$

À la suite on désignera par C et C_i les constantes positives qu'on distinguer par indice, s'il est nécessaire.

Proposition 4.21.2 *Soient Ω un domain dans $\mathbb{R}^p$ avec la propriété du segment (cf. page 19) et $v \in H^m(\Omega)$, $m \geq 0$ étant un nombre entier. On suppose q'il existe un indice $i \in \{1, ..., p\}$ et une constante $C > 0$ telle que*

$$\left\| \frac{v_h^i - v}{h} \right\|_{H^m(\Omega')} \leq C\,, \tag{4.21.1}$$

pour tout $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ et pour tout $h \neq 0$ avec $|h|$ assez petit. Alors

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{H^m(\Omega)} \leq C\,.$$

Si (4.21.1) est vraie pour tout $i \in \{1, ..., p\}$ alors $v \in H^{m+1}(\Omega)$.

Proposition 4.21.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On suppose que $v \in H^m(\Omega)$, $m \geq 1$, et soit $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Alors*

$$\left\| \frac{v_h^i - v}{h} \right\|_{H^{m-1}(\Omega')} \leq \|v\|_{H^m(\Omega)} ,$$

pour tout $h \neq 0$ tel que $dist(\bar{\Omega}', \partial\Omega) > |h|$.

On va maintenant déduire, des propositions précédentes, la conséquence suivante.

Corollaire 4.21.1 *Soit $\eta \in C^\infty(\bar{S})$ avec supp $\eta \subset S \cup \Sigma$, où $S = (\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_p) \in \mathbb{R}^p\,;$ $|\boldsymbol{\xi}| < 1\,,\, \xi_p > 0\}$, $p \geq 2$ et $\Sigma = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p\,; |\boldsymbol{\xi}| < 1\,,\, \xi_p = 0\}$. Alors, pour tout $\boldsymbol{v} \in (H^1(S))^p$ nous avons*

$$\left\| \frac{\eta(\boldsymbol{v}_i^h - \boldsymbol{v})}{h} \right\|_{(L^2(S))^p} \leq C\|\boldsymbol{v}\|_{(H^1(S))^p} ,$$

pour tout $h \neq 0$ avec $|h| < dist(\partial S \backslash \Sigma, supp\, \eta)$ et $i \in \{1, 2, ..., p-1\}$, où supp w est le support de w i.e. la fermeture de l'ensemble $\{x; w(x) \neq 0\}$.

Démonstration. Soient $S' = \{\boldsymbol{\xi} \in S\,,\ \eta(\boldsymbol{\xi}) \neq 0\}$, $\tilde{S} = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p\,,\ |\boldsymbol{\xi}| < 1\}$ et $\tilde{S}' = S' \cup (\Sigma \cap \bar{S}') \cup \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_p) \in \mathbb{R}^p\,,\ (\xi_1, ...\xi_{p-1}, -\xi_p) \in S'\}$.

Pour tout fonction $\mathbf{w}$ nous définissons la fonction suivante

$$\tilde{\mathbf{w}}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) & \text{si } \xi_p \geq 0\,, \\ \mathbf{w}(\xi_1, ..., \xi_{p-1}, -\xi_p) & \text{si } \xi_p < 0\,. \end{cases} \tag{4.21.2}$$

Il est immédiat que si $\mathbf{w} \in (H^1(S))^p$ alors $\tilde{\mathbf{w}} \in (H^1(\tilde{S}))^p$ et

$$\|\tilde{\mathbf{w}}\|^2_{(H^m(\tilde{S}))^p} = 2\|\mathbf{w}\|^2_{(H^m(S))^p} \quad \text{pour } m \in \{0, 1\}\,. \tag{4.21.3}$$

Soient maintenant $\tilde{\eta}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ et $\tilde{\mathbf{v}}_h^i$, avec $i \in \{1, ..., p-1\}$, les fonctions définies comme dans (4.21.2). Alors $supp\, \tilde{\eta} = \bar{\tilde{S}}' \subset \tilde{S}$ et

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\eta(\mathbf{v}_h^i - \mathbf{v})}{h} \right\|_{(L^2(S))^p} &= \left\| \frac{\eta(\mathbf{v}_h^i - \mathbf{v})}{h} \right\|_{(L^2(S'))^p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \frac{\tilde{\eta}(\tilde{\mathbf{v}}_h^i - \tilde{\mathbf{v}})}{h} \right\|_{(L^2(\tilde{S}'))^p} \leq C \left\| \frac{\tilde{\mathbf{v}}_h^i - \tilde{\mathbf{v}}}{h} \right\|_{(L^2(\tilde{S}'))^p} . \end{aligned} \tag{4.21.4}$$

En appliquant la proposition 4.21.3 et en utilisant les rélations (4.21.3) et (4.21.4) nous obtenons

$$\left\| \frac{\eta(\mathbf{v}_h^i - \mathbf{v})}{h} \right\|_{(L^2(S))^p} \le C \left\| \frac{\tilde{\mathbf{v}}_h^i - \tilde{\mathbf{v}}}{h} \right\|_{(L^2(\tilde{S}'))^p}$$

$$\le C \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{(H^1(\tilde{S}))^p} = C' \|\mathbf{v}\|_{(H^1(S))^p}$$

ce qui achève la démonstration. ■

4.22 Formulation du problème

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^p$ et Γ un sous-ensemble ouvert de sa frontière $\partial\Omega$. Soit $x_0 \in \Gamma$. Supposons que Ω est C^3-régulière dans x_0 c'est-à-dire il existe un voisinage I de x_0 tel que l'ensemble $\bar{\Omega} \cap \bar{I}$ peut être C^3-homéomorphique appliqué dans $\bar{S}$ où $S = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p\,;\ |\boldsymbol{\xi}| < 1\,,\ \xi_p > 0\}$, tel que l'ensemble $\partial\Omega \cap \bar{I}$ est appliqué dans l'ensemble $\bar{\Sigma}$ où $\Sigma = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_p) \in \mathbb{R}^p\,,\ |\boldsymbol{\xi}| < 1\,,\ \xi_p = 0\}$. Nous pouvons supposer, sans perdre la généralité, que $\partial\Omega \cap I \subset \Gamma$.

Soit θ le C^3-homéomorphisme de $\bar{\Omega} \cap \bar{I}$ dans $\bar{S}$. De façon générale, si $\boldsymbol{w}$ est une fonction définie sur $\Omega \cap I$ on pose

$$\tilde{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{w}(\theta^{-1}(\boldsymbol{\xi})) \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in S\,.$$

Soit $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^p$. Pour $\eta \in \mathcal{D}(I)$ et h un nombre réel, nous posons

$$\bar{\boldsymbol{v}}_h^i(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \eta(\boldsymbol{x}) \left(\tilde{\boldsymbol{v}}_h^i(\theta(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \right) & \text{si } \boldsymbol{x} \in supp\ \eta \cap \Omega\,, \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega \backslash supp\ \eta\,, \end{cases}$$

où $i \in \{1, ..., p-1\}$ et $\tilde{\boldsymbol{v}}_h^i = (\tilde{\boldsymbol{v}})_h^i$. On note que, pour $|h|$ assez petit, $\tilde{\boldsymbol{v}}_h^i$ est bien défini et $\tilde{\boldsymbol{v}}_h^i \in (H^1(\Omega))^p$.

Dans la suite on va utiliser, sauf mention expresse du contraire, la convention de sommation sur l'indice répété.

On définit maintenant, sur $(H^1(\Omega))^p$, la forme bilinéaire

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \left(a_{ij}^{kl}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} + b_i^{kl}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} v_l + c_i^{kl}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial v_l}{\partial x_i} u_k + d^{kl}(\boldsymbol{x}) u_k v_l \right) \mathrm{dx} \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^p$$

où $a_{ij}^{kl},\ b_i^{kl},\ c_i^{kl},\ d^{kl} \in C^1(\bar{\Omega})$ et $a_{ij}^{kl} = a_{ji}^{kl},\ \forall i, j, k, l \in \{1, ..., p\}\,.$

Dans la forme matriciale on peut écrire

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int\limits_{\Omega} (\mathbf{A}_{ij}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_{,i}\boldsymbol{v}_{,j} + \mathbf{B}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_{,i}\boldsymbol{v} + \mathbf{C}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}_{,i} + \mathbf{D}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}) \,\mathrm{dx}\,,$$

où

$$\boldsymbol{w}_{,i} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial w_p}{\partial x_i}\right)\,,\ \mathbf{A}_{ij} = (a_{ij}^{kl})_{k,l}\,,\ \mathbf{B}_i = (b_i^{kl})_{k,l}\,,\ \mathbf{C}_i = (c_i^{kl})_{k,l}\,,\ \mathbf{D} = (d^{kl})_{k,l}\,.$$

Si $\omega \subset \mathbb{R}^p$ est un ouvert, alors on va désigner par $\|\cdot\|_{1,\omega}$ la norme dans l'espace produit $(H^1(\omega))^p$.

On supposera qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq \alpha \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}^2 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^p \text{ avec } \mathit{supp}\, \boldsymbol{v} \subset \bar{\Omega} \cap I\,. \tag{4.22.1}$$

On considère la fonctionnelle $J : (H^1(\Omega))^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(\boldsymbol{v}) = \int\limits_{\Gamma} g(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^p\,,$$

où $g \in H^1(\Gamma)$ avec $g \geq 0$ p.p. sur Γ et ψ est une semi-norme sur $\mathbb{R}^p$.

Notons par Q un sous-ensemble convexe fermé non vide de $(H^1(\Omega))^p$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } \boldsymbol{v} \in Q \text{ alors } \tilde{\boldsymbol{v}}_h^l \in Q\,,\ \forall l \in \{1, ..., p-1\}\,,\ \forall \eta \in \mathcal{D}(I) \text{ avec } 0 \leq \eta \leq 1\,, \\ \text{ et } \forall h \neq 0 \text{ avec } |h| < \mathit{dist}(\partial S \backslash \Sigma,\, \mathit{supp}\, \tilde{\eta})\,, \end{array}\right\} \tag{4.22.2}$$

où $\tilde{\eta}(\boldsymbol{\xi}) = \eta(\theta^{-1}(\boldsymbol{\xi}))\,,\ \forall \boldsymbol{\xi} \in S$.

Avec ces notations préliminaires, nous considérons la suivante inéquation variationnelle de deuxième espèce:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{u} \in Q\,, \\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + J(\boldsymbol{v}) - J(\boldsymbol{u}) \geq (\boldsymbol{L}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in Q \end{array}\right\} \tag{4.22.3}$$

où $\boldsymbol{L} \in (L^2(\Omega))^p$ et

$$(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{v}) = \int\limits_{\Omega} L_i v_i \,\mathrm{dx} \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^p\,.$$

Nous pouvons maintenant établir notre résultat de régularité locale.

Théorème 4.22.1 *On suppose qu'il existe une solution $\boldsymbol{u}$ de l'inéquation variationnelle (4.22.3). Alors, pour tout ensemble ouvert I' qui contient $\boldsymbol{x}_0$ tel que $\bar{I}' \subset I$, nous avons $\boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega \cap I'))^p$ et*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega\cap I'} \leq C(\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega\cap I} + \|g\|_{H^1(\Gamma\cap I)} + \|\boldsymbol{L}\|_{0,\Omega\cap I}) \,. \tag{4.22.4}$$

Démonstration. Soit $S' = \theta(\Omega \cap I')$. On va prouver que

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{2,S'} \leq C(\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{1,S} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\Sigma)} + \|\tilde{\boldsymbol{L}}\|_{0,S}) \,.$$

Pour prouver ça, il est facile de voir que si on prend dans (4.22.3) $\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{u}}^l_h$ et, respectivement, $\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{u}}^l_{-h}$, $l \in \{1, ..., p-1\}$, nous obtenons, en utilisant des coordonnées locales,

$$\tilde{b}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\eta}(\tilde{\boldsymbol{u}}^l_h - \tilde{\boldsymbol{u}})) + \int\limits_{\Sigma} \tilde{g}\tilde{\eta}\psi(\tilde{\boldsymbol{u}}^l_h)\,\mathrm{d}\sigma - \int\limits_{\Sigma} \tilde{g}\tilde{\eta}\psi(\tilde{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{d}\sigma \geq (\tilde{\boldsymbol{L}}, \tilde{\eta}(\tilde{\boldsymbol{u}}^l_h - \tilde{\boldsymbol{u}})) \tag{4.22.5}$$

$$\tilde{b}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\eta}(\tilde{\boldsymbol{u}}^l_{-h} - \tilde{\boldsymbol{u}})) + \int\limits_{\Sigma} \tilde{g}\tilde{\eta}\psi(\tilde{\boldsymbol{u}}^l_{-h})\,\mathrm{d}\sigma - \int\limits_{\Sigma} \tilde{g}\tilde{\eta}\psi(\tilde{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{d}\sigma \geq (\tilde{\boldsymbol{L}}, \tilde{\eta}(\tilde{\boldsymbol{u}}^l_{-h} - \tilde{\boldsymbol{u}})) \tag{4.22.6}$$

où

$$\tilde{b}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{v}}) = \int\limits_{S} (\mathbf{A}_{ij}\tilde{\boldsymbol{u}}_{,i}\tilde{\boldsymbol{v}}_{,j} + \mathbf{B}_i\tilde{\boldsymbol{u}}_{,i}\tilde{\boldsymbol{v}} + \mathbf{C}_i\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{v}}_{,i} + \mathbf{D}\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\xi \,,$$

$$(\tilde{\boldsymbol{L}}, \tilde{\boldsymbol{v}}) = \int\limits_{S} L_i\tilde{v}_i\,\mathrm{d}\xi \,,$$

et, pour simplifier l'écriture, nous n'avons pas changer les notations pour $\mathbf{A}_{ij}$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{C}_i$, $\mathbf{D}$ et L_i.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ tel que $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi \equiv 1$ dans I'. Prenant maintenant $\tilde{\eta} = \tilde{\varphi}^2$ dans (4.22.5) et $\tilde{\eta} = \tilde{\varphi}^2_{-h}$ dans (4.22.6) et additionnant les deux inégalités il vient, pour $|h|$ assez petit

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & b(\boldsymbol{u}, \varphi^2(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u})) - b(\boldsymbol{u}, \varphi^2_{-h}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{-h})) + \int\limits_{\Sigma} g\varphi^2(\psi(\boldsymbol{u}_h) - \psi(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{d}\sigma \\ & + \int\limits_{\Sigma} g\varphi^2_{-h}\,(\psi(\boldsymbol{u}_{-h}) - \psi(\boldsymbol{u}))\ \mathrm{d}\sigma + (\boldsymbol{L}, \varphi^2_{-h}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{-h})) - (\boldsymbol{L}, \varphi^2(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u})) \end{aligned} \tag{4.22.7}$$

où, pour simplifier l'écriture, nous avons omis le signe "$\sim$" et l'indice l. Alors, il résulte de (4.22.7) que

$$\begin{aligned}
&b(\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}),\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}))\le b(\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}),\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}))+b(\boldsymbol{u},\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}))\\
&-b(\boldsymbol{u},\varphi^2_{-h}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{-h}))+\int_\Sigma g\varphi^2(\psi(\boldsymbol{u}_h)-\psi(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{d}\sigma+\int_\Sigma g\varphi^2_{-h}(\psi(\boldsymbol{u}_{-h})-\psi(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{d}\sigma\\
&+(\boldsymbol{L},\varphi^2_{-h}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{-h}))-(\boldsymbol{L},\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}))\,.
\end{aligned}\tag{4.22.8}$$

Nous allons maintenant estimer la partie droite de l'inégalité (4.22.8). D'abord, utilisant la proposition 4.21.1, nous avons

$$\begin{aligned}
&b(\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}),\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}))+b(\boldsymbol{u},\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}))-b(\boldsymbol{u},\varphi^2_{-h}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{-h}))\\
&=\int_S\{\mathbf{A}_{ij}[\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,i}[\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,j}+\mathbf{B}_i[\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,i}[\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]\\
&+\mathbf{C}_i[\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})][\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,i}+\mathbf{D}\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})-\mathbf{A}_{ij}\boldsymbol{u}_{,i}[\varphi^2_{-h}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{-h})]_{,j}\\
&-\mathbf{B}_i\boldsymbol{u}_{,i}[\varphi^2_{-h}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{-h})]-\mathbf{C}_i\boldsymbol{u}[\varphi^2_{-h}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{-h})]_{,i}-\mathbf{D}\boldsymbol{u}\varphi^2_{-h}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{-h})\\
&+\mathbf{A}_{ij}\boldsymbol{u}_{,i}[\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,j}+\mathbf{B}_i\boldsymbol{u}_{,i}[\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]+\mathbf{C}_i\boldsymbol{u}[\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,i}\\
&+\mathbf{D}\boldsymbol{u}\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\}\,\mathrm{d}\xi=\int_S\{\mathbf{A}_{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j}(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\\
&+\mathbf{A}_{ij}\varphi_{,i}\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})_{,j}+\mathbf{A}_{ij}\varphi\varphi_{,j}(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})_{,i}(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\\
&+\mathbf{A}_{ij}\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})_{,i}(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})_{,j}+\mathbf{B}_i[\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,i}\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\\
&+\mathbf{C}_i\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})[\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,i}-[(\mathbf{A}_{ij})_h\boldsymbol{u}_{h,i}-\mathbf{A}_{ij}\boldsymbol{u}_{,i}][\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,j}\\
&-[(\mathbf{B}_i)_h\boldsymbol{u}_{h,i}-\mathbf{B}_i\boldsymbol{u}_{,i}]\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})-[(\mathbf{C}_i)_h\boldsymbol{u}_h-\mathbf{C}_i\boldsymbol{u}][\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,i}\\
&-(\mathbf{D}_h-\mathbf{D})\boldsymbol{u}_h\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\}\,\mathrm{d}\xi=\int_S\{\mathbf{A}_{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j}(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\\
&-[(\mathbf{A}_{ij})_h-\mathbf{A}_{ij}]\boldsymbol{u}_{h,i}[\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,j}+\mathbf{B}_i[\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})_{,i}\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\\
&+\mathbf{C}_i\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})[\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})]_{,i}-[(\mathbf{B}_i)_h\boldsymbol{u}_{h,i}-\mathbf{B}_i\boldsymbol{u}_{,i}]\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\\
&-[(\mathbf{C}_i)_h\boldsymbol{u}_h-\mathbf{C}_i\boldsymbol{u}]\cdot[\varphi_{,i}\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})+\varphi(\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}))_{,i}]\\
&-(\mathbf{D}_h-\mathbf{D})\boldsymbol{u}_h\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\}\,\mathrm{d}\xi\,.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant appliquer le corollaire 4.21.1 en prenant $\eta=\varphi$ et $\eta=\varphi_{,i}$. Il en résulte, pour tout $h\neq 0$ tel que $|h|<dist(\partial S\backslash\Sigma, supp\,\varphi)$, que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|h|}[b(\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}),\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}))+b(\boldsymbol{u},\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}))-b(\boldsymbol{u},\varphi^2_{-h}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{-h}))]\\
&\quad\le C_1\|\boldsymbol{u}\|_{1,S}\|\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\|_{1,S}\,.
\end{aligned}\tag{4.22.9}$$

D'autre part, de la proposition 4.21.3, nous obtenons

$$\int_\Sigma g\varphi^2[\psi(\boldsymbol{u}_h)-\psi(\boldsymbol{u})]\,\mathrm{d}\sigma+\int_\Sigma g\varphi_{-h}^2[\psi(\boldsymbol{u}_{-h})-\psi(\boldsymbol{u})]\,\mathrm{d}\sigma$$
$$=\int_\Sigma (g-g_h)\varphi^2[\psi(\boldsymbol{u}_h-\psi(\boldsymbol{u})]\,\mathrm{d}\sigma\leq C_2|h|\,\|g\|_{H^1(\Sigma)}\|\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\|_{1,S} \tag{4.22.10}$$

et

$$(\boldsymbol{L},\varphi_{-h}^2(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{-h}))-(\boldsymbol{L},\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}))=-(\boldsymbol{L},\varphi^2(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})+\varphi_{-h}^2(\boldsymbol{u}_{-h}-\boldsymbol{u}))$$
$$\leq C_3|h|\,\|\boldsymbol{L}\|_{0,S}\|\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})\|_{1,S}\,. \tag{4.22.11}$$

D'après (4.22.8)-(4.22.11), l'inéqualité (4.22.1) implique

$$\|\frac{\varphi(\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u})}{h}\|_{1,S}\leq C_4(\|\boldsymbol{u}\|_{1,S}+\|g\|_{H^1(\Sigma)}+\|\boldsymbol{L}\|_{0,S})\,,$$

d'où

$$\|\frac{\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}}{h}\|_{1,S'}\leq C_4(\|\boldsymbol{u}\|_{1,S}+\|g\|_{H^1(\Sigma)}+\|\boldsymbol{L}\|_{0,S})\,. \tag{4.22.12}$$

En conclusion, du proposition 4.21.2, nous obtenons

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\in(L^2(S'))^p\ \text{ pour } i\in\{1,...,p-1\}\ \text{ et } j\in\{1,...,p\}\,.$$

On observe que $\boldsymbol{u}$ résout le système

$$-\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\mathbf{A}_{ij}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi_i})+\mathbf{B}_i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi_i}-\frac{\partial}{\partial\xi_i}(\mathbf{C}_i\boldsymbol{u})+\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{L}\ \text{ dans } S'\,. \tag{4.22.13}$$

Il résulte, de la condition (4.22.1), que $det(\mathbf{A}_{pp}(\boldsymbol{\xi}))\neq 0$, $\forall\boldsymbol{\xi}\in S'$, donc $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial\xi_p^2}$ peut être calculer de (4.22.13). Alors $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial\xi_p^2}\in(L^2(S'))^p$ et, de (4.22.12), nous obtenons

$$\|\boldsymbol{u}\|_{2,S'}\leq C(\|\boldsymbol{u}\|_{1,S}+\|g\|_{H^1(\Sigma)}+\|\mathbf{F}\|_{0,S})\,.$$

Alors, par la transformation en arrière vers les coordonnées $x_1,...,x_p$, on obtient l'éstimation (4.22.4). ■

Remarque 4.22.1 *Utilisant une technique semblable à celle de la démonstration ci-dessus, on peut obtenir la régularité (bien connu) de la solution de l'inégalité variationnelle (4.22.3) dans un voisinage d'un point intérieur de* Ω*. En effet, pour tout point* $\boldsymbol{x} \in \Omega$*, prenant* $I = \{\mathbf{y} \in \Omega\,;\ |\mathbf{y} - \boldsymbol{x}| < R\}$ *avec* R *assez petit tel que* $\bar{I} \subset \Omega$*, on peut répéter la démonstration du théorème 4.21.1 sans qu'il soit nécessaire d'utiliser des coordonnées locales mais en exigéant que:*

$$\left.\begin{array}{l} si\ \boldsymbol{v} \in Q\ alors\ (1-\eta)\boldsymbol{v} + \eta\boldsymbol{v}_h^l \in Q\,,\ \forall l \in \{1,...,p\}\,,\ \forall \eta \in \mathcal{D}(I) \\ avec\ 0 \le \eta \le 1\,,\ \forall h \ne 0\ avec\ |h| < dist(\partial I,\, supp\, \eta)\,. \end{array}\right\} \tag{4.22.14}$$

Si Ω est C^3-régulière dans $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, on désignera par $I_{\boldsymbol{x}}$ le voisinage correspondant de $\boldsymbol{x}$ et si $\boldsymbol{x} \in \Omega$ alors on désignera par $I_{\boldsymbol{x}}$ l'ensemble $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p\,;\ |\mathbf{y} - \boldsymbol{x}| < R\}$ avec R assez petit tel que $I_{\boldsymbol{x}} \subset \Omega$.

À partir du résultat de régularité locale, donné par le théorème 4.22.1, et de la remarque ci-dessus, on peut facilement obtenir un théorème de régularité globale pour l'inégalité (4.22.3).

Théorème 4.22.2 *Supposons que* Ω *est* C^3*-régulière dans tout point* $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ *et* $\Gamma = \partial\Omega$*. En outre on suppose que*

$$\left.\begin{array}{l} si\ \boldsymbol{v} \in Q\ alors\ \tilde{\boldsymbol{v}}_h^l \in Q\,,\ \forall l = 1,...,p-1\,,\ \forall \eta \in \mathcal{D}(I_{\mathbf{x}})\ avec\ 0 \le \eta \le 1\,, \\ et\ \forall h \ne 0\ avec\ |h| < dist(\partial S\backslash\Sigma,\, supp\, \tilde{\eta})\,,\ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega\,, \end{array}\right\} \tag{4.22.15}$$

$$\exists \alpha > 0\ t.q.\ b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \ge \alpha \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}^2\,, \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^p\ avec\ supp\, \boldsymbol{v} \subset I_{\boldsymbol{x}} \cap \bar{\Omega}\,,\ \forall \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}\,, \tag{4.22.16}$$

et que

$$\left.\begin{array}{l} si\ \boldsymbol{v} \in Q\ alors\ (1-\eta)\boldsymbol{v} + \eta\boldsymbol{v}_h^l \in Q\,,\ \forall l = 1,...,p\,,\ \forall \eta \in \mathcal{D}(I_{\boldsymbol{x}}) \\ avec\ 0 \le \eta \le 1\,,\ \forall h \ne 0\ avec\ |h| < dist(\partial I_{\boldsymbol{x}},\, supp\, \eta)\,,\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega\,. \end{array}\right\} \tag{4.22.17}$$

Si l'inéquation variationnelle (4.22.3) admet une solution $\boldsymbol{u}$ *alors* $\boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega))^p$ *et*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega} \le C\left(\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega} + \|g\|_{H^1(\Gamma)} + \|\boldsymbol{L}\|_{0,\Omega}\right)\,. \tag{4.22.18}$$

Démonstration. Pour tout $\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}$, soit $I'_{\boldsymbol{x}}$ un ensemble ouvert qui contient $\boldsymbol{x}$ tel que $\bar{I}'_{\boldsymbol{x}} \subset I_{\boldsymbol{x}}$. Parceque $\bar{\Omega}$ est compacte, nous pouvons extraire de $\{I'_{\boldsymbol{x}}\}_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}}$ un enveloppement ouvert fini $\{I'_{\boldsymbol{x}_i}\}_{i=1,...,n}$. Tout d'abord, du théorème 4.22.1 et de la remarque précédente nous obtenons

$$\boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega \cap I'_{\boldsymbol{x}_i}))^p$$

et

$$\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega\cap I'_{\boldsymbol{x}_i}} \leq C_i \left(\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega\cap I_{\boldsymbol{x}_i}} + \|g\|_{H^1(\Gamma\cap I_{\boldsymbol{x}_i})} + \|\boldsymbol{L}\|_{0,\Omega\cap I_{\boldsymbol{x}_i}}\right) , \tag{4.22.19}$$

pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, C_i étant une constante qui dépend de i. Il en résulte que $\boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega))^p$ et, par addition les relations (4.22.19) pour tout i, nous obtenons (4.22.18). ∎

On note que les théorèmes 4.22.1 et 4.22.2 restent valables, avec les mêmes démonstrations, dans des hypothèses moins restrictives sur Ω.

Remarque 4.22.2 *Dans des hypothèses plus restrictives sur* b *et* Ω *et pour* $J = 0$*, des résultats similaires de régularité sont démontrés dans Fichera [51].*

Chapitre 5

Formulations duales des inéquations quasi-variationnelles

On a déja vu qu'une inéquations variationnelle de type (3.12.2) équivaut à la minimisation de la fonctionnelle J définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle + j(v) - \langle f, v\rangle.$$

La théorie de dualité associe au problème,,,,,xxxxi

$$\inf_{v\in K} J(v), \tag{5.1}$$

dit problème primal, un problème de maximisation, appelé dual, et étudie les relations qui existent entre les deux problèmes. De plus, le problème dual aide à la resolution du problème primal.

On été développer plusieurs théories de dualité. Dans toutes les théories de dualité, l'idée de base est qu'une fonction convexe propre semi-continue inférieurement est l'enveloppe supérieure de ses minorantes affines continues donc on peut écrire

$$J(v) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{L}(v, \lambda).$$

Alors le problème primal (5.1) s'ecrit sous la forme

$$\inf_{v\in K} \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{L}(v, \lambda), \tag{5.2}$$

où λ est appellé un multiplicateur de Lagrange et $\mathcal{L}$ est la fonction Lagrangienne. Le problème dual du précédent est

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \inf_{v \in K} \mathcal{L}(v, \lambda). \tag{5.3}$$

La plus encienne des théories de dualité est celle basée sur les théorèmes de minimax de Ky-Fan [69] et Sion [109] qui donnent des critères d'existence de points selle (ou points de minimax) pour la fonction Lagrangienne $\mathcal{L}$.

Une autre théorie a été développé par Fenchel [49] et Rockafellar [102]. Dans cette théorie le problème de minimisation (5.1) est approché par une famille de problèmes pérturbés et le problème dual est construit à l'aide des fonctions convexes conjuguées. Des détails de ces théories se trouvent, par exemple, dans Rockafellar [104], Cea [33], Ekeland et Temam [47].

La théorie de dualité a des multiples applications dans mécanique, analyse numérique, contrôle optimal ou économie mathématique où le problème dual aide à la résolution du problème primal. Notre but n'est pas de faire un exposé complet de ce sujet. Nous sommes seulement tenté de rappeler la théorie de dualité dévellopée par Mosco, Capuzzo-Dolcetta et Matzeu [31] qui s'applique aux inéquations quasi-variationelles où les théories de dualité, devenues classiques, ne peuvent pas être appliquer parce qu' une telle inéquation ne peut pas être écrite comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle J. Dans sections 7.5 et 7.7, en appliquant cette théorie, on obtiendra (voir Telega [120], Capatina et Lebon [30]) des formulations duales du problème de Signorini avec frottement Coulomb et on démontre des estimations d'erreur pour l'approximation par la méthode d'éléments finis équilibre (voir aussi Johnson et Mercier [62]).

5.1 Rappels d'analyse convexe

Dans cette Section, en tenant compte que les définitions et propositions rappelées ici seront utilisées dans la présentation de la théorie de dualité, on va désigner par V un espace de Banach réflexif et par V^* son dual, même si presques tous les résultats restent valable pour V et V^* deux espaces vectoriels mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^* \times V}$ (voir, par exemple, [47], [84] ou [71]).

On considère une fonction $f : V \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Définition 5.1.1 *On appelle la fonction conjuguée au sens de Fenchel (ou fonction polaire) de f, la fonction $f^* : V^* \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ définie par*

$$f^*(v^*) = \sup_{v \in V}(\langle v^*, v\rangle_{V^* \times V} - f(v)).$$

Dans le cas $V = \mathbb{R}$, f^* est la fonction conjuguée de Young de f.

Lemme 5.1.1 *La fonction conjuguée f^* est soit une fonction convexe semi-continue inférieurement de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, soit la fonction identiquement égale à $-\infty$.*

Lemme 5.1.2 *Soit $C \subset V$ un ensemble convexe fermé tel que $0 \in C$. Alors*

$$I_C^*(v^*) = I_{C^*}(v^*)$$

où $C^* = \{v^* \in V^* ;\ \langle v^*, v\rangle_{V^* \times V} \leq 0\,,\ \forall v \in C\}$ est le cône polaire de C et I_A est la fonctionnelle indicatrice de l'ensemble A.

Lemme 5.1.3 *Soit $f : V \to (-\infty, +\infty]$ propre. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*
(1) $f(u) = \min_{v \in V} f(v)$,
(2) $\theta \in \partial f(u)$
où le sous-différentiel $\partial f(u)$ de f en u est l'ensemble des sous-gradients de f en u (cf. [83]), c'est-à-dire

$$\partial f(u) = \{u^* \in V^* ;\ f(v) - f(u) \geq \langle u^*, v - u\rangle_{V^* \times V}\,, \quad \forall v \in V\}\,.$$

Observation 5.1.1 *Le sous-différentiel de f est donc une multi-application qui associe à chaque $u \in V$ le sous-ensemble $\partial f(u)$ de V^*.*

Si $f : V \to \bar{\mathbb{R}}$ est une fonction convexe semi-continue inférieuremet qui prend la valeur $-\infty$ alors f vaut identiquement $-\infty$. Alors il est naturel de considérer des fonctions convexes et semi-continues inférieurement $f : V \to (-\infty, +\infty]$.

Lemme 5.1.4 *Soit $f : V \to (-\infty, +\infty]$ convexe semi-continue inférieurement propre. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:*
(1) $f(u) + f^*(u^*) = \langle u^*, u\rangle$,
(2) $u \in \partial f^*(u^*)$,
(3) $u^* \in \partial f(u)$.

Lemme 5.1.5 *Soient $f_1, f_2 : V \to (-\infty, +\infty]$ deux fonctions convexes semi-continues inférieurement propres. On suppose qu'il existe $u_0 \in dom(f_1) \cap dom(f_2)$ tel que f_1 est continue en u_0. Alors*

$$\partial(f_1 + f_2)(v) = \partial f_1(v) + \partial f_2(v) \quad \forall v \in V.$$

Définition 5.1.2 *Soient $f_1, f_2 : V \to \bar{\mathbb{R}}$.*

(1) On appelle l'inf-convolution des fonctions f_1 et f_2, noté $f_1 \nabla f_2$, la fonction définie par

$$(f_1 \nabla f_2)(u) = \inf_{v \in V} \{f_1(v) + f_2(u - v)\} = \inf_{\substack{v_1 + v_2 = u \\ v_1,\, v_2 \in V}} (f_1(v_1) + f_2(v_2)) \quad \forall u \in V\,.$$

(2) On dit que l'inf-convolution $f_1 \nabla f_2$ est exacte en u s'il existe $v \in V$ tel que $(f_1 \nabla f_2)(u) = f_1(v) + f_2(u - v)$ ou, équivalente, il existe v_1, $v_2 \in V$ tels que $v_1 + v_2 = u$ et $(f_1 \nabla f_2)(u) = f_1(v_1) + f_2(v_2)$.

Lemme 5.1.6 *Soient $f_1, f_2 : V \to \bar{\mathbb{R}}$. Alors*
(1) $(f_1 \nabla f_2)^* = f_1^* + f_2^*$,
(2) Si f_1, f_2 sont propres et $f_1 \nabla f_2$ est exacte dans u alors $\partial(f_1 \nabla f_2)$ est exacte dans u, c'est-à-dire, s'il existe $u_0 \in V$ tel que $(f_1 \nabla f_2)(u) = f_1(u_0) + f_2(u - u_0)$ alors $\partial(f_1 \nabla f_2)(u) = \partial f(u_0) \cap \partial f_2(u - u_0)$.
(3) Si f_1, f_2 sont convexes, alors $f_1 \nabla f_2$ est convexe.

Lemme 5.1.7 *Soient $f_1, f_2 : V \to (-\infty, +\infty]$ deux fonctions convexes semi-continues inférieurement propres.*
(1) S'il existe $u_0 \in dom(f_1) \cap dom(f_2)$ tel que f_1 est continue en u_0, alors

$$(i)\ (f_1 + f_2)^* = f_1^* \nabla f_2^*$$
$$(ii)\ f_1^* \nabla f_2^* \text{ est exacte dans } u_0$$

(2) S'il existe $v^* \in V^* \in dom(f_1^*) \cap dom(f_2^*)$ tel que f_1^* est continue dans v^*, alors $f_1 \nabla f_2$ est une fonction convexe semi-continue inférieurement propre et exacte en v^*.

5.2 La théorie de dualité M-CD-M

Nous allons donner les idées principaux de la théorie de dualité M-CD-M élaborée par Mosco, Capuzzo-Dolcetta et Matzeu [31] pour des problèmes variationnels dites "implicites" comme dans Telega [119].

Soient $(V, V^*, \langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*\times V})$ et $(Y, Y^*, \langle\cdot,\cdot\rangle_{Y^*\times Y})$ deux espaces de Banach réflexifs avec leurs duales et leurs produits de dualité. On considère le problème primal sous la forme

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V \text{ tel que}\\ \varphi(Lu,u) + g(u,u) \leq \varphi(Lu,v) + g(u,v) \quad \forall v \in V\end{array}\right\} \tag{5.2.1}$$

où

$$L : V \to Y \text{ est un opérateur linéaire et continu,} \tag{5.2.2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi : Y \times V \to (-\infty, +\infty] \text{ est une fonction telle que}\\ \forall u \in V,\ \varphi(Lu,\cdot) \text{ est convexe propre semi-continue inférieurement}\end{array}\right\} \tag{5.2.3}$$

$$\left. g : V \times V \to \mathbb{R} \text{ est une fonction telle que } \forall u \in V,\ \begin{array}{l} g(u,\cdot) \text{ est convexe}\\ g(u,u) \text{ est continue}\end{array}\right\} \tag{5.2.4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall u \in V,\ \text{l'application } v \mapsto g(u,v) \text{ a une différentielle de Gâteaux } D_2g(u,v)\\ \text{par rapport au second argument dans } v = u,\ \text{tel que pour tout } v^* \in V^*,\\ \text{l'ensemble } \{u \in V\ ;\ D_2g(u,u) = v^*\} \text{ contient au moins un élément noté}\\ (D_2g)^{-1}(v^*).\end{array}\right\} \tag{5.2.5}$$

Rappelons que la différentielle de Gâteaux en v de $g(u,\cdot)$ par rapport au second variable est définie par

$$\langle D_2g(u,v), w\rangle_{V^*\times V} = \lim_{t\to 0+} \frac{g(u, v+tw) - g(u,v)}{t}.$$

Le problème dual de (5.2.1) est construit à l'aide des fonctions conjuguées de Fenchel φ^* et g^* de φ, respectivement g, par rapport au second argument

$$\varphi^* : Y \times V^* \to (-\infty, +\infty], \quad \varphi^*(Lu, v^*) = \sup_{v\in V} \left(\langle v^*, v\rangle_{V^*\times V} - \varphi(Lu,v)\right),$$
$$g^* : V \times V^* \to (-\infty, +\infty], \quad g^*(u, v^*) = \sup_{v\in V} \left(\langle v^*, v\rangle_{V^*\times V} - g(u,v)\right).$$

On note aussi, pour tout $u \in V$, la sous-différentiation de $g(u,\cdot)$ et $\varphi^*(Lu,\cdot)$ par rapport au second argument par $\partial_2 g(u,\cdot)$, respectivement $\partial_2\varphi^*(Lu,\cdot)$, définies par

$$\partial_2 g(u,z) = \{v^* \in V\ ;\ g(u,v) - g(u,z) \geq \langle v^*, v-z\rangle_{V^*\times V}\ ,\ \forall v \in V\},$$

$$\partial_2\varphi^*(Lu,z^*) = \{v \in V\,;\ \varphi^*(Lu,v^*) - \varphi^*(Lu,z^*) \geq \langle v^* - z^*, v\rangle_{V^*\times V}\,,\ \forall v^* \in V^*\}.$$

Alors, le problème dual de (5.2.1) s'écrit

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } (u,u^*) \in V \times V^* \text{ tel que}\\ -u^* \in \partial_2 g(u,u)\\ u \in \partial_2\varphi^*(Lu,u^*)\end{array}\right\} \tag{5.2.6}$$

ou, équivalent

$$\left.\begin{array}{l}\text{Trouver } (u,u^*) \in V \times V^* \text{ tel que}\\ g(u,v) - g(u,u) \geq \langle -u^*, v-u\rangle_{V^*\times V} \qquad \forall v \in V\,,\\ \varphi^*(Lu,v^*) - \varphi^*(Lu,u^*) \geq \langle v^* - u^*, u\rangle_{V^*\times V} \qquad \forall v^* \in V^*\,.\end{array}\right\}$$

La relation entre le problème primal et le problème dual est donnée par le résultat suivant.

Théorème 5.2.1 *On suppose que les hypohèses (5.2.2)-(5.2.4) sont satisfaites.*
(i) Si u est solution du problème (5.2.1) alors il existe $u^* \in V^*$ tel que (u,u^*) est solution du problème (5.2.6).
(ii) Si (u,u^*) est solution du problème (5.2.6), alors u est solution du problème (5.2.1).

En outre, les conditions d'optimalitées

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(Lu,u) + \varphi^*(Lu,u^*) = \langle u^*, u\rangle_{V^*\times V},\\ g(u,u) + g^*(u,-u^*) = -\langle u^*, u\rangle_{V^*\times V},\end{array}\right\} \tag{5.2.7}$$

sont vraies.

Démonstration.

(i) Soient u une solution de (5.2.1) et $f(v) = \varphi(Lu,v) + g(u,v)$. Il en résulte que

$$f(u) \leq f(v) \qquad \forall v \in V,$$

ce qui entraîne, conformément Lemmes 5.1.3, 5.1.4 et $5.1.7_{1(i)}$,

$$\theta \in \partial f(u) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \partial f^*(0) = \partial(f_1^* \nabla f_2^*)(0), \tag{5.2.8}$$

où $f_1(v) = \varphi(Lu,v)$ et $f_2(v) = g(u,v)$.

D'autre part, de Lemme $5.1.7_{1(ii)}$ il résulte que $f_1^* \nabla f_2^*$ est exacte dans 0 donc, de Lemme $5.1.6_2$, il résulte que $\partial(f_1^* \nabla f_2^*)$ est exacte dans 0, c'est-à-dire il existe $u^* \in V^*$ tel que

$$\partial(f_1^* \nabla f_2^*)(0) = \partial f_1^*(u^*) \cap \partial f_2^*(-u^*). \tag{5.2.9}$$

De (5.2.8) et (5.2.9) on conclut qu'il existe $u^* \in V^*$ tel que $u \in \partial_2\varphi^*(Lu, u^*) \cap \partial_2 g^*(u, -u^*)$, soit (u, u^*) est une solution de (5.2.6).

(ii) Si (u, u^*) est une solution de (5.2.6) alors, de Lemme 5.1.4 on obtient

$$u \in \partial_2\varphi^*(Lu, u^*) \cap \partial_2 g^*(u, -u^*)$$

et, de la première partie (i) de la démonstration, l'assertion résulte.

(iii) Les conditions d'optimalitées (5.2.7) résultent imédiatement du problème (5.2.6) et Lemme 5.1.4. ■

On peut éliminer la première composante de la solution (u, u^*) du problème (5.2.6) en utilisant l'hypothèse (5.2.5) et la théorie de dualité M-CD-M.

Théorème 5.2.2 *(M-CD-M) Soient les hypohèses (5.2.2)-(5.2.5) satisfaites. Alors u est solution du problème (5.2.1) si et seulement si $u^* = -D_2 g(u, u)$ est solution du problème*

$$\begin{gathered}\varphi^*(L(D_2 g)^{-1}(-u^*), v^*) - \varphi^*(L(D_2 g)^{-1}(-u^*), u^*) \geq \\ \langle v^* - u^*, (D_2 g)^{-1}(-u^*)\rangle_{V^* \times V} \quad \forall v^* \in V^*.\end{gathered} \tag{5.2.10}$$

En outre, les conditions d'optimalitées (5.2.7) restent valides.

Démonstration. D'abord on remarque que l'hypothèse (5.2.5) implique

$$-u^* = D_2 g(u, u) \quad \Longleftrightarrow \quad u = (D_2 g)^{-1}(-u^*). \tag{5.2.11}$$

Si u est solution de (5.2.1) alors, de Théorème 5.2.1, on a $u \in \partial_2\varphi^*(Lu, u^*)$, ce qui avec (5.2.11), donne

$$(D_2 g)^{-1}(-u^*) \in \partial_2\varphi^*(L(D_2 g)^{-1}(-u^*), u^*).$$

La relation (5.2.10) s'obtient immédiatement en appliquant la définition de la sous-différentielle de g par rapport au second argument.

Réciproquement, si $u^* = -D_2 g(u,u)$ est solution de (5.2.10) alors $(D_2 g)^{-1}(-u^*) \in \partial_2 \varphi^*(L(D_2 g)^{-1}(-u^*), u^*)$. On en déduit, avec (5.2.11), que

$$\left.\begin{array}{l} u \in \partial_2 \varphi^*(Lu, u^*), \\ -u^* = D_2 g(u,u) = \partial_2 g(u,u), \end{array}\right\}$$

soit (u, u^*) est solution de (5.2.6) ou, équivalent par Théorème 5.2.1, u est solution de (5.2.1).
■

Dans Section 7.5 on va utiliser cette théorie pour obtenir la formulation duale du problème de Signorini avec frottement de Coulomb qui a comme inconnue le champ des contraintes définis seulement sur le bord de contact unilatéral.

Chapitre 6

Approximations internes des inéquations variationnelles

Ce chapitre est dévoué à l'approximation interne des inéquations quasi-variationnelles stationnaires et d'évolution implicites qui constitue, en fait, une généralization pour les inéquations variationnelles de première et de deuxième espèce. On donne aussi une estimation abstraite de l'erreur. Nous n'allons pas faire ici une présentation complète des méthodes d'approximations des inéquations variationnelles. On renvoie pour ces résultats à Glowinski, Lions et Trémolières [54], Glowinski [53] et la bibliographie de ces travaux.

6.1 Approximation interne du problème stationnaire

Dans cette section on considère (voir [27]) l'approximation interne de l'inéquation quasi-variationnelle

Problème (P1) : Trouver $u \in K$ tel que:

$$\langle Au, v-u\rangle + j(u,v) - j(u,u) \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in K, \tag{6.1.1}$$

où $(V, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach réflexif, K un sous-ensemble non vide convexe fermé de V et $f \in V^*$ est donné. On suppose que l'opérateur $A : V \longrightarrow V^*$ est Lipschitz continu et fortement monotone, soit

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \|Au - Av\|_* \leq M\|u-v\| \quad \forall u, v \in V\,, \tag{6.1.2}$$

$$\exists\,\alpha > 0 \text{ tel que } \langle Au - Av, u - v\rangle \geq \alpha\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in V \tag{6.1.3}$$

et la fonctionnelle $j(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ satisfaient les conditions du théorème 3.21.3, donc

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \forall u \in V,\ j(u,\cdot) : V \to (-\infty,\ +\infty] \text{ est une fonction} \\ \quad\ \text{convexe, propre et semi-continue inférieurement,} \end{array}\right\} \tag{6.1.4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \exists k < \alpha \text{ tel que } |j(u_1, v_1) + j(u_2, v_2) - j(u_1, v_2) - j(u_2, v_1)| \\ \qquad \leq k\|u_1 - u_2\|\,\|v_1 - v_2\| \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in K\,. \end{array}\right\} \tag{6.1.5}$$

Soit h un paramètre qui converge vers zero. On considère une famille $\{V_h\}_h$ de sous-espaces de dimension finie de V et une famille $\{K_h\}_h$ de sous-ensembles non vides, convexes et fermés de V_h qui approche K dans le sens (voir [54])

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & \forall v \in K,\ \exists r_h v \in K_h \text{ tel que } r_h v \to v \text{ dans } V \text{ fort },\\ (ii) & \forall v_h \in K_h \text{ avec } v_h \rightharpoonup v \text{ dans } V \text{ faible, alors } v \in K\,. \end{array}\right\} \tag{6.1.6}$$

Il y a des situations dans lesquelles A, f où j sont approcher par A_h, f_h, respectivement j_h, obtenus, d'habitude, de A, f et j par un processus d'intégration numérique. L'utilisation des approximations A_h et f_h n'apporte aucune nouveauté vis-à-vis le cas classique. La fonctionnelle $j(\cdot,\cdot)$ sera approchée par une famille de fonctionnelles $\{j_h\}_h$ qui, pour tout $u \in V$, satifaient les conditions suivantes (voir aussi [53]):

$$\bullet \quad \forall h,\ j_h(u,\cdot) : V_h \to (-\infty,\ +\infty] \text{ est convexe et semi-continue inférieurement,} \tag{6.1.7}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \text{la famille } \{j_h(u,\cdot)\}_h \text{ est uniformément propre, c'est-à-dire :} \\ \exists \lambda = \lambda(u) \in V^*,\ \exists \mu = \mu(u) \in \mathbb{R} \text{ tels que } j_h(u, v_h) \geq \langle \lambda, v_h\rangle + \mu\,,\ \forall v_h \in V_h,\ \forall h, \end{array}\right\} \tag{6.1.8}$$

$$\bullet \quad \liminf_{h\to 0} j_h(u, v_h) \geq j(u, v) \quad \forall v_h \in V_h \text{ tel que } v_h \rightharpoonup v \text{ dans } V \text{ faible,} \tag{6.1.9}$$

$$\bullet \quad \lim_{h\to 0} j_h(u, r_h v) = j(u, v) \quad \forall v \in K\,. \tag{6.1.10}$$

De plus, on va supposer que, pour tout h, j_h satisfait

$$\begin{array}{l} \bullet \quad |j_h(u_h^1, v_h^2) + j_h(u_h^2, v_h^1) - j_h(u_h^1, v_h^1) - j_h(u_h^2, v_h^2)| \\ \qquad\qquad \leq k\|u_h^1 - u_h^2\|\,\|v_h^1 - v_h^2\| \quad \forall u_h^1, u_h^2, v_h^1, v_h^2 \in K_h\,. \end{array} \tag{6.1.11}$$

Alors, nous formulons le problème discret suivant

Problème $(\mathbf{P1})_h$: Trouver $u_h \in K_h$ tel que:

$$\langle Au_h, v_h - u_h\rangle + j_h(u_h, v_h) - j_h(u_h, u_h) \geq \langle f, v_h - u_h\rangle \quad \forall v_h \in K_h\,. \tag{6.1.12}$$

Procédant comme dans la démonstration du Théorème 3.21.3, on montre que l'application $S_h : K_h \to K_h$ qui associe à tout élément $w_h \in K_h$ l'élément $S_h w_h \in K_h$ définit par

$$\langle A(S_h w_h), v_h - S_h w_h\rangle + j_h(w_h, v_h) - j_h(w_h, S_h w_h) \geq \langle f, v_h - S_h w_h\rangle \quad \forall v_h \in K_h$$

est contractante, soit

$$\|S_h w_1 - S_h w_2\| \leq q\|w_1 - w_2\| \quad \forall w_1, w_2 \in K_h\,, \tag{6.1.13}$$

avec $q = \dfrac{k}{\alpha} < 1$. Il en résulte qu'il existe un élément unique $u_h \in K_h$ tel que $S_h u_h = u_h$, donc nous avons le résultat suivant:

Proposition 6.1.1 *L'inéquation quasi-variationnelle discrète (6.1.12) admet une solution unique $u_h \in K_h$.*

Il est naturel d'approcher la solution u_h par une suite définie à l'aide de l'application contractante S_h. Ainsi, soit $\{u_h^0\}_h$ une suite uniformément bornée en h, telle que $u_h^0 \in K_h$. On définit la suite $\{u_h^n\}_{n\geq 1}$ par $u_h^n = S_h u_h^{n-1}$, soit
Problème $(\mathbf{P2})_h^n$: Trouver $u_h^n \in K_h$ tel que:

$$\langle Au_h^n, v_h - u_h^n\rangle + j_h(u_h^{n-1}, v_h) - j_h(u_h^{n-1}, u_h^n) \geq \langle f, v_h - u_h^n\rangle \quad \forall v_h \in K_h. \tag{6.1.14}$$

Alors, de (6.1.13) nous avons

$$\|u_h^n - u_h\| = \|S_h u_h^{n-1} - S_h u_h\| \leq \left(\frac{k}{\alpha}\right)^n \|u_h^0 - u_h\|. \tag{6.1.15}$$

Pour montrer que la solution u_h est approximée par la suite $\{u_h^n\}_{n\geq 1}$, il est essentiel le suivant résultat:

Lemme 6.1.1 *La suite $\{u_h\}_h$ des solutions de l'inéquation quasi-variationnelle (6.1.12) est uniformément bornée en h.*

Démonstration. Soient $v \in K$ quelconque et $r_h v \in K_h$ tel que $r_h v \to v$ dans V fort quand $h \to 0$. Prenant $v_h = r_h v$ dans (6.1.12), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\alpha\|u_h - r_h v\|^2 \leq \langle Au_h - A(r_h v), u_h - r_h v\rangle \leq \langle A(r_h v), r_h v - u_h\rangle \\ &\quad +(j_h(u_h, r_h v) - j_h(u_h, u_h) + j_h(u, u_h) - j_h(u, r_h v)) \\ &\quad -j_h(u, u_h) + j_h(u, r_h v) - \langle f, r_h v - u_h\rangle . \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

Parce que la suite $\{r_h v\}_h$ est bornée, de (6.1.10) et (6.1.2), on a

$$\begin{aligned} &|j_h(u, r_h v)| \leq C_1, \\ &\|A(r_h v)\|_* \leq C_2 \end{aligned}$$

avec C_1 et C_2 des constantes positives, indépendentes de h. Alors, de (6.1.16), (6.1.8), et (6.1.11) on déduit

$$\begin{aligned} &\alpha\|u_h - r_h v\|^2 - \|\lambda\|_*\|u_h\| - |\mu| \leq \langle Au_h - A(r_h v), u_h - r_h v\rangle + j_h(u, u_h) \\ &\quad \leq C_2\|r_h v - u_h\| + k\|u_h - u\|\,\|r_h v - u_h\| + C_1 + \|f\|_*\|r_h v - u_h\|, \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\left(\alpha - k - \frac{k\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{2}\right)\|u_h - r_h v\|^2 \leq \frac{\|\lambda\|_*}{2\epsilon_3} + \|r_h v\|\,\|\lambda\|_* \\ &\quad + \frac{k}{2\epsilon_1}\|r_h v - u\|^2 + \frac{(C_2 + \|f\|_*)^2}{2\epsilon_2} + C_1 + |\mu| \leq C \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

où ϵ_1, ϵ_2, $\epsilon_3 > 0$ sont choisis tels que $\alpha - k - \dfrac{k\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{2} > 0$ (par exemple, $\epsilon_1 = \dfrac{\alpha - k}{3k}$, $\epsilon_2 = \dfrac{5}{6}(\alpha - k)$, $\epsilon_3 = \dfrac{5}{12}(\alpha - k)$) et C est une constante positive indépendente de h. En conséquence, de (6.1.18) on déduit que la suite $\{u_h - r_h v\}_h$ est uniformément bornée en h donc, conformément au choix de $\{r_h v\}_h$, aussi la suite $\{u_h\}_h$. ■

De (6.1.15) et la proposition ci-dessus, il résulte

$$\|u_h^n - u_h\| \leq Cq^n \tag{6.1.19}$$

où $q = \dfrac{k}{\alpha} < 1$ et C est une constante indépendente de n et h.

On va introduire ci-après une autre suite de problèmes auxiliaires qui sera utile dans l'obtention de la convergence de u_h vers u. Pour $w_h^0 \in K_h$ donné tel que $\{w_h^0\}_h$ est uniformément borné, on note par $w_h^n \in K_h$ la solution, qui existe et est unique, du problème suivant

Problème $\mathbf{(Q1)}_h^n$: Trouver $w_h^n \in K_h$ tel que:

$$\langle Aw_h^n, v_h - w_h^n\rangle + j_h(u^{n-1}, v_h) - j_h(u^{n-1}, w_h^n) \geq \langle f, v_h - w_h^n\rangle \quad \forall v_h \in K_h\,, \tag{6.1.20}$$

où $u^{n-1} \in K$ est défini par (3.21.19) de la page 50. On remarque que le problème (6.1.20) est l'approximation interne de l'inéquation variationnelle de deuxième espèce (3.21.19) pour laquelle on a le suivant résultat de convergence:

Proposition 6.1.2 *La suite $\{w_h^n\}_h$ définie par (6.1.20) approche la solution u^n de (3.21.19) dans le sens*

$$w_h^n \to u^n \text{ dans } V \text{ fort quand } h \to 0.$$

De plus, on a

$$\lim_{h\to 0} j_h(u^{n-1}, w_h^n) = j(u^{n-1}, u^n).$$

Démonstration. Soit $v \in K$ quelconque. Prenant $v_h = r_h v$ dans (6.1.20), il vient

$$\langle Aw_h^n, w_h^n\rangle + j_h(u^{n-1}, w_h^n) \leq \langle Aw_h^n, r_h v\rangle + j_h(u^{n-1}, r_h v) - \langle f, r_h v - w_h^n\rangle, \tag{6.1.21}$$

d'où, en utilisant (6.1.3), (6.1.2), (6.1.8) et (6.1.10), on obtient

$$\alpha\|w_h^n\|^2 \leq \|\lambda\|_*\|w_h^n\| + |\mu| + M\|w_h^n\|\|r_h v\| + C + \|f\|_*(\|r_h v\| + \|w_h^n\|) \leq C_1\|w_h^n\| + C_2$$

avec C, C_1 et C_2 des constantes indépendentes de h. Par conséquent, la suite $\{w_h^n\}_h$ est uniformément bornée en h, donc on peut extraire une sous-suite $\{w_{h_p}^n\}_p$ telle que $w_{h_p}^n \rightharpoonup w_n$ dans V faible, avec $w^n \in K$. Alors, de (6.1.21), en utilisant (6.1.6), (6.1.9) et (6.1.10), on déduit

$$\begin{aligned}\langle Aw^n, w^n\rangle + j(u^{n-1}, w^n) &\leq \liminf_{h\to 0}(\langle Aw_{h_p}^n, w_{h_p}^n\rangle + j_h(u^{n-1}, w_{h_p}^n)) \\ &\leq \langle Aw^n, v\rangle + j(u^{n-1}, v) - \langle f, v - w^n\rangle \quad \forall v \in K\,.\end{aligned}$$

Mais, ça entraîne que $w^n = u^n$, où u^n est la solution unique de l'inéquation variationnelle (3.21.19) et $w_h^n \rightharpoonup u^n$ dans V faible quand $h \to 0$.

Finalement, de (6.1.21), on a

$$\begin{aligned}j(u^{n-1}, u^n) &\leq \liminf_{h\to 0}(\alpha\|w_h^n - u^n\|^2 + j_h(u^{n-1}, w_h^n)) \leq \limsup_{h\to 0}(\alpha\|w_h^n - u^n\|^2 + j_h(u^{n-1}, w_h^n)) \\ &\leq \lim_{h\to 0}(\langle Aw_h^n, r_h v\rangle + j_h(u^{n-1}, r_h v) - \langle f, r_h v - w_h^n\rangle - \langle Aw_h^n, u^n\rangle - \langle Au^n, w_h^n\rangle + \langle Au^n, u^n\rangle) \\ &= \langle Au^n, v - u^n\rangle + j(u^{n-1}, v) - \langle f, v - u^n\rangle \quad \forall v \in K\,,\end{aligned}$$

ce qui, en prenant $v = u^n$, achève la démonstration. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat essentiel de ce chapitre.

Théorème 6.1.1 *On suppose que (6.1.2)-(6.1.11) ont lieu. Soient u_h la solution de (6.1.12) et u la solution de (6.1.1). Alors on a*

$$u_h \to u \text{ dans } V \text{ fort quand } h \to 0\,. \tag{6.1.22}$$

Démonstration. D'abord, on note qu'on a

$$\|u_h - u\| \le \|u_h - u_h^n\| + \|u_h^n - u^n\| + \|u^n - u\| \quad \forall n \ge 0\,. \tag{6.1.23}$$

Pour estimer le deuxième terme de la partie droite de (6.1.23), on déduit d'abord de la définitions de u_h^n et w_h^n que

$$\begin{aligned}\alpha\|u_h^n - w_h^n\|^2 &\le \langle Aw_h^n - Au_h^n, w_h^n - u_h^n\rangle \\ &\le j_h(u^{n-1}, u_h^n) + j_h(u_h^{n-1}, w_h^n) - j_h(u^{n-1}, w_h^n) - j_h(u_h^{n-1}, u_h^n)\,,\end{aligned}$$

d'où, en utilisant (6.1.11), on obtient

$$\|u_h^n - w_h^n\| < \|u_h^{n-1} - u^{n-1}\|\,. \tag{6.1.24}$$

Prenant $w_h^0 = u_h^0$, nous allons démontrer par récurrence que

$$\|u_h^n - u^n\| \le \sum_{i=0}^{n} \|w_h^i - u^i\| \quad \forall n \ge 0\,. \tag{6.1.25}$$

En effet, pour $n = 0$ le résultat est évident. Si nous supposons que (6.1.25) est vraie pour $n-1$, alors, de (6.1.24), on a

$$\|u_h^n - u^n\| \le \|u_h^n - w_h^n\| + \|w_h^n - u^n\| \le \|u_h^{n-1} - u^{n-1}\| + \|w_h^n - u^n\| \le \sum_{i=0}^{n} \|w_h^i - u^i\|\,.$$

Par conséquent la relation (6.1.25) est satisfaite pour tout $n \ge 0$.

D'autre part, de (6.1.19) et (3.21.20) (voir page 50) il résulte que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon > 0$ tel que

$$\|u_h^n - u_h\| + \|u^n - u\| \le \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \ge N_\epsilon\,. \tag{6.1.26}$$

En choisissant $n = N_\epsilon$ dans (6.1.23) et en tenant compte de (6.1.25) et (6.1.26), il vient

$$\|u_h - u\| \le \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=0}^{N_\epsilon} \|w_h^i - u^i\|\,. \tag{6.1.27}$$

Mais, de Proposition 6.1.2, il résulte que, pour tout i, il existe $H_\epsilon^i > 0$ tel que

$$\|w_h^i - u^i\| \leq \frac{\epsilon}{2(N_\epsilon + 1)} \quad \forall h \leq H_\epsilon^i . \tag{6.1.28}$$

En conclusion, de (6.1.27) et (6.1.28), pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $H_\epsilon = \min_{i=0}^{N_\epsilon} H_\epsilon^i$ tel que

$$\|u_h - u\| \leq \epsilon \quad \forall h \leq H_\epsilon ,$$

donc $u_h \to u$ dans V fort quand $h \to 0$. ■

6.2 Estimation abstraite de l'erreur d'approximation

On va donner une estimation abstraite de l'erreur pour l'approximation (6.1.12) de l'inéquation quasi-variationnelle (6.1.1) et puis on va analyser les différents cas dérivables à partir de cet estimation.

Théorème 6.2.1 *Soient u et u_h les solutions de l'inéquation quasi-variationnelle (6.1.1), respectivement (6.1.12).*

On suppose que (6.1.2)-(6.1.11) ont lieu. De plus, on suppose qu'il existe un espace de Hilbert $(H, \|\cdot\|_H)$ et un espace de Banach $(U, \|\cdot\|_U)$ tels que $V \hookrightarrow H$, avec injection dense, $V \subset U$ et

$$Au - f \in H , \tag{6.2.1}$$

$$|j_h(u, v_h) - j(u, v)| \leq C_1 \|v_h - v\|_U \quad \forall v_h \in K_h , \ \forall v \in K , \tag{6.2.2}$$

où C_1 est une constante indépendente de h.

Alors on a l'estimation

$$\begin{aligned} \|u_h - u\| \leq C \Big\{ & \inf_{v_h \in K_h} \big(\|u - v_h\|^2 + \|Au - f\|_H \|u - v_h\|_H + C_1 \|u - v_h\|_U\big) \\ & + \inf_{v \in K} (\|Au - f\|_H \|u_h - v\|_H + C_1 \|u_h - v\|_U) \Big\}^{1/2} \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

où C est une constante indépendente de h.

Démonstration. De (6.1.1) et (6.1.12) nous avons

$$\begin{aligned} &\langle Au_h - Au, u_h - u\rangle \leq \langle Au - f, v - u_h + v_h - u\rangle + \langle Au_h - Au, v_h - u\rangle \\ &\quad + j_h(u_h, v_h) - j_h(u_h, u_h) + j(u, v) - j(u, u) \quad \forall v \in K \quad \forall v_h \in K_h\,. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

En évaluant chaque terme de la partie droite, nous obtenons

$$\langle Au - f, v - u_h + v_h - u\rangle \leq \|Au - f\|_H(\|v - u_h\|_H + \|v_h - u\|_H)\,, \tag{6.2.5}$$

$$\langle Au_h - Au, v_h - u\rangle \leq M\|u_h - u\|\,\|v_h - u\|\,, \tag{6.2.6}$$

$$\begin{aligned} &j_h(u_h, v_h) - j_h(u_h, u_h) + j(u, v) - j(u, u) \\ &\leq |j_h(u_h, v_h) - j_h(u_h, u_h) + j_h(u, u_h) - j_h(u, v_h)| + |j_h(u, v_h) - j(u, u)| \\ &+ |j(u, v) - j_h(u, u_h)| \leq k\|u_h - u\|\,\|v_h - u_h\| + C_1(\|v_h - u\|_U + \|v - u_h\|_U) \\ &\leq k\|u_h - u\|^2 + k\|u_h - u\|\,\|v_h - u\| + C_1(\|v_h - u\|_U + \|v - u_h\|_U)\,. \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

En introduissant (6.2.5)-(6.2.7) dans (6.2.4) et utilisant (6.1.3), on obtient

$$\begin{aligned} &(\alpha - k)\|u_h - u\|^2 \leq (M + k)\|u_h - u\|\,\|v_h - u\| + \|Au - f\|_H(\|v - u_h\|_H + \|v_h - u\|_H) \\ &\quad + C_1(\|v_h - u\|_U + \|v - u_h\|_U) \quad \forall v \in K\,,\ \forall v_h \in K_h\,, \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Young : $ab \leq \dfrac{\epsilon a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2\epsilon}$ pour $\epsilon = \dfrac{\alpha - k}{M + k}$, $a = \|u_h - u\|$ et $b = \|v_h - u\|$, on déduit

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha - k}{2}\|u_h - u\|^2 \leq \frac{M + k}{2(\alpha - k)}\|v_h - u\|^2 + \|Au - f\|_H(\|v - u_h\|_H + \|v_h - u\|_H) \\ &\quad + C_1(\|v_h - u\|_U + \|v - u_h\|_U) \quad \forall v \in K\,,\ \forall v_h \in K_h\,, \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

soit (6.2.3). ■

Observation 6.2.1 *Si $K_h \subset K$ alors le terme*

$$\inf_{v \in K} (\|Au - f\|_H\|u_h - v\|_H + C_1\|u_h - v\|_U)\,,$$

qui est soupçonné d'avoir le plus poids dans (6.2.3), est annulé donc, on obtient

$$\|u_h - u\| \leq C\left\{\inf_{v_h \in K_h}\left(\|u - v_h\|^2 + \|Au - f\|_H\|u - v_h\|_H + C_1\|u - v_h\|_U\right)\right\}^{1/2}.$$

Observation 6.2.2 *Si $j(\cdot,\cdot) \equiv 0$ alors, en prenant $C_1 = 0$, nous obtenons*

$$\|u_h - u\| \leq C \left\{ \inf_{v_h \in K_h} \left(\|u - v_h\|^2 + \|Au - f\|_H \|u - v_h\|_H \right) + \|Au - f\|_H \inf_{v \in K} \|u_h - v\|_H \right\}^{1/2}$$

c'est-à-dire le résultat d'éstimation donné par Falk [48] pour les inéquations variationnelles de première espéce avec A un opérateur linéaire et continu.

Observation 6.2.3 *Si $j(\cdot,,\cdot) \equiv 0$ et $K = V$ alors, en choisissant $K_h = V_h$, de (6.2.3) on déduit*

$$\|u_h - u\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$$

donc l'estimation de la lemme de Céa [33] pour l'équation opératorielle $Au = f$ avec A un opérateur linéaire et continu.

Il est immédiat la forme suivante de l'estimation de l'erreuer.

Théorème 6.2.2 *On suppose que les hypotèses du Théorème 6.2.1 sont satisfaites avec la condition (6.2.1) remplacée par la condition*

$$\langle Au - f, v \rangle \leq C_2 \|v\|_U \quad \forall v \in V\,. \tag{6.2.10}$$

Alors nous avons l'estimation

$$\begin{aligned} \|u_h - u\| \leq C &\left\{ \inf_{v_h \in K_h} \left(\|u - v_h\|^2 + (C_1 + C_2)\|u - v_h\|_U \right) \right. \\ &\left. + (C_1 + C_2) \inf_{v \in K} \|u_h - v\|_U \right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

avec C une constante indépendente de h.

6.3 L'approximation interne du problème quasi statique

Cette section traite (voir [28]) la discrétisation du problème (3.3.24) de la page 67, soit

Problème (P2) : Trouver $u \in W^{1,2}(0,T;V)$ tel que

$$\left. \begin{aligned} &u(0) = u_0\,,\ u(t) \in K(f(t)) \quad \forall\, t \in [\,0, T\,], \\ &a(u(t), v - \dot{u}(t)) + j(f(t), u(t), v) - j(f(t), u(t), \dot{u}(t)) \\ &\qquad \geq b(f(t), u(t), v - \dot{u}(t)) \quad \forall\, v \in V \text{ p.p. dans }]0, T[, \\ &b(f(t), u(t), z - u(t)) \geq 0 \quad \forall\, z \in K,\ \forall\, t \in [\,0, T\,]. \end{aligned} \right\} \tag{6.3.1}$$

où $(V, (\cdot, \cdot))$ est un espace de Hilbert réel de norme $\|\cdot\|$, $K \subset V$ est un cône convexe fermé de sommet 0 et $f \in W^{1,2}(0, T; V)$ est donné. On suppose que a, $j(\cdot, \cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ et $K(g)$ satisfaient les hypothèses (3.3.1)-(3.3.8), (3.3.13)-(3.3.15), (3.3.17), (3.3.18) et (3.3.22) . On rappelle que $u_0 \in K(f(0))$ est la solution unique de

$$a(u_0, w - u_0) + j(f(0), u_0, w) - j(f(0), u_0, u_0) \geq 0 \quad \forall\, w \in K. \tag{6.3.2}$$

Nous allons prouver un résultat de convergence pour une méthode basée sur une approximation interne et un schéma aux différences en arrière.

D'abord, nous considérons une approximation semi-discrète de (**P2**). Pour un paramètre positif h qui converge vers 0, soient $\{V_h\}_h$ une famille de sous-espaces de dimension finie de V et $\{K_h\}_h$ une famille de cônes convexes fermés avec leurs sommets dans 0 telle que $K_h \subset V_h$ et $(K_h)_h$ est une approximation interne de K dans le sens précisé dans la section 6.1 (voir page 112), c'est-à-dire

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & \forall v \in K,\ \exists r_h v \in K_h \text{ tel que } r_h v \to v \text{ dans } V \text{ fort },\\ (ii) & \forall v_h \in K_h \text{ avec } v_h \rightharpoonup v \text{ dans } V \text{ faible, alors } v \in K\,. \end{array}\right\} \tag{6.3.3}$$

Pour tout $g \in V$, soit $\{K_h(g)\}_h$ une approximation interne de $K(g)$ dans le sens

$$K_h(g) \subset K_h \cap K(g) \quad \forall h\,. \tag{6.3.4}$$

Alors, de (3.3.2) et (3.3.4), on déduit

$$\left.\begin{array}{c} \left.\begin{array}{l} \forall (g_n, v_{hn}) \in D_{K_h} \text{ tel que}\\ g_n \to g \text{ dans } V \text{ fort}\\ v_{hn} \rightharpoonup v_h \text{ dans } V \text{ faible} \end{array}\right\} \Longrightarrow v_h \in K_h(g)\\ \|\beta(g_1, v_{h1}) - \beta(g_2, v_{h2})\|_H \leq k_1(\|g_1 - g_2\| + \|v_{h1} - v_{h2}\|)\\ \forall (g_1, v_{h1}),\ (g_2, v_{h2}) \in D_{K_h}\,, \end{array}\right\} \tag{6.3.5}$$

où $D_{K_h} = \{(g, v_h) \,/\, g \in V\,,\ v_h \in K_h(g)\} \subset V \times K_h$.

À partir des propriétés de a, j and K_h et procédant comme dans le cas continu, il s'en suit que pour tout $g \in V$, $d_h \in K_h$, $w_h \in K_h(g)$, l'inéquation variationnelle elliptique

$$\left.\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in K_h \text{ tel que}\\ a(u_h, v_h - u_h) + j(g, w_h, v_h - d_h) - j(g, w_h, u_h - d_h) \geq 0 \quad \forall\, v_h \in K_h \end{array}\right\} \tag{6.3.6}$$

a une solution qui est unique. Par conséquent nous pouvons définir l'application

$$S^h_{g,d_h} : K_h(g) \to K_h \text{ par } S^h_{g,d_h}(w_h) = u_h$$

et cette application est contractante (comme dans Remarque 3.3.2). Suposons que pour tout $g \in V$ et $d_h \in K_h$

$$S^h_{g,d_h}(K_h(g)) \subset K_h(g). \tag{6.3.7}$$

On désigne alors par u_{0h} le point fixe unique de l'application $S^h_{f(0),0}$ donc

$$\left.\begin{array}{l} u_{0h} \in K_h(f(0))\,, \\ a(u_{0h}, w_h - u_{0h}) + j(f(0), u_{0h}, w_h) - j(f(0), u_{0h}, u_{0h}) \geq 0 \quad \forall\, w_h \in K_h. \end{array}\right\} \tag{6.3.8}$$

On remarque que, de Théorème 6.1.1, il en résulte

$$u_{0h} \to u_0 \text{ dans } V \text{ fort} \tag{6.3.9}$$

u_0 étant la solution unique de (6.3.2).

Pour tout $g \in V$, $d_h \in K_h$, nous considérons les problèmes

Problème $(\tilde{\mathbf{P}})_h$: Trouver $u_h \in K_h(g)$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} a(u_h, v_h - u_h) + j(g, u_h, v_h - d_h) - j(g, u_h, u_h - d_h) \\ \qquad \geq b(g, u_h, v_h - u_h) \quad \forall\, v_h \in V_h, \\ \\ b(g, u_h, z_h - u_h) \geq 0 \quad \forall\, z_h \in K_h, \end{array}\right\} \tag{6.3.10}$$

et

Problème $(\tilde{\mathbf{Q}})_h$: Trouver $u_h \in K_h(g)$ tel que

$$a(u_h, v_h - u_h) + j(g, u_h, v_h - d_h) - j(g, u_h, u_h - d_h) \geq 0 \quad \forall\, v_h \in K_h. \tag{6.3.11}$$

On va supposer que

$$\text{si } u_h \text{ est une solution de } (\tilde{\mathbf{Q}})_h, \text{ alors } u_h \text{ est une solution de } (\tilde{\mathbf{P}})_h. \tag{6.3.12}$$

Remarque 6.3.1 *Il est immédiat que si u_h satisfies $(\tilde{\mathbf{P}})_h$, alors u_h satisfait $(\tilde{\mathbf{Q}})_h$.*

Considérons maintenant le problème semi-discret suivant:

Problème $(\mathbf{P2})_h$: Trouver $u_h \in W^{1,2}(0,T;V_h)$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} u_h(0) = u_{0h},\ u_h(t) \in K_h(f(t)) \quad \forall\, t \in [\,0,T\,], \\[2mm] a(u_h(t), v_h - \dot{u}_h(t)) + j(f(t), u_h(t), v_h) - j(f(t), u_h(t), \dot{u}_h(t)) \\[2mm] \qquad\qquad \geq b(f(t), u_h(t), v_h - \dot{u}_h(t)) \quad \forall\, v_h \in V_h \text{ p.p. dans }]\,0,T\,[, \\[2mm] b(f(t), u_h(t), z_h - u_h(t)) \geq 0 \quad \forall\, z_h \in K_h \quad \forall\, t \in [\,0,T\,]\,. \end{array}\right\} \qquad (6.3.13)$$

La discrétisation complète du problème $(\mathbf{P2})_h$ s'obtient en utilisant un schéma incrémental implicite comme dans Section 3.3 pour $(\mathbf{P2})$. Pour $u_h^0 = u_{0h}$ et $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, nous définissons u_h^{i+1} comme la solution du problème suivant:

Problème $(\mathbf{P2})_{hn}^i$: Trouver $u_h^{i+1} \in K_h^{i+1}$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} a(u_h^{i+1}, v_h - \partial u_h^i) + j(f^{i+1}, u_h^{i+1}, v_h) - j(f^{i+1}, u_h^{i+1}, \partial u_h^i) \\[2mm] \qquad\qquad \geq b(f^{i+1}, u_h^{i+1}, v_h - \partial u_h^i) \quad \forall\, v_h \in V_h\,, \\[2mm] b(f^{i+1}, u_h^{i+1}, z_h - u_h^{i+1}) \geq 0 \quad \forall\, z_h \in K_h\,, \end{array}\right\} \qquad (6.3.14)$$

où $K_h^{i+1} = K_h(f^{i+1})$.

Il est facile de voir, d'après (6.3.12) et Remarque 6.3.1, que le problème $(\mathbf{P2})_{hn}^i$ équivaut à l'inéquation variationnelle implicite :

Problème $(\mathbf{Q})_{hn}^i$: Trouver $u_h^{i+1} \in K_h^{i+1}$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} a(u_h^{i+1}, w_h - u_h^{i+1}) + j(f^{i+1}, u_h^{i+1}, w_h - u_h^i) \\[2mm] \qquad\qquad -j(f^{i+1}, u_h^{i+1}, u_h^{i+1} - u_h^i) \geq 0 \quad \forall\, w_h \in K_h. \end{array}\right\} \qquad (6.3.15)$$

De (3.3.1), (3.3.4), (3.3.8), (3.3.18) and (6.3.7) il suit que

$$S^h_{f^{i+1}, u_h^i} : K_h^{i+1} \to K_h^{i+1}$$

est contractante de sorte que $(\mathbf{Q})_{hn}^i$ a une solution unique.

Si nous définissons les fonctions

$$\left.\begin{array}{l} u_{hn}(0) = \hat{u}_{hn}(0) = u_{0h} \\ \left.\begin{array}{l} u_{hn}(t) = u_h^{i+1} \\ \hat{u}_{hn}(t) = u_h^i + (t - t_i)\partial u_h^i \end{array}\right\} \forall\, i \in \{0, 1, ..., n-1\} \quad \forall\, t \in]t_i, t_{i+1}] \end{array}\right\} \qquad (6.3.16)$$

alors, il est évident que les fonctions $u_{hn} \in L^2(0,T;V_h)$ et $\hat{u}_{hn} \in W^{1,2}(0,T;V_h)$ satisfaitent
Problème $(\mathbf{P2})_{\mathbf{hn}}$: Trouver $u_{hn}(t) \in K(f_n(t))$ tel que

$$\left.\begin{aligned}
&a(u_{hn}(t), v_h - \frac{d}{dt}\hat{u}_{hn}(t)) + j(f_n(t), u_{hn}(t), v_h) \\
&\quad -j(f_n(t), u_{hn}(t), \frac{d}{dt}\hat{u}_{hn}(t)) \geq b(f_n(t), u_{hn}(t), v_h - \frac{d}{dt}\hat{u}_{hn}(t)) \quad \forall\, v_h \in V_h, \\
&b(f_n(t), u_{hn}(t), z_h - u_{hn}(t)) \geq 0 \quad \forall\, z_h \in K_h.
\end{aligned}\right\} \tag{6.3.17}$$

et nous avons l'analogue aux Lemme 3.3.4 et Lemme 3.3.5 dans le cas de dimension finie.

Lemme 6.3.1 *Supposons que les hypothèses (3.3.1)-(3.3.8), (3.3.13)-(3.3.15),(3.3.17), (3.3.18), (3.3.22), (6.3.3), (6.3.7) et (6.3.12) ont lieu. Alors il existe une sous-suite de $\{u_{hn}\}_n$, encore notée par $(u_{hn})_n$, telle que*

$$u_{hn}(t) \to u_h(t) \quad \textit{dans} \quad V \quad \forall\, t \in [\,0, T\,], \tag{6.3.18}$$

$$\hat{u}_{hn} \to u_h \quad \textit{dans} \quad W^{1,2}(0,T;V), \tag{6.3.19}$$

où $u_h \in W^{1,2}(0,T;V_h)$ est la solution de $(\mathbf{P2})_h$.

Nous passons maintenant à trouver des estimations a priori pour les solutions de $(\mathbf{P2})_h$ qui sont des limites de sous-suites de $\{u_{hn}\}_n$.

Lemme 6.3.2 *Soit u_h la solution de $(\mathbf{P2})_h$ donnée par Lemme 6.3.1. Alors*

$$\|u_h(t)\| \leq C\|f\|_{C([0,T];V)} \quad \forall\, t \in [\,0, T\,], \tag{6.3.20}$$

$$\|u_h(s) - u_h(t)\| \leq C \int_s^t \|\dot{f}(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau \quad \forall\, s,\, t \in [\,0, T\,],\ s < t, \tag{6.3.21}$$

$$\|u_h\|_{W^{1,2}(0,T;V)} \leq C\sqrt{T\|f\|^2_{C([0,T];V)} + \|\dot{f}\|^2_{L^2(0,T;V)}}\,, \tag{6.3.22}$$

où C est la constante définie par la relation (3.3.33).

Démonstration.
En utilisant le même argument que dans la démonstration du Lemme 3.3.4, on obtient

$$\|u_{hn}(t)\| \leq C\|f\|_{C([0,T];V)} \quad \forall\, t \in [\,0, T\,],$$

$$\|u_{hn}(s) - u_{hn}(t)\| \leq C \int_s^{min\{t+\Delta t, T\}} \|\dot{f}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \quad \forall\, s,\, t \in [\,0, T\,],\ s < t,$$

$$\|\hat{u}_{hn}\|^2_{W^{1,2}(0,T;V)} \leq C^2 (T \|f\|^2_{C([0,T];V)} + \|\dot{f}\|^2_{L^2(0,T;V)})\,.$$

En combinant ces résultats avec (6.3.18) et (6.3.19) et tenant compte que la norme est semi-continue inférieurement, les estimations (6.3.20)-(6.3.22) suivent. ■

Nous sommes en mesure de prouver le résultat suivant de convergence et d'existence.

Théorème 6.3.1 *Selon les hypothèses (3.3.1)-(3.3.8), (3.3.13)-(3.3.15), (3.3.17), (3.3.18), (3.3.22), (6.3.3), (6.3.7) et (6.3.12), il existe une sous-suite de* $\{u_h\}_h$ *telle que*

$$u_h(t) \to u(t) \quad \textit{dans} \quad V \textit{ fort} \quad \forall\, t \in [\,0, T\,], \tag{6.3.23}$$

$$\dot{u}_h \rightharpoonup \dot{u} \quad \textit{dans} \quad L^2(0, T; V) \textit{ faible}, \tag{6.3.24}$$

où $u \in W^{1,2}(0, T; V)$ *est une solution de* (**P2**).

Démonstration.

D'après Lemme 6.3.2 il s'ensuit qu'il existe une sous-suite de $\{u_h\}_h$ et un élément $u \in W^{1,2}(0, T; V)$ tel que

$$u_h(t) \to u(t) \quad \text{dans} \quad V \text{ fort} \quad \forall\, t \in [\,0, T\,], \tag{6.3.25}$$

$$u_h \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad W^{1,2}(0, T; V) \text{ faible.} \tag{6.3.26}$$

D'après (6.3.25) et (6.3.9) nous obtenons

$$\begin{aligned} \liminf_{h\to 0} \int_0^s a(u_h(t), \dot{u}_h(t))\, \mathrm{dt} &\geq \frac{1}{2}(\liminf_{h\to 0} a(u_h(s), u_h(s)) - \lim_{h\to 0} a(u_{0h}, u_{0h})) \\ &\geq \frac{1}{2}(a(u(s), u(s)) - a(u_0, u_0)) = \int_0^s a(u(t), \dot{u}(t))\, \mathrm{dt} \quad \forall\, s \in [\,0, T\,]. \end{aligned} \tag{6.3.27}$$

D'autre part, de (3.3.8), (3.3.4) et (6.3.22), on obtient pour tout $s \in [\,0, T\,]$

$$|\int_0^s (j(f(t), u_h(t), \dot{u}_h(t)) - j(f(t), u(t), \dot{u}_h(t)))\ \mathrm{dt}| \leq C\, k_2 \|\dot{f}\|^2_{L^2(0,T;V)} \int_0^s \|u_h(t) - u(t)\|_V \, \mathrm{dt}\,,$$

ce qui, avec (6.3.25), donne

$$\lim_{h\to 0}\int_0^s \left(j(f(t),u_h(t),\dot u_h(t))\,\mathrm{dt} - \int_0^s j(f(t),u(t),\dot u_h(t)) \right)\mathrm{dt} = 0\,. \tag{6.3.28}$$

Alors, comme l'application $v \longrightarrow \int_0^s j(f(t),u(t),v(t)\,\mathrm{ds}$ est convexe et semi-continue inférieurement dans $L^2(0,T:V)$ (voir aussi pag. 75), de (6.3.28) et (6.3.26) il résulte que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0}\int_0^s \left(j(f(t),u_h(t),\dot u_h(t)) - j(f(t),u(t),\dot u(t))\right)\,\mathrm{dt}\\
&\geq \lim_{h\to 0}\int_0^s \left(j(f(t),u_h(t),\dot u_h(t)) - j(f(t),u(t),\dot u_h(t))\right)\,\mathrm{dt}\\
&+\liminf_{h\to 0}\int_0^s \left(j(f(t),u(t),\dot u_h(t)) - j(f(t),u(t),\dot u(t))\right)\,\mathrm{dt} \geq 0\,,
\end{aligned}$$

donc, pour tout $s\in[\,0,T\,]$, on a

$$\liminf_{h\to 0}\int_0^s j(f(t),u_h(t),\dot u_h(t))\,\mathrm{dt} \geq \int_0^s j(f(t),u(t),\dot u(t))\,\mathrm{dt}\,. \tag{6.3.29}$$

À la suite nous prouvons que u satisfait (6.3.1). Pour passer à la limite dans $(\mathbf{P2})_\mathbf{h}$, nous choisissons convenable v_h dans V_h. Soit $\pi_h : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;V_h)$ l'opérateur de projection défini par $a(\pi_h v, w_h) = a(v,w_h)\ \forall v \in L^2(0,T;V)\,,\ \forall w_h\in V_h$. Evidemment l'opérateur π_h est bien défini et on a $\pi_h v(t)\to v(t)$ dans V p.p. sur $[\,0,T\,]$, ce qui, avec (3.3.11) et (3.3.14), implique

$$\lim_{h\to 0}\int_0^s j(f(t),u_h(t),\pi_h v(t))\,\mathrm{dt} = \int_0^s j(f(t),u(t),v(t))\,\mathrm{dt}\quad \forall\, s\in[\,0,T\,]\,,\quad \forall v\in L^2(0,T;V)$$

et

$$\lim_{h\to 0}\int_0^s b(f(t),u_h(t),\pi_h v(t))\,\mathrm{dt} = \int_0^s b(f(t),u(t),v(t))\,\mathrm{dt}\quad \forall\, s\in[\,0,T\,]\,,\quad \forall v\in L^2(0,T;V)\,.$$

Puisque $b(f(t), u_h(t), \dot{u}_h(t)) = 0$ p.p. sur $[\,0, T\,]$, en intégrant $(\mathbf{P2})_h$ sur $[\,0, s\,]$ pour $v_h = \pi_h \dot{u}$ et passant à la limite, nous obtenons que u satisfait la première inéquation de (6.3.1).

Maintenant nous prouvons la convergence forte (6.3.23). En utilisant le même argument que dans la démonstration de Théorème 3.3.1, prenant $v = 0$, $v = 2\dot{u}$ dans (6.3.1), $v_h = 0$, $v_h = 2\dot{u}_h(t)$ in $(\mathbf{P2})_h$ et utilisant (6.3.27), (6.3.29), nous avons pour tout $s \in [\,0, T\,]$

$$\liminf_{h\to 0} \int_0^s a(u_h(t), \dot{u}_h(t))\,\mathrm{dt} = \int_0^s a(u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt}, \tag{6.3.30}$$

$$\liminf_{h\to 0} \int_0^s j(f(t), u_h(t), \dot{u}_h(t))\,\mathrm{dt} = \int_0^s j(f(t), u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt}. \tag{6.3.31}$$

et, prenant $v_h = \pi_h \dot{u}(t)$ dans $(\mathbf{P2})_h$, il vient

$$\limsup_{h\to 0} \int_0^s a(u_h(t), \dot{u}_h(t))\,\mathrm{dt} \le \int_0^s a(u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt} \quad \forall\, s \in [\,0, T\,]. \tag{6.3.32}$$

De (6.3.30) and (6.3.32) on obtient

$$\lim_{h\to 0} \int_0^s a(u_h(t), \dot{u}_h(t))\,\mathrm{dt} = \int_0^s a(u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{dt},$$

ou

$$\lim_{h\to 0} (a(u_h(s), u_h(s)) - a(u_h(0), u_h(0))) = a(u(s), u(s)) - a(u_0, u_0)\,.$$

Comme $u_h(0) = u_{0h}$ et $u_{0h} \longrightarrow u_0$ dans V fort, on en déduit

$$\lim_{h\to 0} a(u_h(s), u_h(s)) = a(u(s), u(s)) \quad \forall s \in [0, T].$$

ce qui entraîne, grâce à l'élipticité de a, la convergence fort (6.3.23).

Enfin nous prouvons que u satisfait la deuxième inéquation de (6.3.1). De $(\mathbf{P2})_h$, en raisonnant comme dans la démonstration du Théorème 3.3.1, on déduit que, pour tout $t \in [\,0, T\,]$, on a

$$a(u_h(t), v_h - u_h(t)) + j(f(t), u_h(t), v_h - u_h(t)) \ge 0 \quad \forall\, v_h \in K_h. \tag{6.3.33}$$

Soit $v \in K$. Alors, de (6.3.3) il existe $r_h v \in K_h$ tel que $r_h v \to v$ in V. En passant à la limite dans (6.3.33) pour $v = r_h v$ et utilisant (6.3.23) on obtient que u satisfait

$$a(u(t), v - u(t)) + j(f(t), u(t), v - u(t)) \geq 0 \quad \forall v \in K$$

ce qui, grâce à l'hypothèse (3.3.22), équivaut à $(6.3.1)_2$. De (6.3.6) il résulte que $u \in K(f)$ et le théorème est prouvé. ■

Utilisant Lemme 6.3.1 et Théorème 6.3.1, nous obtenons le suivant résultat principal d'approximation.

Théorème 6.3.2 *On suppose que les hypothèses du Théorème 6.3.1 ont lieu. Alors il existe une sous-suite de* $(u_{hn})_{hn}$ *telle que*

$$u_{hn}(t) \to u(t) \quad \textit{dans} \quad V \textit{ fort} \quad \forall\, t \in [\,0, T\,], \tag{6.3.34}$$

$$\dot{u}_{hn} \rightharpoonup \dot{u} \quad \textit{dans} \quad L^2(0, T; V) \textit{ faible}, \tag{6.3.35}$$

où $u \in W^{1,2}(0, T; V)$ *est une solution de* (**P2**).

Partie III

Le problème de Signorini avec frottement de Coulomb non local

Chapitre 7

Le problème statique

7.1 Énoncé du problème statique

On s'intéresse ici d'un problème statique de contact unilatéral avec frottement non local en élasticité linéaire.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $p = 2, 3$, un ouvert, supposé borné et de frontière Γ assez régulière, occupé par un corps élastique dans son forme initiale, non-déformé. On décompose la frontière Γ en trois parties Γ_0 , Γ_1 , Γ_2 ouvertes et disjointes telles que $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$. Le corps est soumis à une densité de forces volumique $\boldsymbol{f}$ donnée dans Ω et à une densité de forces surfacique $\boldsymbol{t}$ donnée sur Γ_1. On impose les déplacements sur Γ_0. Par des raisons des simplicités, nous pouvons supposer que le corps est fixé sur Γ_0 et, par conséquent, le champ des déplacements s'annule ici (en fait, par une translation). Sur Γ_2 le corps est en contact unilatéral contre un support rigide.

On note par $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$, le champ vectoriel des déplacements, le champ tensoriel des déformations, respectivement, le champ tensoriel des contraintes. Nous nous plaçons dans l'hypothèse des petits déformations en élasticité linéaire:

$$\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \quad 1 \leq i, j \leq p$$

donc la loi de comportement exprime une relation linéaire, la loi de Hooke généralisée, entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations linéarisé

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\epsilon_{kh}(\boldsymbol{u}) \, ,$$

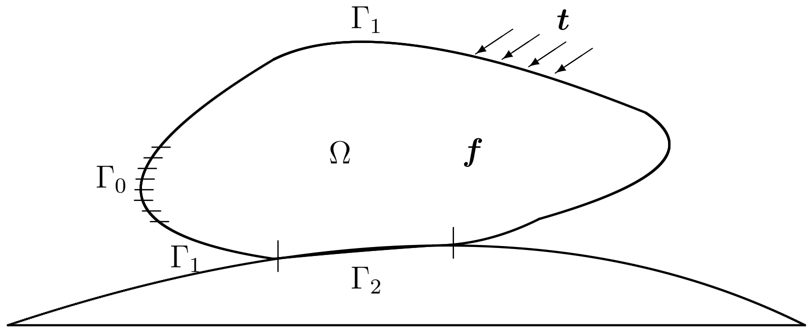

Figure 7.1: Le contact avec un support rigide

avec la convention usuelle de sommation et $1 \leq i, j, k, h \leq p$. On suppose que les coefficients d'élasticité a_{ijkh}, indépendants du tensor des déformations, vérifient les conditions usuelles de symétrie

$$a_{ijkh} = a_{jihk} = a_{khij} \,, \tag{7.1.1}$$

et d'ellipticité

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } a_{ijkh}\xi_{ij}\xi_{kh} \geq \alpha|\boldsymbol{\xi}|^2 \,,\ \forall \boldsymbol{\xi} = (\xi_{ij}) \in \mathbb{R}^{p^2} \,. \tag{7.1.2}$$

On utilise une décomposition classique en composantes normales et tangentielles du vecteur déplacement et du vecteur contrainte sur Γ:

$$\begin{aligned} u_\nu &= u_i\nu_i \,, & \boldsymbol{u}_\tau &= \boldsymbol{u} - u_\nu \nu \\ \sigma_\nu &= \sigma_{ij}\nu_i\nu_j \,, & \sigma_{\tau_i} &= \sigma_{ij}\nu_j - \sigma_\nu \nu_i \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale unitaire extérieure à Γ.

Sur Γ_2 le contact unilatéral est décrit par la loi de Signorini [108]

$$u_\nu \leq 0 \,, \quad \sigma_\nu \leq 0 \,, \quad u_\nu \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \,. \tag{7.1.3}$$

On y voit que, dans le contact unilatéral, la condition de non-pénétration ($u_\nu \leq 0$), de la zone de contact sur le support, est mis en compte. Cette loi exprime aussi qu'il y a deux situations possibles: sans contact où $u_\nu < 0$ et $\sigma_\nu = 0$ et avec contact où $u_\nu = 0$ et $\sigma_\nu \leq 0$. Mais ces conditions ne sont pas régulières parceque σ_ν est une application multivalente de u_ν. En fait, nous avons

$$\sigma_\nu(u_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_\nu < 0 \,, \\ \in (-\infty, 0] & \text{si } u_\nu = 0 \,. \end{cases}$$

On peut régulariser ces conditions de Signorini en utilisant le modèle de compliance normale de [92], [80] qui proposent que σ_ν est une fonction nonlinéaire de u_ν. En fait, la condition de non pénétration, $u_\nu \leq 0$, est relaxée autorisant une petite pénétration du corps à l'intérieur du support. Quoique ce modèle a l'avantage d'être plus simple de point de vue mathèmatique et d'avoir un raison mécanique, il ne convient pas dans les problèmes où la pénétration dans l'obstacle est petite: dans ce cas σ_ν est une fonction très dense de u_ν, c'est-à-dire σ_ν devient presque une apllication multivalente de u_ν (voir [100]).

On suppose que le contact sur Γ_2 est avec frottement qui est modelé par la loi de Coulomb. Esquisssé initialement par Amontons [5], cette loi, devenue célèbre, a été présenté, devant l'Académie des Sciences de Paris en 1785, par l'ingenieur Coulomb [39] sous la forme suivante: le glissement rélatif entre deux corps en contact à la longue d'une surface plane, peut apparaître quand le module de la force paralélle avec le plan atteint une valeur critique qui est proportionnelle à l'amplitude de la force normale qui agit entre les deux corps. La constante de proportionalité est appellé coefficient de frottement. Il faut mentioner qu'au moment quand Coulomb a formulé sa loi, le concept de contrainte et les équations générales de l'élasticité linéaire n'avaient pas aparaître. La loi avait comme bût de décrire les effets de frottement entre deux corps rigides et le glissement brut d'un corps rélatif à l'autre. Les développements ultérieures de cette loi sont écrites en terme de vitesse de déplacement : "la force de frottement nécessaire à initier le glissement et à le maintenir est proportionnelle à l'amplitude de la force normale de contact et la vitesse de déplacement tangentielle est colinéaire avec la force tangentielle". Mais le cas statique, que nous considérons dans ce chapitre, est très convenable pour les problèmes qui, même si leur solution ne dépend pas de l'évolution antérieure du systèm, dècrivent des chargements monotones. En outre, le cas statique est très utile pour l'étude des problèmes en vitesse, grâce aux formulations incrémentales (comme on va voir dans la Section 8.1). Ainsi la loi de Coulomb est donnée par les conditions:

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq \mu|\sigma_\nu| \ \text{ et } \ \begin{cases} |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mu|\sigma_\nu| \ \Rightarrow \ \boldsymbol{u}_\tau = 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mu|\sigma_\nu| \ \Rightarrow \ \boldsymbol{u}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau \end{cases} \quad \text{on } \Gamma_2\,, \tag{7.1.4}$$

où μ est le coefficient de frottement et la notation $|\cdot|$ désigne la valeur absolue si elle s'applique à un scalaire ou, la norme euclidian, si elle s'applique à un élément de $\mathbb{R}^p$.

Évidemment, cette loi implique que $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ est une application multivalente de $\boldsymbol{u}_\tau$:

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}_\tau) = \begin{cases} -\mu\sigma_\nu & \text{si } \boldsymbol{u}_\tau < 0\,, \\ \in (\mu\sigma_\nu\,,\, -\mu\sigma_\nu) & \text{si } \boldsymbol{u}_\tau = 0\,, \\ \mu\sigma_\nu & \text{si } \boldsymbol{u}_\tau > 0\,. \end{cases}$$

Aussi comme dans le cas de contact unilatéral de Signorini, on peut régulariser cette loi par une loi de compliance normale (voir [66], [67], [6]).

Finalement, la formulation classique de ce problème statique de contact unilatéral avec frottement est donnée par l'équation d'équilibre, l'équation constitutive (élasticité), la relation cinématique (dans l'hypothèse des petits déformations), les conditions sur Γ_0 et Γ_1, les conditions unilatérales de Signorini et la loi de frottement de Coulomb :

Trouver un champ des déplacement $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} -\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega\,, \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\epsilon}\,, \qquad \boldsymbol{\epsilon} = \dfrac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T) \quad \text{dans } \Omega\,, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \Gamma_0\,, \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu} = \mathbf{t} \quad \text{sur } \Gamma_1\,, \\ u_\nu \le 0\,, \quad \sigma_\nu \le 0\,, \quad u_\nu\sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2\,, \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \le \mu|\sigma_\nu| \ \text{ et } \begin{cases} |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mu|\sigma_\nu| \ \Rightarrow\ \boldsymbol{u}_\tau = 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mu|\sigma_\nu| \ \Rightarrow\ \exists\lambda \ge 0\,,\ \boldsymbol{u}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_2\,. \end{array}\right\} \tag{7.1.5}$$

Mais l'application ponctuelle de la loi de Coulomb produit grandes difficultés mathématiques. En effet, la formulation variationnelle de ce problème, comme on va voir plus tard, est une inéquation quasi-variationnelle qui contient le terme $\displaystyle\int_{\Gamma_2} \mu\,|\sigma_\nu(\boldsymbol{u})||\boldsymbol{v}_\tau|\,\mathrm{ds}$. Donc, si $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_{ad} = \{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^3\,;\, \boldsymbol{v} = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_0\}$ alors $\sigma_\nu(\boldsymbol{u})$ n'est pas défini sur Γ_2. De plus, même si $\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega))^3$ vérifie l'équation $(7.1.5)_1$ pour $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^p$ alors $|\sigma_\nu(\boldsymbol{u})|$ n'a pas un sens mathématique. En effet, il est connu (voir, par exemple [46]) que

$$\sigma_\nu(\boldsymbol{u}) \in H^{-1/2}(\Gamma)\,, \quad \forall\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1_{div}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^p\,;\ \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in (L^2(\Omega))^p\}$$

$\sigma_{ij}\nu_j$ étant défini par la formule de Green généralisé

$$\begin{gathered} \langle\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j, \gamma(v_i)\rangle_{1/2,\Gamma} = \int_\Omega \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx} + \int_\Omega \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{u})v_i\,\mathrm{dx} \\ \forall\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1_{div}(\Omega) \quad \forall\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^p\,, \end{gathered} \tag{7.1.6}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1/2,\Gamma}$ désigne le produit de dualité entre les éspaces $(H^{-1/2}(\Gamma))^p$ et $(H^{1/2}(\Gamma))^p$, $(H^{-1/2}(\Gamma))^p$ étant le dual de $(H^{1/2}(\Gamma))^p$.

Évidemment, pour $\boldsymbol{u}$ régulière, on a la formule de Green

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j\, v_i\,\mathrm{ds} = \int\limits_\Omega \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx} + \int\limits_\Omega \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{u})v_i\,\mathrm{dx}\\ &\forall \boldsymbol{u} \text{ régulière }, \forall \boldsymbol{v}\in (H^1(\Omega))^p\,.\end{aligned} \tag{7.1.7}$$

En conséquence, si $\boldsymbol{u}\in (H^1(\Omega))^3$ vérifie l'équation $(7.1.5)_1$ pour $\boldsymbol{f}\in (L^2(\Omega))^p$ alors $-\sigma_{ij,j} = f_i \in L^2(\Omega)$ d'où $\sigma_\nu(\boldsymbol{v})\in H^{-1/2}(\Gamma)$ et $|\sigma_\nu(\boldsymbol{u})|$ n'a pas un sens mathématique. On peut surmonter cette difficulté en utilisant une variante non locale de la loi de Coulomb, proposé par Duvaut [45]. Cette loi stipule que la motion dans un point de contact entre deux corps élastiques, se produit lorsque le modul de la contrainte dans ce point atteint une valeur proportionnelle à une moyenne de la contrainte normale dans un voisinage de ce point. Le caractère du voisinage locale effective et la manière dont les contraintes voisines contribuent à la condition de glissement, dépendent de la microstructure des matériaux en contact. Le caractère non local de la loi est donné de la régularisation de la contrainte normale σ_n qui peut être défini (voir [45], [93], [40], [94]) en tout point comme une convolution autour de ce point, donc les interactions locales entre aspérités sont mise en compte :

$$\sigma^*_\nu(\boldsymbol{u})(x) = \int_{\Gamma_2} \omega_\rho(|x-y|)(-\sigma_\nu(y))\,\mathrm{dy}$$

où

$$\omega_\rho(x) = \begin{cases} Ce^{\dfrac{\rho^2}{x^2-\rho^2}} & \text{si } 0\le |x|\le \rho\,,\\ 0 & \text{si } |x|>\rho\,,\end{cases}$$

avec C une constante telle que $\displaystyle\int_{-e}^{e} \omega_\rho(x)\,\mathrm{dx} = 1.$

Ainsi, à la suite, on va considérer le problème suivant:

Problème ($\boldsymbol{\mathcal{P}}_s$) : Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ tel que

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega\,, \\
\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\epsilon}\,, \qquad \boldsymbol{\epsilon} = \dfrac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) \quad \text{dans } \Omega\,, \\
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \Gamma_0\,, \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t} \quad \text{sur } \Gamma_1\,, \\
u_\nu \leq 0\,, \quad \sigma_\nu \leq 0\,, \quad u_\nu \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2\,, \\
|\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq \mu |\mathcal{R}\sigma_\nu| \;\text{ et } \left\{\begin{array}{l} |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mu |\mathcal{R}\sigma_\nu| \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u}_\tau = 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mu |\mathcal{R}\sigma_\nu| \;\Rightarrow\; \exists \lambda \geq 0\,,\; \boldsymbol{u}_\tau = -\lambda \boldsymbol{\sigma}_\tau \end{array}\right. \quad \text{sur } \Gamma_2\,.
\end{array}\right\} \tag{7.1.8}$$

où $\mathcal{R}\sigma_\nu$ reprèsente une régularisation de σ_ν qui sera précisée ultérieurement.

7.2 Formulation variationnelle en déplacements

À la suite de ce livre on va supposer que les coefficients d'élasticité a_{ijkh} vérifient les conditions usuelles de symétrie (7.1.1) et d'ellipticité (7.1.2).

Pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème, on fait les hypothèses de régularité:

$$\left.\begin{array}{l}
\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^p\,,\; \boldsymbol{t} \in (L^2(\Gamma_1))^p, \\
a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega),\; i, j, k, l = 1, ..., p, \\
\mu \in L^\infty(\Gamma_2),\; \mu \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_2 \\
\mathcal{R} : H^{-1/2}(\Gamma_2) \to L^2(\Gamma_2) \text{ est un opérateur linéaire et compact}
\end{array}\right\} \tag{7.2.1}$$

où $H^{-1/2}(\Gamma_2)$ est le dual de l'espace $H^{1/2}(\Gamma_2) = \{v \in H^{1/2}(\Gamma)\,;\; v = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma \backslash \Gamma_2\}$.

On introduit le sous-espace linéaire

$$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in [H^1(\Omega)]^p\,;\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_0\} \tag{7.2.2}$$

de l'espace de Hilbert $(H^1(\Omega))^p$ et l'ensemble des champs des déplacements statiquement admissibles définie par

$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,;\, v_\nu \leq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_2\}\,. \tag{7.2.3}$$

On utilise aussi les notations :

$$\left.\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx} \quad \forall \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},\\
&(\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\\
&j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_2} \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u})|\,|\boldsymbol{v}_t|\,\mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1_{div}(\Omega) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}
\end{aligned}\right\} \tag{7.2.4}$$

où $P_{\boldsymbol{f}} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{C_f}$ est l'opérateur de projection sur l'ensemble convexe et fermé

$$\boldsymbol{C_f} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,;\, a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\varphi}) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{D}(\Omega))^p\}\,.$$

La formulation variationnelle, en termes de déplacements, est la suivante:

Problème (P$_s$) : Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ tel que

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}\\
&a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) + j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \geq (\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{7.2.5}$$

Observation 7.2.1 *La condition de non-pénétration se traduit par l'appartenance des déplacements au cône $\boldsymbol{K}$ de l'éspace Hilbert $\boldsymbol{V}$.*

Observation 7.2.2 *Si $\boldsymbol{u}$ est une solution du problème* **(P$_s$)** *alors $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C_f}$, donc $P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. De plus:*

$$j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) = j(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{C_f}\,, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$$

où

$$j(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_2} \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{w})|\,|\boldsymbol{v}_t|\,\mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{C_f}\,, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,.$$

Observation 7.2.3 *Pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C_f}$ nous avons*

$$\|\sigma_\nu(\boldsymbol{v})\|_{-1/2,\Gamma} \leq C(\|\boldsymbol{v}\|_1^2 + \|\boldsymbol{f}\|_0^2)^{1/2} \tag{7.2.6}$$

où $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma}$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_0$ désignent les normes dans $H^{-1/2}(\Gamma)$, $(H^1(\Omega))^p$ et, respectivement, dans $(L^2(\Omega))^p$.

Observation 7.2.4 *Pour tout* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ *on a*

$$\|\sigma_\nu(P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}) - \sigma_\nu(P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{v})\|_{-1/2,\Gamma} \leq C\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_1 . \qquad (7.2.7)$$

En effet, si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ alors $P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u} - P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C_0} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \, ; \, a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\varphi}) = 0 \, , \forall \boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{D}(\Omega))^p\}$. De la relation (7.2.6), en utilisant la linárité de σ_ν et la non-expansivité de l'opérateur de projection, on obtient

$$\|\sigma_\nu(P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}) - \sigma_\nu(P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{v})\|_{-1/2,\Gamma} \leq C\|P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u} - P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{v}\|_1 \leq C\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_1.$$

Théorème 7.2.1 *Le problème* $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_s)$ *équivaut au problème* $(\mathbf{P}_s)$ *dans le sens suivant :*

i) Si $\boldsymbol{u}$ *est une fonction régulière qui vérifie* $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_s)$ *alors* $\boldsymbol{u}$ *est solution de l'inéquation variationnelle* $(\mathbf{P}_s)$ *.*

ii) Si $\boldsymbol{u}$ *est une solution de l'inéquation variationnelle* $(\mathbf{P}_s)$ *alors* $\boldsymbol{u}$ *satisfait* $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_s)$ *en un sens généralisé.*

Démonstration.

i) Comme d'habitude dans la première partie des formulations variationnelles, on suppose toutes les fonctions régulières de façon que toutes les intégrations par parties soient légitimes. De $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_1$ on obtient immédiatement que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C_f}$ donc $P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ et

$$j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_2} \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{u})| \, |\boldsymbol{v}_t| \, \mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} .$$

Multipliant l'équation $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_1$ par $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ avec $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}$ et intégrant par parties on déduit la formule de Green

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) - \int_\Gamma \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j(v_i - u_i) \, \mathrm{ds} . \qquad (7.2.8)$$

Mais, en utilisant les conditions $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_3$-$(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_5$ et en tenant compte de l'apartenance de $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ à $\boldsymbol{K}$, il vient

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j(v_i - u_i) \, \mathrm{ds} &= \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j(v_i - u_i) \, \mathrm{ds} + \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j(v_i - u_i) \, \mathrm{ds} \\ &+ \int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau) + \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu)) \, \mathrm{ds} = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \, \mathrm{ds} \\ &+ \int_{\Gamma_2} (\sigma_\nu v_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau)) \, \mathrm{ds} \geq \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \, \mathrm{ds} + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau) \, \mathrm{ds} . \end{aligned} \qquad (7.2.9)$$

En combinant les relations (7.2.8) et(7.2.9), on obtient

$$\begin{aligned} & a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) + j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \\ & \geq \int_{\Gamma_2} [\mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{u})|(|\boldsymbol{v}_\tau| - |\boldsymbol{u}_\tau|) + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau)] \, \mathrm{ds}\,. \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

On va montrer maintenant que les conditions $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_6$ entraîne

$$E = \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{u})|(|\boldsymbol{v}_\tau| - |\boldsymbol{u}_\tau|) + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \text{ régulière.} \tag{7.2.11}$$

En effet, si $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{u})|$ alors $\boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{0}$ et par conséquant

$$E = \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{u})| \, |\boldsymbol{v}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \boldsymbol{v}_\tau \geq (\mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{u})| - |\boldsymbol{\sigma}_\tau|)|\boldsymbol{v}_\tau| \geq 0$$

.

Si $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{u})|$ alors $\boldsymbol{u}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau$, d'où

$$\begin{aligned} E &= \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{u})| \, |\boldsymbol{v}_\tau| - \lambda\mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{u})| \, |\boldsymbol{\sigma}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \boldsymbol{v}_\tau + \lambda|\boldsymbol{\sigma}_\tau|^2 \\ &= |\boldsymbol{\sigma}_\tau| \, |\boldsymbol{v}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \boldsymbol{v}_\tau \geq 0\,. \end{aligned}$$

D'après (7.2.10) et (7.2.11) on conclut

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) + j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,.$$

ii) Si $\boldsymbol{u}$ est solution du problème variationnelle $(\mathbf{P}_s)$ alors, en choisissant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{\varphi}$ avec $\boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{D}(\Omega))^p$, on obtient

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi})\,, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{D}(\Omega))^p.$$

D'autre part, de la formule de Green (7.1.7) on a

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}) = -\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{dx}\,,$$

ce qui donne $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_1$ en un sens distributionnelle.

Prenant maintenent le produit scalaire de $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_1$ avec $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ pour $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}$, et intégrant par parties, il vient

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) = \int_\Gamma (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \, \mathrm{ds}$$

ce qui, grâce à l'inéquation variationnelle $(\mathbf{P}_s)$, donne

$$j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})-\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,\mathrm{ds}+\int_{\Gamma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,\mathrm{ds}\geq 0\quad\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{K}\,,\qquad(7.2.12)$$

où nous avons tenu compte d'observation 7.2.2, donc $j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, $\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$.

En choisissant $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{\varphi}$ avec $\boldsymbol{\varphi}\in(H^{1/2}(\Gamma))^p$ et supp $\boldsymbol{\varphi}\subset\Gamma_1$, on déduit

$$\int_{\Gamma_1}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu}-\mathbf{t})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{ds}=0$$

d'où $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_4$. Alors, revenant à l'inéquation (7.2.12), on a

$$j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})+\int_{\Gamma_2}[\sigma_\nu(v_\nu-u_\nu)+\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau)]\,\mathrm{ds}\geq 0\quad\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{K}\,.\qquad(7.2.13)$$

Choisissant $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\varphi}_\tau+u_\nu\boldsymbol{\nu}$ où $\boldsymbol{\varphi}\in(H^{1/2}(\Gamma))^p$ avec supp $\boldsymbol{\varphi}\subset\Gamma_2$ et en tenant comptes que $v_\nu=u_\nu$, $\boldsymbol{v}_\tau=\boldsymbol{\varphi}_\tau$ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau\boldsymbol{\varphi}_\tau=\boldsymbol{\sigma}_\tau\boldsymbol{\varphi}$, on déduit

$$\int_{\Gamma_2}[\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|(|\boldsymbol{\varphi}_\tau|-|\boldsymbol{u}_\tau|)+\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot\boldsymbol{\varphi}]\,\mathrm{ds}\geq\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot\boldsymbol{u}_\tau\,\mathrm{ds}$$

ou, en utilisant que $|\boldsymbol{\varphi}|\geq|\boldsymbol{\varphi}_\tau|$, on a

$$\int_{\Gamma_2}(\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|\,|\boldsymbol{\varphi}|+\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{ds}-\int_{\Gamma_2}(\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|\,|\boldsymbol{u}_\tau|+\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot\boldsymbol{u}_\tau)\,\mathrm{ds}\geq 0\quad\forall\boldsymbol{\varphi}\in(H^1(\Gamma))^p\text{ avec supp }\boldsymbol{\varphi}\subset\Gamma_2\,.$$

En prenant $\boldsymbol{\varphi}=\lambda\boldsymbol{\varphi}$ avec $\lambda>0$ nous obtenons

$$\lambda T_1-T_2\geq 0\quad\forall\lambda>0$$

où

$$T_1=\int_{\Gamma_2}(\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|\,|\boldsymbol{\varphi}|+\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{ds}\,,$$
$$T_2=\int_{\Gamma_2}(\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|\,|\boldsymbol{u}_\tau|+\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot\boldsymbol{u}_\tau)\,\mathrm{ds}\,.$$

Par conséquent on a :

$$T_1\geq 0\,,\quad T_2\leq 0\,.$$

Ça entraîne, en prenant $\boldsymbol{\varphi} = \pm\boldsymbol{\varphi}$,

$$\int_{\Gamma_2} |\boldsymbol{\sigma}_\tau|\,|\boldsymbol{\varphi}|\,\mathrm{ds} \leq \int_{\Gamma_2} (\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|\,|\boldsymbol{\varphi}|\,\mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in (H^{1/2}(\Gamma))^p \text{ avec supp } \boldsymbol{\varphi} \subset \Gamma_2\,,$$

soit $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| \leq \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|$. Comme $T_2 \leq 0$, il en suit que $T_2 = 0$ donc

$$\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|\,|\boldsymbol{u}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \boldsymbol{u}_\tau = 0 \quad \text{ p.p. sur } \Gamma_2\,, \tag{7.2.14}$$

ce qui implique $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_6$. En effet, si $\boldsymbol{\sigma}_\tau < \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|$ alors, en supposant $\boldsymbol{u}_\tau \neq 0$, de (7.2.14) on obtient $\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \boldsymbol{u}_\tau = -\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|\,|\boldsymbol{u}_\tau| < -|\boldsymbol{\sigma}_\tau|\,|\boldsymbol{u}_\tau|$ d'où, nécessairement, il faut avoir $\boldsymbol{u}_\tau = \mathbf{0}$. Si $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu)|$ alors, de (7.2.14), il vient $\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \boldsymbol{u}_\tau = -|\boldsymbol{\sigma}_\tau|\,|\boldsymbol{u}_\tau|$ donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\boldsymbol{u}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau$.

Pour obtenir les conditions de Signorini $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_5$, on retourne à (7.2.13) en prenant $\boldsymbol{v} = \varphi_\nu\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{u}_\tau$ où $\boldsymbol{\varphi} \in (H^1(\Gamma))^p$ avec supp $\boldsymbol{\varphi} \subset \Gamma_2$ et $\varphi_\nu \leq 0$ p.p. sur Γ_2. On obtient

$$\int_{\Gamma_2} \sigma_\nu\varphi_\nu\,\mathrm{ds} - \int_{\Gamma_2} \sigma_\nu u_\nu\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in (H^1(\Gamma))^p \text{ avec supp } \boldsymbol{\varphi} \subset \Gamma_2 \text{ et } \varphi_\nu \leq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_2\,,$$

ce qui donne, en prenant, comme nous avons fait dans le cas des conditions $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_6$, $\boldsymbol{\varphi} = \lambda\boldsymbol{\varphi}$ avec $\lambda > 0$, les conditions $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})_5$. Certainement, la condition $u_\nu \leq 0$ est satisfaite parceque $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$.

7.3 Un résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section on va montrer l'existence et, dans le cas des coefficients de frottements assez petits, l'unicité de la solution pour le problème statique de contact unilatéral avec frottement de Coulomb non local $(\mathbf{P}_s)$.

Le commencement de la théorie générale des problèmes de contact peut être atribué à Duvaut et Lions [46] qui ont donné les formulations variationnelles des problèmes de contact et ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution pour le problème de contact bilatéral (le contact est maintenu quelle que soit la direction des efforts) avec frottement donné (cas nommé, avec frottement de Tresca). Le premier résultat d'existence pour le problème statique de contact unilatéral avec frottement de Coulomb local ont été obtenus par Necas, Jarusek et Haslinger [88] et puis étendu par Jarusek [61]. En ce qui concerne le problème statique où le contact est décrit par une loi de compliance normale on rappelle les résultats de Oden et Martins [92], Klarbring, Mikelič et Shillor [66], [67] et pour le problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb non local (cf. [45]) les résultats de Demkowicz et Oden [40], Oden et Pires [94] et Cocu [35].

Nous allons montrer dans un premier temps le suivant résultat d'existence.

Théorème 7.3.1 *On se place dans les hypothèses (7.2.1). On suppose que l'une des deux conditions est satisfaites :*

$$mes\,(\Gamma_0) > 0\,, \tag{7.3.1}$$

$$\Gamma_0 = \emptyset \text{ et } \boldsymbol{\mathcal{R}} \cap \boldsymbol{K} = \{\mathbf{0}\}\,, \tag{7.3.2}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{R}} = \{\boldsymbol{v}\,;\, \boldsymbol{v}(x) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \boldsymbol{x} \ \text{ avec } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\}$ *est l'ensemble des déplacements rigides.*

Alors l'ensemble des solutions de l'inéquation quasi-variationnelle $(\mathbf{P}_s)$ *est non-vide et faiblement compact dans* $\boldsymbol{K}$*.*

Démonstration. Nous montrerons que les hypothéses (3.21.2)-(3.21.5) et (3.21.7) de Théorème 3.21.1 sont satisfaites. D'abord on note que l'opérateur A associé à la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ par

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,,$$

est linéaire et continu. On va montrer que, de l'hypothèse (7.3.1) ou (7.3.2), on déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \geq C\|\boldsymbol{v}\|_1^2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,, \tag{7.3.3}$$

soit l'opérateur A est fortement monotone.

Si mes $(\Gamma_0) > 0$ alors $\boldsymbol{\mathcal{R}} \cap \boldsymbol{V} = \{\mathbf{0}\}$ d'où, en tenant compte de la caractérisation :

$$a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0 \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$$

et de la symétrie (7.1.1), il suit que $\sqrt{a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$ est une norme sur $\boldsymbol{V}$. De plus, $\sqrt{a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$ est une norme équivalente à la norme $\|\boldsymbol{v}\|_1$. En effet, raisonnant par l'absurde et utilisant l'inégalité de Korn (voir [52]) :

$$\int_\Omega \epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx} + \int_\Omega v_i v_i\,\mathrm{dx} \geq C\|\boldsymbol{v}\|_1^2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^3 \tag{7.3.4}$$

on montre (voir aussi [46], pag. 116) que:

$$\int_\Omega \epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{dx} \geq C\|\boldsymbol{v}\|_0^2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,.$$

Alors, de la condition d'ellipticité (7.1.2), il résulte qu'il existe une constante $C = C(\alpha,\, \Omega,\, \Gamma_0) > 0$ telle que

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq C\|\boldsymbol{v}\|_1^2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,,$$

où α est la constante d'ellipticité de la relation (7.1.2).

Si $\Gamma_0 = \emptyset$ et $\boldsymbol{\mathcal{R}} \cap \boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{0}\}$, en décomposant $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\mathcal{R}} \oplus \boldsymbol{\mathcal{R}}^\perp$ où $\boldsymbol{\mathcal{R}}^\perp$ est le complément ortohonal de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ et tenant compte que l'inégalité de Korn reste valable dans $\boldsymbol{\mathcal{R}}^\perp$, i.e.

$$a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}) \geq C\|\boldsymbol{w}\|_1^2 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}^\perp\,,$$

alors il résulte que

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq C\|\boldsymbol{v}\|_1^2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,.$$

En conclusion, la condition (7.3.1) ou (7.3.2) assure que l'opérateur A associé à la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ vérifie (7.3.3). En conséquence, en utilisant la positivité de la fonction j, il résulte, en prenant $v_0 = 0$, que la condition (3.21.7) est satisfaite.

Il est facile à vérifier que, pour tout $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$, l'application $\boldsymbol{v} \longrightarrow j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ est convexe, propre et continu.

Maintenant on va montrer que, pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, les application $\boldsymbol{u} \longrightarrow j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ et $\boldsymbol{u} \longrightarrow j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ sont faiblement continues. Soient $\{\boldsymbol{u}_k\}_k \subset \boldsymbol{K}$ une suite qui converge faible vers un élément $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$. Considérons un élément $\boldsymbol{u}^* \in \boldsymbol{C_f}$ arbitraire. Il est immédiat que $\boldsymbol{C_f} = \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{C_0}$. Alors on

$$P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^* + P_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^*) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,, \tag{7.3.5}$$

où $P_{\boldsymbol{0}} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{C_0}$ est l'opérateur de projection sur le sous-espace linéaire $\boldsymbol{C_0}$ de $\boldsymbol{V}$. En effet, pour $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, notant $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u}^* + P_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^*)$ on a $\bar{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{C_f}$ et

$$(\bar{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} - \bar{\boldsymbol{v}}) = (P_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^*) - (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^*), \mathbf{z} - P_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^*)) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K_f}$$

où $\mathbf{z} \in \boldsymbol{C_0}$ tel que $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^* + \mathbf{z}$. La relation (7.3.5) découle de l'unicité de la projection.

Cette relation implique, $P_{\mathbf{0}}$ étant linéaire et continue, $P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}_k \rightharpoonup P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}$ dans $\boldsymbol{V}$ faible. De plus, σ_ν est faiblement continu, l'opérateur de traces de $\boldsymbol{V}$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ est compact et aussi $\mathcal{R}$. Il en résulte que les applications $\boldsymbol{u} \longrightarrow j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ et $\boldsymbol{u} \longrightarrow j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ sont faiblement continues. Donc on peut appliquer Théorème 3.21.1 pour achever la démostration. ■

Observation 7.3.1 *L'existence d'une solution de* $(\mathbf{P}_s)$ *dans l'hypothèse (7.3.1) ou (7.3.2) ou* $\Gamma_0 = \emptyset$ *et* $(F,\boldsymbol{v}) < 0\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{R}} \cap \boldsymbol{K}\backslash\{\mathbf{0}\}$ *a été obtenu dans [35] en utilisant l'inégalité de mini-max de Ky-Fan (voir [86], [117], [91]).*

L'unicité de la solution du problème $(\mathbf{P}_s)$ est obtenu dans le cas d'un coefficient de frottement assez petit.

Théorème 7.3.2 *Supposons que les conditions (7.2.1) sont satisfaites et mes* $(\Gamma_0) > 0$. *Alors il existe* $\mu_1 > 0$ *tel que pour tout* $\mu \geq 0$ *avec* $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq \mu_1$, *le problème* $(\mathbf{P}_s)$ *a une solution et cette solution est unique.*

Démonstration. On va prouver que la fonction $j_{\boldsymbol{f}}(\cdot,\cdot)$ satisfait la relation (3.21.12). De l'inégalité de Schwartz dans $L^2(\Gamma_2)$ et tenant compte que l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ est linéaire et continu, on obtient

$$\begin{aligned}
&|j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_2) + j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_1) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_1) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_2)| \\
&\quad = \left| \int_{\Gamma_2} \mu(|\mathcal{R}(\sigma_\nu(P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}_1))| - |\mathcal{R}(\sigma_\nu(P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}_2))|)(|\boldsymbol{v}_{2\tau}| - |\boldsymbol{v}_{1\tau}|)\,\mathrm{ds} \right| \\
&\quad \leq \left| \int_{\Gamma_2} \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}_1 - P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}_2))|\,|\boldsymbol{v}_{2\tau} - \boldsymbol{v}_{1\tau}|\,\mathrm{ds} \right| \\
&\quad \leq \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\|\mathcal{R}(\sigma_\nu(P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}_1 - P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}_2))\|_{L^2(\Gamma_2)}\|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|_{L^2(\Gamma_2)} \\
&\quad \leq C_1\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\|\sigma_\nu(P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}_1 - P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}_2)\|_{-1/2,\Gamma_2}\|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|_{L^2(\Gamma_2)} \quad \forall \boldsymbol{u}_1,\,\boldsymbol{u}_2,\,\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}\,.
\end{aligned} \tag{7.3.6}$$

De (7.2.7), (7.3.6) et la continuité de l'opérateur de traces, on déduit

$$\begin{aligned}
&|j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_2) + j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_1) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_1) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_2)| \\
&\quad \leq C_2\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_1\|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|_1 \quad \forall \boldsymbol{u}_1,\,\boldsymbol{u}_2,\,\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}\,,
\end{aligned} \tag{7.3.7}$$

soit $j_{\boldsymbol{f}}(\cdot,\cdot)$ satisfait (3.21.12) avec $k = C_2\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}$. Prenant

$$0 < \mu_1 < \frac{\alpha}{C_2} \tag{7.3.8}$$

il résulte que pour tout $\mu \geq 0$ avec $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq \mu_1$ on a $k < \alpha$. Alors on peut appliquer le Théorème 3.21.3 pour achever la démonstration. ■

7.4 Un résultat de régularité

La solution de l'inéquation variationnelle $(\mathbf{P}_s)$ n'est pas, en général, suffisamment lisse et donc, conformément au théorème 7.2.1, cette solution ne satisfait pas le problème original $(\boldsymbol{\mathcal{P}_s})$. C'est pour ça qu'elle est appellée solution faible. Il y a alors un grand intérêt d'étudier les conditions qui assurent la régularité des solutions de l'inéquation variationnelle $(\mathbf{P}_s)$.

Dans cette section on va donner (voir aussi [36]) un résultat de régularité local pour la solution du problème $(\mathbf{P}_s)$ obtenu dans des hypothèses plus restrictives sur les donnés, à savoir

$$\text{mes}\,(\Gamma_2) > 0\,, \tag{7.4.1}$$

$$a_{ijkl} \in C^1(\bar{\Omega})\,, \tag{7.4.2}$$

$$\mu \in C^1(\bar{\Gamma}_2)\,,\ \mu \geq 0 \text{ sur } \Gamma_2\,, \tag{7.4.3}$$

$$\mathcal{R} : H^{-1/2}(\Gamma_2) \to C^1(\bar{\Gamma}_2) \text{ linéaire et compact tel que } \mathcal{R}\theta \leq 0\,,\ \forall \theta \in H^{-1/2}(\Gamma_2) \tag{7.4.4}$$

$$\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^p\,,\ \boldsymbol{t} \in (L^2(\Gamma_1))^p\,. \tag{7.4.5}$$

On remarque alors que la fonctionnelle $j_{\boldsymbol{f}}(\cdot,\cdot)$ définie par $(7.2.4)_3$, peut se réécrire

$$j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = -\int_{\Gamma_2} \mu\mathcal{R}(\sigma_\nu(P_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{u}))\,|\boldsymbol{v}_t|\,\text{ds} \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1_{div}(\Omega)\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,.$$

Théorème 7.4.1 *Soit $\boldsymbol{u}$ une solution du problème $(\mathbf{P}_s)$. Supposons que les hypothèses (7.4.1)-(7.4.5) sont satisfaites et que Ω est de classe C^3 dans tout $\boldsymbol{x} \in \Gamma_2$. Alors, pour tout ensemble ouvert U tel que $\bar{U} \subset \Omega \cup \Gamma_2$, nous avons*

$$\boldsymbol{u} \in (H^2(U))^p\,.$$

Démonstration. Le résultat sera obtenu en appliquant le Théorème 4.22.1.

Soient $\boldsymbol{x} \in \Gamma_2$ et I le voisinage correspondant de $\boldsymbol{x}$ de la définition de C^3-régularité de Ω dans $\boldsymbol{x}$. Nous pouvons supposer que $\partial\Omega \cap I \subset \Gamma_2$.

On observe que si $\boldsymbol{u}$ est une solution du problème $(\mathbf{P}_s)$, alors $\boldsymbol{u}$ vérifie la suivante inéquation variationnelle

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\cap I} a_{ijkl}\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\epsilon_{kl}(\boldsymbol{v})\,\text{dx} + \int_{\Gamma_2\cap I} g|\boldsymbol{v}_t|\,\text{ds} - \int_{\Gamma_2\cap I} g|\boldsymbol{u}_t|\,\text{ds} \\ &\quad \geq \int_{\Omega\cap I} f_i(v_i - u_i)\,\text{dx} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{u}}\,, \end{aligned} \tag{7.4.6}$$

où $g(s) = -\mu(s)\mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{u}))(s)$, $\forall s \in \bar{\Gamma}_2$ et

$$\boldsymbol{K_u} = \{\boldsymbol{w} \in (H^1(\Omega \cap I))^p\,;\; \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \text{ dans } \Omega \cap \partial I,\; w_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cap I\}.$$

En effet, pour tout $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K_u}$ nous avons $\boldsymbol{w}' \in \boldsymbol{K}$ où

$$\boldsymbol{w}' = \begin{cases} \boldsymbol{w} & \text{dans } \Omega \cap I\,, \\ \boldsymbol{u} & \text{dans } \Omega \backslash I\,. \end{cases}$$

Alors, prenand $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}'$ dans $(\mathbf{P}_s)$ nous obtenons (7.4.6).

Pour pouvoir appliquer le Théorème 4.22.1, nous utiliserons un argument dûe à Fichera [51]. La régularité C^3 de Ω dans $\boldsymbol{x}$ implique que, dans tout $\boldsymbol{y} \in \Omega \cap I$ il existe un système orthogonal de vecteurs unitaires $\boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{y}), \ldots, \boldsymbol{w}^p(\boldsymbol{y})$ tel que $\boldsymbol{w}^i \in (C^2(\bar{\Omega} \cap \bar{I}))^p\,,\; i = 1, \ldots, p$ et $\boldsymbol{w}^p(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})$ pour $\boldsymbol{y} \in \Gamma_2 \cap \bar{I}$. En conséquence, pour tout $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega \cap I))^p$, nous avons

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) = \bar{v}_i(\boldsymbol{y})\boldsymbol{w}^i(\boldsymbol{y}) \qquad \forall \boldsymbol{y} \in \Omega \cap I\,.$$

Soient $\bar{\boldsymbol{v}} = (\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_p)$ et $\mathbf{X}$ le suivant ensemble convexe et fermé de $(H^1(\Omega \cap I))^p$

$$\mathbf{X} = \{\bar{\boldsymbol{v}} \in (H^1(\Omega \cap I))^p\,;\; \bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{u}} \text{ dans } \Omega \cap \partial I \text{ et } \bar{v}_p \leq 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cap I\}\,.$$

Alors, il est immédiat que $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K_u}$ si et seulement si $\bar{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{X}$.

Nous allons définir les formes suivantes :

$$\begin{aligned} b(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{v}}') = \int\limits_{\Omega \cap I} &[a_{ij}^{kl}(\boldsymbol{y})\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial y_i}\frac{\partial \bar{v}_l'}{\partial y_j} + b_i^{kl}(\boldsymbol{y})\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial y_i}v_l' + c_i^{kl}(\boldsymbol{y})\frac{\partial \bar{v}_l'}{\partial y_i}\bar{v}_k \\ &+ d^{kl}(\boldsymbol{y})\bar{v}_k\bar{v}_l']\,\mathrm{dy} \quad \forall \bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{v}}' \in \mathbf{X}\,, \end{aligned} \tag{7.4.7}$$

$$J(\bar{\boldsymbol{v}}) = \int\limits_{\Gamma_2 \cap I} g\psi(\bar{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{ds} \quad \forall \bar{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{X} \tag{7.4.8}$$

$$(\boldsymbol{L}, \bar{\boldsymbol{v}}) = \int\limits_{\Omega \cap I} L_j\bar{v}_j\,\mathrm{dy} \quad \forall \bar{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{X}\,, \tag{7.4.9}$$

où $a_{ij}^{kl} = a_{ijqr}w_q^k w_r^l\,,\; b_i^{kl} = a_{ijqr}w_q^k(w_r^l)_{,j}\,,\; c_i^{kl} = a_{ijqr}(w_q^k)_{,j}w_r^l\,,\; d^{kl} = a_{ijqr}(w_q^k)_{,i}(w_r^l)_{,j}\,,\; \psi(\bar{\boldsymbol{v}}) = |(\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_{p-1}, 0)|$ et $L_j = f_i w_i^j$.

De façon évidente, on a

$$\begin{aligned} b(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{v}}') &= \int\limits_{\Omega \cap I} a_{ijkl} \epsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) \epsilon_{kl}(\boldsymbol{v}')\, \mathrm{dx}\,, \\ J(\bar{\boldsymbol{v}}) &= j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\,, \\ (\boldsymbol{L}, \bar{\boldsymbol{v}}) &= (\mathbf{f}, \boldsymbol{v})\,. \end{aligned} \tag{7.4.10}$$

Avec ces notations, l'inéquation (7.4.6) devient

$$b(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}} - \bar{\boldsymbol{u}}) + J(\bar{\boldsymbol{v}}) - J(\bar{\boldsymbol{u}}) \geq (\boldsymbol{L}, \bar{\boldsymbol{v}} - \bar{\boldsymbol{u}}) \quad \forall \bar{\boldsymbol{v}} \in \mathbf{X}\,. \tag{7.4.11}$$

Il est facile à vérifier que J, $\boldsymbol{L}$ et $\mathbf{X}$ ainsi définis satifaitent les hypothèses du Théorème 4.22.1 avec Ω remplacé par $\Omega \cap I$. De plus, de l'inégalité de Korn, il suit que b satisfait la relation (4.22.1) pour tout $\bar{\boldsymbol{v}} \in (H^1(\Omega \cap I))^p$ avec supp $\bar{\boldsymbol{v}} \subset \bar{\Omega} \cap I$. Par conséquent, $\boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega \cap I'_{\boldsymbol{x}}))^p$, $\forall I'_{\boldsymbol{x}} \ni \boldsymbol{x}$ avec $\bar{I}'_{\boldsymbol{x}} \subset I$.

En raisonnant comme dans la démonstration du Théorème 4.22.1, nous concluons que $\boldsymbol{u} \in (H^2(U))^p$. ■

7.5 Formulations duales pour le problème de contact frottant ($\boldsymbol{\mathcal{P}}_s$)

La formulation variationnelle $(\mathbf{P}_s)$ (voir page 137) du problème de Signorini avec frottement non local Coulomb $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_s)$ (voir page 136) est appelée primale et elle a comme inconnue le champs des déplacements. Dans cette formulation les équations de compatibilité sont vérifiées de manière forte et les équations d'équilibre local de manière faible. Maintenant, on va considérer des formulations duales de $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_s)$ où l'inconnue est le champ des contraintes. La première formulation $(\mathbf{Q})$ s'obtient à partir du problème $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_s)$ d'une manière analogue comme dans le cas de la formulation en déplacement et elle est duale dans le sens que l'inconnue est le champ des contraintes au lieu de champs des déplacements. A l'inverse de la formulation primale $(\mathbf{P}_s)$, la formulation duale $(\mathbf{Q})$ vérifie les équations de compatibilité de manière faible et les équations d'équilibre local de manière forte.

La deuxième formulation s'obtient à partir de la formulation primale $(\mathbf{P}_s)$ en utilisant la théorie de dualité M-CD-M (voir page 107) et elle a comme inconnue le champ des contraintes définis seulement sur le bord de contact Γ_2. C'est pour ça qu'elle est appelée duale condensée.

On se place dans les hypothèses (7.2.1).

On va considérer, dans la suite de ce livre, que mes $\Gamma_0 > 0$. Alors, de l'inégalité de Korn, il résulte qu'il existe une constante $C = C(\Omega, \Gamma_0)$ telle que

$$\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v})\|_{\boldsymbol{H}} \geq C\|\boldsymbol{v}\|_1 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,, \tag{7.5.1}$$

où $\boldsymbol{H}$ est l'espace de Hilbert

$$\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})\,;\ \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(\Omega)\,,\ 1 \leq i,j \leq p\}\,,$$

muni par le produit scalaire

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle_{\boldsymbol{H}} = \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})\tau_{ij}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{dx} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{H}$$

et la norme associé $\|\cdot\|_{\boldsymbol{H}}$. Il en résulte que $\boldsymbol{V}$ muni par le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\boldsymbol{V}}$ défini par

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}} = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,,$$

est un espace de Hilbert et

$$\|\boldsymbol{v}\|_{(H^1(\Omega))^p} \text{ est équivalente à } \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}} \ \ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,.$$

On introduit maintenant l'espace de Hilbert

$$\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{H}\,;\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\tau} \in (L^2(\Omega))^p\}\,,$$

muni par le produit scalaire

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\boldsymbol{W}} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\boldsymbol{H}} + (\mathrm{div}\ \boldsymbol{\sigma},\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\tau})_0$$

et la norme associée $\|\cdot\|_{\boldsymbol{W}}$. Ci-dessus, $(\cdot,\cdot)_0$ désigne le produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^p$.

On définit l'ensemble des champs des contraintes statiquement admissibles par

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathrm{g}) = \{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{H}\,;\ \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\mathrm{g}, \boldsymbol{v}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\}\,,$$

où

$$\bar{j}(\mathrm{g}, \boldsymbol{v}) = -\int_{\Gamma_2} \mu \mathcal{R}(g_\nu)|\boldsymbol{v}_\tau|\,\mathrm{ds} \quad \forall (\mathrm{g}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{V}.$$

Cette définition implique que, pour tout $\mathbf{g} \in \boldsymbol{W}$, l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{g})$ est non-vide. En effet, soit $\tilde{\boldsymbol{F}}$ l'élément de $\boldsymbol{V}$ donné par

$$(\tilde{\boldsymbol{F}}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,.$$

Alors on a

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\boldsymbol{F}}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} = (\tilde{\boldsymbol{F}}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$$

et

$$\bar{\jmath}(\mathbf{g}, \boldsymbol{v}) \geq 0 \quad \forall (\mathbf{g}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{V},$$

soit $\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\boldsymbol{F}}) \in \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{g})$, $\forall \mathbf{g} \in \boldsymbol{W}$.

On considère la suivante formulation du problème $(\mathbf{P}_s)$ en termes de contraintes:

Problème (Q) : Trouver un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \longrightarrow S_p$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}) \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}) \end{array}\right\} \tag{7.5.2}$$

où S_p est l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^p$ et

$$b(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\Omega} \mathcal{G}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, \mathrm{dx} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon} \in \boldsymbol{W}\,,$$

$\mathcal{G} = \mathcal{A}^{-1}$ étant le tenseur de souplesse.

La relation entre le problème primale $(\mathbf{P}_s)$ et le problème dual $(\mathbf{Q})$ est donnée par le résultat suivant.

Théorème 7.5.1 *(i) Si $\boldsymbol{u}$ est une solution du problème $(\mathbf{P}_s)$ alors $\boldsymbol{\sigma}$ défini par $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})$ est une solution du problème $(\mathbf{Q})$.*

(ii) Réciproquement, soit $\boldsymbol{\sigma}^*$ une solution du problème $(\mathbf{Q})$. Alors il existe une fonction unique $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ telle que $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathcal{A}\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})$. De plus, $\boldsymbol{u}$ est une solution du problème $(\mathbf{P}_s)$.

Démonstration.

(i) Si $\boldsymbol{u}$ est solution du $(\mathbf{P}_s)$, alors en prenant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{\varphi}$ avec $\boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{D}(\Omega))^p$ on déduit que $-\sigma_{ij,j} = f_i$ p.p. dans Ω d'où $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{W}$.

De plus, en prenant $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}$ dans $(\mathbf{P}_s)$ on obtient la suivante formulation équivalente de $(\mathbf{P}_s)$

$$\left.\begin{array}{l}\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,, \\ \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})\rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u})\end{array}\right\} \tag{7.5.3}$$

d'où $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma})$.

On va montrer que $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie $(\mathbf{Q})$. De la définition de l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma})$ et de $(7.5.3)_2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) &= (\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})_{\boldsymbol{H}} = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}))_{\boldsymbol{H}} - (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}))_{\boldsymbol{H}} \\ &\geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}) - \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}))_{\boldsymbol{H}} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma})\,, \end{aligned}$$

donc $\boldsymbol{\sigma}$ est une solution de $(\mathbf{Q})$.

Remarque 7.5.1 *Si la condition $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ sur Γ_0 est remplacée par $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$ avec $\boldsymbol{u}_0$ donné, alors la formulation variationnelle en contrainte de $(\mathbf{P}_s)$ devient*

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}) \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \geq L(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma})\end{array}\right\}$$

où

$$L(\boldsymbol{\tau}) = \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{u}_0\, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{ds}.$$

(ii) Soient $\boldsymbol{\sigma}^*$ une solution de $(\mathbf{Q})$ et $\mathbf{p} = \mathcal{G}\boldsymbol{\sigma}^*$. Alors on a

$$\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}^*\rangle_{\boldsymbol{H}} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^*)\,. \tag{7.5.4}$$

On note par $(\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{V}))^\perp$ le complément orthogonal dans $\boldsymbol{H}$ de sous-espace fermé $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{V}) = \{\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v});\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}$ et soit $\bar{\mathbf{p}} \in (\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{V}))^\perp$, c'est-à-dire

$$\langle \bar{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\boldsymbol{H}} = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}.$$

Alors, de la définition de $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^*)$, on a

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^* \pm \bar{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{v}) \geq (\mathbf{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,,$$

donc $\boldsymbol{\sigma}^* \pm \bar{\mathbf{p}} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^*)$. Prenant dans (7.5.4) $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}^* \pm \bar{\mathbf{p}}$ on obtient $\langle \mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}} \rangle_{\boldsymbol{H}} = 0$ d'où $\mathbf{p} \in ((\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{V}))^\perp)^\perp = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{V})$. Il en résulte qu'il existe $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ tel que $\mathbf{p} = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})$ et, de la conséquence (7.5.1) de l'inégalité de Korn, on déduit l'unicité de $\boldsymbol{u}$. Alors $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathcal{A}\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})$ et la relation (7.5.4) s'ecrit

$$\langle \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\boldsymbol{H}} \geq 0\,, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma})\,. \tag{7.5.5}$$

Maintenant on va montrer, par contradiction, que $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$. Pour cette raison on considère sur $\boldsymbol{V}$ le produit scalaire

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_A = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} = \langle \mathcal{A}\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \tag{7.5.6}$$

et on désigne par $\| \cdot \|_A$ la norme associée qui est, grâce aux propriétés de la forme $a(\cdot, \cdot)$, équivalente à la norme $\| \cdot \|_{\boldsymbol{V}}$. Par conséquent $(\boldsymbol{V}, \| \cdot \|_A)$ est un espace de Hilbert.

Supposons que $\boldsymbol{u} \notin \boldsymbol{K}$. Soit $P_{\boldsymbol{K}} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{K}$ l'opérateur de projection sur l'ensemble non-vide, convexe et fermé $\boldsymbol{K}$ de $\boldsymbol{V}$. Alors

$$(P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_A \geq (P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}, P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u})_A > (P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_A \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}$$

donc, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$(P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_A > \alpha > (P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_A \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,.$$

Pour $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}(P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) = \mathcal{A}\boldsymbol{\epsilon}(P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{H}$, on déduit

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} &= \langle \boldsymbol{\sigma}(P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} \\ &= (P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_A > \alpha > (P_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_A = \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) \rangle_{\boldsymbol{H}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,. \end{aligned} \tag{7.5.7}$$

En prenant $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, nous obtenons

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) \rangle_{\boldsymbol{H}} < \alpha < 0. \tag{7.5.8}$$

On va montrer que

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}. \tag{7.5.9}$$

En effet, supposant qu'il existe $\boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{K}$ tel que

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}_0) \rangle_{\boldsymbol{H}} < 0. \tag{7.5.10}$$

Comme $\lambda \boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{K}$, $\forall \lambda \geq 0$, alors, de (7.5.7), on obtient

$$\lambda \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}_0) \rangle_{\boldsymbol{H}} > \alpha \,, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

En passant à la limite avec $\lambda \longrightarrow +\infty$, de (7.5.10), on déduit $\alpha \leq -\infty$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, la relation (7.5.9) est prouvée et, parce que $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma})$, ça entraîne

$$\langle \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}) + \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K},$$

d'où $\boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma})$. Alors, choisissant $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ dans (7.5.5), on obtient

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) \rangle_{\boldsymbol{H}} \geq 0. \tag{7.5.11}$$

Mais les relations (7.5.8) et (7.5.11) sont en contradiction. Par conséquent on a $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$.

On verra dans la suite que $\boldsymbol{u}$ vérifie $(\mathbf{P}_s)$. D'abord, de $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma})$, on a

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}, \tag{7.5.12}$$

et donc, on a aussi

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) \rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}) \,. \tag{7.5.13}$$

Posant

$$J_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}) & \text{si } \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

on déduit que la fonction $J_{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est sous-différentiable et donc il existe $\boldsymbol{\sigma}_1 \in \boldsymbol{H}$ tel que

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}) - \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}.$$

En prenant $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, on déduit

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) \rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}) \,, \tag{7.5.14}$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}. \tag{7.5.15}$$

La dernière relation donne $\boldsymbol{\sigma}_1 \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma})$. Alors on peut prendre dans (7.5.5), $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_1$ d'où

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) \rangle_{\boldsymbol{H}} \geq \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) \rangle_{\boldsymbol{H}}. \tag{7.5.16}$$

D'après (7.5.14) et (7.5.16) on a

$$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}) - \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) \geq \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) \rangle_{\boldsymbol{H}} \,,$$

ce qui, joint à (7.5.13), donne

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) \rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}) \,. \tag{7.5.17}$$

La démonstration est achevée en tenant compte de (7.5.12), (7.5.17) et (7.5.6). ■

On a le suivant résultat d'existence et d'unicité:

Théorème 7.5.2 *Il existe une constante $\mu_1 > 0$, dépendente seulement de Ω, telle que, pour tout $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq \mu_1$, il existe une unique solution $\boldsymbol{\sigma}$ de problème* **(Q)**. *De plus, cette solution est $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})$ où $\boldsymbol{u}$ est la solution unique de problème* **(P$_s$)**.

Démonstration. D'après les théorèmes 7.3.2 et 7.5.1 le résultat est immédiat. Pourtant, nous donnerons une démonstration qui met en évidence des applications utilles dans les approches des problèmes **(P$_s$)** et **(Q)**.

Soient les applications $T : \boldsymbol{W} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ et $S : \boldsymbol{W} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ définies par $T(\mathrm{g}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathbf{g}}) = \mathcal{A}\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_{\mathbf{g}})$ et $S(\mathbf{g}) = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}$ où $\boldsymbol{u}_{\mathbf{g}}$ est la solution unique du problème **(P$_{\mathbf{g}}$)** défini par

Problème (P$_{\mathbf{g}}$) : Trouver $\boldsymbol{u}_{\mathbf{g}} \in \boldsymbol{K}$ tel que

$$a(\boldsymbol{u}_{\mathbf{g}}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\mathbf{g}}) + \bar{j}(\mathrm{g}, \boldsymbol{v}) - \bar{j}(\mathrm{g}, \boldsymbol{u}_{\mathbf{g}}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\mathbf{g}}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K} \tag{7.5.18}$$

et $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}$ est la solution unique du problème **(Q$_{\mathbf{g}}$)** :

Problème (Q$_{\mathbf{g}}$): Trouver $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}} \in \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{g})$ tel que

$$b(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{g}). \tag{7.5.19}$$

On note que l'existence et l'unicité de $\boldsymbol{u}_{\mathbf{g}}$, respectivement de $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}$ est assuré par les théorèmes 3.21.3 et 3.11.3.

D'abord, comme $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}} \in \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{g})$, on a

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\mathbf{g}, \boldsymbol{v}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}$$

d'où, en prenant $\boldsymbol{v} = \pm\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^p$, on obtient $-\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}} = \mathbf{f}$ donc $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}} \in \boldsymbol{W}$ et l'application S est bien définie.

D'autre part, de (P_{g}), en prenant $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}$ et $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ on obtient

$$\left.\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}})\rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\mathrm{g}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}) = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{g}})\,,\\
&\langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\mathrm{g}, \boldsymbol{v}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{7.5.20}$$

d'où $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}) \in \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{g})$ et, comme une conséquence, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}) \in \boldsymbol{W}$, soit l'application T est bien définie.

On va montrer que $S(\mathbf{g}) = T(\mathbf{g})$, $\forall \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{W}$. Soient $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{g})$, donc

$$\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\mathrm{g}, \boldsymbol{v}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,.$$

En prenant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}$, nous obtenons

$$\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}})\rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\mathrm{g}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{g}})\,.$$

La dernière relation et $(7.5.20)_1$ donnent

$$\langle \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}})\rangle_{\boldsymbol{H}} \geq 0$$

ou

$$b(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}})) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{g}). \tag{7.5.21}$$

Comme $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}) \in \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{g})$, de (7.5.21) on déduit que $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}})$ est une solution du problème $(\mathbf{Q}_{\mathbf{g}})$. D'après l'unicité de la solution de $(\mathbf{Q}_{\mathbf{g}})$, nous concluons que $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}}) = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{g}}$, soit $S(\mathbf{g}) = T(\mathbf{g})$.

L'application T est contractante. En effet, si $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2 \in \boldsymbol{W}$, alors de $(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_i})$, $i \in \{1, 2\}$, on a $-\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_1}) = -\mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_2}) = \mathbf{f}$ et

$$\begin{aligned}
\|T(\mathbf{g}_1) - T(\mathbf{g}_2)\|_{\boldsymbol{W}} &= \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_1}) - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_2})\|_{\boldsymbol{W}} = \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_1} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_2})\|_{\boldsymbol{H}}\\
&\leq C_1\|\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_1} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_2})\|_{\boldsymbol{H}} = C_1\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_1} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_2}\|_{\boldsymbol{V}} \leq C\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_1} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_2}\|_1\,.
\end{aligned} \tag{7.5.22}$$

Mais, par addition des problèmes $(\mathbf{P}_{\mathbf{g}_i})$, $i \in \{1, 2\}$, pour $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{3-i}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_1} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_2}\|_1^2 &\leq a(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \leq |\bar{j}(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{u}_2) - \bar{j}(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{u}_2) + \bar{j}(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{u}_2) - \bar{j}(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{u}_2)|\\
&\leq \left|\int_{\Gamma_2} \mu\mathcal{R}(\mathbf{g}_{1\nu} - \mathbf{g}_{2\nu})|\boldsymbol{u}_{1\tau} - \boldsymbol{u}_{2\tau}|\, ds\right| \leq C\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{\boldsymbol{W}}\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_1} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{g}_2}\|_1
\end{aligned}$$

d'où

$$\|T(\mathbf{g}_1) - T(\mathbf{g}_2)\|_{\boldsymbol{W}} \leq C\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{\boldsymbol{W}}\|\,.$$

Alors, pour μ assez petit, on obtient que l'application T est contractante. Par conséquent il existe un élément unique $\mathbf{g}^*$ tel que $T(\mathbf{g}^*) = \mathbf{g}^*$. En tenant compte que les points fixes des application T et S sont les solutions de $(\mathbf{P}_s)$, respectivement $(\mathbf{Q})$, on obtient l'existence et l'unicité de la solution $\boldsymbol{u}^*$ de $(\mathbf{P}_s)$, respectivement $\boldsymbol{\sigma}^*$ de $(\mathbf{Q})$ et $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^*)$. ■

À la suite nous obtenerons (voir, aussi [119], [120]), en appliquant la théorie M-CD-M présentée dans la section 5.2, la formulation duale, appelée aussi duale condensée, du problème $(\mathbf{P}_s)$.

Pour cette raison, on prend

$$
\begin{aligned}
& g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \quad \forall \boldsymbol{u}\,,\ \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}\,,\\
& L : \boldsymbol{V} \longrightarrow Y = H^{-1/2}(\Gamma_2), \quad L\boldsymbol{v} = \sigma_\nu(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}\,,\\
& \varphi(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \bar{j}(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + I_K(\boldsymbol{v}) = -\int\limits_{\Gamma_2} \mu\mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{u}))\,|\boldsymbol{v}_\tau|\,\mathrm{ds} + I_K(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{u}\,,\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}\,,\\
& C(\mathbf{g}) = \{\boldsymbol{\tau}^* \in (H^{-1/2}(\Gamma_2))^p\,;\ \langle \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{v}_\tau\rangle \le \bar{j}(\mathbf{g},\boldsymbol{v})\,,\ \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}\} \quad \forall \mathbf{g}\in\boldsymbol{W}\\
& K_\nu = \{z\in H^{1/2}(\Gamma_2)\,;\ z = \gamma\bar{z}/\Gamma_2 \text{ avec } \bar{z}\in H^1(\Omega)\,,\ \bar{z}=0 \text{ sur } \Gamma_0\,,\ z\le 0\}\,,
\end{aligned}
\tag{7.5.23}
$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit de dualité entre $(H^{-1/2}(\Gamma_2))^p$ et $(H^{1/2}(\Gamma_2))^p$, ou $H^{-1/2}(\Gamma_2)$ et $H^{1/2}(\Gamma_2)$, et I_K est la fonction indicatrice de l'ensemble K.

Alors, pour la fonction conjuguée au sens de Fenchel de φ par rapport au second variable, on obtient la forme

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^*) &= \sup_{\boldsymbol{v}\in(H^{1/2}(\Gamma_2))^p} [\langle\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{v}\rangle - \bar{j}(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - I_K(\boldsymbol{v})]\\
&= \sup_{\boldsymbol{v}\in(H^{1/2}(\Gamma_2))^p} [(\langle v_\nu^*, v_\nu\rangle - I_{K_\nu}(v_\nu)) + (\langle\boldsymbol{v}_\tau^*,\boldsymbol{v}_\tau\rangle - \bar{j}(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))]\\
&= I^*_{K_\nu}(v^*_\nu) + I_{C(L\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{v}^*_\tau) = I_{K^*_\nu}(v^*_\nu) + I_{C(\sigma_\nu(\boldsymbol{u}))}(\boldsymbol{v}^*_\tau)
\end{aligned}
$$

où nous avons regarder la fonction $\varphi^*(L\boldsymbol{u},\cdot)$ comme définie sur $(H^{-1/2}(\Gamma_2))^p$ et K^*_ν est le cône polaire de l'ensemble K_ν, donc

$$
K^*_\nu = \{z^*\in H^{-1/2}(\Gamma_2)\,;\ \langle z^*, z\rangle \le 0\,,\ \forall z\in K_\nu\}.
$$

De la définition de l'ensemble $C(\sigma_\nu(\boldsymbol{u}))$ et en tenant compte que $\mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{u}))\in L^2(\Gamma_2)$, on obtient

$$
\varphi^*(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } v^*_\nu\in K^*_\nu\,,\ \boldsymbol{v}^*_\tau\in C(L(\boldsymbol{u})),\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}
\tag{7.5.24}
$$

Maintenant on va calculer la fonction conjuguée de g :

$$\begin{aligned}
g^*(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^*) &= \sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}}(\langle \boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}^*\times\boldsymbol{V}} - a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}))\\
&= a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{F},\boldsymbol{u}) + \sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}}[\langle \boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}^*\times\boldsymbol{V}} - a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{F},\boldsymbol{v})]\\
&= a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{F},\boldsymbol{u}) + \sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}}\langle \boldsymbol{v}^* - A\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}^*\times\boldsymbol{V}}\\
&= a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{F},\boldsymbol{u}) + \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{v}^* = A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{F},\\ +\infty & \text{sinon ,}\end{cases}
\end{aligned} \tag{7.5.25}$$

où $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^*)$ est l'opérateur associé à la forme a

$$\langle A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}^*\times\boldsymbol{V}} = a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}.$$

.

On vérifie aisément que, pour tout $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$, la fonction $\boldsymbol{v} \longrightarrow g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ est Gâteaux-différentiable en $\boldsymbol{u}$ et

$$D_2 g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{F} \text{ ou } A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} + D_2 g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}).$$

Comme $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^*)$, il en résulte qu'il existe $G = A^{-1} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}^*,\boldsymbol{V})$ l'opérateure de Green pour le problème avec les conditions à la frontière de l'élasticité linéaire. Alors $\boldsymbol{u} = G(\boldsymbol{F}) + G(D_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}))$ et, si on note $\boldsymbol{u}^* = -D_2 g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$, il en résulte $\boldsymbol{u} = (D_2 g)^{-1}(-\boldsymbol{u}^*) = \mathbf{g} + G(-\boldsymbol{u}^*)$ où $\mathbf{g} = G(\boldsymbol{F})$.

Le problème dual de $(\mathbf{P}_s)$ s'ecrit

$$\langle \boldsymbol{v}^* - \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{u}\rangle \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{v}^* = (v_\nu^*, \boldsymbol{v}_\tau^*) \in K_\nu^* \times C(\sigma_\nu).$$

Prenant $\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{u}^*$ et $\boldsymbol{\tau}^* = -\boldsymbol{v}^*$ on obtient la formulation duale du problème $(\mathbf{P}_s)$ sous la forme

Problème $(\mathbf{P}_s^*)$: Trouver $\boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_\nu, \boldsymbol{\sigma}_\tau) \in (-K_\nu^*) \times C(\sigma_\nu)$ tel que

$$\langle \boldsymbol{\tau}^* - \boldsymbol{\sigma}^*, G(\boldsymbol{\sigma}^*) + \mathbf{g}\rangle \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}^* = (\tau_\nu, \boldsymbol{\tau}_\tau) \in (-K_\nu^*) \times C(\sigma_\nu). \tag{7.5.26}$$

Les conditions d'optimalitées (5.2.7) deviennent

$$\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{F},\boldsymbol{u}) = \langle \sigma_\nu, u_\nu\rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_\tau, \boldsymbol{u}_\tau\rangle,\\
&j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = -\langle \boldsymbol{\sigma}_\tau, \boldsymbol{u}_\tau\rangle,\\
&\langle \sigma_\nu, u_\nu\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{7.5.27}$$

Parce que le problème $(\mathbf{P}_s^*)$ est défini seulement sur Γ_2, ce problème peut être regarder comme la version condensée de la formulation duale $(\mathbf{Q})$.

Il faut remarquer que le problème $(\mathbf{P}_s^*)$ ne peut pas être découpler en deux inéquations pour déterminer séparement la contrainte normale σ_ν et la contrainte tangentielle $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ sur Γ_2, le couplage étant imposé par l'appartenance de $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ à l'ensemble $C(\sigma_\nu)$.

Le problème $(\mathbf{P}_s^*)$ est utilisé pour déterminer la pression de contact et la contrainte tangentielle provoquée par le frottement, en supposant que l'opérateur de Green G est connu (voir [17], [18].

Finalement, nous voulons remarquer que la théorie de dualité M-CD-M peut être appliquer aux plusieurs problèmes de contact avec frottement qui impliquent des conditions de Signorini parmi lesquels on mentionne des problèmes de contact quasi-static et dynamique entre deux corps linéaires élastiques (voir [111]) ou des problèmes de contact avec frottement pour des solids visco-elastiques sous l'effet du fluage dans la présence des conditions de Signorini.

7.6 Approximation du problème en déplacements $(\mathbf{P}_s)$

Dans cette section nous étudions l'approximation, par la méthode des éléments finis, du problème primal $(\mathbf{P}_s)$ (voir aussi [27]). Souhaitant obtenir une estimation de l'erreur, nous limitons l'étude au cas où la solution est unique. Donc nous supposons que

$$\begin{aligned} &\text{mes}\,(\Gamma_2) > 0\,, \\ &\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \leq \mu_1\,, \end{aligned} \tag{7.6.1}$$

avec μ_1 choisi comme dans (7.3.8) de la démonstration du Théorème 7.3.2.

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domain Ω où h représente la finesse de maillage telle que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} T\,.$$

On suppose que la triangulation est régulière dans le sens que pour tout h, les angles des triangles sont bornés inférieurement par un nombre strictement positif indépendant de h.

Soient $\{\boldsymbol{V}_h\}_{h>0}$ une famille des sous-espaces de dimension finie de $\boldsymbol{V}$ et $\{\boldsymbol{K}_h\}_{h>0}$ une famille des sous-ensembles non vides, convexes et fermés de $\boldsymbol{V}_h$ qui approche $\boldsymbol{K}$ dans le sens de l'approximation interne définie dans Section 6.1, soit les conditions (6.1.6) de la page 112 sont satisfaites. On peut considérer aussi une famille $\{j_{\boldsymbol{f}h}\}_h$ qui satisfait (6.1.7)-(6.1.11). Alors, en appliquant la proposition 6.1.1 et le théorème 6.1.1 on obtient le résultat suivant :

Proposition 7.6.1 *L'inéquation quasi-variationnelle discrète*

$$a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h) + j_{\boldsymbol{f}h}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) - j_{\boldsymbol{f}h}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h$$

admet une solution unique $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{K}$. De plus, nous avons

$$\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u} \text{ dans } \boldsymbol{V} \text{ fort },$$

$\boldsymbol{u}$ étant la solution unique du problème $(\mathbf{P}_s)$.

Supposons qu'il existe un opérateur $\Pi_h : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{V}_h$ tel que

$$\|\Pi_h \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\|_1 \leq Ch\|\boldsymbol{v}\|_2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^2(\Omega))^p \cap \boldsymbol{V}\,, \tag{7.6.2}$$

$$\|\Pi_h \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\|_{0,\Gamma_2} \leq Ch^{3/2}\|\boldsymbol{v}\|_2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^2(\Omega))^p \cap \boldsymbol{V}\,, \tag{7.6.3}$$

où $\|\cdot\|_{0,\Gamma_2}$ et $\|\cdot\|_2$ désignent les normes dans $(L^2(\Gamma_2))^p$, respectivement dans $(H^2(\Omega))^p$.

Observation 7.6.1 *Il est connu (voir, par exemple [34], [8]) que les conditions (7.6.2)-(7.6.3) sont satisfaites si Ω est un polygone convexe, $\boldsymbol{V}_h$ est défini par*

$$\boldsymbol{V}_h = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \cap (C^0(\bar{\Omega}))^p\,;\ \boldsymbol{v}/T \in (P_k)^P\,,\ \forall T \in \mathcal{T}_h\}\,,$$

où P_k est l'espace des polynômes de degrée moins que k dans les variables $x_1, \cdots, x_p$ avec $k \geq 1$ et $\Pi_h \boldsymbol{v}$ désigne, comme d'habitude, l'opérateur d'interpolation dans $\boldsymbol{V}_h$ d'une fonction $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$.

Par souci de simplification, on va supposer que Ω est un polygone convexe. On va supposer aussi que

$$\boldsymbol{K}_h \subset \boldsymbol{K}\,, \tag{7.6.4}$$

$$\Pi_h \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}_h \tag{7.6.5}$$

où $\boldsymbol{u}$ est la solution unique du problème $(\mathbf{P}_s)$.

Observation 7.6.2 *Les conditions (7.6.4), (7.6.5) sont vérifiées si, par exemple, on prend* $p = 2$, $k = 1$ *et*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_h = \{&\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h\,;\ v_{h\nu}(a_i) \le 0 \ \textit{si}\ a_i \ne A_j\,,\ \forall j = 1, \cdots, N \ \textit{et} \\ &(v_{h1}\nu_1^- + v_{h2}\nu_2^-)(a_i) \ge 0\,,\ (v_{h1}\nu_1^+ + v_{h2}\nu_2^+)(a_i) \ge 0 \ \textit{s'il existe}\ j = 1, \cdots, N \\ &\textit{tel que}\ a_i = A_j\,,\ i = 1, \cdots, M\}\end{aligned}$$

où $a_1, \cdots, a_M$ *sont les noeuds de la triangulation* $\mathcal{T}_h$ *qui restent sur* Γ_2, $A_1, \cdots, A_N$ *sont les sommets de* Ω *et* $\boldsymbol{\nu}^- = (\nu_1^-, \nu_2^-)$, $\boldsymbol{\nu}^+ = (\nu_1^+, \nu_2^+)$ *sont les vecteurs normaux unitaires vers l'extérieur sur les deux bords adjacents (voir [58]).*

À la suite, on va considèrer la suivante approximation d'élément finis du problème $(\mathbf{P}_s)$:

Problème $(\mathbf{P}_h)$: Trouver $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{K}_h$ tel que

$$a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h) + j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) - j_{\boldsymbol{f}}((\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h) \ge (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h\,. \tag{7.6.6}$$

Il est facile à vérifier que $j_{\boldsymbol{f}h} = j_{\boldsymbol{f}}$ satisfait les hypothŝes (6.1.7)-(6.1.11) et, par conséquent, le résultat établi dans la proposition 7.6.1 reste valable. De plus, on a la suivante estimation de l'erreur:

Théorème 7.6.1 *Supposons que les conditions (7.6.1)-(7.6.5) et (6.1.6) sont satisfaites. Alors, si la solution* $\boldsymbol{u}$ *du problème* $(\mathbf{P}_s)$ *appartient à* $(H^2(\Omega))^p \cap \boldsymbol{K}$, *on a la suivante estimation de l'erreur*

$$\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_1 \le C h^{3/4} \|\boldsymbol{u}\|_2 \tag{7.6.7}$$

où $\boldsymbol{u}_h$ *est la solution unique du problème* $(\mathbf{P}_h)$ *et* C *est une constante indépendente de* h.

Démonstration. Prenand $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_h$ dans $(\mathbf{P}_s)$ et $\boldsymbol{v}_h = \Pi_h \boldsymbol{u}$ dans $(\mathbf{P}_h)$, par addition on obtient

$$\begin{aligned}\alpha\|\boldsymbol{u}_u - \boldsymbol{u}\|_1^2 &\le a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h) \le a(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}, \Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) + (a(\boldsymbol{u}, \Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) \\ &-(\boldsymbol{F}, \Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) + (j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_h) + j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_h, \Pi_h \boldsymbol{u}) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \Pi_h \boldsymbol{u})) \\ &+(j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \Pi_h \boldsymbol{u}) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}))\,.\end{aligned} \tag{7.6.8}$$

De manière à exprimer une norme de l'erreur, on évalue les termes de la partie droite de l'inégalité (7.6.8). Premièrement, en tenant compte que $\boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega))^p$, on déduit

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}, \Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{F}, \Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u})_{\boldsymbol{V}} &= \int_{\Gamma_2} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) \nu_j (\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u})_i \, \mathrm{ds} \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{0,\Gamma} \|\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\|_{0,\Gamma_2} \leq C_1 \|\boldsymbol{u}\|_2 \|\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\|_{0,\Gamma_2} \end{aligned} \tag{7.6.9}$$

où nous avons utilisé la formule de Green et le théorème de traces.

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \Pi_h \boldsymbol{u}) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) &\leq C_2' \|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{u}))\|_{0,\Gamma_2} \|\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\|_{0,\Gamma_2} \\ &\leq C_2'' \|\sigma_\nu(\boldsymbol{u})\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\|_{0,\Gamma_2} \leq C_2 \|\boldsymbol{u}\|_2 \|\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\|_{0,\Gamma_2} \,. \end{aligned} \tag{7.6.10}$$

En substituant (7.6.9)-(7.6.10) et (7.3.7) dans (7.6.8) et en utilisant la continuité de la forme $a(\cdot,\cdot)$, nous obtenons

$$(\alpha - k)\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_1^2 \leq (M+k)\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_1 \, \|\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\|_1 + C_3 \|\boldsymbol{u}\|_2 \|\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\|_{0,\Gamma_2} \,, \tag{7.6.11}$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{\epsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\epsilon} \qquad \forall \epsilon > 0 \,, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

pour $\epsilon < \dfrac{2(\alpha - k)}{M+k}$, on déduit

$$\left(\alpha - k - \frac{M+k}{2}\epsilon\right) \|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_1^2 \leq \frac{M+k}{2\epsilon} \|\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\|_1^2 + C_3 \|\boldsymbol{u}\|_2 \|\Pi_h \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\|_{0,\Gamma_2} \,. \tag{7.6.12}$$

De (7.6.2), (7.6.3) et (7.6.12) on obtient l'estimation (7.6.7). ■

Observation 7.6.3 *L'estimation (7.6.7) peut être obtenue aussi du Théorème 6.2.2. En effet, prenant $U = (L^2(\Gamma_2))^p$ et procédant comme dans (7.6.9) et (7.6.10), nous avons*

$$(A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \leq C_1 \|\boldsymbol{u}\|_2 \|\boldsymbol{v}\|_{0,\Gamma_2} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \,,$$

$$|j_{\boldsymbol{f}h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| = |j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h) - j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq C_2 \|\boldsymbol{u}\|_2 \|\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}\|_{0,\Gamma_2} \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h \,, \ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \,.$$

Alors, en appliquant le Théorème 6.2.2 et prenant $\boldsymbol{v}_h = \Pi_h \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_h$ dans (6.2.11), on déduit (7.6.7).

On verra, dans la suite, qu'un ordre plus élevé d'approximation dans (7.6.7) peut être obtenue en choisissant convenable l'opérateur de régularisation $\mathcal{R}$.

On rappelle que, $\boldsymbol{u}$ étant la solution du problème $(\mathbf{P}_s)$, on a $\boldsymbol{u} \in \mathbf{C}_{\boldsymbol{f}}$ donc

$$j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,.$$

Soit l'application $\mathcal{R}$ donnée par le produit de convolution

$$\mathcal{R}(\varphi) = \omega * \varphi \qquad \forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma) \tag{7.6.13}$$

où $\omega \in \mathcal{D}(-\delta,\delta)$ avec $\delta \in \mathbb{R}\,,\ \delta > 0$ tel que $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \omega(t)\,\mathrm{dt} = 1$ (voir, par exemple, [93]).

Alors, comme la solution $\boldsymbol{u}$ de $(\mathbf{P}_s)$ est supposée dans $H^2(\Omega))^p$, il résulte que $\mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{u})) \in H^{1/2}(\Gamma)$ d'où

$$j(\boldsymbol{u},\Pi_h\boldsymbol{u}) - j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \leq C_4 \|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{u}))\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\,|\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}|\,\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,. \tag{7.6.14}$$

Mais, de la définition de la norme dans $H^{1/2}(\Gamma)$, on a

$$\|\psi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf\{\|v\|_1\,;\ v \in H^1(\Omega)\,,\ \psi = \gamma v\}\,,$$

où $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ est l'opérateur de traces. On déduit alors

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{u}))\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} &\leq \|\omega * \sigma_\nu(\boldsymbol{u})\|_1^2 = \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Gamma \omega(|\boldsymbol{x}-\mathbf{y}|)(\sigma_\nu(\boldsymbol{u}))(\mathbf{y})\,\mathrm{dy}\right)^2 \mathrm{dx} \\ &+ \sum_{i=1}^{p} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_i}\omega(|\boldsymbol{x}-\mathbf{y}|)(\sigma_\nu(\boldsymbol{u}))(\mathbf{y})\,\mathrm{dy}\right)^2 \mathrm{dx} \leq C_5\|\sigma_\nu(\boldsymbol{u})\|^2_{0,\Gamma}\,.\end{aligned} \tag{7.6.15}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{u},\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{F},\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}) &= \int\limits_\Gamma \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})n_j(\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u})_i\,\mathrm{ds} - \int\limits_{\Gamma_1} t_i(\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u})_i\,\mathrm{ds} \\ &\leq C_6'\left(\|\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{t}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\right)\|\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^p} \\ &\leq C_6\|\boldsymbol{u}\|_2\|\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^p}\end{aligned} \tag{7.6.16}$$

où nous avons utilisé la relation

$$\|\mathbf{t}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \|\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\,.$$

Il est facile à vérifier que

$$\|\,|z|\,\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \|z\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall z \in H^{1/2}(\Gamma)\,,$$

donc

$$\|\,|\boldsymbol{v}|\,\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{z\in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{|(|\boldsymbol{v}|, z)_{0,\Gamma}|}{\|z\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \leq \sup_{z\in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{(|\boldsymbol{v}|, |z|)_{0,\Gamma}}{\|\,|z|\,\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^{1/2}(\Gamma))^p\,. \tag{7.6.17}$$

D'autre part, on a

$$\|\,|\boldsymbol{v}|\,\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \geq \sup_{\substack{z\in H^{1/2}(\Gamma)\\ z\geq 0}} \frac{|(|\boldsymbol{v}|, z)_{0,\Gamma}|}{\|z\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} = \sup_{z\in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{(|\boldsymbol{v}|, |z|)_{0,\Gamma}}{\|\,|z|\,\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^{1/2}(\Gamma))^p\,. \tag{7.6.18}$$

De (7.6.17) et (7.6.18) nous obtenons

$$\|\,|\boldsymbol{v}|\,\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{z\in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{(|\boldsymbol{v}|, |z|)_{0,\Gamma}}{\|\,|z|\,\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^{1/2}(\Gamma))^p\,, \tag{7.6.19}$$

d'où

$$\|\boldsymbol{v}\|_{(H^{-1/2}(\Gamma))^p} \leq p\|\,|\boldsymbol{v}|\,\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^{1/2}(\Gamma))^p\,. \tag{7.6.20}$$

Enfin, de (7.6.8), (7.3.7), (7.6.14)-(7.6.16) et (7.6.20) nous obtenons la suivante estimation de l'erreur :

Théorème 7.6.2 *On suppose que les hypothéses (7.6.1)-(7.6.5) et (6.1.6) ont lieu. De plus, on suppose that the application $\mathcal{R}$ est donnée par (7.6.13) et que*

$$\|\,|\Pi_h \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}|\,\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq Ch^2 \|\boldsymbol{v}\|_2 \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^2(\Omega))^p \cap \boldsymbol{V}\,. \tag{7.6.21}$$

Alors, si $\boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega))^p \cap \boldsymbol{K}$, on a l'estimation

$$\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_1 \leq Ch\|\boldsymbol{u}\|_2\,. \tag{7.6.22}$$

7.7 L'approximation du problème dual par la méthode d'éléments finis équilibre

Dans cette Section nous considérerons la discrétization de la formulation duale en contrainte (**Q**) et de la formulation duale condensée ($\mathbf{P}_s^*$) en utilisant la méthode d'éléments finis équilibre.

On va supposer les conditions (7.6.1) satisfaites.

Nous allons utiliser les suivantes notations : $\|\cdot\|_s$ et $|\cdot|_s$ pour la norme et la semi-norme dans $(H^s(\Omega))^\alpha$ avec α et s entiers et

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{H}(div\,;\Omega) = \{\tau \in \boldsymbol{H}\,;\ div\,\boldsymbol{\tau} \in (L^2(\Omega))^p\}\,. \tag{7.7.1}$$

On dénote par $\|\cdot\|_{\boldsymbol{W}}$ la norme de $\boldsymbol{W}$, donc

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{W}} = (\|\boldsymbol{\tau}\|_0^2 + \|div\,\boldsymbol{\tau}\|_0^2)^{1/2}.$$

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domain Ω où h représente la finesse de maillage telle que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T\in\mathcal{T}_h} T\,.$$

On suppose que la triangulation est régulière dans le sens que pour tout h, les angles des triangles sont bornés inférieurement par un nombre strictement positif indépendant de h.

Dans la méthode d'éléments finis équilibre, la construction des espaces finis dimensionnelles $\boldsymbol{V}_h$ et $\boldsymbol{W}_h$ qui approchent l'espace $\boldsymbol{V}$ des déplacements, respectivement l'espace $\boldsymbol{W}$ des contraintes avec la divergence en $L^2(\Omega)$, doit satisfaire la condition suivante :

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{W}_h \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega (div\,\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{v}_h\,\mathrm{dx} = 0 \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad div\,\boldsymbol{\tau} = 0 \text{ dans } \Omega\,. \tag{7.7.2}$$

En outre, il faut construire un opérateur d'interpolation $\Pi_h : \boldsymbol{W} \longrightarrow \boldsymbol{W}_h$ tel que

$$\int_\Omega div\,(\Pi_h\boldsymbol{\tau})\,\boldsymbol{v}_h\,\mathrm{dx} = \int_\Omega (div\,\boldsymbol{\tau})\,\boldsymbol{v}_h\,\mathrm{dx} \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h\,,\ \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{W}. \tag{7.7.3}$$

Johnson et Mercier [62] ont construit deux différents pairs d'espaces $(\boldsymbol{W}_h, \boldsymbol{V}_h)$ qui satisfaitent les conditions (7.7.2), (7.7.3) en utilisant des polynômes de petit degré. Dans les deux cas ils ont utilisé des éléments finis composites (cf. fig. 7.2) linéaires par morceaux pour les contraintes et linéaires par morceaux et discontinus pour les déplacements.

Nous rappelons brièvement l'une de ces constructions. On considère un triangle composite T, c'est-à-dire qui est subdivisé en trois sous-triangles T_1, T_2, T_3.

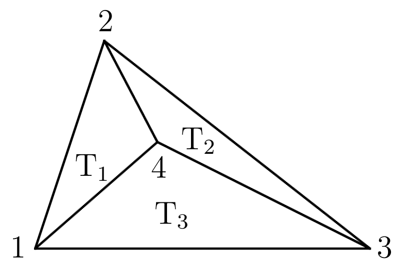

Figure 7.2: Triangle composite T

On définit l'espace de dimension finie de tenseurs des contraintes linéaires par morceaux par

$$\boldsymbol{W}_T = \{\boldsymbol{\tau} \in \hat{\boldsymbol{W}}_T\,;\ \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nu} \text{ est continu à travers les frontières des sous-triangles } 1-4,\ 2-4,\ 3-4\,\} \subset \boldsymbol{H}(div\,;T),$$

où

$$\hat{\boldsymbol{W}}_T = \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})\,;\ \tau_{ij} = \tau_{ji} \in L^2(T),\ i,j = 1,2,\ \boldsymbol{\tau}/T_k \in (P_1(T_k))^4,\ k = 1,2,3\}.$$

Alors l'espace $\boldsymbol{W}_h$ qui approche $\boldsymbol{W}$ est défini par

$$\boldsymbol{W}_h = \{\boldsymbol{\tau} \in \hat{\boldsymbol{W}}_h\,;\ div\,\boldsymbol{\tau} \in (L^2(\Omega))^2\} \subset \boldsymbol{W},$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{W}}_h = \{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{H}\,;\ \boldsymbol{\tau}/T \in \boldsymbol{W}_T,\ \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

L'espace des déplacements $\boldsymbol{V}$ est approché par l'espace

$$\boldsymbol{V}_h = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,;\ \boldsymbol{v}/T \in (P_1(T))^2\,,\ \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

L'opérateur d'interpolation $\Pi_h : \boldsymbol{W} \longrightarrow \boldsymbol{W}_h$ est défini par les conditions

$$\int_S \boldsymbol{v}\cdot((\boldsymbol{\tau} - \Pi_h\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{\nu})\,\mathrm{ds} = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in (P_1(S))^2\,,\ \forall \boldsymbol{\tau} \in (H^1(\Omega))^4, \tag{7.7.4}$$

pour n'importe quel coté S de $\mathcal{T}_h$, $\boldsymbol{\nu}$ étant la normale à S et

$$\int_T (\boldsymbol{\tau} - \Pi_h\boldsymbol{\tau})\,\mathrm{dx} = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \tag{7.7.5}$$

Ainsi défini, l'opérateur d'interpolation satisfait la condition (7.7.3) et, de plus, on a les estimations

$$\|div\, \Pi_h \boldsymbol{\tau}\|_0 \leq C\|div\, \boldsymbol{\tau}\|_0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{W} \cap (H^1(\Omega))^4$$
$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h \boldsymbol{\tau}\|_0 \leq Ch^2 |\boldsymbol{\tau}|_2 \quad \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{W} \cap (H^2(\Omega))^4,$$

d'où, en utilisant la même technique de [62] ou [34], on obtient

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h \boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{W}} \leq Ch|\boldsymbol{\tau}|_2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{W} \cap (H^2(\Omega))^4. \tag{7.7.6}$$

À la suite on va donner des estimations d'erreur qui s'obtiennent en utilisant les espaces d'éléments finis équilibre $\boldsymbol{W}_h$ et $\boldsymbol{V}_h$ pour l'approximation des problèmes duales **(Q)** et $(\mathbf{P}_s^*)$. D'abord, pour l'approximation interne, n'importe pas quelle, d'une inéquation variationnelle abstraite de première espèce de la forme

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma} \subset \boldsymbol{W} \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \geq L(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})\,,\ \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}, \end{cases} \tag{7.7.7}$$

où $\boldsymbol{\Sigma}$ est l'ensemble des restrictions de ce problème, on rappelle l'estimation a-priori d'eereur (voir observation 6.2.2, page 119 ou [34], page 292)

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\boldsymbol{W}} \leq C \left(\inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{\Sigma}_h} (\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|^2_{\boldsymbol{W}} + \alpha \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\boldsymbol{W}}) + \alpha \inf_{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}} \|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{W}} \right)^{1/2} \tag{7.7.8}$$

où C est une constante indépendante de h, $\boldsymbol{\Sigma}_h$ est l'ensemble discret associé à l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}$ et $\alpha = \|B\boldsymbol{\sigma} - L\|_{\mathcal{W}}$ avec $\mathcal{W}$ un espace de Hilbert tel que $\boldsymbol{W} \subset \mathcal{W}$ et $B\boldsymbol{\sigma} - L \in \mathcal{W}$, B étant l'opérateur linéaire et continu associé à la forme b.

La difficulté dans l'obtention d'une estimation d'erreur, évidemment en utilisant les propriétés de l'opérateur d'interpolation Π_h, est de construire une approximation $\boldsymbol{\Sigma}_h$ de $\boldsymbol{\Sigma}$ telle que $\Pi_h \boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$. On note aussi que le troisième terme dans l'estimation a-priori (7.7.8), qui est soupçonné d'avoir le poids le plus élevé, s'annule si $\boldsymbol{\Sigma}_h \subset \boldsymbol{\Sigma}$ (par exemple, si $\boldsymbol{\Sigma}_h = \boldsymbol{\Sigma} \cap \boldsymbol{W}_h$).

Comme d'habitude, on va supposer que la solution de notre problème est régulière.

On va considérer deux cas particulièrs (voir [30]): le problème sans contact et sans frottement, donc élasticité linéaire et le problème avec frottement donné. Pour le cas général, on va seulement obtenir la convergence de l'approximation.

(a) Élasticité linéaire

Dans ce cas, le problème **(Q)** s'ecrit sous la forme (7.7.7) avec

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{W}\,;\ -div\, \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{f} \text{ p.p. dans } \Omega\,,\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{t} \text{ p.p. sur } \Gamma_1\}, \tag{7.7.9}$$

donc $\alpha = 0$. En appliquant l'estimation (7.7.8) on obtient

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\boldsymbol{W}} \leq C \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{\Sigma}_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\boldsymbol{W}}. \tag{7.7.10}$$

Un choix naturel pour l'approximation de $\boldsymbol{\Sigma}$ est de prendre l'ensemble qui satisfait les conditions de $\boldsymbol{\Sigma}$ seulement dans les noeuds de la triangulation, soit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_h = \{\boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{W}_h\,;\ -div\, \boldsymbol{\tau}_h(x_i) = \boldsymbol{f}(x_i)\,,\ \forall x_i \in \mathcal{N}(\Omega) \text{ et} \\ (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n})(y_i) = \boldsymbol{t}(y_i)\,,\ \forall y_i \in \mathcal{N}(\Gamma_1)\} \end{aligned} \tag{7.7.11}$$

où par $\mathcal{N}(\Omega)$ et $\mathcal{N}(\Gamma_1)$ noua avons noté l'ensemble des noeuds de la triangulation $\mathcal{T}_h$ qui appartient à Ω, respectivement à Γ_1.

Alors, on a le résultat suivant

Théorème 7.7.1 *Dans les hypothèses ci-dessus, soit $\boldsymbol{\sigma}$ une solution suffisamment régulière du problème* **(Q)**. *Alors, il existe une constante C indépendante de h tele que*

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\boldsymbol{W}} \leq Ch|\boldsymbol{\sigma}|_2. \tag{7.7.12}$$

Démonstration. De (7.7.10) et (7.7.6), il résulte qu'il reste seulement prouver que $\Pi_h \boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$. Mais, dans ce cas, on a de plus,

$$\Pi_h \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}.$$

En effet, si $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}$, alors de la définition (7.7.9), en utilisant (7.7.3) et (7.7.4) et en choisissant convenable $\boldsymbol{v}_h$, nous obtenons, de la définition (7.7.11), $\Pi_h \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h$. ∎

Proposition 7.7.1 *Si on prend la force volumique $\boldsymbol{f}$ constante et la force surfacique $\boldsymbol{t}$ linéaire alors $\boldsymbol{\Sigma}_h = \boldsymbol{\Sigma} \cap \boldsymbol{W}_h$.*

Démonstration. La démonstration est immédiate en tenant compte que l'approximation de l'espace des contraintes $\boldsymbol{W}_h$ est construit avec des éléments finis linéaires par morceaux et, par conséquent, si une telle contrainte satisfait les conditions de Σ dans les noeuds du maillage alors elle satisfait ces relations dans tout Ω, respectivement sur tout Γ_1. ∎

(b) Le problème de Signorini avec frotement donné

Dans ce cas, comme dans le cas précédant, le problème **(Q)** s'ecrit sous la forme (7.7.7) avec

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{W}\,;\ \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\boldsymbol{H}} + J_g(\boldsymbol{v}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v})\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\}\,, \tag{7.7.13}$$

où g est le frottement donné (le problème de Tresca) et

$$J_g(\boldsymbol{v}) = -\int_{\Gamma_2} \mu\, g\, |\boldsymbol{v}_\tau|\, \mathrm{ds}\,.$$

Considérons l'approximation de $\boldsymbol{\Sigma}$ définie par

$$\boldsymbol{\Sigma}_h = \{\boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{W}_h\,;\ \langle \boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}_h)\rangle_{\boldsymbol{H}} + J_g(\boldsymbol{v}_h) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}_h)\,,\ \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h\}\,. \tag{7.7.14}$$

Alors on a le résultat

Théorème 7.7.2 *On suppose que $\boldsymbol{f}$ est constante, $\boldsymbol{t}$ linéaire et g concave ou linéaire par morceaux. Alors il existe des constantes C, indépendantes de h, telles que*

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\boldsymbol{W}} \leq C h^{1/2} |\boldsymbol{\sigma}|_2\,, \tag{7.7.15}$$

$$\|\sigma_\nu - (\sigma_\nu)_h\|_{-1/2,\Gamma_2} \leq C h^{1/2} |\sigma_\nu|_2\,, \tag{7.7.16}$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}_\tau - (\boldsymbol{\sigma}_\tau)_h\|_{-1/2,\Gamma_2} \leq C h^{1/2} |\boldsymbol{\sigma}_\tau|_2\,, \tag{7.7.17}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ une solution assez régulière du problème duale **(Q)** *et $\boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_\nu, \boldsymbol{\sigma}_\tau)$ est une solution assez régulière du problème dual condensé* $(\mathbf{P}_s^*)$.

Démonstration. En utilisant les mêmes arguments comme dans la démonstration du Proposition 7.7.1, on obtient $\boldsymbol{\Sigma}_h = \boldsymbol{\Sigma} \cap \boldsymbol{W}_h$. Prenant alors dans (7.7.8), $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_h$ et $\boldsymbol{\tau}_h = \Pi_h \boldsymbol{\sigma}$, on déduit l'estimation (7.7.15).

Finalement, dans le problème dual condensé $(\mathbf{P}_s^*)$, l'inconnue $\boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma_\nu, \boldsymbol{\sigma}_\tau)$ est cherché dans l'ensemble $(-K_\nu^*) \times C_g$ où

$$C_g = \{\boldsymbol{\tau}^* \in (H^{-1/2}(\Gamma_2))^p\,;\ \langle \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{v}_\tau\rangle_{\Gamma_2} \leq J_g(\boldsymbol{v})\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}\,.$$

Donc, dans ce cas avec frottement donné, on peut découpler l'inéquation $(\mathbf{P}_s^*)$ en deux inéquations pour obtenir séparement σ_ν et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$. Alors de (7.7.10), le théorème de traces de W dans $H^{-1/2}(\Gamma_2)$ et, en notant par $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma_2}$ la norme sur $(H^{-1/2}(\Gamma_2))^\alpha$ avec α entier, la démostration découle. ∎

(c) Le problème de Signorini avec frottement non-lcal Coulomb

En ce qui concerne le cas général, pour obtenir une estimation d'erreur de l'approximation par éléments finis équilibre du problème $(\mathbf{Q})$, nous avons besoin d'avoir satisfaites les conditions

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_h\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}_h(\boldsymbol{\sigma}_h)\,,\\ \boldsymbol{\sigma}_h \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma})\,,\end{array}\right\} \tag{7.7.18}$$

ce qui est le cas où, par exemple, la solution $\boldsymbol{\sigma}$ est concave donc une condition qui ne peut pas être controler. La même conclusion se déduit pour la formulation duale condensée $(\mathbf{P}_s^*)$. Par conséquent, dans le cas général, le problème d'estimation d'erreur reste ouvert si la construction des approximations ne conduit pas à la réalisation des conditions (7.7.18).

Pourtant, dans le cas général, on peut obtenir la convergence de l'approximation. Avant de détalier les approches faites pour cette convergence, il faut remarquer qu'en ce qui concerne l'approximation du problème duale condensée $(\mathbf{P}_s^*)$, on peut procéder en deux manières différentes :

(i) on peut utiliser une approximation interne pour le problème primal $(\mathbf{P}_s)$ et puis appliquer la théorie de dualité M-CD-M pour obtenir la formulation duale approchée;

(ii) d'abord on obtient, par la théorie M-CD-M, la formulation duale et puis on approche cette formulation duale par la méthode d'éléments finis équilibre sur une surface plane.

On va faire, à la fin de ce chapitre, l'analyse des comparaisons entre les deux procédées.

Pour debut on considère l'approximation par éléments finis équilibre du problème $(\mathbf{Q})$ définie par

Problème $(\mathbf{Q}_h)$: Trouver $\boldsymbol{\sigma}_h \in \boldsymbol{\Sigma}_h(\boldsymbol{\sigma}_h)$ tel que

$$b(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h - \boldsymbol{\sigma}_h) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{\Sigma}_h(\boldsymbol{\sigma}_h)$$

où

$$\boldsymbol{\Sigma}_h(\mathbf{g}) = \{\boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{W}_h\,;\ \langle \boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}_h)\rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\mathbf{g}, \boldsymbol{v}_h) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}_h)\,,\ \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h\}. \tag{7.7.19}$$

Notre bût est d'étudier le comportement de la solution discrète $\boldsymbol{\sigma}_h$ lorsque $h \longrightarrow 0$. La démonstration du Théorème 7.5.2 suggère l'approche qu'on va faire à la suite.

Pour $\boldsymbol{u}^0 \in \boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{\sigma}^0 \in \boldsymbol{W}$ donnés, on considère les suites $\boldsymbol{u}^n$ et $\boldsymbol{\sigma}^n$ définies par :

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{u}^n \in \boldsymbol{K},\\ a(\boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^n) + j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}^{n-1}, \boldsymbol{v}) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}^{n-1}, \boldsymbol{u}^n) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^n) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,,\end{array}\right\} (\mathbf{P}^n)$$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\sigma}^n \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{n-1}),\\ b(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}^n) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{n-1})\end{array}\right\} (\mathbf{Q}^n)$$

c'est-à-dire, $\boldsymbol{u}^n$, respectivement $\boldsymbol{\sigma}^n$, est la solution unique, quelque soit le coefficient de frottement, du problème avec frottement donné $(\mathbf{P}^n)$, respectivement $(\mathbf{Q}^n)$.

Prenant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ dans $(\mathbf{P}^n)$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^n$ dans $(\mathbf{P}_s)$, par addition et en utilisant (7.3.7) on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^n\|_1^2 &\leq a(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^n) \leq j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^n) + j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}^{n-1}, \boldsymbol{u}) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}^{n-1}, \boldsymbol{u}^n)\\ &\leq C_2\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{n-1}\|_1\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^n\|_1\end{aligned}$$

donc

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^n\|_1 \leq k\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{n-1}\|_1$$

avec $k < 1$ pour μ choisi comme dans (7.6.1) et (7.3.8). Il en résulte

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^n\|_1 \leq k^n\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^0\|_1 \,. \tag{7.7.20}$$

La relation entre les deux problèmes est donnée par la proposition qui suit.

Proposition 7.7.2 *Soient* $\boldsymbol{u}^0 \in \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{f}}$ *et* $\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^0) \in \boldsymbol{W}$. *Alors on a*

$$\boldsymbol{\sigma}^n = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^n)\,,\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{7.7.21}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|\boldsymbol{\sigma}^n - \boldsymbol{\sigma}\|_{\boldsymbol{W}} = 0 \tag{7.7.22}$$

Démonstration. D'abord on remarque que la condition $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^0) \in \boldsymbol{W}$ n'est pas de tout restrictive. Un choix naturel est de prendre $\boldsymbol{u}^0 \in \boldsymbol{K}$ la solution unique de

$$a(\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^0) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^0) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,.$$

Démontrons par récurrence la relation (7.7.21). Supposons que $\boldsymbol{\sigma}^{n-1} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^{n-1})$. Alors, prenant $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}^n$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ dans $(\mathbf{P}^n)$, nous obtenons

$$\langle\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^n), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^n)\rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}^{n-1}, \boldsymbol{u}^n) = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}^n)\,, \tag{7.7.23}$$

$$\langle\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^n), \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v})\rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}^{n-1}, \boldsymbol{v}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,. \tag{7.7.24}$$

La relation (7.7.24) donne

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^n) \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{n-1}). \tag{7.7.25}$$

D'autre part, pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{n-1})$, on a

$$\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^n) \rangle_{\boldsymbol{H}} + \bar{j}(\boldsymbol{\sigma}^{n-1}, \boldsymbol{u}^n) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}^n)\,. \tag{7.7.26}$$

D'après (7.7.23) et (7.7.26), nous obtenons

$$b(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^n), \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^n)) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{n-1})\,. \tag{7.7.27}$$

Les relations (7.7.25) et (7.7.27) entraînent, grâce à l'unicité de la solution de $(\mathbf{Q}^n)$, l'assertion (7.7.21).

Enfin, en tenant compte que div $\boldsymbol{\sigma}^n =$ div $\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{f}$ p.p. dans Ω, et utilisant les relations (7.5.22) et (7.7.20), on obtient

$$\|\boldsymbol{\sigma}^n - \boldsymbol{\sigma}\|_{\boldsymbol{W}} = \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u})\|_{\boldsymbol{H}} \leq C\|\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}\|_1 \leq Ck^n\,, \tag{7.7.28}$$

avec C une constante indépendente de n et $k < 1$. Alors la relation 7.7.22 découle. ∎

De la même manière, on approche les problèmes discrets $(\mathbf{P}_h)$ et $(\mathbf{Q}_h)$ par les suites $\{\mathbf{P}_h^n\}_{n\geq 1}$ et $\{\mathbf{Q}_h^n\}_{n\geq 1}$ définies par

Problème $(\mathbf{P}_h^n)$: Trouver $\boldsymbol{u}_h^n \in \boldsymbol{K}_h$ tel que

$$a(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^n) + j(\boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{v}_h) - j(\boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{u}_h^n) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^n) \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{K}_h\,,$$

Problème $(\mathbf{Q}_h^n)$: Trouver $\boldsymbol{\sigma}_h^n \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}_h^{n-1})$ tel que

$$b(\boldsymbol{\sigma}_h^n, \boldsymbol{\tau}_h - \boldsymbol{\sigma}_h^n) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}_h^{n-1})\,.$$

avec $\boldsymbol{u}_h^0 \in \boldsymbol{K}_h$ et $\boldsymbol{\sigma}_h^0 \in \boldsymbol{W}_h$ donnés.

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le problème $(\mathbf{P}_h^n)$, respectivement $(\mathbf{Q}_h^n)$, a une solution unique. Comme dans le cas continue, dans le cas discret on trouve que la suite $\{\mathbf{Q}_h^n\}_{n\in N}$ approche le problème $(\mathbf{Q}_h)$ dans le sens donné par la proposition qui suit.

Proposition 7.7.3 *On suppose que $\boldsymbol{f}$ est linéaire et $\boldsymbol{\sigma}_h^0 = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_h^0)$. Alors on a*

$$\boldsymbol{\sigma}_h^n = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_h^n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{7.7.29}$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|\boldsymbol{\sigma}_h^n - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\boldsymbol{W}} = 0 \tag{7.7.30}$$

Démonstration. L'hypothèse faite sur $\boldsymbol{f}$ et la définition de $\boldsymbol{V}_h$ et $\boldsymbol{W}_h$ impliquent $\boldsymbol{\sigma}_h = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_h^n) = -\boldsymbol{f}$ dans Ω. Alors la démonstration est analoque à la démonstration de la Proposition 7.7.2. ■

On peut maintenant formuler le résultat principal de cette section.

Théorème 7.7.3 *Supposons $\boldsymbol{f}$ linéaire. Alors*

$$\boldsymbol{\sigma}_h \longrightarrow \boldsymbol{\sigma} \textit{ fortement dans } \boldsymbol{W}\,. \tag{7.7.31}$$

Démonstration. Pour prouver la convergence, on ecrit

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{\boldsymbol{W}} \leq \|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}_h^n\|_{\boldsymbol{W}} + \|\boldsymbol{\sigma}_h^n - \boldsymbol{\sigma}^n\|_{\boldsymbol{W}} + \|\boldsymbol{\sigma}^n - \boldsymbol{\sigma}\|_{\boldsymbol{W}} \quad \forall n \geq 0\,. \tag{7.7.32}$$

D'après Propositions 7.7.2 et 7.7.3 il résulte que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon > 0$ tel que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}_h^n\|_{\boldsymbol{W}} + \|\boldsymbol{\sigma}^n - \boldsymbol{\sigma}\|_{\boldsymbol{W}} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_\epsilon\,. \tag{7.7.33}$$

Pour estimer le deuxième terme de (7.7.32) on rappelle que la construction des espaces $\boldsymbol{V}_h$ et $\boldsymbol{W}_h$ est faite à l'aide des polynômes de degré un et que $\boldsymbol{f}$ est linéaire, donc on obtient

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_h^n - \boldsymbol{\sigma}^n\|_{\boldsymbol{W}} &= \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_h^n) - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^n)\|_{\boldsymbol{W}} = \|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_h^n) - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^n)\|_{\boldsymbol{H}} \\ &\leq C\|\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}^n\|_1 \leq C\sum_{i=0}^{n} \|\mathbf{w}_h^i - \boldsymbol{u}^i\|_1 \quad \forall n \geq 0\,, \end{aligned} \tag{7.7.34}$$

où dans la dernière inégalité nous avons utilisé la relation (6.1.25), $\mathbf{w}_h^i$ étant la solution unique de problème $(\mathbf{Q1})_h^i$ défini par la relation (6.1.20).

Finalement, de (7.7.33), (7.7.34) et Proposition 6.1.2, en prenant $n = N_\epsilon$ dans (7.7.32), on déduit que, pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $H_\epsilon > 0$ tel que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{\boldsymbol{W}} \leq \epsilon \quad \forall h \leq H_\epsilon\,, \tag{7.7.35}$$

ce qui achève la démonstration. ■

7.8 Un problème de contrôle optimal

Les problèmes qui sont d'intérêt dans la théorie générale du contrôle optimal regardent l'existence et, si possible, l'unicité, d'un contrôle optimal et aussi l'obtention des conditions nécessaires, ou nécessaires et suffisantes dans les cas favorables, d'optimalités. Il s'agit, dans cette étape, de trouver une équation ou une inéquation qui caractérise le contrôle optimal. Remarquant qu'alors quand la relation contrôle-état est linéaire, la fonctionnelle à minimisée est convexe et différentiable et alors les conditions d'optimalitées sont facile à obtenir.

Pour mieux comprendre les idées principales de la théorie du contrôle optimal (voir, par exemple [75], [76]), nous les rappellons à bref dans le plus simple cas, c'est-à-dire dans le cas d'un système gouverné par un opérateur linéaire et continu.

On considère deux espaces de Hilbert: l'espace des états V et l'espace des contrôles $\mathcal{U}$. Soient deux opérateurs $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, V^*)$ et $f \in V^*$ donné. Alors, pour tout $v \in \mathcal{U}$ donné, nommé contrôle, on appelle l'état du système, la solution $u \in V$, qui dépend évidemment de v, de suivant système (mécanique, physique, etc) gouverné par l'opérateur A:

$$Au = f + Bv\,.$$

On suppose qu'on a un autre espace de Hilbert W où on peut obtenir, après observations, des estimations pour la solution $u = u(v)$, c'est-à-dire on a $w(v) = C(u(v))$ où $C \in \mathcal{L}(V, W)$. C'est naturel de nommé W l'espace des observations.

Alors, à tout contrôle v, on associe le coût ou la fonctionnelle coût définie par

$$J(v) = \|C(u(v)) - w_d\|_W^2 + J_0(v)$$

où $w_d \in W$ est une observation donnée. Le terme supplimentaire $J_0(v)$ est d'habitude introduire pour enricher les propriétés de la fonctionnelle J. Par exemple, pour avoir une fonctionnelle coercive, on demande que la fonctionnelle J_0 soit coercive ou l'ensemble des contraintes soit borné.

Le problème de contrôle est alors le problème suivant de minimization

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

où l'ensemble $\mathcal{U}_{ad}$, nommé l'ensemble des contrôles admissibles, est convexe fermé dans $\mathcal{U}$.

On appelle contrôle optimal une solution v^* du problème de contrôle optimal, soit

$$J(v^*) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

Il est évident de cet exemple qu'une infinité des variantes sont possible à obtenir en considérant la complexité des systèmes à controler ou en changeant les conditions aux limites, la nature du contrôle (distribué ou frontière) soit la nature de l'observation (distribué ou frontière).

L'ouvrage de Lions [75] sur le contrôle optimale des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles constitue la base de la théorie. Le sujet a été beaucoup enrichi par les résultats obtenus par [115], [89] et, pour le contrôle optimal des inéquations, nous renvoyons à [81], [13], [82], [14]. De nombreuses applications de la théorie de contrôle optimal en mécanique ont été étudiées dans [1], [2], [29], [16], [114], pour citer quelques références.

Dans cette section on va étudier un problème de contrôle optimal (voir [26]) pour le problème $(\mathbf{P}_s)$. Notre objectif est de caractériser le coefficient de frottement qui nous mène à un champ désiré du déplacement sur la partie Γ_2 de la frontière qui est en contact unilatéral contre le support rigide. La formulation mathématique de ce problème est un problème de contrôle optimal régie par l'inéquation quasi-variationnelle (7.2.5). Mais, dans une telle approche, une rencontre des problèmes mathématiques et des méthodes standardes (voir [76] ou [13], [81] pour le contrôle optimal des inéquations variationnelles) ne sont pas applicables ici. Les difficultés liées de ce problème viennent de fait que l'état est solution d'une inéquation quasi-variationnelle, le contrôle est un coefficient défini seulement sur une partie de la frontière et la relation contrôle-état est non régulière et non convexe. Pour surmonter ces difficultés, l'idée est de rapprocher le problème à étudier par une famille de problèmes pénalisés gouvernée par une inéquation variationnelle, puis de rapprocher chaque problème de cette famille par une famille de problèmes régularisés de contrôle optimal gouvernée par une équation.

La formulation mathématique de notre problème de contrôle optimal est

Problème (PC)
$$\min_{\mu \in M} J(\mu) \tag{7.8.1}$$

où
$$M = \{\mu \in L^2(\Gamma_2)\,;\ \|\mu\|_{L^2(\Gamma_2)} \leq \mu_1\} \tag{7.8.2}$$

et
$$J(\mu) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{u}_\mu - \boldsymbol{u}_d)^2 \,\mathrm{ds}\,, \tag{7.8.3}$$

avec μ_1 assez petit tel que, pour tout $\mu \in M$, le problème $(\mathbf{P}_s)$ ait une solution unique $\boldsymbol{u}_\mu$. Dans (7.8.3), $u_d \in L^2(\Omega)$ est donné et représente le déplacement désiré du corps sur Γ_2.

À la suite on va renforcer les hypothèses (7.2.1) en exigeant que

$$\begin{aligned} & a_{ijkl} \in C^1(\bar{\Omega}) \quad i,j,k,l = 1,\ldots,p \\ & \mathcal{R} : H^{-1/2}(\Gamma_2) \to C^1(\overline{\Gamma}_2) \quad , \quad \mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{w})) \le 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W} \end{aligned} \tag{7.8.4}$$

où $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V} \,;\, div\, \sigma(\boldsymbol{w}) \in (L^2(\Omega))^p\}$.

Aussi, pour mieux mettre en évidence la dépendence de la solution $\boldsymbol{u}_\mu$ de coefficient de frottement μ, nous faisons la notation

$$j(\mu, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = -\int_{\Gamma_2} \mu \mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{w}))|\boldsymbol{v}_\tau| \,\mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}\,,\, \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \tag{7.8.5}$$

et alors le problème satisfait par $\boldsymbol{u}_\mu$ s'ecrit:
Problème $(\mathbf{PV})_\mu$: Trouver $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ tel que

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) + j(\mu, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j(\mu, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \ge (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K} \tag{7.8.6}$$

Le première chose à étudier est l'existence d'une solution du problème de contrôle (7.8.1).

Théorème 7.8.1 *Le problème de contrôle optimal* **(PC)** *admet au moins une solution.*

Démonstration. L'ensemble M est borné convexe et fermé dans l'espace de Banach réflexif $L^2(\Gamma_2)$ donc il est borné et faiblemnt fermé. La fonctionnelle J étant faiblement semi-continue inférieurement sur M, l'affirmation du théorème suit en appliquant un théorème de Weierstrass (voir le cas (2) de la démonstration du théorème 3.11.3 de la page 38 ou [33], Th1.1, page 62 ou [91], page 1181). ■

Parceque l'état u_μ est la solution d'une inéquation quasi-variationnelle et le contrôle μ est un coefficient frontière qui intervient dans le terme de frottement sur Γ_2, on a peu d'information sur la relation état-contrôle. Par conséquent, on ne peut pas utilisé la différentiabilité de la fonctionnelle J pour obtenir une caractérisation d'un contrôle optimal. Pour cette raison on approche le problème (7.8.1) par deux familles de problèmes associées à une inéquation, respectivement à une équation.

Plus précisement, fixons une solution μ^0 du problème **(PC)**. Pour tout $\epsilon > 0$ nous définissons la fonctionnelle

$$\begin{aligned} J_\epsilon(\mu, \boldsymbol{w}) = & \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{u}(\mu, \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{u}_d)^2 \,\mathrm{ds} + \frac{1}{2\epsilon}\|\boldsymbol{u}(\mu, \boldsymbol{w}) - \boldsymbol{w}\|_W^2 \\ & + \frac{1}{2}\|\mu - \mu^0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \quad \forall \mu \in M\,,\, \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W} \end{aligned} \tag{7.8.7}$$

où l'etat $\boldsymbol{u}(\mu, \boldsymbol{w})$, cette fois ci, est la solution unique de l'inéquation variationnelle de deuxième espèce:

Problème $(\mathbf{PV})_{\mu,\boldsymbol{w}}$: Trouver $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ tel que

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + j(\mu, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) - j(\mu, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) \geq (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,. \tag{7.8.8}$$

Alors nous considérons le suivant problème approché

Problème $(\mathbf{PC})_\epsilon$: Trouver $(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*) \in M \times \boldsymbol{W}$ tel que

$$J_\epsilon(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*) = \min_{(\mu,\boldsymbol{w}) \in M \times \boldsymbol{W}} J_\epsilon(\mu, \boldsymbol{w})\,. \tag{7.8.9}$$

On y voit que nous avons deux quantités comme contrôle et que les possibles valeurs minimales $(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*)$ pour J_ϵ forcent la solution correspondante $\boldsymbol{u}_\epsilon^*$ d'être très proche de $\boldsymbol{w}_\epsilon^*$ en même temps que μ_ϵ^* s'approche de μ^0, μ^0 étant un contrôle optimal du problème initial **(PC)**.

Remarque 7.8.1 *Afin de rapprocher le problème* **(PC)** *il suffit de considérer la contrainte* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ *à la place de* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{W}$. *En outre, cette approche conduira à une équation dans le système d'optimalité (évidemment, la contrainte* $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K}$ *générerait une inéquation).*

Le premier résultat pour la famille $(\mathbf{PC})_\epsilon$ est l'un d'existence.

Proposition 7.8.1 *Pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe au moins une solution* $(\mu_\epsilon, \boldsymbol{w}_\epsilon)$ *du problème de minimisation* $(\mathbf{PC}_\epsilon)$.

Démonstration. Chaque suite minimisante pour la fonctionnelle J_ϵ est bornée. En effet, soit $\{(\mu_\epsilon^n, \boldsymbol{w}_\epsilon^n)\}_n$ une suite minimisante pour J_ϵ sur $M \times \boldsymbol{W}$ donc

$$\lim_{n\to\infty} J_\epsilon(\mu_\epsilon^n, \boldsymbol{w}_\epsilon^n) = \inf_{(\mu,\boldsymbol{w}) \in M \times \boldsymbol{W}} J_\epsilon(\mu, \boldsymbol{w})\,.$$

Si $\boldsymbol{u}_\epsilon^n = \boldsymbol{u}(\mu_\epsilon^n, \boldsymbol{w}_\epsilon^n)$, alors, de la positivité de j et du problème $(\mathbf{PV})_{\mu_\epsilon^n, \boldsymbol{w}_\epsilon^n}$ écrit pour $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}$, on obtient

$$a(\boldsymbol{u}_\epsilon^n, \boldsymbol{u}_\epsilon^n) \leq a(\boldsymbol{u}_\epsilon^n, \boldsymbol{u}_\epsilon^n) + j(\mu_\epsilon^n, \boldsymbol{w}_\epsilon^n, \boldsymbol{u}_\epsilon^n) = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}_\epsilon^n)\,. \tag{7.8.10}$$

En utilisant la coercivité de a, il en résulte que la suite $\{\boldsymbol{u}_\epsilon^n\}_n$ est bornée dans $\boldsymbol{V}$. En tenant compte que $div\,\sigma(\boldsymbol{u}_\epsilon^n) = -\boldsymbol{f}$, il résulte que $\{\boldsymbol{u}_\epsilon^n\}_n$ est aussi bornée dans $\boldsymbol{W}$. De façon évidente, la suite $\{\mu_\epsilon^n\}_n$ est bornée dans $L^2(\Gamma_2)$ ce qui implique, en tenant compte que la fonctionnelle J_ϵ est propre, que la suite $\{\boldsymbol{w}_\epsilon^n\}_n$ est bornée dans $\boldsymbol{W}$.

Maintenant nous allons montrer que la fonctionnelle J_ϵ est faiblement semi-continue inférieurement. Soit $\{(\mu_\epsilon^n, \boldsymbol{w}_\epsilon^n)\}_n \subset M \times \boldsymbol{W}$ une suite qui converge faiblement vers un élément $(\mu_\epsilon, \boldsymbol{w}_\epsilon) \in M \times \boldsymbol{W}$. De (7.8.10) il vient que la suite $\{\boldsymbol{u}_\epsilon^n\}_n$ est bornée dans $\boldsymbol{V}$ où $\boldsymbol{u}_\epsilon^n = \boldsymbol{u}(\mu_\epsilon^n, \boldsymbol{w}_\epsilon^n)$. Donc on peut trouver une sous-suite, notée de la même manière, qui converge faiblement dans $\boldsymbol{V}$ vers un certain élément $\boldsymbol{u}_\epsilon \in \boldsymbol{K}$.

Par passage à la limite dans $\mathbf{(PV)}_{\mu_\epsilon^n, \boldsymbol{w}_\epsilon^n}$, compte tenu de l'unicité de la solution de $\mathbf{(PV)}_{\mu_\epsilon, \boldsymbol{w}_\epsilon}$, il vient $\boldsymbol{u}_\epsilon = \boldsymbol{u}(\mu_\epsilon, \boldsymbol{w}_\epsilon)$.

En outre, grâce à la faible semi-continuité inférieur de la norme, on a

$$\liminf_{n\to\infty} \|\boldsymbol{u}_\epsilon^n - \boldsymbol{w}_\epsilon^n\|_{\boldsymbol{W}}^2 \geq \|\boldsymbol{u}_\epsilon - \boldsymbol{w}_\epsilon\|_{\boldsymbol{W}}^2 , \tag{7.8.11}$$

ce qui, joint à la convergence forte $\boldsymbol{u}_\epsilon^n \to \boldsymbol{u}_\epsilon$ dans $L^2(\Gamma)$, donne

$$\liminf_{n\to\infty} J_\epsilon(\mu_\epsilon^n, \boldsymbol{w}_\epsilon^n) \geq J_\epsilon(\mu_\epsilon, \boldsymbol{w}_\epsilon) . \tag{7.8.12}$$

De plus, l'ensemble $M \times \boldsymbol{K}$ étant borné et faiblement fermé, le théorème découle d'après un théorème de Weierstrass. ■

Le résultat suivant établit la relation entre la famille des problèmes pénalisés $\mathbf{(PC)}_\epsilon$ et le problème de contrôle $\mathbf{(PC)}$.

Proposition 7.8.2 *Pour tout* $\epsilon > 0$, *soit* $(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*) \in M \times \boldsymbol{W}$ *une solution du problème* $\mathbf{(PC)}_\epsilon$. *Alors*

$$\left.\begin{array}{lll} \mu_\epsilon^* \to \mu^0 & \textit{dans} \;\; L^2(\Gamma_2) & \textit{fort}\,, \\ \boldsymbol{w}_\epsilon^* \to \boldsymbol{u}^0 & \textit{dans} \;\; \boldsymbol{W} & \textit{fort}\,, \\ \boldsymbol{u}_\epsilon^* \to \boldsymbol{u}^0 & \textit{dans} \;\; \boldsymbol{W} & \textit{fort} \end{array}\right\} \tag{7.8.13}$$

quand $\epsilon \to 0$, *où* $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}(\mu^0)$ *et* $\boldsymbol{u}_\epsilon^* = \boldsymbol{u}(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*)$. *De plus, on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \|\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{w}_\epsilon^*\|_{\boldsymbol{W}} = 0 , \tag{7.8.14}$$

et

$$\lim_{\epsilon\to 0} J_\epsilon(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*) = J(\mu^0) = \min_{\mu\in M} J(\mu) . \tag{7.8.15}$$

Démonstration. Pour tout $\epsilon > 0$, soient $(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*) \in M \times \boldsymbol{W}$ une solution du problème $\mathbf{(PC)}_\epsilon$ et $\boldsymbol{u}_\epsilon^* = \boldsymbol{u}(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*)$. Parceque $\{\mu_\epsilon^*\}_\epsilon \subset M$ et $\boldsymbol{u}_\epsilon^*$ est une solution de $\mathbf{(PV)}_{\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*}$, il suit que les suites $\{\mu_\epsilon^*\}_\epsilon$ et $\{\boldsymbol{u}_\epsilon^*\}_\epsilon$ sont bornées. Alors ils existe les sous-suites $\{\mu_{\epsilon_p}^*\}_p$ et $\{\boldsymbol{u}_{\epsilon_p}^*\}_p$, et les éléments $\mu^* \in M$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$ tels que

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{\epsilon_p}^* \rightharpoonup \mu^* \quad \text{dans } L^2(\Gamma_2) \text{ faible }, \\ \boldsymbol{u}_{\epsilon_p}^* \rightharpoonup \boldsymbol{u} \quad \text{dans } \boldsymbol{V} \text{ faible} \end{array}\right\} \tag{7.8.16}$$

quand $p \to \infty$. Parce que $\boldsymbol{u}_\epsilon^*$ est une solution de $\mathbf{(PV)}_{\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*}$, on en déduit

$$\boldsymbol{u}_{\epsilon_p}^* \rightharpoonup \boldsymbol{u} \quad \text{dans } \boldsymbol{W} \text{ faible} . \tag{7.8.17}$$

La suite $\{\boldsymbol{w}_\epsilon^*\}_\epsilon$ est aussi bornée. En fait, comme $\boldsymbol{u}^0$ est aussi une solution de $\mathbf{(PV)}_{\mu^0, \boldsymbol{u}^0}$ c'est-à-dire $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}(\mu^0) = \boldsymbol{u}(\mu^0, \boldsymbol{u}^0)$, nous avons

$$\|\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{w}_\epsilon^*\|_{\boldsymbol{W}}^2 \le 2\epsilon J_\epsilon(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*) \le 2\epsilon J_\epsilon(\mu^0, \boldsymbol{u}^0) = 2\epsilon J(\mu^0) . \tag{7.8.18}$$

D'après (7.8.17) et (7.8.18) nous concluons que

$$\boldsymbol{w}_{\epsilon_p}^* \rightharpoonup \boldsymbol{u} \quad \text{dans } \boldsymbol{W} \text{ faible} . \tag{7.8.19}$$

Alors on peut passer à la limite dans $\mathbf{(PV)}_{\mu_{\epsilon_p}^*, \boldsymbol{w}_{\epsilon_p}^*}$ et on obtient que $\boldsymbol{u}$ satisfait $\mathbf{(PV)}_{\mu^*}$ soit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ où $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}(\mu^*)$.

En outre, parceque μ^0 est une solution de $(\mathbf{PC})$, nous obtenons

$$\begin{aligned} J(\mu^*) &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_d)^2 \,\mathrm{ds} \le \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_d)^2 \,\mathrm{ds} + \frac{1}{2}\|\mu^* - \mu^0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \\ &\le \liminf_{\epsilon_p \to 0} J_{\epsilon_p}(\mu_{\epsilon_p}^*, \boldsymbol{w}_{\epsilon_p}^*) \le \liminf_{\epsilon_p \to 0} J_{\epsilon_p}(\mu^0, \boldsymbol{u}^0) = J(\mu^0) \le J(\mu^*) \end{aligned} \tag{7.8.20}$$

ce qui implique $\mu^* = \mu^0$, $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^0$. Alors la suite $\{(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*, \boldsymbol{u}_\epsilon^*)\}_\epsilon$ converge dans $L^2(\Gamma_2) \times \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ faible vers $(\mu^0, \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^0)$.

D'autre part de (7.8.18) nous avons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\epsilon}\|\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{w}_\epsilon^*\|_{\boldsymbol{W}}^2 + \frac{1}{2}\|\mu_\epsilon^* - \mu^0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 = J_\epsilon(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*) \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{u}_d)^2 \,\mathrm{ds} \le J(\mu^0) - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{u}_d)^2 \,\mathrm{ds} \end{aligned} \tag{7.8.21}$$

d'où

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{2\epsilon}\|\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{w}_\epsilon^*\|_{\boldsymbol{W}}^2 + \frac{1}{2}\|\mu_\epsilon^* - \mu^0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2\right) \le J(\mu^0) - \frac{1}{2}\liminf_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_2}(\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{u}_d)^2\,\mathrm{ds} \le 0$$

ce qui entraîne

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\|\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{w}_\epsilon^*\|_{\boldsymbol{W}} = \lim_{\epsilon\to 0}\|\mu_\epsilon^* - \mu^0\|_{L^2(\Gamma_2)} = 0\ . \tag{7.8.22}$$

soit les relations $(7.8.13)_1$ et (7.8.14).

Maintenant, choisissant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_\epsilon^*$ dans $(\mathbf{PV})_{\mu^0}$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^0$ dans $(\mathbf{PV})_{\mu_\epsilon^*,\boldsymbol{w}_\epsilon^*}$ par addition nous obtenons

$$\begin{aligned}&\alpha\limsup_{\epsilon\to 0}\|\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{u}^0\|_1^2 \le a(\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{u}^0)\\ &\quad\le \lim_{\epsilon\to 0}(j(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*, \boldsymbol{u}^0) - j(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*, \boldsymbol{u}_\epsilon^*) + j(\mu^0, \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}_\epsilon^*) - j(\mu^0, \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^0)) = 0\end{aligned} \tag{7.8.23}$$

d'où $(7.8.13)_3$ et, d'après (7.8.18), on obtient $(7.8.13)_2$. Remarquons qu'on a toujours utiliser que $\boldsymbol{u}_\epsilon^* = \boldsymbol{u}(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*)$ et $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}(\mu^0)$ donc $\|\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{u}^0\|_{\boldsymbol{W}} = \|\boldsymbol{u}_\epsilon^* - \boldsymbol{u}^0\|$ (rappelons que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\boldsymbol{V}$).

Finalement, d'après les définitions (7.8.7) de J_ϵ et (7.8.3) de J, en utilisant $(7.8.13)_{1,3}$ et (7.8.22) on obtient (7.8.15). ■

Jusqu-à présent nous avons réduit les restrictions de notre problème de contrôle optimal à une inéquation variationnelle de deuxième espèce. Malheureusment, le problème $(\mathbf{PC})_\epsilon$, même si elle est plus simple que le problème initial, il ne nous permet pas d'obtenir les conditions d'optimalité pour un contrôle optimal puisque la fonctionnelle J_ϵ n'est pas différentiable. Afin d'éviter cette difficulté, nous considérons, pour tout $\epsilon > 0$, une famille de problèmes régularisés :

Problème $(\mathbf{PC})_\epsilon^\rho$: Trouver $(\mu_{\epsilon\rho}^*, \boldsymbol{w}_{\epsilon\rho}^*) \in M \times \boldsymbol{W}$ tel que

$$J_\epsilon^\rho(\mu_{\epsilon\rho}^*, \boldsymbol{w}_{\epsilon\rho}^*) = \min_{(\mu,\boldsymbol{w})\in M\times\boldsymbol{W}} J_\epsilon^\rho(\mu, \boldsymbol{w}) \tag{7.8.24}$$

où $\{J_\epsilon^\rho\}_\rho$ est une famille de fonctionnelles définies par

$$\begin{aligned}J_\epsilon^\rho(\mu, \boldsymbol{w}) &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2}(\boldsymbol{u}(\mu, \boldsymbol{w}, \rho) - \boldsymbol{u}_d)^2\,\mathrm{ds} + \frac{1}{2\epsilon}\|\boldsymbol{u}(\mu, \boldsymbol{w}, \rho) - \boldsymbol{w}\|_W^2\\ &\quad+\frac{1}{2}\|\mu - \mu^0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \quad \forall\mu \in M\ ,\ \forall\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}\end{aligned} \tag{7.8.25}$$

où $\boldsymbol{u}(\mu, \boldsymbol{w}, \rho)$, cette fois ci, est la solution unique de l'équation variationnelle

$$
(\mathbf{PV})^{\rho}_{\mu,\boldsymbol{w}} \qquad \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \\ a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\nabla j^{\rho}_{\mu,\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + (\beta^{\rho}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \end{array}\right\} \tag{7.8.26}
$$

$\beta^{\rho} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ étant l'approximation de Yoshida (voir, par exemple, [103], [121]) de la sous-différentielle $\beta = \partial I_K$, I_K étant la fonction indicatrice de $\boldsymbol{K}$ et $\{j^{\rho}_{\mu,\boldsymbol{w}}\}_{\rho}$ étant une famille de fonctionnelles convexes $j^{\rho}_{\mu,\boldsymbol{w}} : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ qui sont de classe C^2 faible soit $\nabla j^{\rho}_{\mu,\boldsymbol{w}} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ et $\nabla^2 j^{\rho}_{\mu,\boldsymbol{w}} : \boldsymbol{V} \to \mathcal{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}')$ sont faiblement continus et satisfaitent les conditions suivantes

$$
(\mu, \boldsymbol{w}) \longmapsto j^{\rho}_{\mu,\boldsymbol{w}} \text{ est linéaire} \tag{7.8.27}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\rho\to 0} j^{\rho}_{\mu_\rho,\boldsymbol{w}_\rho}(\boldsymbol{v}) = j(\mu, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \\ \forall (\mu_\rho, \boldsymbol{w}_\rho) \rightharpoonup (\mu, \boldsymbol{w}) \ \text{ dans } \ L^2(\Gamma_2) \times \boldsymbol{W} \text{ faible} \end{array}\right\} \tag{7.8.28}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} \liminf\limits_{\rho\to 0} j^{\rho}_{\mu_\rho,\boldsymbol{w}_\rho}(\boldsymbol{v}_\rho) \geq j(\mu, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \\ \forall (\mu_\rho, \boldsymbol{w}_\rho, \boldsymbol{v}_\rho) \rightharpoonup (\mu, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \ \text{ dans } \ L^2(\Gamma_2) \times \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{V} \text{ faible} \end{array}\right\} \tag{7.8.29}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to \infty} j^{\rho}_{\mu_n,\boldsymbol{w}_n}(\boldsymbol{v}_n) = j^{\rho}_{\mu,\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) \\ \forall (\mu_n, \boldsymbol{w}_n, \boldsymbol{v}_n) \rightharpoonup (\mu, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) \ \text{ dans } \ L^2(\Gamma_2) \times \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{V} \text{ faible} \end{array}\right\} \tag{7.8.30}
$$

Remarque 7.8.2 *Nous pouvons choisir*

$$
j^{\rho}_{\mu,\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) = j(\mu, \boldsymbol{w}, \varphi^{\rho}(\boldsymbol{v}_\tau)) = -\int_{\Gamma_2} \mu \mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{w}))\varphi^{\rho}(\boldsymbol{v}_\tau)\,\mathrm{ds}\,,
$$

où la fonction $\varphi^{\rho} : (L^2(\Gamma_2))^p \to L^2(\Gamma_2)$ *est une approximation (voir [92]) de la fonction* $|\cdot| : (L^2(\Gamma_2))^p \to L^2(\Gamma_2)$ *qui est définie, pour* $\rho > 0$, $\boldsymbol{v} \in (L^2(\Gamma_2))^p$ *et presque tous* $x \in \Gamma_2$, *selon*

$$
\varphi^{\rho}(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} \dfrac{|\boldsymbol{v}|^2}{\rho}(1 - \dfrac{|\boldsymbol{v}|}{3\rho}) & \text{si } \ |\boldsymbol{v}(x)| \leq \rho\,, \\ \rho(\dfrac{|\boldsymbol{v}|}{\rho} - \dfrac{1}{3}) & \text{si } \ |\boldsymbol{v}(x)| \geq \rho\,. \end{cases}
$$

Dans ce cas, il est facile à vérifier que

$$
\nabla j^{\rho}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{p} = -\int_{\Gamma_2} \mu \mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{w}))\ (\varphi^{\rho})'(\boldsymbol{v}_\tau) \cdot \boldsymbol{p}_\tau\,\mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{V}\,,
$$

où $(\varphi^\rho)' : (L^2(\Gamma_2))^p \to (L^2(\Gamma_2))^p$ *est donné par*

$$(\varphi^\rho)'(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}(2 - \dfrac{|\boldsymbol{v}|}{\rho})\boldsymbol{v} & si \ \ |\boldsymbol{v}(x)| \le \rho \ , \\ \dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} & si \ \ |\boldsymbol{v}(x)| \ge \rho \ , \end{cases}$$

De plus, pour tout $\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{p} \in (L^2(\Gamma_2))^p$, *on obtient*

$$(\varphi^\rho)''(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}((2 - \dfrac{|\boldsymbol{v}|}{\rho})\boldsymbol{p} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}) & si \ \ |\boldsymbol{v}(x)| \le \rho \ , \\ \dfrac{1}{|\boldsymbol{v}|}(\boldsymbol{p} - \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v}) & si \ \ |\boldsymbol{v}(x)| \ge \rho \ . \end{cases}$$

et

$$(\nabla^2 j^\rho_{\mu\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = -\int_{\Gamma_2} \mu\mathcal{R}(\sigma_\nu(\boldsymbol{w}))\ (\varphi^\rho)''(\boldsymbol{v}_\tau\cdot\boldsymbol{p}_\tau)\cdot\boldsymbol{q}_\tau\,\mathrm{ds} \quad \forall\boldsymbol{v},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{V}\ .$$

Nous allons prouver que chaque problème $\mathbf{(PC)}^\rho_\epsilon$ admet au moins une solution et qu'ils forment une famille se rapprochant de $\mathbf{(PC)}_\epsilon$ dans un sens que nous préciserons.

Proposition 7.8.3 *Pour tout* $\rho > 0$ *il existe au moins une solution* $(\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}) \in M \times \boldsymbol{W}$ *du problème* $\mathbf{(PC)}^\rho_\epsilon$. *En outre, il existe les éléments* $(\mu^*_\epsilon, \boldsymbol{w}^*_\epsilon, \boldsymbol{u}^*_\epsilon) \in M \times \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{K}$ *tels que*

$$\left.\begin{array}{ll} \mu^*_{\epsilon\rho} \rightharpoonup \mu^*_\epsilon & dans\ \ L^2(\Gamma_2)\ \ faible\ , \\ \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho} \rightharpoonup \boldsymbol{w}^*_\epsilon & dans\ \ \boldsymbol{W}\ \ faible\ , \\ \boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} \to \boldsymbol{u}^*_\epsilon & dans\ \ \boldsymbol{V}\ \ fort\ , \end{array}\right\} \tag{7.8.31}$$

quand $\rho \to 0$, *où* $\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} = \boldsymbol{u}(\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}, \rho)$. *De plus, nous avons*

$$\boldsymbol{u}^*_\epsilon = \boldsymbol{u}(\mu^*_\epsilon, \boldsymbol{w}^*_\epsilon) \tag{7.8.32}$$

et

$$\lim_{\rho\to 0} J^\rho_\epsilon(\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}) = J_\epsilon(\mu^*_\epsilon, \boldsymbol{w}^*_\epsilon) = \min_{(\mu,\boldsymbol{w})\in M\times\boldsymbol{W}} J_\epsilon(\mu, \boldsymbol{w})\,. \tag{7.8.33}$$

Démonstration. La fonctionnelle J^ρ_ϵ a la même forme que J_ϵ avec $\boldsymbol{u}$ satisfaisant une contrainte plus simple et régularisée. Ainsi, en faisant valeur que dans la démonstration du Proposition 7.8.1, on obtient l'existence d'un contrôle optimal pour $\mathbf{(PC)}^\rho_\epsilon$. On remarque que l'existence et l'unicité de la solution $\boldsymbol{u}(\mu, \boldsymbol{w}, \rho)$ de $\mathbf{(PV)}^\rho_{\mu,\boldsymbol{w}}$ est facilement obtenu en appliquant le théorème de surjectivité de Browder (voir, par exemple [22], [56], [19]) l'opérateur

$A+\nabla j^{\rho}_{\mu,\boldsymbol{w}}+\beta^{\rho}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}'$ étant fortement monotone, hémicontinu et coercif sur $\boldsymbol{V}$ (un espace de Banach réflexif réel), donc bijectif.

Prouvons la deuxième partie de la proposition. Soit $(\mu^*_{\epsilon\rho},\boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho})\in M\times\boldsymbol{W}$ une solution de $\mathbf{(PC)}^{\rho}_{\epsilon}$. Parceque $\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}=\boldsymbol{u}(\mu^*_{\epsilon\rho},\boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho},\rho)\in\boldsymbol{W}$ et $\{\mu^*_{\epsilon\rho}\}_{\rho}\subset M$, il suit que les suites $\{\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}\}_{\rho}$ et $\{\mu^*_{\epsilon\rho}\}_{\rho}$ sont bornées donc il existe les éléments $\mu^*_{\epsilon}\in M$ et $\boldsymbol{u}_{\epsilon}\in\boldsymbol{W}$ tels que, sur des sous-suites, on a

$$\left.\begin{array}{ll}\mu^*_{\epsilon\rho_p}\rightharpoonup\mu^*_{\epsilon} & \text{dans } L^2(\Gamma_2) \text{ faible },\\ \boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho_p}\rightharpoonup\boldsymbol{u}_{\epsilon} & \text{dans } \boldsymbol{W} \text{ faible}\end{array}\right\}\tag{7.8.34}$$

quand $p\to+\infty$.

Par souci de simplicité nous omettrons l'indice p à partir de maintenant.

D'autre part, parceque $j(\mu,\mathbf{0},\boldsymbol{v})=0$, $\forall(\mu,\boldsymbol{v})\in L^2(\Gamma_2)\times\boldsymbol{V}$, il résult $\boldsymbol{u}(\mu^*_{\epsilon},\mathbf{0},\rho)=\boldsymbol{u}(\mu^*_{\epsilon},\mathbf{0})$ donc nous avons

$$\|\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}-\boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}\|^2_{\boldsymbol{W}}\le 2\epsilon J^{\rho}_{\epsilon}(\mu^*_{\epsilon\rho},\boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho})\le 2\epsilon J^{\rho}_{\epsilon}(\mu^*_{\epsilon},\mathbf{0})=2\epsilon J_{\epsilon}(\mu^*_{\epsilon},\mathbf{0})$$

soit la suite $\{\boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}\}_{\rho}$ est bornée d'où il résulte qu'il existe $\boldsymbol{w}^*_{\epsilon}\in\boldsymbol{W}$ tel que sur une sous-suite, encore notée $\boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}$, on a

$$\boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}\rightharpoonup\boldsymbol{w}^*_{\epsilon}\quad\text{dans } \boldsymbol{W} \text{ faible }.$$

quand $\rho\to 0$.

Alors, en passant à la limite dans $\mathbf{(PV)}^{\rho}_{\mu^*_{\epsilon\rho},\boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}$ quand $\rho\to 0$, nous obtenons que $\boldsymbol{u}_{\epsilon}=\boldsymbol{u}^*_{\epsilon}\in\boldsymbol{K}$ où $\boldsymbol{u}^*_{\epsilon}=\boldsymbol{u}(\mu^*_{\epsilon},\boldsymbol{w}^*_{\epsilon})$.

En outre, de $\mathbf{(PV)}_{\mu^*_{\epsilon},\boldsymbol{w}^*_{\epsilon}}$ et $\mathbf{(PV)}^{\rho}_{\mu^*_{\epsilon\rho},\boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}$, (7.8.28), (7.8.29) et tenand compte que $j(\mu,\boldsymbol{w},\cdot)$ est faiblement continu, nous obtenons

$$\begin{aligned}\alpha\limsup_{\rho\to 0}\|\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}-\boldsymbol{u}^*_{\epsilon}\|^2_1&\le\lim_{\rho\to 0}j^{\rho}_{\mu^*_{\epsilon\rho},\boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon})-j(\mu^*_{\epsilon},\boldsymbol{w}^*_{\epsilon},\boldsymbol{u}^*_{\epsilon})\\ &-\liminf_{\rho\to 0}j^{\rho}_{\mu^*_{\epsilon\rho},\boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho})+\lim_{\rho\to 0}j(\mu^*_{\epsilon},\boldsymbol{w}^*_{\epsilon},\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho})\le 0\end{aligned}$$

soit la relation $(7.8.31)_3$.

Afin de prouver (7.8.33), soient $(\mu^0_{\epsilon},\boldsymbol{w}^0_{\epsilon})\in M\times\boldsymbol{W}$ une solution de $\mathbf{(PC)}_{\epsilon}$, $\boldsymbol{u}^0_{\epsilon}=\boldsymbol{u}(\mu^0_{\epsilon},\boldsymbol{w}^0_{\epsilon})$ et $\boldsymbol{u}^0_{\epsilon\rho}=\boldsymbol{u}(\mu^0_{\epsilon},\boldsymbol{w}^0_{\epsilon},\rho)$. La suite $\{\boldsymbol{u}^0_{\epsilon\rho}\}_{\rho}$ étant bornée dans $\boldsymbol{W}$, de l'unicité de la solution de $\mathbf{(PV)}_{\mu^0_{\epsilon},\boldsymbol{w}^0_{\epsilon}}$ et des propriétés (7.8.28)-(7.8.30) de $j^{\rho}_{\mu,\boldsymbol{w}}$ on déduit que $\boldsymbol{u}^0_{\epsilon\rho}\to\boldsymbol{u}^0_{\epsilon}$ dans $\boldsymbol{W}$ fort quand $\rho\to 0$. Donc

$$\limsup_{\rho\to 0}\|\boldsymbol{u}^0_{\epsilon\rho}-\boldsymbol{w}^0_{\epsilon}\|_{\boldsymbol{W}}\le\|\boldsymbol{u}^0_{\epsilon}-\boldsymbol{w}^0_{\epsilon}\|_{\boldsymbol{W}}\,.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
&J_\epsilon(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*) \leq \liminf_{\rho\to 0} J_\epsilon^\rho(\mu_{\epsilon\rho}^*, \boldsymbol{w}_{\epsilon\rho}^*) \leq \limsup_{\rho\to 0} J_\epsilon^\rho(\mu_{\epsilon\rho}^*, \boldsymbol{w}_{\epsilon\rho}^*) \\
&\leq \limsup_{\rho\to 0} J_\epsilon^\rho(\mu_\epsilon^0, \boldsymbol{w}_\epsilon^0) \leq \frac{1}{2}\lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{u}_{\epsilon\rho}^0 - \boldsymbol{u}_d)^2 \,\mathrm{ds} + \frac{1}{2\epsilon}\limsup_{\rho\to 0} \|\boldsymbol{u}_{\epsilon\rho}^0 - \boldsymbol{w}_\epsilon^0\|_{\boldsymbol{W}}^2 \\
&+\frac{1}{2}\|\mu_\epsilon^0 - \mu^0\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 \leq J_\epsilon(\mu_\epsilon^0, \boldsymbol{w}_\epsilon^0) \leq J_\epsilon(\mu_\epsilon^*, \boldsymbol{w}_\epsilon^*)
\end{aligned}$$

d'où (7.8.33) ce qui achève la démonstration de Proposition 7.8.3. ■

Utilisant toutes les convergences précédentes, on obtient finalement que $\mu_{\epsilon\rho}^*$ est un sous-optimal pour problème **(PC)** :

Proposition 7.8.4 *Soit* $(\mu_{\epsilon\rho}^*, \boldsymbol{w}_{\epsilon\rho}^*) \in M \times \boldsymbol{W}$ *une solution du problène de contrôle optimal* $\mathbf{(PC)}_\epsilon^\rho$. *Alors*

$$\lim_{\epsilon,\,\rho\to 0} J(\mu_{\epsilon\rho}^*) = J(\mu^0)\,. \tag{7.8.35}$$

Démonstration. Soient $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho} = \boldsymbol{u}(\mu_{\epsilon\rho}^*)$ et $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}(\mu^0)$. Choisissant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^0$ dans $\mathbf{(PV)}_{\mu_{\epsilon\rho}^*}$ et $\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}$ dans $\mathbf{(PV)}_{\mu^0}$, par addition et utilisant les propriétés de a et j, il vient

$$\begin{aligned}
&\alpha\|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{u}^0\|^2 \leq a(\tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{u}^0, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{u}^0) \leq |j(\mu_{\epsilon\rho}^*, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{u}^0) - j(\mu_{\epsilon\rho}^*, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}) \\
&+j(\mu^0, \boldsymbol{u}^0, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}) - j(\mu^0, \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^0)| \leq |(j(\mu^0, \boldsymbol{u}^0, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}) - j(\mu^0, \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^0) \\
&+j(\mu^0, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{u}^0) - j(\mu^0, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}))| + |(j(\mu_{\epsilon\rho}^*, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{u}^0) - j(\mu^0, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{u}^0)) \\
&-(j(\mu_{\epsilon\rho}^*, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}) - j(\mu^0, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}, \tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}))| \leq k\|\mu^0\|_{L^2(\Gamma_2)}\|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{u}^0\|_{\boldsymbol{V}}^2 \\
&+k\|\mu_{\epsilon\rho}^* - \mu^0\|_{L^2(\Gamma_2)}\|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}\|\,\|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{u}^0\|\,.
\end{aligned}$$

La suite $\{\tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho}\}_\rho$ étant bornée, prenant $\mu_1 < \dfrac{\alpha}{k}$ (la même condition comme dans Section 7.3, Théorème 7.3.2 page 144, pour l'unicité de la solution de $\mathbf{(PV)}_\mu$, il vient

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{u}^0\| \leq C\|\mu_{\epsilon\rho}^* - \mu^0\|_{L^2(\Gamma_2)}$$

avec C une constante indépendente de ϵ et ρ.

Par conséquent, les convergences (7.8.31) et (7.8.13), permettrent d'obtenir (7.8.35).

■

Pour obtenir les conditions d'optimalitées pour une solution du problème $\mathbf{(PV)}_\epsilon^\rho$, le premier résultat que nous montrons est la G-différentiabilité de J_ϵ^ρ.

Lemme 7.8.1 *La fonctionnelle J_ϵ^ρ est G-différentiable et pour tout $(\mu^*, \boldsymbol{w}^*) \in M \times \boldsymbol{W}$ nous avons*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial J_\epsilon^\rho}{\partial \mu}(\mu^*, \boldsymbol{w}^*) \cdot (\mu - \mu^*) = \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{z}_\mu^*(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_d)\,\mathrm{ds} \\ &+\frac{1}{\epsilon}(\boldsymbol{z}_\mu^*, \boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{w}^*)_{\boldsymbol{W}} + (\mu - \mu^*, \mu^* - \mu^0)_{L^2(\Gamma_2)} \quad \forall \mu \in M \end{aligned} \tag{7.8.36}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{\partial J_\epsilon^\rho}{\partial \boldsymbol{w}}(\mu^*, \boldsymbol{w}^*) \cdot \boldsymbol{w} = \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{w}}^*(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_d)\,\mathrm{ds} \\ &+\frac{1}{\epsilon}(\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{w}}^* - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{w}^*)_{\boldsymbol{W}} \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W} \end{aligned} \tag{7.8.37}$$

où $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}(\mu^*, \boldsymbol{w}^*, \rho)$ est la solution unique de $\mathbf{(PV)}^\rho_{\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}$ et $\boldsymbol{z}_\mu^*$, $\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{w}}^* \in \boldsymbol{W}$ sont les solutions uniques des problèmes

$$\begin{aligned} &a(\boldsymbol{z}_\mu^*, \boldsymbol{v}) + \langle \nabla^2 j^\rho_{\mu^*, \boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}^*) \cdot \boldsymbol{z}_\mu^*, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} + \langle \nabla \beta^\rho(\boldsymbol{u}^*) \cdot \boldsymbol{z}_\mu^*, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} \\ &\quad = \langle \nabla j^\rho_{\mu^* - \mu, \boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \end{aligned} \tag{7.8.38}$$

respectivement,

$$\begin{aligned} &a(\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{w}}^*, \boldsymbol{v}) + \langle \nabla^2 j^\rho_{\mu^*, \boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}^*) \cdot \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{w}}^*, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} + \langle \nabla \beta^\rho(\boldsymbol{u}^*) \cdot \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{w}}^*, \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} \\ &= -\langle \nabla j^\rho_{\mu^*, \boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \end{aligned} \tag{7.8.39}$$

Démonstration. Soit $(\mu^*, \boldsymbol{w}^*) \in M \times \boldsymbol{W}$.

Pour tout $t \in (0,1)$ et $\mu \in M$, soient $\mu_t = \mu^* + t(\mu - \mu^*)$, $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}(\mu_t, \boldsymbol{w}^*, \rho)$. De $\mathbf{(PV)}^\rho_{\mu_t, \boldsymbol{w}^*}$, en utilisant la positivité de $\nabla j^\rho_{\mu_t, \boldsymbol{w}^*}$ et β^ρ, on obtient

$$\|\boldsymbol{u}_t\| \leq C \tag{7.8.40}$$

avec C une constant indépendente de t.

Posons $\boldsymbol{z}_t = \dfrac{\boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}^*}{t}$ où $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}(\mu^*, \boldsymbol{w}^*, \rho)$. Évidemment $\boldsymbol{z}_t \in \boldsymbol{W}$ et de $\mathbf{(PV)}^\rho_{\mu^*, \boldsymbol{w}^*}$ et $\mathbf{(PV)}^\rho_{\mu_t, \boldsymbol{w}^*}$ il résulte que $\boldsymbol{z}_t$ satisfait

$$\begin{aligned} &a(\boldsymbol{z}_t, \boldsymbol{v}) + \frac{\langle \nabla j^\rho_{\mu^*, \boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}^* + t\boldsymbol{z}_t) - \nabla j^\rho_{\mu^*, \boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}}}{t} \\ &+ \frac{\langle \beta^\rho(\boldsymbol{u}^* + t\boldsymbol{z}_t) - \beta^\rho(\boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}}}{t} = \langle \nabla j^\rho_{\mu^* - \mu, \boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}^* + t\boldsymbol{z}_t), \boldsymbol{v} \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,. \end{aligned} \tag{7.8.41}$$

Prenand dans (7.8.41) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}^*$, grâce à la monotonie de $\nabla j^\rho_{\mu^*, \boldsymbol{w}^*}$ et de l'opérateur β^ρ, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\alpha \|\boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}^*\|^2 \leq a(\boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}^*) \leq a(\boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}^*) \\ &+\langle \nabla j^\rho_{\mu^*, \boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}_t) - \nabla j^\rho_{\mu^*, \boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}^* \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} + \langle \beta^\rho(\boldsymbol{u}_t) - \beta^\rho(\boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}^* \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} \\ &= t \langle \nabla j^\rho_{\mu^* - \mu, \boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}_t), \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}^* \rangle_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} \leq Ct \|\boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}^*\|\, \|\boldsymbol{u}_t\| \end{aligned} \tag{7.8.42}$$

ce qui, joint à (7.8.40), donne

$$\|\boldsymbol{z}_t\| \leq C\,. \tag{7.8.43}$$

On peut extraire alors une sous-suite $\{\boldsymbol{z}_{t_k}\}_k$ telle que $\boldsymbol{z}_{t_k} \rightharpoonup \boldsymbol{z}^*_\mu$ dans $\boldsymbol{V}$ faible. Alors, de façon évidente, $\boldsymbol{u}_{t_k} \rightharpoonup \boldsymbol{u}^*$ dans $\boldsymbol{V}$ faible. En passant à la limite dans (7.8.41) avec $t \to 0$ et en tenand compte que l'opérateur $\nabla j^\rho_{\mu^*-\mu,\boldsymbol{w}^*}$ est hémicontinu, il vient que $\boldsymbol{z}^*_\mu$ satisfait (7.8.38).

L'unicité de la solution de (7.8.38) est immédiat. Ainsi, grâce aux propriétés de $\nabla^2 j^\rho_{\mu,\boldsymbol{w}}$ et $\nabla\beta^\rho$ on a

$$\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2) = -\langle \nabla^2 j^\rho_{\mu^*,\boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}^*)\cdot(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2), \boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2\rangle_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}\\
&-\langle \nabla\beta^\rho(\boldsymbol{u}^*)\cdot(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2), \boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2\rangle_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{z}_1,\ \boldsymbol{z}_2 \in \boldsymbol{W}\,.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer la différentielle au sens de Gâteaux de J^ρ_ϵ.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial J^\rho_\epsilon}{\partial\mu}(\mu^*, \boldsymbol{w}^*)\cdot(\mu - \mu^*) = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\Big(\int_{\Gamma_2} \frac{(\boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}_d)^2 - (\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_d)^2}{t}\,\mathrm{ds}\\
&+\frac{1}{\epsilon}\frac{\|\boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{w}^*\|^2_{\boldsymbol{W}} - \|\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{w}^*\|^2_{\boldsymbol{W}}}{t} + \frac{\|\mu_t - \mu^0\|^2_{L^2(\Gamma_2)} - \|\mu^* - \mu^0\|^2_{L^2(\Gamma_2)}}{t}\Big)\\
&= \lim_{t\to 0}\Big(\int_{\Gamma_2}(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_d)\boldsymbol{z}_t\,\mathrm{ds} + \frac{t}{2}\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{z}_t^2\,\mathrm{ds} + \frac{1}{\epsilon}(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{z}_t)_{\boldsymbol{W}} + \frac{t}{2\epsilon}\|\boldsymbol{z}_t\|^2_{\boldsymbol{W}}\\
&+(\mu^* - \mu^0, \mu - \mu^*)_{L^2(\Gamma_2)} + \frac{t}{2}\|\mu - \mu^*\|^2_{L^2(\Gamma_2)}\Big) = \int_{\Gamma_2}\boldsymbol{z}^*_\mu(\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_d)\,\mathrm{ds}\\
&+\frac{1}{\epsilon}(\boldsymbol{z}^*_\mu, \boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{w}^*)_{\boldsymbol{W}} + (\mu - \mu^*, \mu^* - \mu^0)_{L^2(\Gamma_2)} \quad \forall \mu \in M
\end{aligned}$$

soit (7.8.36).

Maintenant, pour tout $t \in (0,1)$ et $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$, posons $\boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{w}^* + t\boldsymbol{w}$ et soient $\tilde{\boldsymbol{u}}_t = \boldsymbol{u}(\mu^*, \boldsymbol{w}_t, \rho)$ et $\boldsymbol{h}_t = \dfrac{\tilde{\boldsymbol{u}}_t - \boldsymbol{u}^*}{t}$. Il est facile à montrer que $\boldsymbol{h}_t$ satisfait

$$\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{h}_t, \boldsymbol{v}) + \frac{\langle \nabla j^\rho_{\mu^*,\boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}^* + t\boldsymbol{h}_t) - \nabla j^\rho_{\mu^*,\boldsymbol{w}^*}(\boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}}{t}\\
&+\frac{\langle \beta^\rho(\boldsymbol{u}^* + t\boldsymbol{h}_t) - \beta^\rho(\boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}}{t} = -\langle \nabla j^\rho_{\mu^*,\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}^* + t\boldsymbol{h}_t), \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,.
\end{aligned}$$

d'où, en procédant comme dans la première partie de la démontration, on montre (7.8.37) avec $\boldsymbol{h}^*_{\boldsymbol{w}}$ la limite faible dans $\boldsymbol{W}$ de la suite $\{\boldsymbol{h}_t\}_t$. ∎

Le résultat principal de ce chapitre et le théorème suivant qui donne les conditions nécessaires d'optimalité pour chaque problème $\mathbf{(PC)}^\rho_\epsilon$.

Théorème 7.8.2 *Soit* $(\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}) \in M \times \boldsymbol{W}$ *une solution du problème de contrôle* $(\mathbf{PC})^\rho_\epsilon$. *Alors il existe les éléments uniques* $(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}) \in \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ *tels que*

$$a(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{v}) + \langle \nabla j^\rho_{\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}), \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + \langle \beta^\rho(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}), \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \tag{7.8.44}$$

$$\begin{aligned} &a(\boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{v}) + \langle \nabla^2 j^\rho_{\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}) \cdot \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}'\times\boldsymbol{W}} + \langle \nabla j^\rho_{\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}) \cdot \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}'\times\boldsymbol{W}} \\ &+\langle \nabla\beta^\rho(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}) \cdot \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}'\times\boldsymbol{W}} = -\int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{u}_d)\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}\,, \end{aligned} \tag{7.8.45}$$

$$\langle \nabla j^\rho_{\mu-\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}), \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}\rangle_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + (\mu - \mu^*_{\epsilon\rho}, \mu^*_{\epsilon\rho} - \mu^0)_{L^2(\Gamma_2)} \geq 0 \quad \forall \mu \in M \tag{7.8.46}$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}$ la solution de (7.8.44) à savoir $\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} = \boldsymbol{u}(\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}, \rho)$. Prenons $\boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}$ la solution unique (on remarque que $\nabla^2 j^\rho_{\mu,\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}) + \nabla\beta^\rho(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{L}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}')$ est un opérateur positif) du problème suivant

$$\begin{aligned} &a(\boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{v}) + \langle \nabla^2 j^\rho_{\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}) \cdot \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}'\times\boldsymbol{W}} + \langle \nabla\beta^\rho(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}) \cdot \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{v}\rangle_{\boldsymbol{W}'\times\boldsymbol{W}} \\ &= -\int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{u}_d)\boldsymbol{v}\,\mathrm{ds} - \frac{1}{\epsilon}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{W}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}\,. \end{aligned} \tag{7.8.47}$$

Puisque $(\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho})$ est une solution de $(\mathbf{PC})^\rho_\epsilon$, il suit

$$\begin{aligned} &\frac{\partial J^\rho_\epsilon}{\partial\mu}(\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}) \cdot (\mu - \mu^*_{\epsilon\rho}) \geq 0 \quad \forall \mu \in M\,, \\ &\frac{\partial J^\rho_\epsilon}{\partial \boldsymbol{w}}(\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}) \cdot \boldsymbol{w} = 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}\,. \end{aligned}$$

Alors de (7.8.36) et utilisant (7.8.47) pour $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{z}_\mu$ et (7.8.38) pour $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial J^\rho_\epsilon}{\partial\mu}(\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}) \cdot (\mu - \mu^*_{\epsilon\rho}) = \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{z}^*_\mu(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{u}_d)\,\mathrm{ds} + \frac{1}{\epsilon}(\boldsymbol{z}^*_\mu, \boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho})_{\boldsymbol{W}} \\ &+(\mu - \mu^*_{\epsilon\rho}, \mu^*_{\epsilon\rho} - \mu^0)_{L^2(\Gamma_2)} = -a(\boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{z}^*_\mu) - \langle \nabla^2 j^\rho_{\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}) \cdot \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{z}_\mu\rangle_{\boldsymbol{W}'\times\boldsymbol{W}} \\ &-\langle \nabla\beta^\rho(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}) \cdot \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{z}_\mu\rangle_{\boldsymbol{W}'\times\boldsymbol{W}} + (\mu - \mu^*_{\epsilon\rho}, \mu^*_{\epsilon\rho} - \mu^0)_{L^2(\Gamma_2)} \\ &= \langle \nabla j^\rho_{\mu-\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}), \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}\rangle_{\boldsymbol{W}'\times\boldsymbol{W}} + (\mu - \mu^*_{\epsilon\rho}, \mu^*_{\epsilon\rho} - \mu^0)_{L^2(\Gamma_2)} \geq 0 \quad \forall \mu \in M \end{aligned} \tag{7.8.48}$$

soit (7.8.46).

Finalement, de (7.8.37), prenant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{w}}$ dans (7.8.47) et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}$ dans (7.8.39), il vient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial J^\rho_\epsilon}{\partial \boldsymbol{w}}(\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}) \cdot \boldsymbol{w} = \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{h}^*_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{u}_d)\,\mathrm{ds} + \frac{1}{\epsilon}(\boldsymbol{h}^*_{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho})_{\boldsymbol{W}} \\ &= -a(\boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{h}^*_{\boldsymbol{w}}) - \langle \nabla^2 j^\rho_{\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}) \cdot \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{w}}\rangle_{\boldsymbol{W}'\times\boldsymbol{W}} \\ &-\langle \nabla\beta^\rho(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}) \cdot \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{w}}\rangle_{\boldsymbol{W}'\times\boldsymbol{W}} - \frac{1}{\epsilon}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho})_{\boldsymbol{W}} \\ &= \langle \nabla j^\rho_{\mu^*_{\epsilon\rho}, \boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho}), \boldsymbol{p}^*_{\epsilon\rho}\rangle_{\boldsymbol{W}'\times\boldsymbol{W}} - \frac{1}{\epsilon}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}^*_{\epsilon\rho} - \boldsymbol{w}^*_{\epsilon\rho})_{\boldsymbol{W}} = 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W} \end{aligned} \tag{7.8.49}$$

d'où, en utilisant (7.8.47), on obtient (7.8.45). ∎

En prenant en compte les convergences données par Propositions 7.8.2 et 7.8.3, le théorème 7.8.2 représent une caractérisation approximative pour un contrôle optimal μ^0 du problème **(PC)**.

Chapitre 8

Le problème quasi statique

Nous abordons dans ce chapitre le problème quasi statique (les termes d'accélération sont négligés) de Signorini avec frottement non local de Coulomb.

La formulation variationnelle de ce problème contient deux inéquations qui expriment une, la condition de frottement avec le champ des vitesses comme fonction test et l'autre, la condition de contact unilateral avec le champ des déplacements comme fonction test. La présence simultanée du champ des vitesses et du champ des déplacements représente la principale difficulté dans l'établissement de la formulation variationnelle du problème (voir [6], [37]). On va montrer que la formulation variationnelle de ce problème est de type 3.3.24 et l'existence d'une solution sera ici obtenir en appliquant le Théorème 3.3.1 de la page 76 (voir [28]).

8.1 Formulations classique et variationnelle

On va supposer que les champs des forces volumique $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ et des forces surfacique $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t)$ sont appliquées si lentement que les forces d'inertie peuvent être négligées.

Avec les notations de Section 7.1, la formulation classique du problème quasi statique est donnée par l'équation d'équilibre, l'équation constitutive (élasticité linéaire), la relation kinématique (sous l'hypothèse des petits déformations), les conditions imposées sur Γ_0 et Γ_1, les conditions unilatéreaux, la loi de frottement de Coulomb et la condition initiale:

Problème $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_{qs})$: Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^p$ tel que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{f} \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{8.1.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{A}\boldsymbol{\epsilon}\,, \qquad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \tag{8.1.2}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0,T)\,, \tag{8.1.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{t} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0,T)\,, \tag{8.1.4}$$

$$u_\nu \le 0\,, \quad \sigma_\nu \le 0\,, \quad u_\nu \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T)\,, \tag{8.1.5}$$

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau| \le \mu |\sigma_\nu| \ \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} |\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mu |\mathcal{R}\sigma_\nu| \ \Rightarrow \ \dot{\boldsymbol{u}}_\tau = 0 \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mu |\mathcal{R}\sigma_\nu| \ \Rightarrow \ \exists \lambda \ge 0\,,\ \dot{\boldsymbol{u}}_\tau = -\lambda \boldsymbol{\sigma}_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0,T)\,, \tag{8.1.6}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{dans } \Omega\,. \tag{8.1.7}$$

Pour étudier le problème (8.1.1)-(8.1.7), on suppose que les données satisfaitent

$$\boldsymbol{f} \in W^{1,2}(0,T;(L^2(\Omega))^p),\ \boldsymbol{t} \in W^{1,2}(0,T;(L^2(\Gamma_2))^p) \tag{8.1.8}$$

et on garde les autres hypothèses (7.2.1) et les notations (7.2.2)-(7.2.4) de la page 136 de Section 7.2.

Comme nous avons précisé dans Section 7.1, on a

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{v} \rangle_{1/2,\Gamma_2} = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{\epsilon}(\bar{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{dx} + \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w})\bar{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{dx} \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}^1_{div}(\Omega)\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in (H^{1/2}(\Gamma_2))^p$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2,\Gamma_2}$ désigne le produit de dualité entre $(H^{-1/2}(\Gamma_2))^p$ et $(H^{1/2}(\Gamma_2))^p$ et $\bar{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ satisfait $\bar{\boldsymbol{v}}_\tau = \boldsymbol{v}$ presque partout sur Γ_2.

Alors on définit la composante normal du vecteur contrainte $\sigma_\nu(\boldsymbol{w}) \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$ par

$$\langle \sigma_\nu(\boldsymbol{w}), v \rangle = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{\epsilon}(\bar{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{dx} + \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w})\bar{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{dx} \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}^1_{div}(\Omega)\,, \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_2)$$

où $\bar{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ satisfait $\bar{\boldsymbol{v}}_\tau = \boldsymbol{0}$ et $\bar{v}_\nu = v$ presque partout sur Γ_2, $\langle \cdot, , \cdot \rangle$ désignant le produit de dualité entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$.

Il est facile à vérifier que, pour tout $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}^1_{div}(\Omega)$, les définitions de $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{\nu}$ et $\sigma_\nu(\boldsymbol{w})$ ne dépendent pas sur les choix de la fonction $\bar{\boldsymbol{v}}$ ayant les propriétés ci-dessus, respectivement.

On va considérer la suivante formulation faible du problème $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_{qs})$:

Problème $(\mathbf{P}_{qs})$: Trouver $\boldsymbol{u} \in W^{1,2}(0,T;\boldsymbol{V})$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0\,, \quad \boldsymbol{u}(t) \in \boldsymbol{K} \quad \forall t \in [0,T] \\ a(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)) + j_{\boldsymbol{f}(t)}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) - j_{\boldsymbol{f}(t)}(\boldsymbol{u}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t)) \\ \quad \geq (\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \langle \sigma_\nu(\boldsymbol{u}(t)), v_\nu - \dot{u}_\nu(t) \rangle \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \quad \text{p.p. dans } (0,T]) \\ \langle \sigma_\nu(\boldsymbol{u}(t)), z_\nu - u_\nu(t) \rangle \geq 0 \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{K}\,,\ \forall\, t \in (\,0,T\,]\,. \end{array}\right\} \tag{8.1.9}$$

On suppose que le déplacement initial $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{K}$ satisfait la condition de compatibilité suivante

$$a(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_0) + j_{\boldsymbol{f}(0)}(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_0) \geq (\boldsymbol{F}(0), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_0) \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,. \tag{8.1.10}$$

Pour démontrer l'équivalence entre la formulation classique et la formulation variationnelle, on va prouver d'abord un résultat qui sera utile à la suite.

Remarquont que toutes les équivalences qui seront démontrées sont formelles. On suppose toujours que la solution variationnnelle est suffisamment régulière, ce qui n'est pas, en général, vrai. Ce fait justifie d'appeler une telle fonction $\boldsymbol{u}$, solution faible du problème mécanique.

Lemme 8.1.1 *Soit $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{H}^1_{div}(\Omega)$. Alors les conditions de contact unilatéral*

$$\tilde{u}_\nu \leq 0\,,\ \sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}) \leq 0\,,\ \tilde{u}_\nu\, \sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}) = 0 \qquad \mathit{sur}\ \Gamma_2 \tag{8.1.11}$$

équivaut à

$$\langle \sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}), z_\nu - \tilde{u}_\nu \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \boldsymbol{K}\,. \tag{8.1.12}$$

Démonstration. Si les conditions (8.1.11) sont satisfaites, alors on a

$$\langle \sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}), z_\nu - \tilde{u}_\nu \rangle = \langle \sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}), z_\nu \rangle - \langle \sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}), \tilde{u}_\nu \rangle = \langle \sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}), z_\nu \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \boldsymbol{K}\,.$$

Inversement, si (8.1.12) a lieu, alors en prenant $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{z} = 2\boldsymbol{u}$, on obtient

$$\langle \sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}), \tilde{u}_\nu \rangle = 0 \tag{8.1.13}$$

ce qui, avec l'inéquation (8.1.12), donne

$$\langle \sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}), z_\nu \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \boldsymbol{K}\,. \tag{8.1.14}$$

Les relations (8.1.13), (8.1.14) et la définition de $\boldsymbol{K}$ entraînent (8.1.11) qui achève la démonstration de lemme. ■

Nous sommes maintenant en position de prouver l'équivalence annoncée.

Théorème 8.1.1 *Le problème mécanique* $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_{qs})$ *est formellement équivalent au problème variationnel* $(\mathbf{P}_{qs})$ *dans le sens:*

i) Si $\boldsymbol{u}$ *est une fonction régulière qui vérifie (8.1.1)-(8.1.7) alors* $\boldsymbol{u}$ *est une solution de (8.1.9).*

ii) Si $\boldsymbol{u}$ *est une solution de (8.1.9) alors* $\boldsymbol{u}$ *vérifie (8.1.1)-(8.1.7) en un sens généralisé.*

Démonstration. Pour simplifier l'écriture, nous omettrons la variable t.

i) Multipliant l'équation (8.1.1) par $\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}$ avec $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ et intégrant par parties on obtient

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}) - \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}) \,\mathrm{ds} = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}) \,\mathrm{dx} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$$

d'où, en utilisant (8.1.3), (8.1.4)

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}) - \int\limits_{\Gamma_2} (\sigma_\nu(v_\nu - \dot{u}_\nu) + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{v}_\tau - \dot{\boldsymbol{u}}_\tau)) \,\mathrm{ds} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\,. \tag{8.1.15}$$

Le loi de Coulomb (8.1.6) implique

$$j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}) + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{v}_\tau - \dot{\boldsymbol{u}}_\tau) \,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \text{ fonction réguliìre}\,. \tag{8.1.16}$$

En effet, notons $E = \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|(|\boldsymbol{v}_\tau| - |\dot{\boldsymbol{u}}_\tau|) + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{v}_\tau - \dot{\boldsymbol{u}}_\tau)$.

Si $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|$ alors on a $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau = \boldsymbol{0}$ donc

$$E \geq -|\boldsymbol{\sigma}_\tau|\,|\boldsymbol{v}_\tau| + \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|\,|\boldsymbol{v}_\tau| \geq 0\,.$$

Si $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|$ alors on a $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau$ donc

$$E = \boldsymbol{\sigma}_\tau\boldsymbol{v}_\tau + |\boldsymbol{\sigma}_\tau|\,|\boldsymbol{v}_\tau| \geq 0\,.$$

De (8.1.15) et (8.1.16) nous obtenons que $\boldsymbol{u}$ vérifie la première inéquation de (8.1.9).

La deuxième inéquation de (8.1.9) résulte de (8.1.5) et Lemme 8.1.1 pour $\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}$.

ii) Prenant dans $(8.1.9)_2$, $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{u}} \pm \boldsymbol{\varphi}$ avec $\boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{D}(\Omega))^p$ et en utilisant la formule de Green (7.1.7), on déduit (8.1.1) en un sens distibutionnelle.

D'après Lemme 8.1.1, les conditions de contact de Signorini (8.1.5) sont vérifiées.

Pour obtenir (8.1.4) on multiplie la relation (8.1.1) par $\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}$ avec $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, d'où en intégrant par parties et en utilisant l'inéquation $(8.1.9)_2$ on obtient

$$j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-j(\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}})+\int\limits_{\Gamma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{ds}-\int\limits_{\Gamma_1}\mathbf{t}(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{ds}\geq\langle\sigma_\nu(\boldsymbol{u}),v_\nu-\dot{u}_\nu\rangle \quad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}\,. \tag{8.1.17}$$

En choisissant $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{u}} \pm \boldsymbol{\varphi}$ avec $\boldsymbol{\varphi} \in (C^\infty(\Omega))^p$ avec $\operatorname{supp} \boldsymbol{\varphi} \subset \Gamma_1$, on déduit

$$\int\limits_{\Gamma_1}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{ds}=0$$

donc la relation (8.1.4). La relation (8.1.17) devient alors

$$j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-j_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}})+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau)\,\mathrm{ds}\geq 0 \quad \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}\,. \tag{8.1.18}$$

En prenant $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ tel que $\boldsymbol{v}_\tau = \pm\alpha\boldsymbol{\varphi}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\boldsymbol{\varphi} \in (C^\infty(\Omega))^p$ et $\operatorname{supp} \boldsymbol{\varphi} \subset \Gamma_2$ et tenant compte que $\boldsymbol{\sigma}_\tau\boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{\sigma}_\tau\boldsymbol{\varphi}_\tau = \boldsymbol{\sigma}_\tau\boldsymbol{\varphi}$, on obtient

$$\alpha\int_{\Gamma_2}(\mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|\,|\boldsymbol{\varphi}|\pm\boldsymbol{\sigma}_\tau\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{ds}-\int_{\Gamma_2}(\mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|\,|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau|+\boldsymbol{\sigma}_\tau\dot{\boldsymbol{u}}_\tau)\,\mathrm{ds}\geq 0 \quad \forall\alpha\geq 0$$

donc

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_2}(\pm\boldsymbol{\sigma}_\tau\boldsymbol{\varphi}+\mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|\,|\boldsymbol{\varphi}|)\,\mathrm{ds}\geq 0\\ \int\limits_{\Gamma_2}(\boldsymbol{\sigma}_\tau\dot{\boldsymbol{u}}_\tau+\mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|\,|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau|)\,\mathrm{ds}\leq 0\end{aligned}\right\}$$

ou

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau|\leq\mu|\mathcal{R}\sigma_\nu| \tag{8.1.19}$$

et

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau\dot{\boldsymbol{u}}_\tau+\mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|\,|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau|\leq 0\,. \tag{8.1.20}$$

Il est facile à voir que la relation (8.1.20), grâce au relation (8.1.19), donne

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau\dot{\boldsymbol{u}}_\tau+\mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|\,|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau|=0\,. \tag{8.1.21}$$

Si $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| < \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|$ alors, de (8.1.21), on obtient $0 > \boldsymbol{\sigma}_\tau\dot{\boldsymbol{u}}_\tau + |\boldsymbol{\sigma}_\tau|\,|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau| \geq 0$ donc $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau = \mathbf{0}$.

Si $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu|$ alors on déduit $0 = \boldsymbol{\sigma}_\tau\dot{\boldsymbol{u}}_\tau + |\boldsymbol{\sigma}_\tau|\,|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau|$ et, par conséquent, il existe $\lambda > 0$ tel que $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau$. Les conditions de frottement (8.1.6) sont ainsi prouvées.

La démostration est achevée en tenant compte que $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$ et $\boldsymbol{u}(t) \in \boldsymbol{K}$ pour tout $t \in [0,T]$. ■

On remarque que toute solution de problème $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_{qs})$ ou $(\mathbf{P}_{qs})$ satisfait, pour tout $t \in [0,T]$, $\boldsymbol{u}(t) \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{f}(t))$ où $\boldsymbol{K}(\mathrm{g}) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}\,;\ a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\varphi}) = (\mathrm{g},\boldsymbol{\varphi})\,,\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{D}(\Omega))^p\}$.

Utilisant une schéma aux différences en arrière (comme dans Section 3.3, page 68), on obtient la suivante suite de problèmes incrémentals $\{\mathbf{P}^i_{sq,n}\}_{i=0,1,\dots,n-1}$.

Problème $\mathbf{P}^i_{sq,n}$: Trouver $\boldsymbol{u}^{i+1} \in \boldsymbol{K}^{i+1}$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} a(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{v} - \partial \boldsymbol{u}^i) + j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{v}) - j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \partial \boldsymbol{u}^i) \\ \quad \geq (\boldsymbol{F}^{i+1}, \boldsymbol{v} - \partial \boldsymbol{u}^i) + \langle \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1}), v_\nu - \partial u^i_\nu \rangle \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \\ \langle \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1}), z_\nu - u^{i+1}_\nu \rangle \geq 0 \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{K} \end{array}\right\} \tag{8.1.22}$$

où $\boldsymbol{K}^{i+1} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{f}^{i+1})$ et $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}_0$. En faisant le changement de variable $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}\Delta t + \boldsymbol{u}^i$, on obtient que le problème $(\mathbf{P}^i_{qs,n})$ équivaut au problème $(\tilde{\mathbf{P}}^i_n)$ suivant:

Problème $\tilde{\mathbf{P}}^i_n$: Trouver $\boldsymbol{u}^{i+1} \in \boldsymbol{K}^{i+1}$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} a(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{i+1}) + j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^i) - j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^i) \\ \quad \geq (\boldsymbol{F}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{i+1}) + \langle \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1}), w_\nu - u^{i+1}_\nu \rangle \quad \forall\, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}, \\ \langle \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1}), z_\nu - u^{i+1}_\nu \rangle \geq 0 \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{K}. \end{array}\right\} \tag{8.1.23}$$

Théorème 8.1.2 *Pout tout $i \in \{0,\dots,n-1\}$ le problème $\tilde{\mathbf{P}}^i_n$ est équivalent au problème $\tilde{\mathbf{Q}}^i_n$ suivant:*

Problème $\tilde{\mathbf{Q}}^i_n$: *Trouver $\boldsymbol{u}^{i+1} \in \boldsymbol{K}^{i+1}$ tel que*

$$\begin{array}{l} a(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{i+1}) + j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^i) - j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^i) \\ \quad \geq (\boldsymbol{F}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{i+1}) \quad \forall\, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K}\,. \end{array} \tag{8.1.24}$$

La démonstration de théorème sera faite en deux étapes (propositions 8.1.1 et 8.1.2 ci-dessous) en passant par le problème mécanique suivant:

Problème $\boldsymbol{\mathcal{P}}^i_n$: Trouver un champ des déplacements $\boldsymbol{u}^{i+1} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ tel que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^{i+1}) = -\boldsymbol{f}^{i+1} \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{8.1.25}$$

$$\boldsymbol{u}^{i+1} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_0\,, \tag{8.1.26}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^{i+1}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}^{i+1} \quad \text{sur } \Gamma_1\,, \tag{8.1.27}$$

$$u_\nu^{i+1} \leq 0\,, \quad \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1}) \leq 0\,, \quad u_\nu \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2\,, \tag{8.1.28}$$

$$\left.\begin{array}{l} |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^{i+1})| \leq \mu|\sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1})| \ \text{ et} \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^{i+1})| < \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1})| \ \Rightarrow \ \boldsymbol{u}_\tau^{i+1} = \boldsymbol{u}_\tau^i \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^{i+1})| = \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1})| \ \Rightarrow \ \exists\lambda \geq 0\,,\ \boldsymbol{u}_\tau^{i+1} - \boldsymbol{u}_\tau^i = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^{i+1}) \end{array}\right\} \text{ sur } \Gamma_2\,. \tag{8.1.29}$$

Lemme 8.1.2 *Pour $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{K}$ donnés, soit $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{g})$ tel que*

$$j_{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w} - \mathbf{d}) - j_{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{d}) + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{w}_\tau - \tilde{\boldsymbol{u}}_\tau)\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K}\,. \tag{8.1.30}$$

Alors $\tilde{\boldsymbol{u}}$ vérifie

$$\left.\begin{array}{l} |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})| \leq \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}})| \ \ \textit{et} \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})| < \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}})| \ \Rightarrow \ \tilde{\boldsymbol{u}}_\tau = \boldsymbol{d}_\tau \\ |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})| = \mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}})| \ \Rightarrow \ \exists\lambda \geq 0\,,\ \tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}}) \end{array}\right\} \textit{sur } \Gamma_2\,. \tag{8.1.31}$$

Démonstration. Prenant dans (8.1.30) $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{d} + \alpha\boldsymbol{\varphi}_\tau$ avec $\boldsymbol{\varphi} \in (C^\infty(\Omega))^p$, supp $\boldsymbol{\varphi} \subset \Gamma_2$ et $\alpha > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_2} \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|(|\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau| - |\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau|) + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{w}_\tau - \tilde{\boldsymbol{u}}_\tau)\,\mathrm{ds} \\ &\quad = \alpha \int_{\Gamma_2} (\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|\,|\boldsymbol{\varphi}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{\varphi})\ \mathrm{ds} \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} (\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|\,|\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau))\ \mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall\alpha > 0\,, \end{aligned}$$

qui donne, en tenant compte que $|\boldsymbol{\varphi}| \geq |\boldsymbol{\varphi}_\tau|$,

$$\int_{\Gamma_2} (\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|\,|\boldsymbol{\varphi}| + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall\boldsymbol{\varphi} \in (C^\infty(\Omega))^p\,,\ \ \text{supp}\ \boldsymbol{\varphi} \subset \Gamma_2\,, \tag{8.1.32}$$

et

$$\int_{\Gamma_2} (\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|\,|\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau))\,\mathrm{ds} \leq 0\,. \tag{8.1.33}$$

Prenant $\boldsymbol{\varphi} = \pm\boldsymbol{\varphi}$ dans (8.1.32), il résulte

$$\int_{\Gamma_2} |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})|\,|\boldsymbol{\varphi}|\,\mathrm{ds} \leq \int_{\Gamma_2} \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))||\boldsymbol{\varphi}|\,\mathrm{ds} \quad \forall\boldsymbol{\varphi} \in (C^\infty(\Omega))^p\,,\ \ \text{supp}\ \boldsymbol{\varphi} \subset \Gamma_2\,,$$

soit

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})| \leq \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|\,. \tag{8.1.34}$$

Alors (8.1.33) implique

$$0 \geq \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|\,|\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau) \geq (\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))| - |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})|)\,|\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau| \geq 0$$

soit

$$\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|\,|\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau) = 0\,. \tag{8.1.35}$$

Si $|\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})| < \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|$, alors, en supposant $\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau \neq \boldsymbol{d}_\tau$, (8.1.35) donne

$$0 = \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|\,|\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau) > |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})|\,|\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau) \geq 0\,.$$

Il reste que $\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau = \boldsymbol{d}_\tau$

Si $|\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})| = \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|$ alors (8.1.35) entraîne

$$|\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})|\,|\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau) = 0$$

donc il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})$. ■

Lemme 8.1.3 *Soient $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{K}$ et $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{g})$ qui vérifient (8.1.31). Alors*

$$j_{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w} - \mathbf{d}) - j_{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{d}) + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{w}_\tau - \tilde{\boldsymbol{u}}_\tau)\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \text{ régulière}\,. \tag{8.1.36}$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{w}$ une fonction régulière.

Si $|\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})| < \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|$ alors $\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau = \boldsymbol{d}_\tau$ et on a

$$\begin{aligned} &j_{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w} - \mathbf{d}) - j_{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{d}) + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau)\,\mathrm{ds} \\ &= \int_{\Gamma_2} (\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|\,|\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau))\,\mathrm{ds} \\ &\geq \int_{\Gamma_2} (\mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))| - |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})|)\,|\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau|\,\mathrm{ds} \geq 0 \end{aligned}$$

Si $|\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})| = \mu|\mathcal{R}(\sigma_\nu(\tilde{\boldsymbol{u}}))|$ alors $\tilde{\boldsymbol{u}}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau = -\lambda\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})$ et on obtient

$$\begin{aligned} &j_{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{w} - \mathbf{d}) - j_{\boldsymbol{g}}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{d}) + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{w}_\tau - \tilde{\boldsymbol{u}}_\tau)\,\mathrm{ds} \\ &= \int_{\Gamma_2} |\boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})|\,|\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau| + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\tilde{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{d}_\tau)\,\mathrm{ds} \geq 0 \end{aligned}$$

■

Proposition 8.1.1 *Le problème $\tilde{\boldsymbol{P}}_n^i$ équivaut au problème mécanique $\boldsymbol{\mathcal{P}}_n^i$ au sens suivant:*
(i) Si $\boldsymbol{u}^{i+1}$ est une solution régulière de $\tilde{\boldsymbol{P}}_n^i$, alors $\boldsymbol{u}$ vérifie $\boldsymbol{\mathcal{P}}_n^i$ en un sens généralisé.
(ii) Si $\boldsymbol{u}^{i+1}$ est une fonction suffisament régulière (pour que les calculs ci-dessous sont valables) qui vérifie $\boldsymbol{\mathcal{P}}_n^i$, alors $\boldsymbol{u}$ est une solution de $\tilde{\boldsymbol{P}}_n^i$.

Démonstration.

(i) Choisissant $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^{i+1} \pm \boldsymbol{\varphi}$ dans $(\tilde{\boldsymbol{P}}_n^i)_1$ avec $\boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{D}(\Omega))^p$ et uilisant la formule de Green, on obtient (8.1.25).

De $(\tilde{\mathbf{P}}_n^i)_2$ et Lemme 8.1.1 pour $\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^{i+1}$ on déduit (8.1.28).

Multipliant (8.1.25) avec $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{i+1}$ pour $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$, intégrant par parties, utilisant encore la formule de Green et $(\tilde{\mathbf{P}}_n^i)_1$, on a

$$\begin{aligned} &j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^i) - j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^i) + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^{i+1})(\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau^{i+1})\,\mathrm{ds} \\ &+ \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^{i+1}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^{i+1})(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{i+1})\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}\,, \end{aligned} \tag{8.1.37}$$

d'où, prenant $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^{i+1} \pm \boldsymbol{\varphi}$ avec $\boldsymbol{\varphi} \in (C^\infty(\Omega))^p$ et supp $\boldsymbol{\varphi} \subset \Gamma_1$, on obtient (8.1.27). Alors, la relation (8.1.37) donne

$$\begin{aligned} &j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^i) - j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^i) \\ &\quad + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^{i+1})(\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau^{i+1})\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}\,. \end{aligned} \tag{8.1.38}$$

De (8.1.38), en appliquant Lemme 8.1.2 pour $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}^{i+1}$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u}^i$ et $\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^{i+1} \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{f}^{i+1})$, il résulte que les conditions (8.1.29) sont satisfaites. La démostration est achevée en tenant compte que (8.1.26) est vérifié parceque $\boldsymbol{u}^{i+1} \in \boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{V}$.

(ii) Inversement, si $\boldsymbol{u}^{i+1}$ est une solution du problème mécanique $\boldsymbol{\mathcal{P}}_i^n$, alors, en appliquant Lemme 8.1.1 pour $\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^{i+1}$, il résulte que $\boldsymbol{u}^{i+1}$ satisfait la deuxième inéquation de (8.1.23).

Puis, de Lemme 8.1.3 pour $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}^{i+1}$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u}^i$ et $\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^{i+1}$ et (8.1.29) on obtient

$$j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^i) - j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^i) + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^{i+1})(\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau^{i+1})\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}\,. \tag{8.1.39}$$

D'autre part, multipliant (8.1.25) par $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{i+1}$ avec $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$, intégrant par parties et utilisant la formule de Green et (8.1.27), on déduit

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{i+1}) = (\boldsymbol{F}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{i+1}) + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^{i+1})(\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau^{i+1})\,\mathrm{ds} \\ +\langle \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1}), w_\nu - u_\nu^{i+1}\rangle \quad \forall\, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}\,. \end{aligned} \tag{8.1.40}$$

Alors, de (8.1.39) et (8.1.40), on obtient la première inéquation de (8.1.23). ■

Proposition 8.1.2 *Le problème $\tilde{\boldsymbol{Q}}_n^i$ équivaut au problème mécanique $\boldsymbol{\mathcal{P}}_n^i$ au sens suivant:*
(i) Si $\boldsymbol{u}^{i+1}$ est une solution régulière de $\tilde{\boldsymbol{Q}}_n^i$, alors $\boldsymbol{u}$ vérifie $\boldsymbol{\mathcal{P}}_n^i$ en un sens généralisé.
(ii) Si $\boldsymbol{u}^{i+1}$ est une fonction suffisamment régulière (pour que les calculs ci-dessous sont valables) qui vérifie $\boldsymbol{\mathcal{P}}_n^i$, alors $\boldsymbol{u}$ est une solution de $\tilde{\boldsymbol{Q}}_n^i$.

Démonstration.

i) Procedant comme dans la première partie de la démonstration de Proposition 8.1.1, on obtient (8.1.25). Alors de (8.1.25) et (8.1.24) on déduit

$$\begin{aligned} j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^i) - j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^i) + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^{i+1}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{i+1})\,\mathrm{ds} \\ + \int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^{i+1}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{t}^{i+1})(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{i+1})\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K}\,, \end{aligned} \tag{8.1.41}$$

d'où, prenant $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^{i+1} \pm \boldsymbol{\varphi}$ avec $\boldsymbol{\varphi} \in (C^\infty(\Omega))^p$ et supp $\boldsymbol{\varphi} \subset \Gamma_1$, on obtient (8.1.27). Alors, la relation (8.1.41) devient

$$\begin{aligned} j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^i) - j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^i) \\ + \int_{\Gamma_2} (\sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1})(w_\nu - u_\nu^{i+1}) + \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^{i+1})(\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau^{i+1}))\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K}\,. \end{aligned} \tag{8.1.42}$$

Choisissant $\boldsymbol{w} = \alpha\varphi_\nu\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{u}_\tau^{i+1}$ avec $\boldsymbol{\varphi} \in (C^\infty(\Omega))^p$, $\varphi_\nu \leq 0$ sur Γ_2 et $\alpha > 0$, il vient

$$\alpha \int_{\Gamma_2} \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1})\,\varphi_\nu\,\mathrm{ds} \geq \int_{\Gamma_2} \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1})\,\boldsymbol{u}_\nu^{i+1}\,\mathrm{ds} \quad \forall \alpha > 0$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1})\,\varphi_\nu\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{V}\,,\ \varphi_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_2 \\ \int_{\Gamma_2} \sigma_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1})\,\boldsymbol{u}_\nu^{i+1}\,\mathrm{ds} \leq 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.1.43}$$

Comme $\boldsymbol{u}^{i+1} \in \boldsymbol{K}$, les relations (8.1.43) entraîne (8.1.28).

Enfin, choisissant dans (8.1.42), $\boldsymbol{w} = u_n^{i+1}\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{v}$ avec $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}$ quelconque, on obtient:

$$j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}^i) - j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^i) + \int\limits_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^{i+1})(\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau^{i+1})\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}$$

qui donne, avec Lemme 8.1.2, pour $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}^{i+1}$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u}^i$ et $\tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^{i+1}$, les conditions (8.1.29).

ii) De Lemmes 8.1.3 et 8.1.1 on obtient

$$j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^i) - j_{\boldsymbol{f}^{i+1}}(\boldsymbol{u}^{i+1}, \boldsymbol{u}^{i+1} - \boldsymbol{u}^i) + \int\limits_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\tau(\boldsymbol{u}^{i+1})(\boldsymbol{w}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau^{i+1})\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K} \tag{8.1.44}$$

et

$$\int\limits_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_\nu(\boldsymbol{u}^{i+1})(\boldsymbol{w}_\nu - \boldsymbol{u}_\nu^{i+1})\,\mathrm{ds} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{K}\,. \tag{8.1.45}$$

Ensuite la démostration est analoque avec la démonstration de Proposition 8.1.1. ■

Voyons maintenant l'utilisation des notations analoques à (3.3.35) de la page 71. Alors $\boldsymbol{u}_n \in L^2(0, T; \boldsymbol{V})$ et $\hat{\boldsymbol{u}}_n \in W^{1,2}(0, T; \boldsymbol{V})$ satisfaient le problème incrémentiel suivant :

Problème $\mathbf{P}_{qs,n}$: Trouver $\boldsymbol{u}_n$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} a(\boldsymbol{u}_n(t), \boldsymbol{v} - \dfrac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{u}}_n(t)) + j_{\boldsymbol{f}_n(t)}(\boldsymbol{u}_n(t), \boldsymbol{v}) \\ \quad -j_{\boldsymbol{f}_n(t)}(\boldsymbol{u}_n(t), \dfrac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{u}}_n(t)) \geq (\boldsymbol{F}_n(t), \boldsymbol{v} - \dfrac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{u}}_n(t)) \\ \quad +\langle \sigma_\nu(\boldsymbol{u}_n(t)), v_\nu - \dfrac{d}{dt}\hat{u}_{n\nu}(t)\rangle \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V},\, \forall\, \mathbf{t} \in [\,\mathbf{0}, \mathbf{T}\,]\,, \\ \langle \sigma_\nu(\boldsymbol{u}_n(t)), z_\nu - u_{n\nu}(t)\rangle \geq 0 \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{K}, \forall\, t \in [\,0, T\,]\,. \end{array}\right\} \tag{8.1.46}$$

En faisant la notation

$$j(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = j_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})\,\mathrm{dx} - \int\limits_{\Gamma_1} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})\,\mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{V}\,,\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{g})\,,\ \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$$

il reésulte que l'application j a la propriété suivante: il existe les constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$
\begin{aligned}
&|j(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w}_2)+j(\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1)-j(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w}_1)-j(\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_2)| \\
&=\left|\int_{\Gamma_2}\mu(|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{v}_1)|-|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{v}_2)|)(|\boldsymbol{w}_{1\tau}|-|\boldsymbol{w}_{2\tau}|)\,\mathrm{ds}\right| \\
&\le C_1\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}\int_{\Gamma_2}|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{v}_1)-\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{v}_2)|\,|\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2|\,\mathrm{ds} \\
&\le C_2\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}(\|\boldsymbol{g}_1-\boldsymbol{g}_2\|+\|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\|)\|\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2\| \\
&\qquad\forall\,\boldsymbol{g}_i\in\boldsymbol{V}\,,\ \forall\boldsymbol{v}_i\in\boldsymbol{K}(\boldsymbol{g}_i)\,,\ \forall\boldsymbol{w}_i\in\boldsymbol{V}\,,\ i=1,2\,.
\end{aligned}
\tag{8.1.47}
$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'approximation.

Théorème 8.1.3 *Supposons que* $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_2)}<\dfrac{\alpha}{C_2}$. *Alors il existe une sous-suite* $\{\boldsymbol{u}_{n_p}\}_p$ *de* $\{\boldsymbol{u}_n\}_n$ *telle que*

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_{n_p}(t)\to\boldsymbol{u}(t)\ \textit{dans}\ \boldsymbol{V}\ \textit{fort}\quad\forall\,t\in[\,0,T\,]\,,\\
&\hat{\boldsymbol{u}}_{n_p}\to\boldsymbol{u}\ \textit{dans}\ L^2(0,T;\boldsymbol{V})\ \textit{fort},\\
&\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{u}}_{n_p}\rightharpoonup\dot{\boldsymbol{u}}\ \textit{dans}\ L^2(0,T;\boldsymbol{V})\ \textit{faible}
\end{aligned}
$$

lorsque $p\to\infty$, *où* $\boldsymbol{u}$ *est une solution du problème* $(\mathbf{P}_{qs})$.

Démonstration.

Posons:

$$
\begin{aligned}
&b(\boldsymbol{g},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\langle\sigma_\nu(\boldsymbol{v}),w\rangle\quad\forall\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{V}\,,\ \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{K}(\boldsymbol{g})\,,\ \forall\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}\\
&\beta(\boldsymbol{g},\boldsymbol{v})=\mu|\mathcal{R}\sigma_\nu(\boldsymbol{v})|\quad\forall\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{V}\,,\ \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{K}(\boldsymbol{g})
\end{aligned}
$$

on remarque que le problème $\tilde{\mathbf{P}}_n^i$ s'ecrit sous la forme (3.3.20) de la page 66 et l'hypothèse (3.3.22) est satisfait grâce au Théorème 8.1.2. Les autres hypothèses du Théorème 3.3.1 sont faciles à vérifier et on obtient ainsi le résultat énoncé. ■

8.2 L'approximation du problème quasi statique

Soit $\mathcal{T}_h=(T_j)_{j\in\mathcal{J}_h}$ une famille de décompositions régulières de domain Ω telle que

$$
\begin{aligned}
&\bar\Omega=\bigcup_{j\in\mathcal{J}_h}\bar T_j\,,\\
&T_i\cap T_j=\emptyset\quad\forall i,j\in\mathcal{J}_h\,,\ i\neq j\,.
\end{aligned}
$$

Introduissons les ensembles suivants

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{V}_h = \{\boldsymbol{v}_h \in (C^0(\bar{\Omega}))^p\,;\ \boldsymbol{v}_h/T_j \in (P_1(T_j))^p\,,\ \forall j \in \mathcal{J}_h\,,\ \boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{0} \text{ sur } \Gamma_0\}\,,\\
&\boldsymbol{K}_h = \{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h\,;\ \boldsymbol{v}_{h\nu} \le 0 \text{ sur } \Gamma_2\}\\
&S_h = \{\tau_h \in L^2(\Gamma_2)\,;\ \tau_h/\Gamma_{2,j} \in P_0(\Gamma_{2,j}) \quad \forall j \in \mathcal{J}_h \text{ tel que } \Gamma_{2,j} \neq \emptyset\}
\end{aligned}$$

où $P_k(\omega)$ est l'espace des polynômes de degrée moins que k sur ω et $\Gamma_{2,j} = \Gamma_2 \cap \bar{T}_j$.

On rappelle de Section 6.3, page 123, que la formulation variationnelle semi-discrète s'écrit

Problème $(\mathbf{P}_{qs})_h$: Trouver $\boldsymbol{u}_h \in W^{1,2}(0,T;\boldsymbol{V}_h)$ tel que

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{u}_{0h},\ \boldsymbol{u}_h(t) \in \boldsymbol{K}_h(\boldsymbol{f}(t)) \quad \forall\, t \in [\,0,T\,],\\
&a(\boldsymbol{u}_h(t), \boldsymbol{v}_h - \dot{\boldsymbol{u}}_h(t)) + j(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_h(t), \boldsymbol{v}_h) - j(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_h(t), \dot{\boldsymbol{u}}_h(t))\\
&\qquad\qquad \ge b(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_h(t), \boldsymbol{v}_h - \dot{\boldsymbol{u}}_h(t)) \quad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h \text{ p.p. dans }]\,0,T\,],\\
&b(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_h(t), \boldsymbol{z}_h - \boldsymbol{u}_h(t)) \ge 0 \quad \forall\, \boldsymbol{z}_h \in \boldsymbol{K}_h, \quad \forall\, t \in [\,0,T\,]\,.
\end{aligned}\right\} \tag{8.2.1}$$

et la discrètisation complète est donné par l'inéquation variationnelle implicite

Problème $(\mathbf{Q}_n^i)_h$: Trouver $\boldsymbol{u}_h^{i+1} \in \boldsymbol{K}_h^{i+1}$ tel que

$$\left.\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{u}_h^{i+1}, \boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{u}_h^{i+1}) + j(\boldsymbol{f}^{i+1}, \boldsymbol{u}_h^{i+1}, \boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{u}_h^{i})\\
&\qquad\qquad -j(\boldsymbol{f}^{i+1}, \boldsymbol{u}_h^{i+1}, \boldsymbol{u}_h^{i+1} - \boldsymbol{u}_h^{i}) \ge 0 \quad \forall\, \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{K}_h.
\end{aligned}\right\} \tag{8.2.2}$$

Nous supposons que $\boldsymbol{u}_h^0 = \boldsymbol{u}_{0h}$ satisfait la condition de compatibilité

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}_{0h} \in \boldsymbol{K}_h(\boldsymbol{f}(0))\,,\\
&a(\boldsymbol{u}_{0h}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{0h}) + j(\boldsymbol{f}(0), \boldsymbol{u}_{0h}, \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{f}(0), \boldsymbol{u}_{0h}, \boldsymbol{u}_{0h}) \ge 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}_h\,.
\end{aligned}\right\}$$

Alors nous avons les résultats d'existence et d'approximation donnés par Théorèmes 6.3.1 (page 124) et 6.3.2 (page 127).

Pour la résolution du problème $(\mathbf{Q}_n^i)_h$, nous supposons que μ est constant et nous choisissons comme $\mathcal{R}$ la projection sur l'espace de dimension finie S_h. Ainsi, dans la formulation des éléments finis, la régularisation peut être considérée comme une conséquence naturelle de la discrétisation. On introduit alors , à chaque pas de temps $i \in \{0,\dots,n-1\}$, la méthode de point fixe sur le seuil de glissement:

Problème $(\mathbf{P}^1_{inc})$: Trouver le point fixe $\boldsymbol{g}$ de l'application $\mathcal{T} : S_h \to S_h$ définie par

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{g}) = -\mu \mathcal{R} \sigma_\nu(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i+1}) \quad \forall \boldsymbol{g} \in S_h \tag{8.2.3}$$

où $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i+1}$ est la solution du problème

Problème $(\mathbf{P}^2_{inc})$: Pour $\boldsymbol{g} \in S_h$, trouver $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i+1} \in \boldsymbol{K}_h^{i+1}$ tel que

$$\left.\begin{aligned} &a(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i+1}, \boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i+1}) + J_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i}) \\ &\qquad -J_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i+1} - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i}) \geq (\boldsymbol{F}^{i+1}, \boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i+1}) \quad \forall\, \boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{K}_h. \end{aligned}\right\} \tag{8.2.4}$$

où

$$J_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{w}_h) = \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{g} |\boldsymbol{w}_\tau| \, \mathrm{ds} \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}.$$

Maintenant, le problème $(\mathbf{P}^2_{inc})$ est équivalent au suivant problème de minimisation avec contraintes

Problème $(\mathbf{P}_{opt})$: Pour $\boldsymbol{g} \in S_h$, trouver $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i+1} \in \boldsymbol{K}_h^{i+1}$ tel que

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i+1}) = \min_{\boldsymbol{w}_h \in \boldsymbol{K}_h} \mathcal{F}(\boldsymbol{w}_h) \tag{8.2.5}$$

avec

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) + J_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{g}}^{i}) - (\boldsymbol{F}^{i+1}, \boldsymbol{w}) \quad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}\,.$$

Ce problème est très similaire au problème statique en dehors du fait que la solution connue de l'étape précédente est maintenant présent dans le terme de frottement. L'influence de l'histoire de chargement, en raison de la formulation de la condition de frottement en vitesse, est caractérisée par ce terme supplémentaire. L'ensemble convexe $\boldsymbol{K}_h$ reste inchangée d'une étape à l'autre.

Le problème $(\mathbf{P}_{opt})$ peut être résolu par une méthode de Gauss-Seidel avec projection. Cette méthode est robuste et trés facile à mettre en oeuvre lorsqu'il s'agit de la partie non dérivable donné par le terme de frottement. Des détails et la convergence de l'algorithme en utilisant une procédure d'accélération de Aitken sont donnés dans [28]. D'autres méthodes peuvent être trouvés dans [98].

Bibliographie

[1] F. Abergel, R.Temam, On some control problems in fluid mechanics, Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 1, 303-325, 1990.

[2] F. Abergel, E. Casas, Some optimal control problems of multistate equations appearing in fluid mechanics, RAIRO - Modélisation mathématique et analyse numérique, 27, 2, 223-247, 1993.

[3] R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York San Francisco London, 1975.

[4] S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand, New York, 1965.

[5] G. Amontons, De la résistence causée dans les machines, tant par les frottements des parties qui les composent que par la raideur des cordes qu'on emploie et la manière de calculer l'un et l'autre, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris, 1699.

[6] L. E. Andersson, A quasistatic frictional problem with normal compliance, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 16, 4, 347-369, 1991.

[7] L. E. Andersson, Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction, Appl. Math. Optim. 42, 169-202, 2000.

[8] I. Babuska, A. K. Azis, The mathematical foundations of the finite-element methods with applications to partial differential equations, New York, Academic Press, 1972.

[9] C. Baiocchi, Sur un problème à frontière libre traduisant le filtrage de liquides à travers des milieux poreux, C. R. Acad. Sci. Paris, 273A, 1215-1217, 1971.

[10] C. Baiocchi, V. Comincioli, L. Guerri, G. Volpi, Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media; a numerical approach, Calcolo X, 1973.

[11] C. Baiocchi, V. Comincioli, E. Magenes, G. A. Pozzi, Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: existence and uniqueness theorems, Ann. di Mat. pura e appl., 4, XCVII, 1973.

[12] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et elur application aux équations intégrales, Fund. Math., 3, 133-181, 1922.

[13] V. Barbu, Optimal control of variational inequalities, Pitman Publ. Inc., 1984.

[14] V. Barbu, D. Tiba, Optimal control of abstract variational inequalities, M. Amouroux and Al. El. Jai (eds), Pergamon Press, Oxford, 1990.

[15] A. Bensoussan, J. L. Lions, Applications des inéquations variationnelles et contrôle stochastique, Dunod, 1978.

[16] A. Bermudez, C. Saguez, Optimal control of a Signorini problem, SIAM J. Control Optim., 25, 3, 576-582, 1987.

[17] P. Bisegna, F. Lebon, F. Maceri, D-PANA: A convergent block-relaxation solution method for the discretized dual formulation of the Signorini-Coulomb contact problem, C.R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math., 333, 1053-1058, 2001.

[18] P. Bisegna, F. Lebon, F. Maceri, Relaxation procedures for solving Signorini-Coulomb contact problems, Advaces in Engineering Software, 35, 595-600, 2004.

[19] H. Brézis, Équations et inéquations non linéires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, 1, 115-175, 1968.

[20] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51, 1, 1-168, 1972.

[21] H. Brézis, G. Stampacchia, Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, Bull. Soc. Mat. Fr., 96, 153-180, 1968.

[22] F. Browder, Problème non linéaires, Université de Montréal, 1964.

[23] Campos, Oden, Kikuchi, A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics, Comp. Meth. Engng., 34, 1984.

[24] A. Capatina (Radoslovescu), Une propriété de la solution d'une classe d'inéquations variationnelles, Rev. Roumaine Sci. Tech. Méc. Appl., t.29, n.1, 1984

[25] A. Capatina, Quasi-variational inequalities for potential operators, St. Cerc. Mat., t.46, n.1, 1994.

[26] A. Capatina, Optimal control of Signorini contact problem, Numer. funct. anal. and optimiz, 21(7&8), 817-828, 2000.

[27] A. Capatina (Radoslovescu), M. Cocu, Internal approximation of quasi-variational inequalities, Numer. Math., 50, 385-398, 1991.

[28] A. Capatina, M. Cocou, M. Raous, A class of implicit variational inequalities and applications to frictional contact, Math. Meth. Appl. Sci, 32, 1804-1827, 2009.

[29] A. Capatina, R. Stavre, Optimal control of a non-isothermal Navier-Stokes flow, Int. J. Engng. Sci., 34, 1, 59-66, 1996.

[30] A. Capatina, F. Lebon, Remarks on the equilibrium finite element method for frictional contact problems, New Trends in Continuum Mechanics, Theta, 25-33, 2005.

[31] I. Capuzzo-Dolcetta, M. Matzeu, Duality for implicit variational problems and numerical applications, Numer. Funct. Anal. Optim., 2, 231-265, 1980.

[32] T. Cazenave, A. Haraux, Introduction aux problèmes sémi-linéaires, Mathématiques et Applications, Ellipses, Paris, 1990.

[33] J. Cea, Optimisation, Théorie et algorithmes, Dunod, Paris, 1971

[34] P. G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, New York, 1976.

[35] M. Cocu, Existence of solutions of Signorini problems with friction, Int. J. Engng. Sci., 22, 5, 567-575, 1984.

[36] M. Cocu, A. Capatina (Radoslovescu), Regularity properties for the solutions of a class of variational inequalities, J. Nonlin. Anal., 11, 2, 221-230, 1987.

[37] M. Cocu, E. Pratt, M. Raous, Formulation and approximation of quasistatic frictional contact, Int. J. Engng. Sci., 34, 7, 783-798, 1996.

[38] M. Cocu,R. Rocca, Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion, Math. Mod. Num. Anal. 34(5), 9811001, 2000.

[39] C. A. Coulomb, Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et á la raideur des cordages, Mémoires de mathématique et de physique de l'Académie Royale, Paris, 161-342, 1785.

[40] L. Demkowicz, J. T. Oden, On some existence and uniqueness results in contact problems with nonlocal friction, Nonlinear Analysis, Theory Meth. Applic., 6, 1075, 1982.

[41] G.Dinca, Sur la monotonie d'àprés Minty-Browder de l'opérateur de la théorie de plasticité, C. R. Acad. Sci., 269, 535-538, 1969.

[42] G. Dincă, Operatori monotoni în teoria plasticităţii, Ed. Academiei, Bucureşti, 1792.

[43] G. Dincă, Metode variaţionale şi aplicaţii, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980.

[44] G. Dincă, I. Roşca, Une méthode variationnelle pour l'étude des opérateurs non-linéaires à differentiellle K-positivement définie, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 1, 25, 1978.

[45] G. Duvaut, Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A 290, 263, 1980.

[46] G. Duvaut, J. L. Lions, Les inéquations en mécanique et physique, Dunod, Paris, 1972.

[47] I. Ekeland, R. Temam, Analyse convexe et problèmes variationnells, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[48] R.S. Falk, Approximation of an elliptic boundary value problem with unilateral constrints, RAIRO, 9, 1975.

[49] W. Fenchel, On conjugate convex functions, Canad. J. Math., 1, 73-77, 1949.

[50] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem. Accad. Naz. dei Lincei , VIII(7), 91-140, 1964.

[51] G. Fichera, Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints, in Encyclopedia of Physics (e. S. Flugge, vol VI a/2, 391-424, Springer, Berlin, 1972.

[52] K. Friedrichs, On the boundary-value problem of the theory of elastcity and Korn's inequality, Ann. of Math., V, 48, 2, 1947.

[53] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1984.

[54] R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémolières, Numerical analysis of variational inequalities, Amsterdam : North-Holland, 1981.

[55] W. Han, M. Sofonea, Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplasticity, American Mathematical Society and International Press: Providence, RI, 2002.

[56] P. Hartman, G. Stampacchia, On some nonlinear elliptic differential equations, Acta. Math., 115, 271-310, 1966

[57] J. Haslinger, I. Hlaváček, J. Nečas, Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics, Handbook of Numerical Analysis, Vol IV, P.G. Ciarlet and J.L. Lions eds., North-Holland, Amsterdam, 313-485, 1996.

[58] J. Haslinger, M. Tvrdy, Approximation and numerical solution of contact problems with friction, Appl. Mat., 28, 55-71, 1983.

[59] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas, J. Lovišek, Solution of Variational Inequalities in Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1988.

[60] I. Ionescu, I. Rosca, M. Sofonea, A variational method for nonlinear multivalued operators, Nonlinear Analysis, TMA, vol. 9, no. 2, 259-273, 1985.

[61] J. Jarusěk, Contact problems with bounded friction coercive case, Czechoslovak Math. J., 33, 108, 237-261, 1983.

[62] C. Johnson, B. Mercier, Some equilibrium finite element methods for two-dimensional elasticity problems, Numer. Math. 30, 103-116, 1978.

[63] I. V. Kantorovici, G. P. Akilov, Analiză funcţională, Ed. Ştiinţifică şi tehnică, Bucureşti, 1986.

[64] N. Kikuchi, J.T. Oden, Contact Problems in Elasticity, A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods, SIAM, Philadelphia, 1988.

[65] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An introduction to Variational Inequalities an their Applications, Academic Press, New York, 1980.

[66] A. Klarbring, A. Mikelič, M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, Int. J. Engng. Sci., 26, 811-832, 1988.

[67] A. Klarbring, A. Mikelič, M. Shillor, On friction problems with normal compliance, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 13, 935-955, 1989.

[68] A. Klarbring, A. Mikelić, M. Shillor M, A global existence result for the quasistatic frictional contact problem with normal compliance, in Unilateral Problems in Structural Analysis 4, del Piero G and Maceri F (Eds.), Birkhauser, Boston, 85111, 1991.

[69] Ky Fan, Minimax theorems, Proc. Mat. Acad. Sci., USA, 39, 42-47, 1953.

[70] A. Langenbach, Variationsmethoden in der nichtlinear elastizitats und plastizitatstheorie, Wiss, Z. Humboldt Univ. Berlin, Mat. Nat. R., IX, 1959/1960.

[71] P. J. Laurent, Approximation et optimasation, Hermann, Paris, 1972.

[72] F. Lebon, M. Raous, Multibody contact problems including friction in structure assembly, Computers and Structures, 43, 5, 1991.

[73] H. Lewy, G. Stampacchia, On the regularity of the solution of a variational inequality, Comm. Pure Appl. Math., 22, 1969.

[74] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[75] J. L. Lions, Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, Dunod, Gautiers-Villars, Paris, 1968.

[76] J. L. Lions, Contrôle des systèmes distribués singulières, Dunod, Paris, 1983.

[77] J. L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968.

[78] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm. Pure Appl. Math., XX, 493-519, 1967.

[79] A. E. Martiniuk, On some generalization of variational method, Dokl. Akad. Nauk., S.S.S.R., 1222-1225, 1959.

[80] J. A. C. Martins, J. T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal friction and interfacelaws, Nonlinear Analysis, Theory Meth. Applic., 11,3, 407-428, 1987.

[81] F. Mignot, Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques, J. Func. Anal., 22, 130-185, 1976.

[82] R. Mignot, J.P. Puel, Optimal control in some variational inequalities, SIAM J. Control Optim., 22, 466-476, 1984.

[83] J. J. Moreau, Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull. Soc. Math. France, 93, 273-299, 1965.

[84] J. J. Moreau, Fonctionnelles convexes, Sém. sur les équations aux dérivées partielles, Collége de France, 1967.

[85] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[86] U. Mosco, Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, Lect. Notes in Math., 543, 83-156, 1975.

[87] J. Necas, On regularity of solutions to nonlinear variational inequalities for second order elleiptic systems, Rec. Mat. Series VI, 8, 481, 1975.

[88] J. Nečas, J. Jarusěk, J. Haslinger, On the solution of the variational inequality to Signorini problem with small friction, Bolletino U.M.I., 5 17-B, 796-811, 1980.

[89] P. Neittaanmaki, D. Tiba, Optimal control of nonlinear parabolic systems: theory, algorithmes and applications, M. Dekker, 1994.

[90] L. Niremberg, Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 8, 648-674, 1955.

[91] J. T. Oden, N. Kikuchi, Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media, Int. J. Engng. Sci., 18, 10, 1171-1284, 1980.

[92] J. T. Oden . A. C. Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena. Computer Metods in Applied Mechanics and Engineering, 50, 1-3, 527-634, 1985.

[93] J. T. Oden, E. Pires, Contact problems in elastostatic with non-local friction laws, TICOM Report 81-82, Austin, Texas, 1981.

[94] J. T. Oden, E. Pires, Contact problems in elastostatics with non-local friction law, J. Appl. Mech., 50, 67-76, 1983.

[95] J. T. Oden, J. N. Reddy, An introduction to the mathematical theory of finite elements, New York-London-Sydney-Toronto, John Wiley & Sons, XII, 429S, 1976.

[96] Panagoitpoulos, On unilateral contact problem of structures with non quadrio starin energy density, Internat. J. Solid and Structures, 13, 1977

[97] W. V. Petryshyn, On a class of K-p.d. and non K-p.d. operators and operators equation, J. Math. Analysis Applic., 10, 1, 1965.

[98] M. Raous, Quasistatic Signorini problem with Coulomb friction and coupling to adhesion. In New Developments in Contact Problems, Wriggers P., Panagiotopoulos P. (eds), CISM Courses and Lectures, vol. 384, Springer: Wien, 101-178, 1999.

[99] M. Raous, Chabrand, F. Lebon, Numerical methods for frictional contact problems and application, Journal de mécanique théorique et appliquée, 1, 7, 1988.

[100] M. Raous, M. Sage, Numerical simulation of the behaviour of surface asperities for metal forming, Numerical Methods in Industries Forming Processes, Chenot-Wood-Zienkiewicz eds, Balkema, Rotterdam, The Netherlands, 1992.

[101] R. Rocca R, Existence of a solution for a quasistatic problem of unilateral contact with local friction, C. R. Acad. Sci. Paris 328, 12531258, 1996.

[102] R. T. Rockafellar, Convex functions and duality in optimization problems and dynamics, Lect. Notes in Oper. Res and Math. Ec., vol II, Springer, Berlin, 1969.

[103] R. T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, SIAM J. Control and Optimization, 14, 877, 1976.

[104] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton Landmarks in Mathematics and Physics series, 1997.

[105] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1966.

[106] M. Shillor, M. Sofonea, J. J. Telega, Models and analysis of quasistatic contact, Lecture Notes in Physics, vol. 655, Springer: Berlin, Heidelberg, 2004.

[107] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti Societa Italiana per il Progresso della Scienze, 1933.

[108] A. Signorini, Questioni di elasticita non linearizzata e semi-linearizzata, Rend. di Matem. delle sue appl., 18, 1959.

[109] M. Sion, On general minimax theorems, Pacific J. of Math., 8, 171-176, 1958.

[110] S. L. Sobolev, On a theorem of functional analysis, Transl. Amer. Math. Soc., 34, 2, 39-68, 1963; translation of Math. Sbornik, 45, 471-496, 1938.

Application of functional analysis in mathematical physics, translated from the 1950 Russian edition by F. E. Browder, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1963

[111] M. Sofonea, D. Motreanu, Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional problems for elastic materials, Abstract and Applied Analysis, 4, 255-279, 1999.

[112] M. Sofonea, Une méthode variationnelle pour une classe d'inéquations non-linéaires dans les espaces de Hilbert, Bull. Soc. Sci. Math. Roumaine, 30, 47-55, 1986.

[113] M. Sofonea, A. Matei, Variational inequalities with applications, A study of Antiplane Frictional Contact Problems, Advances in Mechanics, vol. 18, 234 p., Springer, 2009.

[114] M. Sofonea, D. Tiba, The control variational method for elastic contact problems, Annals of AOSR, Series in Mathematics and its Applications, 2, 99-122, 2010.

[115] J. Sprekels, D. Tiba, The control variational approach for differential systems, SIAM J. Control Optim., 47, 3220-3236, 2008.

[116] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964.

[117] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.

[118] R. Temam, Problèmes mathématiques en plasticité, Méthodes mathématiques de l'informatique-12, Collection dirigée par J. L. Lions, Gautiers-Villars, 1983.

[119] J.J. Telega, Topics on unilateral contact problems, Nonsmooth mechanics and applications, eds. Moreau, Panagiotopoulos, 1988.

[120] J.J. Telega, Quasi-static Signorini's contact problem with friction and duality, Internat. Ser. Numer. Math. 101, 199-214, 1991.

[121] D. Tiba, Lectures on the optimal control of elliptic equations, The 5^{th} International Summer School Jyvaskyla, Finland, 1995.

[122] T. W. Ting, Elasic-plastic torsion problem III., Archive Rat. Mech. Anal., 34, 1969.

[123] K. Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1965.