INSTITUTUL DE MATEMATICA
"SIMION STOILOW"
AL ACADEMIEI ROMANE

PREPRINT SERIES OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS
OF THE ROMANIAN ACADEMY

ISSN 0250 3638

SIMETRII DINAMICE

by

Marius Grigorescu

Preprint nr. 1/2013

BUCURESTI

SIMETRII DINAMICE

by

Marius Grigorescu

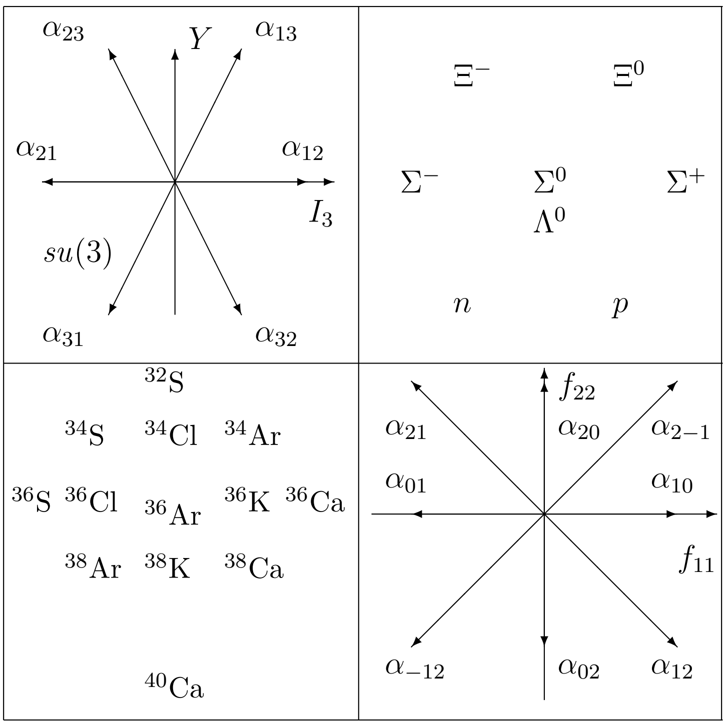
Preprint nr. 1/2013

April 2013

Institute of Mathematics “Simion Stoilow” of the Romanian Academy, P.O. Box 1-764, RO-014700 Bucharest, Romania
E-mail: m_grig00@hotmail.com

M. GRIGORESCU

SIMETRII DINAMICE



Cuprins

Prefaţă 3

Capitolul I. Sisteme dinamice cu simetrie

1. Dinamică hamiltoniană 4
1.1 *Dinamică newtoniană* 5
1.2 *Dinamică geodezică* 5
1.3 *Grupul* $SO(3,\mathbb{R})$ *şi solidul rigid* 6
1.4 *Spaţiul fazic extins şi dinamica relativistă* 8
2. Polarizări reale şi teoria Hamilton-Jacobi 10
3. Acţiuni simplectice de grup şi invarianţă 14
4. Aplicaţia moment 16
5. Spaţiul fazic redus 19
6. Forma colectivă a hamiltonianului cu simetrie 23
7. Orbite coadjuncte la produsul semidirect 26
7.1 $SO(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ şi solidul rigid în câmp extern 27
7.2 $SO(3,1) \times \mathbb{R}^{3,1}$ şi particula relativistă liberă 28
7.3 $SL(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^6$ şi picătura de lichid 28

Capitolul II: Ecuaţii de transport clasice şi cuantice

1. Ecuaţia Liouville 30
2. Ecuaţia Boltzmann 31
2.1 *Stări coerente clasice* 33
2.2 *Stări coerente cuantice* 35
2.2.1 Particula nerelativistă liberă: unde plane şi sferice 38
2.2.2 Rotatorul cuantic simplu şi rigid 40
2.2.2 Distribuţii cuantice relativiste 41
2.2.3 Sisteme cuantice de N particule 42
3. Echilibrul termic şi ecuaţia Fokker-Planck 46
4. Distribuţii pentru sisteme cu simetrie 49
4.1 *Spaţiul fazic indus prin ruperea spontană de simetrie* ... 53

Capitolul III: Aplicaţii

1. Grupul de echivalenţă inerţială 55
2. Algebra $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ şi problema Kepler 60
3. Operatorul conjugat momentului cinetic 61
4. Grupul $SU(3)$, rotaţia colectivă şi modelul octet 64
4.1 *Grupul SU(3)* 66
4.2 *Algebra* $\mathfrak{su}(3)$ 69
4.3 *Reprezentări fundamentale* 71
4.4 *Reprezentări tensoriale* 76
4.5 *Descrierea mişcării rotaţionale colective* 80
4.6 *Modelul octet* 81
5. Algebra $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$ şi corelaţiile de 2 protoni - 2 neutroni 85
5.1 *Sistemul rădăcinilor* $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$ 85
5.2 *Descrierea corelaţiilor 2p-2n* 87
6. Mezonul π ca mod Goldstone pentru ruperea simetriei chirale 90

Capitolul IV: Anexe

Anexa 1: Derivata Lie şi derivata covariantă 92
Anexa 2: Acţiunile adjuncte ale grupurilor 94
Anexa 3: Folieri unidimensionale care nu sunt fibrări 95
Anexa 4: Algebrele Lie semisimple clasice 96
4.1 *Algebrele* $A_n : \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ 97
4.2 *Algebrele* $B_n : \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ 98
4.3 *Algebrele* $C_n : \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ 99
4.4 *Algebrele* $D_n : \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ 101

Bibliografie 103

Prefaţă

Simetria geometrică, percepută ca manifestare a armoniei universale, a constituit baza primelor principii explicative din fizică şi astronomie. Astfel, forma circulară a orbitelor planetare era justificată în antichitate prin perfecţiunea cercului ca figură geometrică. Mai târziu, Kepler va încerca să stabilească raportul dimensiunilor acestor orbite prin asociere cu cele cinci solide perfecte.

În mecanica newtoniană descrierea bazată pe simetrie este înlocuită cu principiile dinamicii. Totuşi, se observă că forţele fundamentale au expresii matematice simple, cu proprietaţi speciale de simetrie care limitează varietatea mişcărilor posibile prin legi de conservare. Deasemenea, starea de vacuum sau de particulă liberă este specificată practic numai de proprietăţi de simetrie. Apare astfel noţiunea de simetrie dinamică, a forţelor dintre particule, exprimată prin invarianţa formei ecuaţiilor de mişcare la acţiunea unor grupuri de transformări asupra sistemului fizic, sau asupra sistemului de coordonate al observatorului.

Această lucrare urmăreşte prezentarea cadrului matematic general folosit pentru descrierea simetriilor dinamice la sisteme hamiltoniene clasice şi cuantice, cu aplicaţii la probleme actuale de interes în fizică. Capitolul I are la bază notele seminarului "Simetrii dinamice şi variabile colective" prezentat în 1989 în Secţia de Fizică Teoretică a Institutului de Fizică Atomică din Bucureşti, completate în Capitolul II cu rezultate mai recente privind soluţiile coerente ale ecuaţiilor de transport utilizate în fizica statistică, şi cu aplicaţii la descrierea dinamicii relativiste sau a proprietăţilor particulelor elementare, în Capitolul III.

Pentru interesul şi sprijinul acordat realizării acestui proiect doresc să mulţumesc Dr. Radu Purice (IMAR) şi programului POSDRU în cadrul căruia s-a desfăşurat activitatea de selectare, actualizare şi redactare a materialului prezentat.

M. Grigorescu

Bucureşti, 24 Martie 2013

I. Sisteme dinamice cu simetrie

1 Dinamică hamiltoniană

Modelul matematic al unui sistem hamiltonian cu n grade de libertate este reprezentat geometric de un cuplu (M, ω) format din varietatea netedă $2n$-dimensională M, pe care este definită global forma biliniară, antisimetrică, închisă şi nedegenerată ω [1]. Varietatea M este denumită spaţiul fazelor, iar punctele sale corespund stărilor sistemului clasic. În mecanica clasică observabilele sunt reprezentate de elementele mulţimii funcţiilor netede cu valori reale definite pe M, notată $\mathcal{F}(M)$.

Fie X_f câmpul vectorial determinat de $i_{X_f}\omega = df$, unde $i_{X_f}\omega$ reprezintă produsul interior dintre X_f şi ω. Atunci $\mathcal{F}(M)$ devine algebră Lie în raport cu paranteza Poisson $\{*, *\}$, $\{f, g\} = \langle df, X_g\rangle = \omega(X_f, X_g) = -\mathrm{L}_{X_f} g, \quad f, g \in \mathcal{F}(M)$, în care L_X este derivata Lie în raport cu X.

La sistemele conservative dinamica este un difeomorfism simplectic F_t pe (M, ω) generat de funcţia Hamilton $H \in \mathcal{F}(M)$. Existenţa unei funcţii generatoare asigură o descriere globală a acestui difeomorfism cu un singur parametru real $t \in \mathbb{R}$, identificat în aplicaţii cu timpul fizic.

Forma simplectică ω exprimă global şi independent de alegerea coordonatelor relaţia dintre funcţia Hamilton H şi câmpul vectorial X_H asociat curentului stărilor clasice

$$i_{X_H}\omega = dH \quad . \tag{1}$$

Pentru o funcţie $f \in \mathcal{F}(M)$ care nu depinde explicit de timp, ci numai de starea sistemului (de variabilele dinamice),

$$\frac{d}{dt}(f \circ F_t) = \{f \circ F_t, H\}$$

sau

$$\dot{f} = df(X_H) = \mathrm{L}_{X_H} f = \omega(X_f, X_H) = \{f, H\} \quad . \tag{2}$$

În sistemul local de coordonate în care ω are forma canonică $\omega = \sum_{k=1}^{n} dq_k \wedge dp_k$,

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \quad , \quad f, g \in \mathcal{F}(M) \quad , \tag{3}$$

iar (1) conduce la sistemul de ecuaţii

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad , \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad , \quad k = 1, n \quad , \tag{4}$$

unde prin $\dot{f}$ am notat derivata în raport cu timpul a variabilei $f \equiv q_k, p_k$. Curentul hamiltonian rezultat din aceste ecuaţii corespunde acţiunii unui grup Lie uniparametric de difeomorfisme ale varietăţii M care păstrează elementul de volum

$$\Omega = \omega^n = \prod_{k=1}^{n} dq_k dp_k \tag{5}$$

definit de ω (teorema Liouville).

Dacă $M = T^*Q$, funcţia Hamilton H are de regulă structura newtoniană, separabilă în termenul de energie cinetică dependent numai de variabilele impuls p şi un termen de energie potenţială V dependent numai de coordonatele q pe spaţiul de configuraţii Q. Există însă şi cazuri în care separarea nu este posibilă, iar H are structura corespunzatoare mişcarii geodezice. Aceste situaţii sunt ilustrate prin exemplele ce urmează.

1.1 Dinamică newtoniană

Dinamica unei particule nerelativiste având masa m constantă, aflată într-un câmp de forţe care derivă din termenul de energie potenţială $V(\mathbf{r})$, este determinată de funcţia Hamilton

$$H_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \tag{6}$$

şi forma simplectică $\omega_0 = \sum_{k=1}^{3} dq_k \wedge dp_k$. Aici prin

$$\mathbf{r} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3 \tag{7}$$

am notat vectorul de poziţie al particulei în spaţiul fizic tridimensional $Q = \mathbb{R}^3$ specificat de coordonatele carteziene $(q_1, q_2, q_3) \equiv (x, y, z)$, iar $\mathbf{p}$ este vectorul impulsului cu componentele (p_1, p_2, p_3). În coordonate sferice (Anexa 1)

$$\mathbf{p} = p_r\mathbf{e}_r + \frac{p_\theta}{r}\mathbf{e}_\theta + \frac{p_\varphi}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi \quad ,$$

unde $p_r = m\dot{r}$, $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$, $p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$, iar $\omega_0 = dr \wedge dp_r + d\theta \wedge dp_\theta + d\varphi \wedge dp_\varphi$.

1.2 Dinamică geodezică

Dacă parametrul inerţial este anizotrop şi depinde de poziţie funcţia Hamilton are forma generală

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \eta_{ij}(\mathbf{r}) p_i p_j + V(\mathbf{r}) \tag{8}$$

iar ecuaţiile de mişcare devin

$$\dot{q}_k = \sum_i \eta_{ki} p_i \quad , \quad \dot{p}_k = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} \nabla_k \eta_{ij} p_i p_j - \nabla_k V \quad , \quad k = 1,2,3 \quad , \tag{9}$$

unde $\nabla_k \equiv \partial/\partial q_k$. Dacă folosim notaţia matriceală $\dot{q} = \eta p$, atunci $p = g\dot{q}$, $g = \eta^{-1}$, iar $\dot{p} = g\ddot{q} + (\dot{q}\cdot\nabla g)\dot{q}$. Înlocuind aici $\dot{p}$ din (9) obţinem

$$g\ddot{q} + (\dot{q}\cdot\nabla g)q = -\frac{1}{2}p(\nabla\eta)p - \nabla V \quad . \tag{10}$$

Deoarece $\nabla(\eta g) = 0$ rezultă $\nabla\eta = -\eta(\nabla g)\eta$, şi $p(\nabla\eta)p = -\dot{q}(\nabla g)\dot{q}$, iar (10) capătă forma

$$g\ddot{q} + (\dot{q}\cdot\nabla g)\dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}(\nabla g)\dot{q} - \nabla V \quad , \tag{11}$$

sau pe componente

$$\sum_j g_{ij}\ddot{q}_j = -\sum_{kl}(\partial_k g_{il} - \frac{1}{2}\partial_i g_{kl})\dot{q}_k\dot{q}_l - \partial_i V \quad .$$

Astfel, acceleraţia particulei $\ddot{\mathbf{q}}$ are componentele

$$\ddot{q}_j = -\sum_{kl}\Gamma^j_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l - \sum_i g^{-1}_{ji}\partial_i V$$

unde

$$\Gamma^j_{kl} = \sum \frac{g^{-1}_{ji}}{2}(\partial_k g_{il} + \partial_l g_{ik} - \partial_i g_{kl}) \quad , \tag{12}$$

sunt simbolurile Christoffel (Anexa 1).

În cazul singular reprezentat de hamiltonianul pentru fotonii luminşi, $H_f(\mathbf{q},\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}|/n_a(\mathbf{q})$, unde c este viteza luminii în vid şi $n_a(\mathbf{q})$ este indicele de refracţie absolut al mediului, iar ecuaţiile de mişcare pe razele de lumină capătă forma

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{c}{n_a}\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad , \quad \dot{\mathbf{p}} = -\nabla H_f = H_f \nabla \ln n_a \quad . \tag{13}$$

1.3 Grupul $SO(3)$ şi solidul rigid

Grupul $O(3,\mathbb{R})$ este format din matricile reale 3×3 ortogonale, $\{\hat{\mathsf{R}}^T\hat{\mathsf{R}} = I\}$, şi are două componente conexe, grupul rotaţiilor

$$SO(3,\mathbb{R}) = \{\hat{\mathsf{R}}\ ;\ \hat{\mathsf{R}}^T\hat{\mathsf{R}} = I, \det\hat{\mathsf{R}} = 1\} \tag{14}$$

şi $\hat{I}_- SO(3,\mathbb{R})$, unde $\hat{I}_- = \mathrm{diag}[-1,-1,-1]$ este matricea de inversie $((...)^T$ este operaţia de transpunere). Componenta identitaţii $SO(3,\mathbb{R})$ este o varietate compactă, ale cărei elemente se pot asocia punctelor sferei pline de rază 2π din $\mathbb{R}^3$, la care centrul şi suprafaţa se identifică. Astfel, orice rotaţie $\hat{\mathsf{R}}$ este specificată complet de versorul $\mathbf{n}$ al direcţiei axei de rotaţie, şi de unghiul α de rotaţie în jurul acestei axe, deci de vectorul $\alpha\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, $|\mathbf{n}| = 1$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. Echivalent, $\hat{\mathsf{R}}$ poate fi specificată de unghiurile Euler φ, θ, ψ. Este important de remarcat faptul că aceşti parametri sunt variabile continue, iar $SO(3,\mathbb{R})$ nu este limita unui şir de grupuri discrete. Cel mai mare subgrup discret care acoperă uniform $SO(3,\mathbb{R})$ este grupul icosaedrului, cu 60 de elemente [2].

La acţiunea grupului $SO(3,\mathbb{R})$ în $\mathbb{R}^3$ prin rotaţii ale versorilor axelor de coordonate $\mathbf{e}'_k = \sum_i \hat{\mathsf{R}^{\mathsf{e}}}_{ki}\mathbf{e}_i$, vectorul de poziţie (7) al unui punct fix din spaţiu rămâne invariant, iar componentele sale se transformă[1] potrivit relaţiei $q'_k = \sum_i \hat{\mathsf{R}^{\mathsf{q}}}_{ki} q_i$, unde $\mathsf{R}^{\mathsf{q}} = (\mathsf{R}^{\mathsf{e}})^T$. Cu parametrizarea Euler cele două matrici capătă forma

$$\hat{\mathsf{R}^{\mathsf{e}}} = e^{\varphi\hat{\xi}_3} e^{\theta\hat{\xi}_1} e^{\psi\hat{\xi}_3} \quad , \quad \hat{\mathsf{R}^{\mathsf{q}}} = e^{\psi\hat{\ell}_3} e^{\theta\hat{\ell}_1} e^{\varphi\hat{\ell}_3} \quad , \tag{15}$$

unde $\hat{\xi}_i = -\hat{\ell}_i$, $i = 1, 2, 3$ sunt 3 matrici 3×3 antisimetrice independente, cu elemente $(\hat{\xi}_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk}$ (ϵ_{ijk} este simbolul Levi-Civita) şi relaţiile de comutare

$$[\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j] = \epsilon_{ijk}\hat{\xi}_k \quad , \quad [\hat{\ell}_i, \hat{\ell}_j] = -\epsilon_{ijk}\hat{\ell}_k \quad . \tag{16}$$

Pentru descrierea solidului rigid sistemul "laboratorului" cu versorii $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ se consideră fix, iar sistmul rotit $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ este ataşat "intrinsec" fiecărei orientari în $\mathbb{R}^3$ a solidului, asfel încât spaţiul configuraţiilor se identifică natural cu grupul $SO(3)$. Dacă (φ, θ, ψ) depind de timp, atunci relaţia

$$\dot{\hat{\mathsf{R}^{\mathsf{e}}}} = \sum_i \omega_i \hat{\xi}_i \hat{\mathsf{R}}^e = \hat{\mathsf{R}}^e \sum_i \omega'_i \hat{\xi}_i$$

defineşte componentele vitezei unghiulare ω_i, ω'_i ($\omega'_k = \sum_i \hat{\mathsf{R}}^q_{ki}\omega_i$) în sistemul laboratorului, respectiv în sistemul intrinsec. Explicit,

$$\omega'_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$

$$\omega'_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$

$$\omega'_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \quad .$$

Pentru solidul rigid energia cinetică este

$$T = \sum_{pq} \hat{I}_{pq}\omega'_p\omega'_q/2 = \sum_{ij} \hat{I}^L_{ij}\omega_i\omega_j/2 \quad , \quad \hat{I}^L_{ij} = \sum_{pq} \hat{\mathsf{R}^{\mathsf{q}}}^{-1}_{ip} \hat{\mathsf{R}^{\mathsf{q}}}^{-1}_{jq} \hat{I}_{pq} \quad , \tag{17}$$

[1] Mărimile care se transformă ca şi vectorii bazei $\mathbf{e}_i$ se numesc covariante, iar cele care se transformă ca şi coordonatele q_i (notate si q^i) se numesc contravariante.

unde $\hat{I}$ este tensorul momentului de inerţie intrinsec (constant). Componentele momentului cinetic sunt $L_k = \partial T/\partial \omega_k$, ($L'_k = \partial T/\partial \omega'_k$), iar cu relaţia

$$\frac{d\hat{I}^L_{ij}}{dt} = \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{ikl}\omega_k \hat{I}^L_{lj} + \epsilon_{jkl}\omega_k \hat{I}^L_{li} \quad ,$$

legea de conservare $\dot{L}_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, conduce la ecuaţiile Euler

$$\dot{\mathbf{L}}' = \mathbf{L}' \times \omega' \quad , \tag{18}$$

sau $\hat{I}^L \dot{\vec{\omega}} = \mathbf{L} \times \vec{\omega}$. În particular, dacă solidul are simetrie sferică $\hat{I}_{pq} = I\delta_{pq}$,

$$T = \frac{I}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\cos\theta\ \dot{\varphi}\dot{\psi}) \quad , \tag{19}$$

iar $\mathbf{L}' = I\vec{\omega}'$ este constant. O descriere a ecuaţiilor Euler ca sistem hamiltonian pe spaţiul fazic $T^*SO(3)$ va fi prezentată în Sect. I.6.

1.4 Spaţiul fazic extins şi dinamica relativistă

Spaţiul fazic M al unui sistem clasic poate fi extins la un spaţiu fazic (M^e, ω^e), care include energia şi timpul ca variabile conjugate [3]. Setul coordonatelor canonice pe M^e pentru care $\omega^e = -d\theta^e$,

$$\theta^e = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i + p_0 dq_0 \tag{20}$$

este format din coordonatele canonice pe M, $\{q_i, p_i, i = 1, n\}$, şi (q_0, p_0), definite ca funcţii liniare de timp şi energie, $q_0 = ct$, respectiv $p_0 = -E/c$, unde c este o constantă dimensională, identificată cu viteza luminii în vid [4].

Fie u parametrul denumit "timp universal" de-a lungul traiectoriilor pe M^e, $d_u \equiv d/du$ derivata în raport cu u, şi

$$\mathrm{L}_{H^e} = \sum_{i=1}^{n} (d_u q_i)\partial_{qi} + (d_u p_i)\partial_{pi} + (d_u t)\partial_t + (d_u E)\partial_E \tag{21}$$

derivata Lie $\mathrm{L}_{H^e} f \equiv -\{H^e, f\}^e$. Aici $\{*, *\}^e$ şi H^e reprezintă paranteza Poisson, respectiv funcţia Hamilton extinsă pe M^e. În cazul unui sistem nerelativist H^e se poate alege de forma [4]

$$H^e_N = H + cp_0 \quad , \tag{22}$$

unde H este funcţia Hamilton uzuală pe M (de exemplu (6)). Cu această expresie ecuaţiile de mişcare pe spaţiul fazic extins sunt

$$d_u q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad d_u p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{23}$$

$$d_u t = 1 \quad , \quad d_u E = \frac{\partial H}{\partial t} \quad . \tag{24}$$

Primul grup de ecuaţii reproduce ecuaţiile Hamilton uzuale M. Al doilea grup arată că alegerea lui H_N^e corespunde la $u = t$, şi asigură conservarea energiei când H este independent de timp.

În spaţiul fazic extins, trecerea de la mecanica newtoniană la cea relativistă se realizează prin schimbarea hamiltonianului. O particulă relativistă liberă[2] având $q^e \equiv (q_0, \mathbf{q})$ şi $p^e \equiv (p_0, \mathbf{p})$ drept variabile canonice pe $M^e \equiv \mathbb{R}^8$, poate fi descrisă de [5, 6, 7]

$$H_0^e = -c\sqrt{p_0^2 - \mathbf{p}^2} \quad . \tag{25}$$

Când $p_0^2 \approx m_0^2 c^2 \gg \mathbf{p}^2$ acest hamiltonian extins se reduce la expresia nerelativistă $H_{N0}^e = \mathbf{p}^2/2m_0 + cp_0$, iar în general conduce la ecuaţiile de mişcare

$$d_u q_0 = -c\frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 - \mathbf{p}^2}} \quad , \quad d_u p_0 = 0 \tag{26}$$

$$d_u \mathbf{q} = c\frac{\mathbf{p}}{\sqrt{p_0^2 - \mathbf{p}^2}} \quad , \quad d_u \mathbf{p} = 0 \quad . \tag{27}$$

În raport cu un sistem inerţial particular, viteza uzuală[3] $\mathbf{v} = d\mathbf{q}/dt$ este raportul $\mathbf{v} = c d_u \mathbf{q}/d_u q_0 = -c\mathbf{p}/p_0$.

Pentru o particulă relativistă cu energie negativă (Sect. III.1) vom considera $H_0^e = c\sqrt{p_0^2 + \mathbf{p}^2}$, astfel încât expresia $H_0^e = -\alpha c\sqrt{p_0^2 - \alpha \mathbf{p}^2}$, cu $\alpha = \pm 1$ include ambele cazuri. Parameterii inerţiali I_μ pentru H_0^e, definiţi de

$$\frac{1}{I_\mu} \equiv \frac{1}{p_\mu}\frac{\partial H_0^e}{\partial p_\mu} \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{28}$$

au valorile

$$I_1 = I_2 = I_3 = -\alpha I_0 = -\alpha\frac{H_0^e}{c^2} = m_0 \quad , \tag{29}$$

specificate de valoarea invariantă $-\alpha m_0 c^2$ a lui H_0^e.

Cuplajul unei particule relativiste aflate în vid având sarcina electrică q_e şi sarcina magnetică[4] q_m cu câmpul electromagnetic se poate introduce prin modificarea formei simplectice ω^e, care devine [7]

$$\omega_A^e = \omega^e + q_e \omega_f + q_m \omega_f^* \quad .$$

[2] Pentru a include un potenţial extern V($\mathbf{q}$) se consideră $H^e = -c\sqrt{(p_0 + \mathrm{V}/c)^2 - \mathbf{p}^2}$.

[3] Lagrangeanul standard pe $\mathbb{R}^3$ al particulei relativiste libere se găseşte în [1].

[4] Particule elementare libere cu sarcină magnetică (monopoli) sau culoare (Sect. III.4) nu au fost observate.

Aici ω_f şi ω_f^* sunt 2-forme de câmp duale definite pe varietatea spaţiu-timp $\mathbb{R}^4$ prin $\omega_f = -d\theta_f$, $\theta_f = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{q} + A_0 dq_0$,

$$\omega_f = -\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot dq_0 \wedge d\mathbf{q} \quad , \tag{30}$$

respectiv

$$\omega_f^* = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{B} \cdot dq_0 \wedge d\mathbf{q} \quad ,$$

unde $\mathbf{E}$ ($\mathbf{B}$), reprezintă intensitatea câmpului electric (inducţia câmpului magnetic), iar $dS_1 = dq_2 \wedge dq_3$, $dS_2 = -dq_1 \wedge dq_3$, $dS_3 = dq_1 \wedge dq_2$. Observăm că ecuaţiile Maxwell în vid capătă forma $d\omega_f = d\omega_f^* = 0$ (sau $[\omega_f]_{dR} = 0$), iar pentru câmpul unei unde electromagnetice coerente cu faza φ avem $\omega_f = -d_\varphi \mathbf{A} \cdot d\varphi \wedge d\mathbf{q}$ [7].

2 Polarizări reale şi teoria Hamilton-Jacobi

O polarizare reală a varietăţii simplectice (M, ω) este o foliere a lui M prin subvarietati lagrangeene (izotrope maximale). Dacă $M = T^*Q$, iar $\omega = \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k$ este 2-forma canonică, atunci folierea verticală P este o polarizare reală, iar foile lui P sunt suprafeţele q_k =constant, $k = \overline{1, n}$.

Fie P o polarizare reală a varietăţii simplectice (M, ω). Atunci, pe o vecinătate a oricarui punct m din M se pot găsi coordonate canonice $(x, y) \equiv (x_k, y_k)_{k=\overline{1,n}}$ astfel încât foile lui P să coincidă local cu suprafeţele x = const. sau y = const.. Coordonatele canonice având această properietate se numesc "adaptate la P".

Fie $\Lambda \subset M$ o subvarietate lagrangeană şi $U \subset M$ conţinând Λ astfel încât $\omega|_U = -\mathrm{d}\theta$. Deoarece $\omega|_\Lambda = 0$ atunci $\mathrm{d}\theta|_\Lambda = 0$, şi local există o funcţie $\wp$ pe Λ, numită "funcţie de fază locală ", $\wp : \Lambda \mapsto \mathbb{R}$, astfel încât $\theta|_\Lambda = \mathrm{d}\wp$.

Când $M = T^*Q$, Λ este transversală la polarizarea verticală P dacă restricţia la Λ a proiecţiei

$$\begin{array}{cc} \Lambda \subset & M \\ & \pi \downarrow \\ & Q \end{array}$$

este un difeomorfism. În acest caz $S \in \mathcal{F}(W)$, $\pi^* S = \wp$, pe $\pi(\Lambda) = W \subset Q$, se numeşte "funcţie generatoare de prima speţă " a lui Λ. Mai mult, $\Lambda \cap T^*Q$ determină o 1-formă pe W cu coordonatele locale

$$(p, q) \equiv (\frac{\partial S}{\partial q}, q) \quad .$$

Astfel, o foliere a spaţiului fazic $M = T^*Q$ prin subvarietăţi lagrangeene corespunde unei familii de funcţii generatoare $S(q, y)$, $y \equiv \{y_k,\ k = \overline{1, n}\}$, parametrizate de variabilele y. Acest tip de foliere apare natural în mecanica clasică prin ecuaţia Hamilton-Jacobi staţionară,

$$H(\partial_q S, q) = \text{constant} \tag{31}$$

care reprezintă condiţia $H|_{\Lambda_S} = \text{constant}$ pentru subvarietatea lagrangeană Λ_S din T^*Q generată de S.

Propoziţia 1. Fie $\Lambda \subset M$ o subvarietate lagrangeană conexă a spaţiului fazic (M, ω) şi $H \in \mathcal{F}(M)$. Atunci H este o constantă pe Λ dacă şi numai dacă $X_H \in \chi(M)$ este tangent la Λ.

Dacă notăm $x \equiv \{x_k = \partial S/\partial y_k, k = \overline{1, n}\}$, atunci (x, y) este un sistem local de cordonate pe T^*Q adaptat la polarizarea Λ_S determinată de $S(q, y)$. În acest sistem H este o funcţie numai de y, iar ecuaţiile de mişcare devin

$$\dot{y} = 0 \quad , \quad \dot{x} = \text{constant.}$$

În particular, când $Q \simeq \mathbb{R}^n$ şi $\Lambda_S \subset \mathbb{T}^n \equiv \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ face parte dintr-un tor invariant, atunci y-x sunt coordomatele "acţiune-unghi".

Fie $\mathcal{D}(M)$ grupul difeomorfismelor varietăţii M şi

$$\mathcal{D}(M, \omega) = \{\rho \in \mathcal{D}(M), \rho^*\omega = \omega\}$$

subgrupul difeomorfismelor simplectice, care acţionează prin transformări canonice. Acest subgrup conţine subgrupul difeomorfismelor hamiltoniene $\mathrm{Ham}(M, \omega)$, iar dacă M este simplu conexă sau $TM = [TM, TM]$, atunci $\mathcal{D}(M, \omega) = \mathrm{Ham}(M, \omega)$.

În teoria Hamilton-Jacobi o reprezentare locală a difeomorfismelor simplectice dependente de timp care transformă un câmp vectorial hamiltonian într-un alt câmp hamiltonian este oferită de funcţia generatoare a transformărilor canonice ([3], p. 286). Aceste difeomorfisme se pot imagina ca transformări generate de câmpul de acţiune $\bar{S}$, de la un referenţial în care sistemul dinamic are coordonatele (q, p) şi funcţia Hamilton H, în general dependentă de timp, la un "referenţial mobil", unde noile coordonate sunt (q', p'). Cu notaţia $\omega = -d\theta$, pentru a avea $\omega = \omega'$ trebuie ca

$$\theta - \theta' = d\bar{S} \tag{32}$$

unde $\bar{S}$ poate fi exprimată ca funcţie de una din combinaţiile (q, q'), (q, p'), (p, q') sau (p, p'), (potrivit alegerii reprezentării locale a 1-formelor $\theta^{e\prime}$, θ^e) şi de timp. La un sistem cu n grade de libertate pentru care

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i \quad , \quad \theta' = -\sum_{i=1}^{n} q_i' dp_i'$$

câmpul de acţiune $\bar{S} \equiv \bar{S}(\tilde{q}, \tilde{p}', t)$ are forma

$$\bar{S}(\tilde{q}, \tilde{p}', t) = \tilde{q}^T \tilde{p}' + \zeta(\tilde{q}, \tilde{p}', t) \quad , \tag{33}$$

cu $\tilde{q}$ şi $\tilde{p}'$ matrici coloană având componentele q_k, respectiv p'_k, $k = 1, n$. Această expresie corespunde unei relaţii implicite între coordonate,

$$p_k = \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_k} \quad , \quad q'_k = \frac{\partial \bar{S}}{\partial p'_k} \quad . \tag{34}$$

Relativ la noile coordonate structura canonică $\dot{p} = -\partial_q H$, $\dot{q}' = \partial_{p'} H'$ a ecuaţiilor de mişcare se păstrează dacă evoluţia temporală a variabilelor (q', p') este determinată de funcţia Hamilton

$$H'(\tilde{p}', \tilde{q}') = H + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad . \tag{35}$$

Transformarea identică $\tilde{q}' = \tilde{q}$, $\tilde{p}' = \tilde{p}$ corespunde funcţiilor ζ care sunt constante. Pentru transformări apropiate de identitate $\delta\zeta$ are forma generală [4]

$$\delta\zeta(\tilde{q}, \tilde{p}', t) = \tilde{X}^T \tilde{q} - \tilde{Y}^T \tilde{p}' + \frac{1}{2}(\tilde{q}^T \hat{b} \tilde{q} + \tilde{p}'^T \hat{c} \tilde{p}') - \tilde{q}^T \hat{a} \tilde{p}' \tag{36}$$

unde $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ sunt vectori coloană cu n componente, iar $\hat{a}$, $\hat{b} = \hat{b}^T$, $\hat{c} = \hat{c}^T$ sunt matrici $n \times n$. Transformarea definită de (34) se poate scrie explicit în acest caz sub forma matriceală

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}' \\ \tilde{p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tilde{Y} \\ -\tilde{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{a}^T & \hat{c} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} \quad . \tag{37}$$

De aici rezultă că funcţia $\delta\zeta$ din relaţia (36) generează o translaţie a impulsurilor cu vectorul $-\tilde{X}$, o translaţie a coordonatelor cu vectorul $-\tilde{Y}$, şi o transformare liniară simplectică generată de un element al algebrei $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ parametrizat de matricile $\hat{a}$, $\hat{b}$, şi $\hat{c}$ (Anexa 4.3).

Ecuaţia (31) reprezintă un caz particular al transformării (35) în care $H' = 0$, iar $\tilde{q}'$ şi $\tilde{p}'$ sunt constante de integrare. Dacă notăm $\tilde{p}' \equiv \tilde{\alpha}$ atunci $\tilde{q}' = \partial\bar{S}/\partial\tilde{\alpha}$, iar funcţia $\bar{S}(\tilde{q}, \tilde{\alpha}, t)$ se poate obţine prin rezolvarea ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul întâi Hamilton-Jacobi dependentă de timp

$$H(\tilde{p} = \frac{\partial \bar{S}}{\partial \tilde{q}}, \tilde{q}) = -\partial_t \bar{S} \quad , \quad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} \quad . \tag{38}$$

La sistemele conservative $-\partial_t \bar{S} = E(\tilde{\alpha})$ este constanta reprezentată de energie, astfel încât $\bar{S}(\tilde{q}, \tilde{\alpha}, t) = S(\tilde{q}, \tilde{\alpha}) - E(\tilde{\alpha})t$, iar funcţia $S(\tilde{q}, \tilde{\alpha})$ satisface ecuaţia Hamilton-Jacobi independentă de timp (31)

$$H(\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}}, \tilde{q}) = E \quad . \tag{39}$$

O clasă importantă de transformări în spaţiul fizic este constituită de modificările poziţiei, cum sunt translaţiile sau rotaţiile. Acestea pot fi statice (geometrice, generate de (37) cu $\tilde{Y}$ sau $\hat{a}$ constante, iar restul parametrilor zero) sau dependente de timp (cinematice), active (acţionează asupra sistemului fizic studiat) sau pasive (acţionează asupra sistemului de referinţă al observătorului), globale (parametrii au aceleaşi valori în tot spaţiul) sau locale (parametrii depind de punct). De regulă în studiul simetriilor apar transfomări globale, iar transformarile locale sunt folosite pentru a introduce sau a descrie anumite câmpuri de forţă cu proprietăţi "de etalonare" specifice. Transformările cinematice infinitezimale între două referenţiale aflate în mişcare relativă uniformă vor fi descrise în exmplele ce urmează cu formula generală (37).

1) Translaţii uniforme

Pentru un sistem format din N particule $n = 3N$, iar trecerea de la referenţialul O la un referenţial O' aflat în translaţie uniformă cu viteza $\mathbf{V}$ corespunde la $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = 0$ şi $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i$, $\tilde{Y} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{Y}_i$ unde $\mathbf{X}_i = m_i\mathbf{V}$, $\mathbf{Y}_i = \delta t\mathbf{V}$, iar m_i este masa particulei $i = 1, N$. În acest caz funcţia generatoare este

$$\delta\zeta_V(\tilde{q}, \tilde{p}', \delta t) = \mathbf{V} \cdot (m\mathbf{R}_{CM} - \delta t\mathbf{P}') \tag{40}$$

unde $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ reprezintă masa totală a sistemului, $\mathbf{R}_{CM}$ este coordonata centrului de masă în referenţialul O, iar $\mathbf{P}'$ impulsul total în referenţialul O'. Funcţia Hamilton în referenţialul O' are expresia

$$H'(\tilde{p}', \tilde{q}', \delta t) = H(\mathbf{p}'_i + m_i\mathbf{V}, \mathbf{r}'_i + \delta t\mathbf{V}, \delta t) - \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}' \quad . \tag{41}$$

2) Rotaţii uniforme

Dinamica unui sistem cu N particule într-un referenţial O' aflat în rotaţie uniformă faţă de O se poate exprima folosind noile variabile canonice $\tilde{q}' = [\mathbf{r}'_i, i = 1, N]$, $\tilde{p}' = [\mathbf{p}'_i, i = 1, N]$, definite de ecuaţia (37), în care

$$\tilde{X} = \tilde{Y} = \tilde{0} \quad , \quad \hat{a} = \otimes_{i=1}^{N} \hat{a}_i \quad , \quad \hat{b} = \hat{c} = \hat{0} \quad .$$

Matricile 3×3 $\hat{a}_i$ reprezintă acţiunea elementelor algebrei $\mathfrak{so}(3)$ (16) a grupului rotaţiilor asupra variabilelor particulei i. Dacă notăm cu $\vec{\omega}$ vectorul viteză unghiulară, atunci $\hat{a}_i = \delta t\vec{\omega} \cdot \hat{\ell}$, $(\hat{\ell}_i)_{jk} = \epsilon_{ijk}$. Funcţia generatoare (36) a acestei transformări este

$$\delta\zeta_\omega(\tilde{q}, \tilde{p}', \delta t) = -\delta t\vec{\omega} \cdot \mathbf{L} \quad ,$$

unde $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}'_i$. Noile coordonate sunt

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \delta t\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad , \quad \mathbf{p}'_i = \mathbf{p}_i - \delta t\vec{\omega} \times \mathbf{p}_i \tag{42}$$

iar potrivit relaţiei (35) evoluţia lor în timp este generată de hamiltonianul

$$H' = H - \vec{\omega} \cdot \mathbf{L} \quad , \tag{43}$$

unde $\vec{\omega} \cdot \mathbf{L}$ este termenul Coriolis.

Mulţimea transformărilor continue rezultate din compunerea translaţiilor uniforme cu rotaţiile şi translaţiile statice formează grupul de echivalenţă inerţială (Sect. III.1), numit grup Galilei în cazul nerelativist, sau Poincaré în mecanica relativistă. Acţiunea acestor grupuri pe spaţiul fazic (M, ω) determină o clasă de referenţiale echivalente în raport cu formularea legilor fizicii şi implică anumite proprietăţi generale de simetrie (invarianţă) pentru ecuaţiile mecanicii clasice.

3 Acţiuni simplectice de grup şi invarianţă

Fie M o varietate netedă. O acţiune la stânga a grupului Lie G pe M este o aplicaţie netedă [8] $\Phi : G \times M \mapsto M$ astfel încât
i) $\forall m \in M, \Phi(e, m) = m$,
ii) $\forall g, h \in G$, $\forall m \in M$, $\Phi(g, \Phi(h, m)) = \Phi(gh, m)$.
Orbita lui $m \in M$ este

$$G \cdot m = \{\Phi(g, m)/g \in G\} \quad .$$

Acţiunea este tranzitivă dacă $G \cdot m = M$, $\forall m \in M$. În acest caz M se numeşte spaţiu omogen. Grupul de izotropie al lui Φ în $m \in M$ este

$$G_m = \{g \in G/\Phi(g, m) = m\} \quad .$$

Acest subgrup este închis deoarece $\tilde{\Phi}_m : G \mapsto M$, $\tilde{\Phi}_m(g) \equiv \Phi_(g, m)$ este continuă, iar $G_m = \tilde{\Phi}_m^{-1}(m)$.

Fie Φ o acţiune a lui G pe varietatea simplectică (M, ω). Această acţiune este simplectică dacă ω rămâne invariantă la Φ_g ($\Phi_g(m) \equiv \Phi(g, m)$),

$$\Phi_g^* \omega = \omega \quad , \quad \forall g \in G \quad .$$

Fie $\Phi : G \times M \mapsto M$ o acţiune netedă, şi $\xi \in T_e G \equiv \mathfrak{g}$. Atunci $\Phi^\xi : \mathbb{R} \times M \mapsto M$ definită de

$$\Phi^\xi(t, m) = \Phi(e^{t\xi}, m) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

este o $\mathbb{R}$-acţiune pe M, iar Φ^ξ este un curent pe M. Câmpul vectorial corespunzator dat de

$$\xi_M(m) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi(e^{t\xi}, m)$$

este generatorul infinitezimal al acţiunii induse de ξ, iar

$$\xi_M(\Phi_g m) = T_m \Phi_g (Ad_{g^{-1}}\xi)_M(m)$$

cu $Ad_g \xi = T_e R_{g^{-1}} L_g \xi$ (Anexa 2).

Fie (M, ω) o varietate simplectică, Φ_a o acţiune simplectică ($\Phi_a^* \omega = \omega$), independentă de timp ($\dot{\Phi}_a = 0$), a grupului Lie G pe M, şi X_H un câmp hamiltonian pe M ($i_{X_H}\omega = dH$). Vom spune ca ecuaţiile de mişcare (sau legile fizicii) sunt invariante la acţiunea lui G dacă

$$\Phi_a^* X_H = X_H \quad , \quad \forall a \in G \quad .$$

Când ecuaţiile de mişcare sunt invariante

$$\Phi_a^* H - H \equiv \rho(a) \tag{44}$$

este o constantă pe M şi $\rho(ab) = \rho(a) + \rho(b)$, $\forall a, b \in G$, astfel încât $a \mapsto \rho(a)$ este un homomorfism al lui G în $\mathbb{R}$. Dacă G este compact atunci $\rho(a) = 0$, iar H este invariant la acţiunea lui G. În formalismul lagrangean orice transformare continuă la care funcţia Lagrange se modifică cel mult cu o derivată totală în rapot cu timpul păstrează forma ecuaţiilor de mişcare, iar prin teorema Noether determină o lege de conservare [9].

Prin "invarianţă manifestă" la acţiunea lui G vom înţelege invarianţa curentului F_t, $\Phi_a^* F_t = F_t$, (a traiectoriilor) determinate de câmpul X_H. Deoarece $X_H = \dot{F}_t$, iar Φ_a nu depinde de timp, de regulă invarianţa manifestă este o consecinţă a invarianţei ecuaţiilor de mişcare. Totuşi, pot exista şi varietăţi critice singulare $\dim\Sigma \neq 0$, $X_H|_\Sigma = 0$, pe care G acţioneaza netrivial, $G \cdot \Sigma = \Sigma$. În acest caz vom spune ca sistemul prezintă o rupere spontană de simetrie.

Potrivit (44) proprietăţile de simetrie ale hamiltonianului reflectă structura acestuia, astfel încât, dacă se alege simetria drept principiu fundamental, atunci clasa de funcţii admisibile ca hamilonieni poate fi restrânsă la cele selectate de teoria mişcării colective (Sect. I.6).

Dacă $M = T^*\mathbb{R}^3$, proprietăţile geometrice ale spaţiului fizic (izotropie, omgenitate) specifică drept grup de simetrie fundamental pentru particula liberă grupul euclidian $E(3) = SO(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$, definit ca produs semidirect între grupul rotaţiilor statice globale $SO(3, \mathbb{R})$ şi cel al translaţiilor spaţiale statice globale $\mathbb{R}^3$. Un potenţial extern $V(\mathbf{r})$ localizat afectează invarianţa la translaţii, dar aceasta se poate restabili considerând sisteme de particule cu masă finită în interacţiune.

Forma particulară a hamiltonianului (a termenilor de interacţiune) poate conduce însă la un grup de simetrie mai larg, numit grup de simetrie dinamică. De exemplu, în cazul problemei Kepler nerelativiste (Cap. III) acesta este $SO(3, 1)$ pentru stările cu energie pozitivă şi $SO(4, \mathbb{R})$ pentru stări legate.

Translaţiile cu viteză constantă reprezintă un caz special deoarece privesc cadrul spaţio-temporal şi conform principiului inerţiei păstrează ecuaţiile de mişcare invariante, dar prin (41) au efecte dinamice datorate dependenţei explicite de timp. În continuare vom presupune că invarianţa la transformările grupului de echivalenţă inertială intră în categoria simetriilor dinamice pentru hamiltonieni definiţi pe spaţiul fazic extins. În funcţie de hamiltonianul considerat pentru particula liberă, această echivalenţă poate fi exprimată folosind transformarile Galilei sau Lorentz. Dintre acestea, invarianţa Lorentz este mai restrictivă, deoarece potrivit teoremei de ne-interacţiune [10], la un sistem de mai multe particule invarianţa relativistă a ecuaţiilor de mişcare (a legilor fizicii) este compatibilă cu invarianţa relativistă manifestă, a liniilor de univers (traiectoriilor) determinate de aceste ecuaţii, numai dacă particulele nu interacţionează prin forţe la distanţă. Totuşi, acest rezultat poate fi evitat dacă particulele au o structură, deoarece condiţia de invarianţă manifestă devine ambiguă [11, 12].

Existenţa simetriilor simplifică rezolvarea ecuaţiilor de mişcare, iar în cazul sistemelor complexe permite o descriere calitativă a curentului hamiltonian, considerat ca acţiune a grupului $\mathbb{R}$. În general, "integralele prime" independente de timp sunt legate de algebra grupului de simetrie prin aplicaţia moment.

4 Aplicaţia moment

Propoziţia 2. Fie Φ o acţiune la stânga a lui G pe M, şi $\tilde{\Phi}_m : G \mapsto M$ definită de $\tilde{\Phi}_m(g) = \Phi(g, m)$, $\forall m \in M$. Atunci:
i) pentru orice q-formă $\omega \in \Omega^q(M)$, Φ_g-invariantă ($\Phi_g^*\omega = \omega$), se poate defini o aplicaţie[5] $\Sigma : M \mapsto \Lambda^q(\mathfrak{g})$, $\Sigma(m) = \tilde{\Phi}_m^*\omega$.
ii) aplicaţia Σ este G-morfism (echivariantă), $\Sigma \circ \Phi_g = Ad^*_{g^{-1}}\Sigma$.
Teorema 1. Orice acţiune simplectică a grupului Lie G pe (M, ω) defineşte un G-morfism $\Sigma : M \mapsto Z^2(\mathfrak{g})$ astfel încât:
i) $\Sigma(M)$ este reuniune de G-orbite în $Z^2(\mathfrak{g})$.
ii) dacă acţiunea lui G pe M este tranzitivă, atunci $\Sigma(M)$ este o singură orbită.

Fie $\mathfrak{g} \equiv T_eG$, $\Sigma \in Z^2(\mathfrak{g})$, considerată ca 2-formă pe G, şi

$$\mathfrak{g}_\Sigma = \{\xi \in \mathfrak{g} / \mathcal{L}_\xi \Sigma = 0\} \quad , \quad \mathfrak{h}_\Sigma = \{\xi \in \mathfrak{g} / i_\xi \Sigma = 0\} \quad ,$$

unde prin $\mathrm{L}_\xi = i_\xi d + d i_\xi$ am notat derivata Lie. Astfel, $\mathfrak{g}_\Sigma$ este algebra de izotropie a lui Σ, iar grupul conex H_Σ generat de $\mathfrak{h}_\Sigma$ este foaia prin identitatea $e \in G$ a folierii caracteristice (nule) a lui Σ.
Propoziţia 3. Pentru $\Sigma \in Z^2(\mathfrak{g})$, dacă H_Σ este închis în G, atunci $M_\Sigma = G/H_\Sigma$

[5] $\Lambda^k(\mathfrak{g})$ este mulţimea k-formelor pe $\mathfrak{g}$ (submulţimea invariantă la stânga din $\Omega^k(G)$), $Z^k(\mathfrak{g}) = \{\omega \in \Lambda^k(\mathfrak{g}), d\omega = 0\}$, $H^k(\mathfrak{g}) = Z^k(\mathfrak{g})/B^k(\mathfrak{g}) = Ker\ d(\Lambda^k)/d\Lambda^{k-1}$.

este o varietate simplectică, iar orbita în $Z^2(\mathfrak{g})$ asociată cu M_Σ este orbita lui G prin Σ.
Dem.: Fie $\pi : G \mapsto M_\Sigma$ proiecţia $\pi(g) = gH_\Sigma$. Considerând $H_\Sigma \equiv m \in M_\Sigma$, atunci $\pi_m(g) = gm = \tilde{\Phi}_m(g)$, şi $\pi = \tilde{\Phi}_m$, $\Sigma = \pi_m^* \omega$ $\Box$.
Propoziţia 4. G-orbitele prin elementele $\Sigma \in Z^2(\mathfrak{g})$ având H_Σ închis sunt spaţii de acoperire pentru varietăţi simplectice (M, ω) pe care G acţionează tranzitiv.
Dem.: Fie $M = G/H$. Dacă $i_{\eta_M}\omega = 0$ atunci $\eta_M = 0$ şi $\eta \in \mathfrak{h}$. Astfel, dacă $\Sigma = \pi^*\omega$, atunci $\mathfrak{h}_\Sigma = \mathfrak{h}$, H_Σ este componenta conexă a lui H, iar $M_\Sigma = G/H_\Sigma$ este spaţiu de acoperire pentru M $\Box$.
Exemplu. (Kostant-Souriau): Dacă $\Sigma = d\beta$, $\beta \in \mathfrak{g}^*$, atunci H_Σ este închis, şi reprezintă componenta conexă a grupului

$$H_\beta = \{g \in G / Ad^*_{g^{-1}}\beta = \beta\} \quad .$$

Astfel, G/H_Σ este spaţiu de acoperire pentru orbita $G \cdot \beta \simeq G/H_\beta$.
Teorema 2. (Kostant-Souriau): Dacă $H^1(\mathfrak{g}) = H^2(\mathfrak{g}) = \{0\}$, atunci orice varietate simplectică omogenă pentru G acoperă o G-orbită în $\mathfrak{g}^*$ [13].
Dem.: Dacă $H^2(\mathfrak{g}) = \{0\}$ atunci oricare $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ are forma $\omega = d\beta$, $\beta \in \mathfrak{g}^*$, iar H_ω este închis. Totuşi, dacă $H^1(\mathfrak{g}) = \{0\}$ atunci $\forall \beta \in Z^1(\mathfrak{g})$, $\beta = 0$, astfel încât $\forall \omega \in Z^2(\mathfrak{g})$, $\omega = d\beta$ cu β unică $\Box$.
Propoziţia 5. Să considerăm $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$, invariantă la stânga pe G. Atunci:
i) subalgebra $\mathfrak{h}_\omega$ cu dimensiune minimală este comutativă.
ii) dacă M este spaţiu omogen simplectic cu dimensiune maximală, atunci $\forall m \in M$, componenta conexă a grupului de isotropie G_m este abeliană.
Dem.: i) Presupunem $\omega_t = \omega + td\theta$ cu $\theta \in \Omega^1(G)$, invariantă la stânga. Dacă $\dim(\mathfrak{h}_\omega)$ este minimală, atunci $\dim(\mathfrak{h}_{\omega_t}) = \dim(\mathfrak{h}_\omega)$, şi $\forall \xi \in \mathfrak{h}_\omega$ poate fi extins la o curbă $\xi_t = \xi + t\eta + 0(t^2) \in \mathfrak{h}_{\omega_t}$. Deoarece $i_{\xi_t}\omega_t = 0$, $\theta([\xi, \eta]) = 0$ $\forall \theta$, astfel încât $[\xi, \eta] = 0$.
ii) Dacă $M \simeq G/H$ are dimensiune maximală atunci H are dimensiune minimală, iar $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\omega$ este abeliană $\Box$.

Fie $\Phi : G \times M \mapsto M$ o acţiune simplectică la stânga a lui G pe (M, ω). Pentru $X_\xi = d\Phi(\xi)$ obţinem

$$X_{[\xi,\eta]} = -[X_\xi, X_\eta] \quad , \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g} \quad , \tag{45}$$

astfel încât acţiunea Φ induce un anti-homomorfism $d\Phi : \mathfrak{g} \to \chi(M)$ între algebra Lie $\mathfrak{g}$ a grupului G şi algebra Lie $\chi(M)$ a câmpurilor vectoriale netede pe M ([1] p. 269). Acţiunea Φ este simplectică tare[6] (hamiltoniană) dacă există o aplicaţie (comoment)

$$\lambda : \mathfrak{g} \mapsto \mathcal{F}(M) \quad ,$$

[6]Dacă $H^1(M, \mathbb{R}) = \{0\}$ atunci orice 1-formă închisă este exactă, şi orice acţiune simplectică este simplectică tare.

astfel încât $i_{\xi_M}\omega = d\lambda_\xi$. O acţiune simplectică tare este hamiltoniană tare dacă λ este G-morfism (echivariantă), adică

$$\Phi^*_{g^{-1}}\lambda = \lambda \circ Ad_g \quad ,$$

iar diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \mapsto & \mathbb{R} & \mapsto & \mathcal{F}(M) & \mapsto & \mathfrak{h}am(M) & \mapsto & 0 \\ & & & & {\scriptstyle\lambda}\nwarrow & & \uparrow_{d\Phi_g} & & \\ & & & & & & \mathfrak{g} & & \end{array} \tag{46}$$

($\mathfrak{h}am(M) \subset \chi(M)$), comută.

Echivarianţa este necesară pentru o cuantificare consistentă [14], deoarece observabilele fizice sunt elemente din $\mathcal{F}(M)$, şi nu din $\chi(M)$. Astfel, este posibil să găsim o reprezentare a algebrei $\mathfrak{g}$ prin operatori asociaţi observabilelor (Sect. II.2.2), ce acţionează pe spaţiul Hilbert $\mathcal{L}^2(M)$, numai dacă există λ.

Fie $\Phi : G \times M \mapsto M$ o acţiune simplectică pe varietatea simplectică conexă (M, ω). Atunci $J : M \mapsto \mathfrak{g}^*$ este o aplicaţie moment pentru acţiunea Φ dacă $\forall \xi \in \mathfrak{g}$

$$i_{\xi_M}\omega = d\hat{J}(\xi)$$

unde $\hat{J}(\xi) : M \mapsto \mathbb{R}$ este definită de $\hat{J}(\xi)_m = J_m \cdot \xi \equiv \langle J_m, \xi\rangle$. În particular, o acţiune hamiltoniana $\Phi : G \times M \mapsto M$ defineşte o aplicaţie moment prin $\hat{J}(\xi) = \lambda_\xi$.
Propoziţia 6. Fie M o varietate simplectică conexă şi $\Phi : G \times M \mapsto M$ o acţiune simplectică având aplicaţia moment J. Pentru orice $a \in G$ şi $\xi \in \mathfrak{g}$ se defineşte aplicaţia $\hat{Z}_a(\xi) : M \mapsto \mathbb{R}$,

$$\hat{Z}_a(\xi) = \Phi^*_{a^{-1}}\hat{J}(\xi) - \hat{J}(Ad_a\xi) \quad .$$

Atunci
i) $\hat{Z}_a(\xi)$ este o constantă pe M şi defineşte o aplicaţie $Z : G \mapsto \mathfrak{g}^*$, $\langle Z_a, \xi\rangle = \hat{Z}_a(\xi)$, numită cociclu coadjunct [15].
ii) Z satisface identitarea $Z_{ab} = Z_a + Ad^*_{a^{-1}}Z_b$.
Dem.: M este conexă iar $d\hat{Z}_a(\xi) = 0$ pe M, astfel încât $\hat{Z}_a(\xi)$ este o constantă $\Box$.

Observăm că un cociclu $Z : G \mapsto \mathfrak{g}^*$ defineşte un cociclu infinitezimal $\mathcal{Q} \in Z^2(\mathfrak{g})$, prin

$$\mathcal{Q}(\xi, \eta) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\hat{Z}_{\exp(\xi t)}(\eta) = \{\hat{J}(\xi), \hat{J}(\eta)\} - \hat{J}([\xi, \eta]) \quad . \tag{47}$$

Un cociclu coadjunct $\Delta : G \mapsto \mathfrak{g}^*$ este cofrontieră dacă există $\mu \in \mathfrak{g}^*$ astfel încât

$$\Delta_a = \mu - Ad^*_a\mu \quad .$$

Similar lui (47), Δ defineşte o cofrontieră infinitezimală $\delta \in B^2(\mathfrak{g})$ prin

$$\delta(\xi,\eta) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\hat{\Delta}_{\exp(\xi t)}(\eta) = -\mu \cdot [\xi,\eta] \quad , \quad \delta = d\mu \quad .$$

Mulţimea claselor de echivalenţă $[Z]$ a cociclilor-modulo-cofrontiere formează spaţiul (deRham) de coomologie[7] $H^2(G,\mathbb{R})$ al lui G.
Propoziţia 7. Fie J_1 şi J_2 două aplicaţii moment pentru acţiunea simplectică $\Phi : G \times M \mapsto M$, având cociclii Z_1 şi Z_2. Atunci $[Z_1] = [Z_2]$, astfel încât oricărei acţiuni simplectice care admite o aplicaţie moment îi corespunde o clasă de coomologie bine definită.
Propoziţia 8. Fie $\Phi : G \times M \mapsto M$ o acţiune simplectică având aplicaţie moment. Atunci
i) Φ defineşte o clasa de coomologie $[c_\Phi] \in H^2(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ care măsoară obstrucţia în a găsi o aplicaţie moment echivariantă ($J \circ \Phi_g = Ad^*_{g^{-1}}J$).
ii) o aplicaţie moment echivariantă J există dacă şi numai dacă $[c_\Phi] = 0$.
iii) când $[c_\Phi] = 0$ mulţimea tuturor aplicaţiilor moment echivariante posibile este parameterizată de $H^1(\mathfrak{g})$.

De exemplu, dacă $\mathfrak{g}$ este o algebră Lie semisimplă (Anexa 4) atunci $H^1(\mathfrak{g}) = H^2(\mathfrak{g}) = 0$, şi orice acţiune simplectică a lui G admite o aplicaţie moment echivariantă unică.
Teorema 3. Fie Φ o acţiune hamiltoniană tranzitivă a lui G pe M cu aplicaţia moment echivariantă J. Atunci:
i) J aplică M pe o orbită a lui G în $\mathfrak{g}^*$.
ii) J este o imersie, iar M este spaţiu de acoperire pentru $J(M)$.
Dem.: (i) $\Phi^*_{g^{-1}}J = J \circ Ad_g$, cu Φ_g tranzitivă. *(ii)* Fie $T_mJ \cdot \eta_M = 0$, $\eta \in \mathfrak{g}$, $\eta_M \in T_mM$. Atunci

$$\langle T_mJ \cdot \eta_M, \xi\rangle = 0 \quad , \quad \forall \xi \in \mathfrak{g} \quad .$$

Dacă $dJ_\xi \cdot \eta_M = 0$ atunci $\omega(\xi_M, \eta_M) = 0 \ \forall \xi \in \mathfrak{g}$. Dar $\{\xi_M(m)/\xi \in \mathfrak{g}\} = T_mM$ iar ω este nedegenerată, astfel încât $\eta_m = 0$. Rezultă $\mathrm{Ker}(TJ) = \{0\}$, iar J este imersie $\square$.

5 Spaţiul fazic redus

Fie (M,ω) o varietate simplectică, $\Phi : G \times M \mapsto M$ o acţiune simplectică a lui G pe M, $J : M \mapsto \mathfrak{g}^*$ o aplicaţie moment pentru Φ astfel încât $J \circ \Phi_g = Ad^*_{g^{-1}}J$, şi

$$G_\mu = \{g \in G / Ad^*_{g^{-1}}\mu = \mu\} \quad ,$$

[7] $b_k(M) = dim\ H^k(M,\mathbb{R})$, $k = 0,1,2,...$ sunt numerele Betti, iar $\chi(M,\mathbb{R}) = \sum_k(-1)^k b_k(M)$ este caracteristica Euler-Poincaré a lui M [16].

cu μ o valoare regulară[8] a lui J. Atunci [1]:
i) $P_\mu = J^{-1}(\mu)$ este o subvarietate a lui M.
ii) $\forall p \in J^{-1}(\mu)$, $T_p(G_\mu \cdot p) = T_p(G \cdot p) \cap T_p P_\mu$, astfel încât G_μ acţionează pe $J^{-1}(\mu)$.
Demonstraţia pentru *(i)* rezultă din teorema lui Sard, iar pentru *(ii)* $J \circ \Phi_g = Ad^*_{g^{-1}} J$ arată că $\xi_M(p) \in T_p J^{-1}(\mu)$ dacă şi numai dacă $\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = 0$, adică $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$ $\square$.

O acţiune $\Phi : G \times M \mapsto M$ se numeşte proprie dacă aplicaţia $\Psi : G \times M \mapsto M \times M$ definită de $\Psi(g, m) = (m, \Phi_g(m))$ este proprie[9]. Pentru o asemenea acţiune $\forall m \in M$, $G_m = \{a \in G / \Phi_a(m) = m\}$ este compact. Acţiunea se numeşte liberă dacă $G_m = \{e\}$.

Atunci când μ este o valoare regulară a lui J acţiunea lui G_μ pe $J^{-1}(\mu)$ este local liberă, şi realizează o foliere având ca foi orbitele lui G_μ. Dacă acţiunea lui G_μ este proprie, atunci orbitele $G_\mu \cdot p$, $p \in P_\mu$, sunt subvarietăţi în $J^{-1}(\mu)$. Când acţiunea lui G_μ este liberă $\forall p \in P_\mu$, $G_p = \{e\} \subset G_\mu$, şi există o subvarietate $S \subset P_\mu$, conţinând p cu proprietăţile:
i) S este închisă în $G_\mu(S)$.
ii) $G_\mu(S)$ este o vecinătate deschisă pentru orbita $G_\mu \cdot p$.
iii) dacă $a \in G_\mu$ şi $\Phi_a(S) \cap S \neq \emptyset$ atunci $a = e$.
Această ultimă proprietate arată că foile lui G_μ prin punctele lui S se pot intersecta cel mult odată, astfel încât spaţiul orbitelor $\bar{M} = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ are structură de varietate[10]. Mai mult, $\bar{M}$ este Hausdorff deoarece orbitele sunt subvarietăţi în $J^{-1}(\mu)$ (G_μ este închis iar Φ este continuă). Când *(iii)* nu este îndeplinită $\forall S$, atunci $G_p \neq \{e\}$.

Fie P o varietate iar $\omega \in Z^2(P)$. Atunci

$$E_\omega = \{v \in TP / i_v \omega = 0\}$$

se numeşte distribuţia caracteristică a lui ω. (De exemplu, pentru 2-formele electromagnetice ω_f, ω_f^* din Sect. I.1.4 există un vector caracteristic comun $v \in T\mathbb{R}^4$, tangent la razele de lumină [7].) Dacă E_ω este subfibrat în TP, atunci ω se numeşte regulară pe P. În acest caz, distribuţia E_ω este integrabilă, şi defineşte o foliere $\mathcal{F}$ a lui P. Spaţiul foilor $\bar{M} = P/\mathcal{F}$ obţinut prin identificarea punctelor din fiecare foaie are structură de varietate dacă oricare punct din foaie este conţinut într-o subvarietate S, transversală la foaie, astfel încât S intersectează foaia cel mult odată. În acest caz, coordonatele locale pe S se pot folosi drept coordonate locale

[8] Pentru $f : M \mapsto N$ de clasă C^1, $n \in N$ este o valoare regulară a lui f dacă $\forall m \in f^{-1}(\{n\})$, $T_m f$ este surjectivă.

[9] adică orice submulţime compactă $K \subset M \times M$ este imaginea unei submulţimi compacte $\Psi^{-1}(K) \subset G \times M$, sau că date şirurile x_i şi $\Phi_{g_i} x_i$, $i = 1, 2, 3, ...$, convergente, atunci g_i conţine un subşir convergent.

[10] Dacă acţiunea lui G pe M este netedă, liberă şi proprie, atunci $M \mapsto M/G$ este fibrat principal având G ca fibră şi grup structural, [1] p. 276.

pe $\bar{M}$, iar $\bar{M}$ capătă structură de varietate.
Propoziţia 9. Fie G grup Lie compact acţionând pe varietatea P astfel încât orbitele sale reprezintă o foliere pe P. Fie $p \in P$, $G_p = \{a \in G/\Phi_a(p) = p\}$, iar G_p^0 componenta conexă a lui G_p. Atunci folierea lui P cu G-orbite este fibrare dacă şi numai dacă reprezentatrea lui $\Gamma_p = G_p/G_p^0$ pe spaţiul N_p, normal la orbita $G \cdot p$, este trivială $\forall p \in P$.
Exemple de folieri 1-dimensionale care nu sunt fibrări sunt prezentate în Anexa 3.
Teorema 4. Fie (M, ω) o varietate simplectică, G un grup Lie cu acţiune simplectică pe M, iar $J : M \mapsto \mathfrak{g}^*$ aplicaţia moment echivariantă. Fie $\mu \in \mathfrak{g}^*$ o valoare regulară a lui J, astfel încât G_μ acţionează liber şi propriu pe $J^{-1}(\mu) \equiv P_\mu$. Dacă $\mathrm{i}_\mu : J^{-1}(\mu) \mapsto M$ este incluziunea, iar $\mathrm{i}_\mu^*\omega = \omega|_{P_\mu}$, atunci [1]*:*
i) foile distribuţiei caracteristice pentru forma $\mathrm{i}_\mu^*\omega$ pe P_μ sunt orbite pentru G_μ.
ii) spaţiul orbitelor $\bar{M} = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ are structura unei varietăţi simplectice $(\bar{M}, \bar{\omega})$, $\pi^*\bar{\omega} = \mathrm{i}_\mu^*\omega$, cu $\pi : P_\mu \mapsto \bar{M}$ proiecţia $\pi(p) = \{G_\mu \cdot p\}$.
Dem.: $\forall \xi \in \mathfrak{g}_\mu$, $i_{\xi_M}\omega|_{P_\mu} = 0$, şi $\xi_M \in E_{i_\mu^*\omega}$. Reciproc, fie v un element din T_pP_μ, dar nu şi din $T_p(G_\mu \cdot p)$ pentru care $i_v\omega|_{P_\mu} = 0$. Dacă $F = T_p(G \cdot p) \cup T_pP_\mu$ atunci $F \cap F^\perp = T_p(G_\mu \cdot p)$. Cum ω este nedegenerată pe T_pM şi $F/F \cap F^\perp$, ea trebuie să fie simplectică, având forma $\hat{\omega}([f], [f']) = \omega(f, f')$, $f, f' \in F$. Astfel, dacă $i_v\omega = 0$, $v \in T_pP_\mu$, atunci şi $i_{[v]}\hat{\omega} = 0$, astfel încât $[v] = 0$ iar $v \in T_p(G_\mu \cdot p)$ $\square$.

Exemple
1. Fie $f_1, f_2, ..., f_n$, n funcţii în involuţie, $\{f_i, f_j\} = 0$, în raport cu paranteza Poisson pe o varietate $2N$-dimensională M. Considerând $G = \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ şi $J = f_1 \times f_2 \times ... \times f_n$, atunci $G_\mu = G$ iar $\dim(J^{-1}(\mu)/G) = 2N - 2n$. Când $n = N = \dim M/2$ sistemul dinamic pe M având una dintre f_i ca hamiltonian se numeşte complet integrabil.
2. Fie $\mathcal{H}$ spaţiu Hilbert complex cu forma simplectică

$$\omega(X, Y) = Im\langle X|Y\rangle \quad , \tag{48}$$

şi $\Phi_z : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$, $\Phi_z\psi = z\psi$, acţiunea lui $G = \mathrm{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ pe $\mathcal{H}$. Atunci
i) acţiunea Φ este simplectică.
ii) aplicaţia moment este $J_\psi = -i\langle\psi|\psi\rangle/2$.
iii) spaţiul fazic redus este spaţiul Hilbert proiectiv $\mathsf{P}_{\mathcal{H}}$.
Dem.: Algebra lui G este $\mathfrak{g} = \{\xi \in \mathbb{C}/\xi = -\xi^*\}$, şi cum $\Phi_{e^{\xi t}}\psi = e^{\xi t}\psi$, $\psi \in \mathcal{H}$, $\xi_{\mathcal{H}}(\psi) = \xi\psi$. Deasemenea

$$T_\psi\Phi_z X_\psi = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi_z(\psi + X_\psi t) = \frac{d}{dt}|_{t=0} z(\psi + X_\psi t) = zX_\psi \quad .$$

i) $\Phi_z^*\omega(X_\psi, Y_\psi) = \omega(T_\psi\Phi_z X_\psi, T_\psi\Phi_z Y_\psi) = \omega(zX_\psi, zY_\psi) = \omega(X_\psi, Y_\psi)$, sau $\Phi_z^*\omega = \omega$.

ii) $i_{\xi_{\mathcal{H}}}\omega(X_\psi) = Im\langle\xi_{\mathcal{H}}(\psi)|X_\psi\rangle = Im\langle\xi\psi|X_\psi\rangle = i\xi Re\langle\psi|X_\psi\rangle \equiv \dfrac{d}{dt}|_{t=0}\hat{J}(\xi)_{\psi + tX_\psi}$.

Dar pentru $f(\psi) = \langle\psi|\psi\rangle$,

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} f(\psi + tX) = 2Re\langle\psi|X\rangle$$

astfel încât $\hat{J}(\xi)_\psi = i\xi\langle\psi|\psi\rangle/2$.
iii) Cum $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$, dacă $\mu \in \mathfrak{g}^*$ şi $\xi \in \mathfrak{g}$ atunci $\langle\mu, \xi\rangle = \mu^*\xi$, şi $J_\psi = -i\langle\psi|\psi\rangle/2$. Astfel,

$$J^{-1}(\mu) = \{\psi \in \mathcal{H}/\langle\psi|\psi\rangle = 2i\mu\} \quad .$$

Deoarece $G_\mu = G = \mathrm{S}^1$ acţionează pe $J^{-1}(\mu)$,

$$J^{-1}(\mu)/\mathrm{S}^1 \simeq \{[\psi], \psi \in \mathcal{H}/\langle\psi|\psi\rangle = 1\} \equiv \mathsf{P}_{\mathcal{H}} \ , \ [\psi] = \{z\psi/z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} \ \ \square.$$

Teorema 5. Cu ipotezele Teoremei 4, fie (M, ω) o varietate simplectică, G un grup Lie actionând simplectic pe M, $J : M \mapsto \mathfrak{g}^*$ aplicaţia moment echivariantă, şi $H : M \mapsto \mathbb{R}$ funcţia Hamilton, invariantă la acţiunea lui G. Dacă $\mu \in \mathfrak{g}^*$ este o valoare regulară pentru J, G_μ acţionează liber şi propriu pe $J^{-1}(\mu) \equiv P_\mu$, $\mathrm{i}_\mu : J^{-1}(\mu) \mapsto M$ este incluziunea, iar $\mathrm{i}_\mu^*\omega = \omega|_{P_\mu}$, atunci [1]*:*
i) curentul F_t pentru X_H menţine $J^{-1}(\mu)$ invariantă şi comută cu acţiunea lui G_μ pe $J^{-1}(\mu)$, astfel încât induce canonic un curent ϕ_t pe $\bar{M}$,

$$\pi_\mu \circ F_t = \phi_t \circ \pi_\mu \quad . \tag{49}$$

ii) curentul ϕ_t pe $\bar{M}$ este hamiltonian, generat de funcţia $\bar{H} : \bar{M} \mapsto \mathbb{R}$,

$$\bar{H} \circ \pi_\mu = H \circ \mathrm{i}_\mu$$

numită hamiltonian redus.
Dem.: (i) Cum $J^{-1}(\mu)$ este invariantă la F_t, proiecţia lui F_t pe $\bar{M}$ defineşte curentul ϕ_t prin (49), iar

$$(\phi_t \circ \pi_\mu)^*\bar{\omega} = F_t^*\pi_\mu^*\bar{\omega} = F_t^* i_\mu^*\omega = i_\mu^*\omega = \pi_\mu^*\bar{\omega} \quad .$$

Astfel, $\pi_\mu^*(\phi_t\bar{\omega} - \bar{\omega}) = 0$, şi cum π_μ este surjectivă, $\phi_t\bar{\omega} = \bar{\omega}$.
(ii) Fie $v \in TM$ şi $[v] = T\pi_\mu v \in T\bar{M}$. Atunci

$$d\bar{H}([v]) = \pi_\mu^* d\bar{H}(v) = d(\bar{H} \circ \pi_\mu)(v) = d(H \circ i_\mu)(v) = i_\mu^* dH(v) = i_\mu^*\omega(X_H, v) =$$

$$\pi_\mu^*\bar{\omega}(X_H, v) = \bar{\omega}(T\pi_\mu X_H, T\pi_\mu v) = \bar{\omega}([X_H], [v]) = i_{[X_H]}\bar{\omega}([v]) \quad ,$$

astfel încât $i_{[X_H]}\bar{\omega} = d\bar{H}$. Rezultă că ϕ_t are $[X_H] = T\pi_\mu X_H$ ca generator şi $\bar{H}$ ca hamiltonian $\square$.
Propoziţia 10. Fie c_t, cu $c_0 = m_0 \in J^{-1}(\mu)$, o curbă integrală pentru X_H, iar $[c_t]$ curba integrală pentru $X_{\bar{H}}$, presupusă cunoscută. Fie $d_t \in J^{-1}(\mu)$, cu $d_0 = m_0$, o

curbă netedă astfel încât $[d_t] = [c_t]$. Atunci [1]: c_t este de forma $c_t = \Phi_{a_t} d_t$ unde $a_t \in G_\mu$ rezultă din $\dot{a}_t = T_e L_{a_t} \xi(t)$ în care $\xi(t) \in \mathfrak{g}_\mu$ este soluţia ecuaţiei

$$\xi_M(d_t) = X_H(d_t) - \dot{d}_t \quad .$$

Dem.: Pentru $c_t = \Phi_{a_t} d_t$ obţinem

$$X_H(c_t) = \dot{c}_t = T_{d_t} \Phi_{a_t} \dot{d}_t + T_{a_t} \Psi_{d_t}(a_t) \dot{a}_t \quad , \tag{50}$$

cu $\Psi_m : G \mapsto M$, $\Psi_m(a) = \Phi_a m$. Deoarece

$$T_a \Psi_m \dot{a} = T\Psi_m T R_a T R_{a^{-1}} \dot{a} = T_e(\Psi_m \circ R_a) T R_{a^{-1}} \dot{a} =$$

$$T_e \Psi_{\Phi_a m} T R_{a^{-1}} \dot{a} = (T R_{a^{-1}} \dot{a})_M (\Phi_a m) \quad ,$$

(50) devine

$$X_H(\Phi_a d_t) = T_{d_t} \Phi_a \dot{d}_t + (T R_{a^{-1}} \dot{a})_M (\Phi_a d_t) \quad . \tag{51}$$

Dar $X_H(\Phi_a d_t) = T_{d_t} \Phi_a X_H(d_t)$ din invarianţa lui X_H la Φ_a, şi

$$\xi_M(\Phi_a d_t) = T_{d_t} \Phi_a (Ad_{a^{-1}} \xi)_M (d_t) \quad , \quad Ad_a \xi \equiv T_e R_{a^{-1}} L_a \xi \quad ,$$

astfel încât (51) capătă forma $X_H(d_t) = \dot{d}_t + (T_a L_{a^{-1}} \dot{a})_M (d_t)$, sau $\xi_M(d_t) = X_H(d_t) - \dot{d}_t$ cu $\xi = T_a L_{a^{-1}} \dot{a}$ $\square$.

6 Forma colectivă a hamiltonianului cu simetrie

Un model colectiv clasic pentru un grup Lie G este un spaţiu fazic (M, ω) pe care G acţionează simplectic şi tranzitiv ((M, ω) este G-elementar). Fie $\Phi : G \times M \mapsto M$ o acţiune simplectică a lui G pe (M, ω) cu aplicaţia moment $J : M \mapsto \mathfrak{g}^*$. Un hamiltonian H pe M este numit colectiv dacă are forma [8]

$$H = h_c \circ J = J^* h_c \quad , \tag{52}$$

unde $h_c : \mathfrak{g}^* \mapsto \mathbb{R}$ este o funcţie netedă. Dacă $J(M)$ este fibrare cotangentă, $J(M) = T^*Q$, atunci (52) defineşte un model colectiv fizic.
Teorema 6. (Kirilov-Kostant-Souriau) Fie G un grup Lie, $L : G \times G \mapsto G$ acţiunea lui G pe G prin translaţii la stânga, şi $\Phi^\ell : G \times T^*G \mapsto T^*G$ acţiunea indusă de L pe T^*G cu aplicaţia moment $J^\ell : T^*G \mapsto \mathfrak{g}^*$. Atunci (cu notaţia din Anexa 2):
i) spaţiul fazic redus $(J^\ell)^{-1}(\mu)/G_\mu$ se poate identifica natural cu orbita $G \cdot \mu = \{Ad^*_{a^{-1}} \mu, a \in G\}$ a lui μ în $\mathfrak{g}^*$.
ii) dacă $\tilde{R} : G \times G \mapsto G$ este acţiunea la dreapta a lui G pe G, iar $\tilde{\Phi}^r : G \times T^*G \mapsto T^*G$ este acţiunea indusă de $\tilde{R}$ pe T^*G, având aplicaţia moment $J^r : T^*G \mapsto \mathfrak{g}^*$, atunci hamiltonienii Φ^ℓ-invarianţi sunt $\tilde{\Phi}^r$-colectivi.

Dem.: (i) Pentru $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $(J^\ell)^{-1}(\mu) = \{(a, Ad_a^*\mu), a \in G\}$, fie $p \in (J^\ell)^{-1}(\mu)$, $p = (a, Ad_a^*\mu)$. Deoarece $\lambda_b p = (ba, Ad_a^*\mu)$, atunci $\lambda_b p \in (J^\ell)^{-1}(\mu)$ dacă şi numai dacă $b \in G_\mu$. Astfel, G_μ acţionează liber şi propriu pe $(J^\ell)^{-1}(\mu)$, iar

$$[(a, Ad_a^*\mu)] = \{(ba, Ad_a^*\mu), b \in G_\mu\} = Ad_a^*\mu \in G \cdot \mu \quad .$$

(ii) Fie $H : G \times \mathfrak{g}^* \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie Hamilton. Deoarece $\lambda_b^* H(a, \mu) = H(ba, \mu)$, H este λ^*-invariantă numai când este independentă de a, adică $H(a, \mu) = H(\mu) = h_c \circ J^r_{(a,\mu)}$, sau $H = h_c \circ \tilde{J}^r$ $\Box$.

Propoziţia 11. Fie $\Phi : G \times M \mapsto M$ o acţiune hamiltoniană a grupului Lie G pe (M, ω) cu aplicaţia moment $J : M \mapsto \mathfrak{g}^*$, iar $H = h_c \circ J$, $h_c : \mathfrak{g}^* \mapsto \mathbb{R}$, un hamiltonian colectiv. Atunci traiectoria m_t a sistemului hamiltonian $\dot{m}_t = X_H(m_t)$, $m_0 \in M$, este complet determinată de traiectoria γ_t a sistemului hamiltonian definit de h_c pe orbita $\mathcal{O} = G \cdot J(m_0)$, $\gamma_t = J(m_t)$.

Dem.: $\forall \mu \in \mathfrak{g}^*$, există elementul $\delta_{h_c}(\mu) \in \mathfrak{g}$, $\delta_{h_c} : \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}$, definit de

$$\langle \dot{\mu}, \delta_{h_c}(\mu) \rangle = \frac{d}{dt}|_{t=0} h_c(\mu + t\dot{\mu}) \quad .$$

Astfel,

$$i_{X_H}\omega(v) = dH(v) = J^* dh_c(v) = d(h_c)_{J(m)}(T_m J v) =$$

$$\langle T_m J v, \delta_{h_c}(J_m) \rangle = d\hat{J}(\delta_{h_c}(J_m)) \cdot v = i_{(\delta_{h_c}\hat{J})_M}\omega(v)$$

prin care $X_H(m) = (\delta_{h_c} \circ J(m))_M(m)$. Dacă $\gamma_t \in \mathcal{O}$ atunci $\delta_{h_c}(\gamma_t) \subset \mathfrak{g}$ iar a_t definită de $\dot{a}_t = T_e L_{a_t}(\delta_{h_c}\gamma_t)$ este o curbă în G. Considerând $m_t = \Phi_{a_t} m_0$, rezultă

$$\dot{m}_t = \dot{\Phi}_{a_t} m_0 = (T_{a_t} L_{a_t^{-1}} \dot{a}_t)_M(m_t) =$$

$$(\delta_{h_c}\gamma_t)_M(m_t) = (\delta_{h_c} \circ J(m_t))_M(m_t) = X_H(m_t) \quad \Box.$$

În aplicaţii, pentru a obţine traiectoria m_t prin m_0 sunt necesare urmatoarele elemente:

1. orbita $\mathcal{O} = Ad_{a^{-1}}^* J(m_0) \subset \mathfrak{g}^*$.
2. traiectoria γ_t pe $\mathcal{O}$ pentru sistemul hamiltonian indus de h_c.
3. curba $\xi_t \subset \mathfrak{g}$, $\xi_t = \delta_{h_c}(\gamma_t)$.
4. traiectoria $a_t \subset G$ obţinută din $\dot{a}_t = T_e L_{a_t}\xi_t$.

Cu acestea rezultă $m_t = \Phi_{a_t}(m_0)$.

Este important să remarcăm faptul că un punct de echilibru relativ pentru un sistem hamiltonian G-invariant se mişcă pe traiectorii G_μ-colective, corespunzatoare orbitelor $\gamma_t \subset \mathfrak{g}^*$ degenerate în puncte critice pentru un anumit h_c. Deci, în asemenea situaţii G-invarianţa implică G_μ-colectivitatea.

În general, acţiunea lui G pe (M, ω) nu este tranzitivă, dar spaţiul fazic redus $(\bar{M}, \bar{\omega})$ în raport cu acţiunea lui G este spaţiu omogen pentru un anumit grup G_0.

Această situaţie apare când :
- $M = T^*Q$ iar G acţionează tranzitiv pe Q.
- $M = T^*Q$ iar G acţionează liber pe Q.
- $M = T^*G$.

Exemplu: solidul rigid
Dacă $G = SO(3, \mathbb{R})$ atunci $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^3$, şi pentru $\forall \mu \in \mathfrak{g}^*$, $\mu = \sum_{i=1}^3 \mu_i f_i$, orbita $G \cdot \mu$ este sfera de rază $|\vec{\mu}|$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Setul $\{f_i, i = 1, 2, 3\}$ de elemente de bază în $\mathfrak{g}^*$ se defineşte în raport cu un set $\{\xi_i, i = 1, 2, 3\}$, de elemente de bază în $\mathfrak{g}$, $[\xi_i, \xi_j] = \epsilon_{ijk}\xi_k$, astel încât $f_i(\xi_k) = \delta_{ik}$.

Să considerăm $H : T^*SO(3) \mapsto \mathbb{R}$ de forma $H = h_c \circ J^r$, cu $J^r(a, \mu) = -\mu$ şi $h_c : \mathfrak{g}^* \mapsto \mathbb{R}$,

$$h_c(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{\mu_i^2}{I_i} \quad . \tag{53}$$

Deoarece $\hat{J}^r(\xi_i) : T^*G \mapsto \mathbb{R}$ are expresia $\hat{J}^r(\xi_i) = -\langle \mu, \xi_i \rangle = -\mu_i$, iar paranteza Poisson satisface $\{\hat{J}^r(\xi), \hat{J}^r(\eta)\} = \hat{J}^r([\xi, \eta])$ din echivarianţă, obţinem $\{\mu_i, \mu_j\} = -\epsilon_{ijk}\mu_k$. Ecuaţiile de mişcare sunt

$$\dot{\mu}_i = \{\mu_i, h_c\} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\mu_k}{I_k} \{\mu_i, \mu_k\} = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ikl} \frac{\mu_k \mu_l}{I_k} \quad , \tag{54}$$

sau

$$\dot{\mu}_1 = \mu_2\mu_3\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right) \ , \ \dot{\mu}_2 = \mu_1\mu_3\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right) \ , \ \dot{\mu}_3 = \mu_1\mu_2\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right) \ .$$

Introducând $\omega_i = \langle f_i, \delta_{h_c}(\mu) \rangle = \mu_i / I_i$ acestea capătă forma

$$I_1\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) \ , \ I_2\dot{\omega}_2 = \omega_1\omega_3(I_3 - I_1) \ , \ I_3\dot{\omega}_3 = \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) \ ,$$

similară ecuaţilor prezentate în Sect. I.1.3.

Când $I_1 > I_2 > I_3$ punctele critice $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ ale lui h_c pe $G \cdot \mu$, $(dh_c(T_\kappa G \cdot \mu) = 0)$, sunt

$$(0, \pm|\vec{\mu}|, o) \ , \ (\pm|\vec{\mu}|, 0, 0) \ , \ (0, 0, \pm|\vec{\mu}|) \ .$$

Pentru traiectoria în harta $\Psi(T^*G)$ obţinem

$$m_t = \rho_{a_t}(a_0, \mu_0) = (a_0 a_t^{-1}, Ad^*_{a_t^{-1}}\mu_0)$$

unde a_t provine din $\dot{a}_t = T_e L_{a_t}\omega_t$, $\omega_t = L_{h_c}(\mu_t)$.
După cum s-a precizat mai sus, teorema Kirilov-Kostant-Souriau priveşte cazul în care pe spaţiul configuraţiilor Q se definesc două acţiuni ale grupului G care comută, Φ^r si Φ^ℓ, libere şi tranzitive, astfel încât acţiunea $\varphi : G \times Q \mapsto Q$, $\varphi_a = \Phi^r_a \Phi^\ell_a$ are un punct fix. În exemplul solidului rigid Φ^ℓ corespunde rotaţiilor în referenţialul laboratorului, iar Φ^r rotaţiilor referenţialului intrinsec.

6.1 Orbite coadjuncte la produsul semidirect

Teorema 7. Fie $\Phi : H \times Q \mapsto Q$ *o acţiune tranzitivă a grupului Lie* $H \subset Gl(V)$ *pe varietatea* Q*, iar* $\tau : H \times V \mapsto V$ *o reprezentare a lui* H *în spaţiul liniar* V*. Presupunem că* $f : V \mapsto \mathcal{F}(Q)$ *este o aplicaţie liniară* H*-echivariantă,* $(\Phi^*_{h^{-1}} f = f \circ \tau_h, \forall h \in H)$*, care defineşte o acţiune hamiltoniană a produsului semidirect* $G = H \times V$ *pe* T^*Q*,*

$$U^f_{(h,v)}\alpha_q = T^*_{\Phi_h q}\Phi_{h^{-1}}\alpha_q - df_v(\Phi_h q) \quad , \quad (h,v) \in G \ , \ \alpha_q \in T^*Q \quad , \tag{55}$$

cu aplicaţia moment echivariantă $J : T^*Q \mapsto \mathfrak{h}^* + V^*$*. Dacă* $\exists q_0 \in Q$ *astfel încât* $H_{q_0} = H_K$ *(acţiunea lui* G *pe* T^*Q *este tranzitivă), atunci* $J(T^*Q)$ *este o singură* G*-orbită în* $\mathfrak{g}^*$*, şi anume* G*-orbita prin punctul* $(0, K)$*.*

Dem.: Acţiunea (55) are forma

$$U^f_{(h,v)} \equiv t_{f_v}\hat{\Phi}_h$$

unde

$$\hat{\Phi}_h\alpha_q = T^*_{\Phi_h q}\Phi_{h^{-1}}\alpha_q \quad , \quad t_{f_v}\alpha_q = \alpha_q - df_v(q) \quad .$$

Dacă prin $j : T^*Q \mapsto \mathfrak{h}^*$ notăm aplicaţia moment pentru acţiunea lui H pe T^*Q, $\pi : T^*Q \mapsto Q$ este proiecţia, iar $v_{T^*Q}(\alpha_q) = -\pi^* df_v(\alpha_q)$, atunci aplicaţia moment pentru acţiunea U^f este

$$\hat{J}_{\alpha_q}(\xi, v) = \hat{j}_{\alpha_q}(\xi) + \pi^* f_v(\alpha_q) \quad .$$

Considerând $f_v(q_0) \equiv \langle K, v\rangle$, $K \in V^*$, atunci în $\forall q = \Phi_h(q_0)$

$$f_v(q) = \langle K, \tau_{h^{-1}}v\rangle = \langle \tau^*_{h^{-1}}K, v\rangle$$

astfel încât

$$J_{\alpha_q} = (j_{\alpha_q}, \tau^*_{h^{-1}}K) \quad , \tag{56}$$

unde $\alpha_q = \hat{\Phi}_h\alpha_{q_0}$, şi $j_{\alpha_q} = j_{\hat{\Phi}_h\alpha_{q_0}} = (Ad^*_h)^{-1}j^0_p$, cu $j^0_p = j_{\alpha_{q_0}}$, $j^0 : T^*_{q_0}Q \mapsto \mathfrak{h}^*$. În harta pe T^*Q definită de

$$\Psi : T^*Q \mapsto Q \times T^*_{q_0}Q \quad , \quad \Psi(\alpha_q) = (q, \hat{\Phi}_{h^{-1}}\alpha_q) \equiv (q, p) \quad ,$$

(56) capătă forma

$$J'_{(q,p)} = (Ad^*_{h^{-1}}j^0_p, \tau^*_{h^{-1}}K) \quad . \tag{57}$$

Fie $H_0 = \{h \in H / \Phi_h q_0 = q_0\}$ grupul de izotropie al lui q_0 iar $\mathfrak{h}_0$ algebra sa. Astfel, $\forall \xi \in \mathfrak{h}_0$, $j^0_p(\xi) = 0$, şi de fapt $j^0 : T^*_{q_0}Q \mapsto \mathfrak{h}^*/\mathfrak{h}^*_0 \equiv \tilde{\mathfrak{h}}^*_0$,

$$\tilde{\mathfrak{h}}^*_0 = \{\mu \in \mathfrak{h}^* / \mu(\xi) = 0 \ \forall \ \xi \in \mathfrak{h}_0\} \quad .$$

Fie

$$H_K = \{h \in H / \tau^*_{h^{-1}} K = K\}$$

grupul de izotropie al lui K, iar $\mathfrak{h}_K$ algebra sa. Presupunând acum că $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_K$, atunci $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_K$, $Q \simeq H \cdot K$, şi cum $H \subset Gl(V)$ acţiunea lui G pe T^*Q este tranzitivă. Astfel, $J(T^*Q)$ este spaţiu de acoperire pentru G-orbita $G \cdot (0, K)$.

Pentru $(\mu, K) \in \mathfrak{h}^* + V^*$ şi $(h, v) \in H \times V$ obţinem

$$Ad^*_{(h,v)^{-1}}(\mu, K) = (Ad^*_{h^{-1}}\mu + (\tau^*_{h^{-1}}K) \odot v, \tau^*_{h^{-1}}K) \quad ,$$

unde $(h, v)^{-1} = (h^{-1}, -\tau_h^{-1} v)$, iar $K \odot v$ este elementul din $\mathfrak{h}^*$ definit prin $Ad^*_{h^{-1}}(K \odot v) = \tau^*_{h^{-1}} K \odot \tau_h v$, şi $(K \odot v)(\xi) \equiv \langle K, \xi_V(v)\rangle$ cu

$$\xi_V(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \tau_{e^{t\xi}}(v) \in T_v V \simeq V \quad , \quad \xi \in \mathfrak{h} \quad .$$

Dacă $\pi_K : \mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_K$, iar $\mu_0 \in \mathfrak{h}^*/\mathfrak{h}^*_K \equiv \tilde{\mathfrak{h}}^0_K$, atunci

$$\pi^*_K(\mu - \mu_0) = 0 \Leftrightarrow \exists v \in V \ , \ \mu - \mu_0 = K \odot v \quad .$$

Astfel, $\forall j^0_p \in \tilde{\mathfrak{h}}^*_K$, $\exists v \in V$ astfel încât $K \odot v = j^0_p$, $\dim(K \odot V) = \dim(H/H_0) = \dim Q$, şi

$$J'_{(q,p)} = (Ad^*_{h^{-1}} j^0_p, \tau^*_{h^{-1}} K) = (Ad^*_{h^{-1}}(K \odot v), \tau^*_{h^{-1}} K) = Ad^*_{(h^{-1}, -v)}(0, K) \quad ,$$

care arată că J_{T^*Q} este orbita unică $J_{T^*Q} = Ad^*_G(0, K)$ $\Box$.

Este important de remarcat faptul că pentru orbita $Q = H \cdot K \subset V^*$ spaţiul T^*Q este aplicat de J pe G-orbita $G \cdot (0, K)$, şi orice hamiltonian pe $M = T^*Q$ este G-colectiv. În plus, dacă (M, ω) este un spaţiu fazic arbitrar, iar $J : M \mapsto V^*$, atunci acţiunea Φ defineşte un model colectiv fizic. Cea mai generală orbită coadjunctă a produsului semidirect $G = H \times V$ apare ca spaţiu fazic redus în raport cu acţiunea la dreapta a lui H_K pe T^*H. Trei cazuri importante sunt prezentate în exemplele ce urmează.

6.1.1 $SO(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ şi solidul rigid în câmp extern

Fie $Q = SO(3, \mathbb{R}) = H$ şi $V = \mathbb{R}^3$. Pentru acţiunea la dreapta a lui $G = H \times V$ pe T^*Q aplicaţia moment este

$$J^r(h, \mu) = (-\mu, \tau^*_{h^{-1}} K) \quad .$$

Dacă $K \in V^* \simeq \mathbb{R}^3$ este un câmp de forţă constant, iar $x \in V \simeq \mathbb{R}^3$ este vectorul de poziţie al centrului de masă, atunci hamiltonianul pe $T^*SO(3)$ este $H = h_c \circ J^r$, cu

$$h_c(\mu, K) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{\mu_i^2}{2I_i} - \langle K, x\rangle \quad .$$

6.1.2 $SO(3,1) \times \mathbb{R}^{3,1}$ şi particula relativistă liberă

Dacă $H = SO(3,1)$ este grupul Lorentz, iar $V = \mathbb{R}^{3,1}$ spaţiul Minkowski, atunci $G = H \times V$ este grupul Poincaré. Algebra Lie $\mathfrak{so}(3,1)$ este generată de şase matrici reale 4×4, $\{J_i, K_i, i = 1,2,3\}$, cu elementele nenule $(J_i)_{kl} = -\epsilon_{ikl}$, $i,k,l = 1,2,3$, $(K_i)_{\mu\nu} = \delta_{\mu 0}\delta_{i\nu} + \delta_{\nu 0}\delta_{i\mu}$, $\mu, \nu = 0,1,2,3$, şi relaţiile de comutare

$$[J_i, J_k] = \epsilon_{ikm} J_m \quad , \quad [J_m, K_i] = \epsilon_{mil} K_l \quad , \quad [K_l, K_m] = -\epsilon_{lmi} J_i \quad . \tag{58}$$

Deoarece[11] $\mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, un element $\xi = \vec{\alpha} \cdot \mathbf{K} + \vec{\beta} \cdot \mathbf{J} \in \mathfrak{so}(3,1)$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$, corespunde la $\hat{x} = (\vec{\alpha} - i\vec{\beta}) \cdot \hat{\vec{\sigma}}/2 \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, cu $\hat{\vec{\sigma}} \equiv (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$ fiind notate matricile Pauli 2×2,

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \tag{59}$$

Un element $F \in \mathfrak{g}^*$ poate fi exprimat în forma

$$F = p_0 X_0^* - \mathbf{p} \cdot \mathbf{X}^* + \vec{\kappa} \cdot \mathbf{K}^* + \mathbf{s} \cdot \mathbf{J}^* \quad ,$$

unde baza $(X_0^*, \mathbf{X}^*, \mathbf{K}^*, \mathbf{J}^*)$ este definită de $X_\mu^*(X_\nu) = \delta_{\mu\nu}$, $K_i^*(K_l) = J_i^*(J_l) = \delta_{il}$. Cu notaţia $f \equiv (p_0, \mathbf{p}, \vec{\kappa}, \mathbf{s})$, orbita $G \cdot F$ conţine $f_0 \equiv (m_0 c, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{s}_0)$, unde m_0 şi $\mathbf{s}_0$ sunt masa "de repaus", respectiv momentul cinetic "intrinsec". Deoarece $G_{f_0} \simeq \mathbb{R} \times SO(2,\mathbb{R})$, (translaţii temporale $\times$ rotaţii în jurul axei $\mathbf{s}_0$) când $\mathbf{s}_0 \neq 0$, şi $G_{f_0} \simeq \mathbb{R} \times SO(3,\mathbb{R})$ când $\mathbf{s}_0 = 0$, pentru particule cu masă orbitele $G \cdot F \simeq G/G_{f_0}$ sunt 8, respectiv 6-dimensionale.

6.1.3 $SL(3,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^6$ şi picătura de lichid

Spre deosebire de solidul rigid, o picătură de lichid are un spaţiu de configuraţii mai larg, în care pot apare atât moduri de vibraţie în jurul formei sferice cât şi moduri de rotaţie ale unei forme elipsoidale. Configuraţiile cu deformare cuadrupolară la volum constant pot fi descrise prin acţiunea Φ a grupului $H = Sl(3)$ pe spaţiul $V = \{w \in Gl(3,\mathbb{R}) / w^T = w, \det w > 0\} \simeq \mathbb{R}^6$ al tensorului de inerţie,

$$\Phi : Sl(3) \times V \mapsto V \quad , \quad \Phi_h w = h w h^T \quad , h \in Sl(3) \quad ,$$

astfel încât $Q = H \cdot K$, $K \in V^*$, reprezintă spaţiul 5-dimensional al configuraţiilor picăturii de lichid.

[11] $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}(1,\mathbb{C})$, cu formele reale $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(2,1) \simeq \mathfrak{su}(1,1) \simeq \mathfrak{sp}(1,\mathbb{R})$ (split) şi $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ (compacte).

Produsul semidirect $G = H \times V$, denumit şi $CM(3)$ [17], este un grup 14-dimensional,

$$CM(3) = \{(h,w) = \begin{bmatrix} h & 0 \\ wh & (h^T)^{-1} \end{bmatrix} \;,\;\; h \in SL(3), w \in V \simeq \mathbb{R}^6\} \;\; .$$

având algebra

$$\mathfrak{c}m(3) = \{(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ \eta & -\xi^T \end{bmatrix} \;,\;\; \xi \in \mathfrak{s}l(3), \eta \in V\} \;\; .$$

Similar cazului precedent, obitele coadjuncte pot fi 12 sau 10-dimensionale, după cum elementele acestora sunt invariante la acţiunea subgrupurilor $SO(2)$ sau $SO(3)$.

Algebra $\mathfrak{c}m(3)$ admite o realizare ca subalgebră a algebrei $\mathfrak{s}p(3,\mathbb{R})$ prezentată în Sect. III.3.

II. Ecuaţii de transport clasice şi cuantice

1 Ecuaţia Liouville

Fie (M_μ, ω_μ) spaţiul fazic al unui sistem clasic elementar μ (moleculă) cu ν grade de libertate [18], iar $(M_\Gamma, \omega_\Gamma)$ spaţiul fazic $2\nu N$ - dimensional al ansamblului Γ (gazului) constituit din N subsisteme elementare identice,

$$M_\Gamma = M_\mu^1 \times M_\mu^2 \times ...M_\mu^N \quad , \quad \omega_\Gamma = \sum_{k=1}^{N} \omega_\mu^k \quad . \tag{1}$$

În particular, starea unui sistem cu N puncte materiale identice este descrisă în varietatea $M_\Gamma \equiv T^*\mathbb{R}^{3N}$ printr-un punct reprezentativ (de fază) m având coordonatele $(\tilde{q}, \tilde{p})$, unde $\tilde{q}$, $\tilde{p}$ sunt matrici linie cu $n = 3N$ componente. Pentru a obţine o descriere statistică a ansamblului, vom presupune că pe fiecare varietate M_μ se defineşte o partiţie în K celule infinitezimale $\{b_j \ ; \ j = 1, K\}$,

$$M_\mu = \cup_{j=1}^{K} b_j \quad , \quad b_i \cap b_j = \emptyset \quad , \tag{2}$$

de volum

$$\delta\Omega_\mu^j = \int_{b_j} \Omega_\mu \quad , \quad \Omega_\mu = \omega_\mu^\nu \quad . \tag{3}$$

Acestea determină o partiţie a varietăţii M_Γ în $n_B = K^N$ celule B_j de volum $\delta\Omega_\Gamma^j$, $j = 1, n_B$. Dacă notăm cu w_j probabilitatea ca punctul reprezentativ $m \in M_\Gamma$ pentru starea ansamblului la momentul t să fie localizat în celula B_j, atunci raportul $\rho_j = w_j / \delta\Omega_\Gamma^j$ defineşte funcţia de distribuţie a densităţii de probabilitate ρ. Aceasta este o funcţie simetrică la permutarea indicilor de particulă $i = 1, N$ ai variabilelor $\tilde{q}, \tilde{p}$, normată prin

$$\int_{M_\Gamma} \Omega_\Gamma \ \rho = 1 \quad , \quad \Omega_\Gamma = \omega_\Gamma^{N\nu} \equiv d\tilde{q} d\tilde{p} \quad .$$

Este important să observăm că definirea distribuţiei ρ în raport cu partiţia (2) nu implică şi $\rho \in \mathcal{F}(M)$. Pentru o descriere mai prcisă este necesară o acoperire a lui M_μ, definită ca sistem indexat de mulţimi deschise $\{U_i, i \in I\}$ a căror reuniune este M_μ, şi un sistem de q-colanţuri [16], $q = 0, 1$, care asociază fiecărui set de $q + 1$ indici $i_0, ..., i_q$ din I o funcţie $\rho_q(i_0, ..., i_q) \in \mathbb{R}$ pe $U_{i_0} \cap U_{i_1} ... \cap U_{i_q}$.

În general, deplasarea punctului reprezentativ face ca ρ să aibă şi o dependenţă explicită de timp. Potrivit teoremei Liouville, elementul de volum Ω_Γ este invariant la curentul hamiltonian F_t pe M_Γ, $F_t^*\Omega_\Gamma = \Omega_\Gamma$, iar densitatea de probabilitate se comportă ca un fluid descris de ecuaţia de continuitate (Liouville),

$$\partial_t\rho + \mathrm{L}_{\tilde{H}}\rho = 0 \quad , \tag{4}$$

unde $\mathrm{L}_{\tilde{H}}\rho \equiv -\{\tilde{H}, \rho\}$ este derivata Lie definită de paranteza Poisson. Hamiltonianul $\tilde{H}$ conţine suma termenilor de energie cinetică şi potenţială pentru sistemele elementare, precum şi termeni datoraţi interacţiunilor reciproce.

În general, ansamblul format din două componente Γ independente având funcţiile de distribuţie ρ_1 şi ρ_2 pe M_1, respectiv M_2, va fi descris de funcţia produs $\rho = \rho_1\rho_2$ definită pe $M = M_1 \times M_2$.

Unitatea de măsură a funcţiei de distribuţie ρ depinde de dimensiunea varietăţii M_Γ, deci de $N\nu$. Deoarece în general M_Γ nu este spaţiu metric, este convenabil să introducem o unitate de măsură fundamentală h pentru ω, astfel încât $\mathrm{h}^{\mathrm{N}\nu}$ este unitatea fundamentală pentru Ω_Γ. Cu această unitate raportul

$$\gamma_j = \frac{\delta\Omega_\Gamma^j}{\mathrm{h}^{\mathrm{N}\nu}} \quad , \tag{5}$$

dintre $\delta\Omega_\Gamma^j$ şi $\mathrm{h}^{\mathrm{N}\nu}$ reprezintă ponderea celulei clasice B_Γ^j. Putem defini şi o funcţie de distribuţie adimensională $\bar{\rho} = \mathrm{h}^{\mathrm{N}\nu}\rho$, normată potrivit relaţiei

$$\int_{M_\Gamma} \frac{\Omega_\Gamma}{\mathrm{h}^{\mathrm{N}\nu}}\, \bar{\rho} = 1 \quad . \tag{6}$$

În general, valoarea medie a unei observăbile $A \in \mathcal{F}(M_\Gamma)$ este definită prin

$$< A >= \int_{M_\Gamma} \frac{\Omega_\Gamma}{\mathrm{h}^{\mathrm{N}\nu}}\, \bar{\rho}\, A \quad ,$$

iar

$$\frac{d < A >}{dt} =< \{A, \tilde{H}\} > \quad , \tag{7}$$

în acord cu I.(2). Valoarea medie a funcţiei $-\ln\bar{\rho}$ defineşte entropia sistemului

$$S = -k_B \int_{M_\Gamma} \frac{\Omega_\Gamma}{\mathrm{h}^{\mathrm{N}\nu}}\, \bar{\rho}\ln\bar{\rho} \quad , \tag{8}$$

unde k_B este constanta lui Boltzmann.

2 Ecuaţia Boltzmann

Ansamblul Γ constituit din N subsisteme elementare identice μ care nu interacţionează poate fi descris alternativ folosind "reprezentarea numerelor de ocupare", prin N

puncte reprezentative pe varietatea M_μ. Dacă $M_\mu = T^*\mathbb{R}^3$, acestea sunt punctele de coordonate $(\mathbf{r},\mathbf{p})_i$, $i = 1, N$.

Fie (2) o partiţie a varietăţii M_μ în K celule elementare, şi N_j numărul de puncte reprezentative aflate în celula b_j de volum $\delta\Omega^j_\mu$ (3). Raportul $\mathsf{f}_j = N_j/\delta\Omega^j_\mu$ defineşte funcţia de distribuţie a densităţii de particule[12] $\mathsf{f} \in \mathcal{F}(M_\mu)$, normată prin

$$\int_{M_\mu} \Omega_\mu\, \mathsf{f} = N \quad . \tag{9}$$

În particular, raportul f_j/N determină densitatea de probabilitate uniparticulă ρ_μ (sau $\bar\rho_\mu = \mathrm{h}^\nu \rho_\mu$) de localizare pe spaţiul fazic M_μ, legată de densitatea $\bar\rho$ pe M_Γ prin proiecţia realizată de integrarea pe $N-1$ varietaţi M_μ,

$$\rho_\mu(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \frac{\mathsf{f}}{N} = \frac{1}{\mathrm{h}^{\mathrm{N}\nu}} \int d^3q_2...d^3q_N d^3p_2...d^3p_N \bar\rho(\mathbf{q},\mathbf{q}_2,...,\mathbf{q}_N,\mathbf{p},\mathbf{p}_2...\mathbf{p}_N) \quad . \tag{10}$$

Spaţiul funcţiilor de distribuţie pe M_μ va fi notat prin

$$\mathcal{F}^1_+ = \{\mathsf{f} \in \mathcal{L}^1(M)\ ;\ \mathsf{f} = \mathsf{f}^* \geq 0\} \quad . \tag{11}$$

Valoarea medie a unei observabile $A \in \mathcal{F}(M_\mu)$ are expresia

$$< A >= \sum_{j=1}^{K} N_j A_j = \int_{M_\mu} \Omega_\mu\, \mathsf{f}A \quad .$$

În absenţa interacţiunilor dintre componente (molecule) $\rho(\tilde q,\tilde p) = \Pi^N_{i=1}\rho_\mu(\mathbf{q}_i,\mathbf{p}_i)$, iar $\mathsf{f} = N\rho_\mu$ satisface ecuaţia Liouville uniparticulă

$$\partial_t \mathsf{f} + \mathrm{L}_H \mathsf{f} = 0 \tag{12}$$

în care $H \in \mathcal{F}(M_\mu)$ este hamiltonianul uniparticulă, şi $\mathrm{L}_H f \equiv -\{H, f\}$. Dacă $M_\mu = T^*Q$, $Q = \mathbb{R}^3$, atunci

$$\mathrm{L}_H = (\nabla_p H)\cdot\nabla - (\nabla H)\cdot\nabla_p \quad , \tag{13}$$

cu $\nabla_p \equiv \vec\partial_p$, $\nabla \equiv \vec\partial_q$, iar pentru un hamiltonian de forma I.(6) ecuaţia (12) devine

$$\frac{\partial \mathsf{f}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla\mathsf{f} - \nabla V\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\mathsf{f} = 0 \quad . \tag{14}$$

Interacţiunile (ciocnirile) dintre particule pot fi luate în considerare sub forma unui termen suplimentar $J_c = J_g - J_v$, unde $J_g(J_v)$ în punctul $m \in b^j$ reprezintă

[12] În cazul $N = 1$ vom presupune că N_j reprezintă probabilitatea ca particula să fie localizată în celula b_j.

numărul de particule care apar (dispar) în celula b^j în unitatea de timp din cauza interacţiunilor. Astfel, (12) capătă forma ecuaţiei Boltzmann

$$\partial_t \mathsf{f} + \mathrm{L}_H \mathsf{f} = J_c \quad . \tag{15}$$

Pentru distribuţii apropiate de echilibru, termenul J_c din (15) se poate aproxima prin $J_c \approx -(\mathsf{f} - \mathsf{f}_0)/\tau$, unde τ reprezintă timpul de relaxare.

2.1 Stari coerente clasice

Pentru a rezolva ecuaţia (14) este convenabil să folosim transformata Fourier $\tilde{\mathsf{f}}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, t)$ în impuls,

$$\tilde{\mathsf{f}}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, t) \equiv \int d^3p \; e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}} \mathsf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad . \tag{16}$$

Astfel, dacă $\mathsf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ este o soluţie a ecuaţiei (14), atunci transformata ei Fourier $\tilde{\mathsf{f}}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, t)$ va satisface

$$\partial_t \tilde{\mathsf{f}} - \frac{i}{m} \nabla_k \cdot \nabla \tilde{\mathsf{f}} + i\mathbf{k} \cdot (\nabla V) \tilde{\mathsf{f}} = 0 \quad . \tag{17}$$

Diferite mărimi locale de interes, cum ar fi densitatea spaţială $n(\mathbf{q}, t)$, densitatea de curent $\mathbf{j}(\mathbf{q}, t)$ sau de energie cinetică $\epsilon(\mathbf{q}, t)$ se pot exprima folosind $\tilde{\mathsf{f}}$ şi derivatele sale la $\mathbf{k} = 0$ prin

$$\mathsf{n}(\mathbf{q}, t) \equiv \int d^3p \; \mathsf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \tilde{\mathsf{f}}(\mathbf{q}, 0, t) \quad , \tag{18}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, t) \equiv \int d^3p \; \frac{\mathbf{p}}{m} \mathsf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\frac{i}{m} \nabla_k \tilde{\mathsf{f}}(\mathbf{q}, 0, t) \quad , \tag{19}$$

$$\epsilon(\mathbf{q}, t) \equiv \int d^3p \; \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \mathsf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\frac{1}{2m} \nabla_k^2 \tilde{\mathsf{f}}(\mathbf{q}, 0, t) \quad . \tag{20}$$

În general, $\mathsf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ este specificată de seria infinită de derivate parţiale $\partial_k^\alpha \tilde{\mathsf{f}}|_{k=0}$, $\alpha = 0, 1, 2, ...$. Totuşi, anumite soluţii se pot defini folosind numai $\mathsf{n}(\mathbf{q}, t)$, sau o funcţională simplă de $\mathsf{n}(\mathbf{q}, t)$. Dacă în plus acestea îsi păstrează dependenţa funcţională de coordonate şi impulsuri în decursul evoluţiei temporale, vor fi numite soluţii (distribuţii) coerente. Funcţionalele coerente care satisfac principiul superpozitiei şi generează un spaţiu liniar vor fi specificate ca "unde de probabilitate".

O clasă importantă de stări coerente pentru ecuaţia Liouville (14) este reprezentată de "distribuţiile de acţiune"

$$\mathsf{f}_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathsf{n}(\mathbf{q}, t) \delta(\mathbf{p} - \nabla S(\mathbf{q}, t)) \quad , \tag{21}$$

care rămân tot timpul un produs între $\mathsf{n}(\mathbf{q},t)$ şi $\delta(\mathbf{p}-\nabla S(\mathbf{q},t))$. Cele două funcţii reale de coordonate şi timp, $\mathsf{n}(\mathbf{q},t)$ şi $S(\mathbf{q},t)$ sunt legate de curentul hamiltonian deoarece cu transformata Fourier

$$\tilde{\mathsf{f}}_0(\mathbf{q},\mathbf{k},t) = \mathsf{n}(\mathbf{q},t)e^{i\mathbf{k}\cdot\nabla S(\mathbf{q},t))} \tag{22}$$

a funcţiei f_0 (17) se reduce la sistemul de ecuaţii

$$\partial_t \mathsf{n} = -\nabla \mathbf{j} \tag{23}$$

$$\mathsf{n}\nabla[\partial_t S + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V] = 0 \tag{24}$$

unde $\mathbf{j} \equiv \mathsf{n}\nabla S/m$ este densitatea de curent (19). Astfel, presupunând existenţa unui "potenţial de impuls" $S(\mathbf{q},t)$ obţinem atât ecuaţia de continuitate (23) cât şi ecuaţia Hamilton-Jacobi I.(38) în forma (24).

Soluţiile ecuaţiei (23) corespunzatoare aceeleiaşi funcţii S satisfac principiul superpoziţiei, astfel încât aceste ecuaţii cuplate descriu "unde de acţiune" $\mathsf{n}^{[S]}(\mathbf{q},t)$,

$$(\mathsf{n}_1 + \mathsf{n}_2)^{[S]} = \mathsf{n}_1^{[S]} + \mathsf{n}_2^{[S]} \quad .$$

Ecuaţiile (23), (24) ce descriu undele de acţiune se pot obţine folosind principiul variaţional $\delta_{n,S}\mathcal{A} = 0$ de minim pentru funcţionala

$$\mathcal{A}[n,S] = -\int dt \int d^3q \ \mathsf{n}[\partial_t S + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V] \tag{25}$$

în raport cu variaţiile locale ale câmpurilor $\mathsf{n}(\mathbf{q},t)$ and $S(\mathbf{q},t)$. Formularea variaţională ne arată ca ecuaţiile cuplate (23) şi (24) descriu un sistem hamiltonian infinit-dimensional având funcţia generatoare S şi densitatea n ca variabile conjugate. Forma simplectică şi funcţia Hamilton pentru acest sistem sunt, respectiv

$$\hat{\omega} = \int d^3q \ (d\mathsf{n} \wedge dS) \tag{26}$$

şi

$$H_{\mathcal{A}} = \int d^3q \ \mathsf{n}[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V] \quad . \tag{27}$$

În acest cadru, potrivit teormei Noether [9], conservarea numărului de particule exprimată de (23) reflectă "invarianţa de etalon" a ecuaţiei variaţionale $\delta_{\mathsf{n},S}\mathcal{A} = 0$ în raport cu modificarea lui S prin adaugarea unei funcţii arbitrare de timp.

Este important să observăm că pentru a obţine valori finite ale entropiei (8), distribuţia (21) trebuie redefinită prin înlocuirea functiei $\delta(\mathbf{p})$ în impuls cu funcţia caracteristică pentru mulţimile partiţiei (2). Deasemenea, dacă densitatea $\mathsf{n}(\mathbf{q})$

este o soluţie a sistemului (23), (24), atunci şi $-\mathsf{n}(\mathbf{q})$ este o soluţie. Pentru a obţine numai soluţii definite pozitiv este convenabil să căutăm n de forma $\mathsf{n} = |\psi|^2$, unde ψ este în general o funcţie complexă. Dacă $\psi = \sqrt{\mathsf{n}}\exp(iS/\sigma)$, cu σ o constantă dimensională, egalitatea

$$\hat{\omega} = \int d^3q\ (d\mathsf{n} \wedge dS) = -i\sigma \int d^3q\ (d\psi^* \wedge d\psi) \tag{28}$$

ne arată că $\hat{\omega}$ coincide cu forma simplectică (48) indusă de structura complexă a spaţiului Hilbert $\mathcal{H} = \{\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)\}$ generat de funcţiile ψ. Constanta σ şi unitatea fundamentală h din (5) au dimensiuni de acţiune, iar în teoria cuantică $\sigma = \mathrm{h}/2\pi \equiv \hbar$, unde h este constanta lui Planck.

2.2 Stări coerente cuantice

Derivata parţială $\mathbf{k} \cdot \nabla S(\mathbf{q}, t)$ în (22) este limita expresiei

$$\frac{k}{\ell}[S(\mathbf{q} + \frac{\ell}{2k}\mathbf{k}, t) - S(\mathbf{q} - \frac{\ell}{2k}\mathbf{k}, t)] \tag{29}$$

$k = |\mathbf{k}|$, când $\ell \to 0$. Posibilitatea existenţei unei lungimi elementare $\ell_0 > 0$, propusă de W. Heisenberg ($\ell_0 \sim 10^{-15}$ m) şi M. Planck ($\ell_0 \sim 10^{-34}$ m), a fost dezvoltată în contextul teoriei relativităţii generalizate, prin modelul de reţea cristalină a spaţiului fizic[13] [19]. Independent de aceste consideraţii, ipoteza discretizării derivatelor spaţiale a fost utilizată în [20, 6, 21] ca justificare pentru tranziţia de la distribuţiile coerente clasice (22) la cele cuantice. Astfel, dacă introducem un nou parametru $\sigma = \ell/k$, atunci

$$\tilde{\mathsf{f}}_0(\mathbf{q}, \mathbf{k}, t) = \lim_{\sigma \to 0} \tilde{\mathsf{f}}_\psi(\mathbf{q}, \mathbf{k}, t) \tag{30}$$

unde

$$\tilde{\mathsf{f}}_\psi(\mathbf{q}, \mathbf{k}, t) \equiv \psi^*(\mathbf{q} - \frac{\sigma\mathbf{k}}{2}, t)\psi(\mathbf{q} + \frac{\sigma\mathbf{k}}{2}, t) \tag{31}$$

cu $\psi = \sqrt{\mathsf{n}}\exp(iS/\sigma)$. În limita $k \to 0$

$$S(\mathbf{q} \pm \frac{\sigma_0}{2}\mathbf{k}, t) = S(\mathbf{q}, t) \pm \frac{\sigma_0}{2}\mathbf{k} \cdot \partial_\mathbf{q} S(\mathbf{q}, t) + \frac{\sigma_0^2}{8}(\mathbf{k} \cdot \partial_\mathbf{q})^2 S(\mathbf{q}, t) \pm ...$$

iar dacă neglijăm termenii ce conţin $(\sigma_0 k)^m$, $m \geq 3$, atunci

$$\mathbf{k} \cdot \partial_\mathbf{q} S(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{\sigma_0}[S(\mathbf{q} + \frac{\sigma_0}{2}\mathbf{k}, t) - S(\mathbf{q} - \frac{\sigma_0}{2}\mathbf{k}, t)]$$

[13] La solide există 14 reţele Bravais tridimensionale ce formează 7 sisteme cristaline.

pentru orice constantă dimensională σ_0. Astfel, în limitele unui domeniu adecvat pentru $\mathbf{k}$, vom putea considera în (31) σ ca o constantă finită, legată eventual de mărimea celulelor b_j folosite în partiţia (2), $\sigma = \hbar$, astfel încât f_ψ obţinută inversând (16)

$$\mathsf{f}_\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \ \mathrm{e}^{-\mathbf{ik}\cdot\mathbf{p}} \ \tilde{\mathsf{f}}_\psi(\mathbf{q}, \mathbf{k}, t) \tag{32}$$

este transformata Wigner [22, 23] a funcţiei $\psi = \sqrt{\mathsf{n}}\exp(iS/\sigma)$. Deoarece f_ψ nu este definită pozitiv, ea nu poate reprezenta o densitate de particule ($\mathsf{f}_\psi \neq \mathcal{F}^1_+(M, \omega)$). Totuşi, este o funcţie integrabilă, iar condiţia de normare (6) capătă forma

$$\int \mathrm{d}^3q\mathrm{d}^3p \ \ \mathsf{f}_\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \int d^3q \ \ |\psi(\mathbf{q}, t)|^2 \equiv \langle\psi|\psi\rangle = \mathrm{N} \ \ . \tag{33}$$

Aceasta relaţie ne arată că funcţia (de stare) cuantică $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ poate fi normată. În cazul uniparticulă vom considera funcţia ψ ca vector normat $|\psi\rangle$ al unui spaţiu Hilbert abstract $\mathcal{H}$, definit în general ca un spaţiu liniar complex infinit dimensional, separabil, complet, cu produs scalar.

Integrala de "overlap" pe spaţiul fazelor între două distribuţii f_{ψ_1}, f_{ψ_2}, este [6]

$$< \mathsf{f}_{\psi_2} > |_{\mathsf{f}_{\psi_1}} \equiv \frac{1}{N\mathrm{h}^3} < \bar{\rho}_{\mu\psi_2} > |_{\mathsf{f}_{\psi_1}} \equiv \int \mathrm{d}^3q\mathrm{d}^3p \ \ \mathsf{f}_{\psi_1}\mathsf{f}_{\psi_2} = \frac{|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}{(2\pi\sigma)^3} \tag{34}$$

unde

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle \equiv \int \mathrm{d}^3q \ \ \psi_1^*(\mathbf{q}, t)\psi_2(\mathbf{q}, t) \tag{35}$$

repezintă produsul scalar dintre $\psi_1(\mathbf{q}, t)$ şi $\psi_2(\mathbf{q}, t)$ ca elemente ale spaţiului Hilbert cuantic $\mathcal{H}$. Astfel, integrala (34) este definită pozitiv, justificând în cazul $N = 1$ interpretarea funcţiei $|\psi(\mathbf{q})|^2$ ca densitate de probabilitate de localizare în spaţiul coordonatelor [24], şi algerea $\sigma = \hbar$. Totuşi, problema "probabilităţilor negative" nu dispare complet, deoarece revine în teoria câmpurilor cuantice sub forma "spaţiului Hilbert cu metrică nedefinită" [25].

Valoarea medie a observabilelor clasice $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ se poate exprima ca "valoare aşteptată"

$$\langle A\rangle = \int \mathrm{d}^3q\mathrm{d}^3p\mathsf{f}_\psi A = \int \mathrm{d}^3q \ \ \psi^*(\mathbf{q}, t)\hat{A}\psi(\mathbf{q}, t) \equiv \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \ \ ,$$

unde $\hat{A}$ este operatorul în $\mathcal{H}$ asociat observabilei A, obţinut înlocuind impulsul $\mathbf{p}$ cu operatorul hermitic[14] asociat $\hat{\mathbf{p}} = -i\sigma\nabla$.

[14] Dacă $\hat{A}$ este nemărginit atunci este definit pe un subspaţiu $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$, iar $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}_{\hat{A}^\dagger}$; $\hat{A}$ este simetric dacă $\hat{A}^\dagger|\mathcal{H}_{\hat{A}} = \hat{A}|\mathcal{H}_{\hat{A}}$ şi este autoadjunct (hermitic) dacă $\mathcal{H}_{\hat{A}} = \mathcal{H}_{\hat{A}^\dagger}$, $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ [26].

Relaţia (34) ne arată că un difeomorfism simplectic Φ pe (M,ω) care acţionează pe spaţiul funcţiilor Wigner prin $(\mathsf{f}_\psi)' = \Phi^* \mathsf{f}_\psi$ determină o transformare unitară $\hat{U}_\Phi$ a vectorilor de stare din $\mathcal{H}$ de forma $\psi' = \hat{U}_\Phi \psi$, astfel încât

$$\Phi^* \mathsf{f}_\psi = \mathsf{f}_{\hat{U}_\Phi \psi} \quad . \tag{36}$$

În particular, când Φ este acţiunea unui grup Lie G, transformarile infinitezimale au forma $\hat{U}_\epsilon = 1 + i\epsilon \hat{J}$, unde $\hat{J}$ sunt operatori hermitici asociaţi elementelor algebei grupului G.

În cazul funcţionalei $\tilde{f}_\psi$ derivatele parţiale în primii doi termeni din (17) sunt

$$\partial_t \tilde{f}_\psi = (\hat{U}_{-k}\psi^*)(\hat{U}_k \partial_t \psi) + (\hat{U}_{-k}\partial_t \psi^*)(\hat{U}_k \psi) \tag{37}$$

şi

$$\nabla_k \cdot \nabla \tilde{f}_\psi = \frac{\sigma}{2}[(\hat{U}_{-k}\psi^*)(\hat{U}_k \Delta\psi) - (\hat{U}_{-k}\Delta\psi^*)(\hat{U}_k \psi)] \quad , \tag{38}$$

unde $\hat{U}_k = \exp(\sigma \mathbf{k} \cdot \nabla/2)$ şi $\Delta = \nabla \cdot \nabla$. Să presupunem că derivatele de ordinul 3 ale potenţialului $V(\mathbf{q})$ se anulează, astfel încât $\mathbf{k} \cdot \nabla V \tilde{f}_\psi$ în (17) se poate scrie sub forma

$$\mathbf{k} \cdot \nabla V \tilde{f}_\psi = \frac{1}{\sigma}[(\hat{U}_{-k}\psi^*)(\hat{U}_k V\psi) - (\hat{U}_{-k}V\psi^*)(\hat{U}_k \psi)] \quad . \tag{39}$$

Înlocuind (37), (38) şi (39) în (17) obţinem

$$(\hat{U}_{-k}\psi^*)(\hat{U}_k \hat{D}_S \psi) + (\hat{U}_{-k}\hat{D}_S^* \psi^*)(\hat{U}_k \psi) = 0 \quad , \tag{40}$$

unde $\hat{D}_S$ este operatorul liniar

$$\hat{D}_S \equiv \partial_t - \frac{i\sigma}{2m}\Delta + \frac{i}{\sigma}V \quad . \tag{41}$$

Astfel, $\tilde{f}_\psi$ definită de (16) este o soluţie a ecuaţiei (17) numai dacă $\hat{D}_S \psi = 0$, sau

$$i\sigma\partial_t \psi = \hat{H}\psi \quad , \quad \hat{H} = -\frac{\sigma^2}{2m}\Delta + V \quad , \tag{42}$$

formal identică cu ecuaţia Schrödinger dependentă de timp (ESDT) pentru "funcţia de undă" complexă ψ. Un rezultat similar se obţine în cazul unei particule cu sarcină electrică aflată în câmp magnetic uniform [20]-Anexa 2.

Deşi relaţia dintre ψ şi f_ψ este neliniară, iar

$$\mathsf{f}_{\psi_1 + \psi_2} \neq \mathsf{f}_{\psi_1} + \mathsf{f}_{\psi_2} \quad ,$$

observăm că dacă ψ_1, ψ_2 sunt soluţii ale ESDT, iar f_{ψ_1}, f_{ψ_2} satisfac ecuaţia Liouville, atunci şi $\mathsf{f}_{\psi_1+\psi_2}$ este soluţie a ecuaţiei Liouville. Folosind notaţia Dirac $\hat{P}_\psi \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$

pentru operatorul de proiecţie asociat funcţiei de stare ψ, distribuţia f_ψ (32) capătă forma

$$\mathsf{f}_\psi(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \mathsf{W}(\hat{P}_\psi) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}\langle\mathbf{q}|\hat{U}_k\hat{P}_\psi\hat{U}_{-k}|\mathbf{q}\rangle \tag{43}$$

astfel încât între f_ψ şi $\hat{P}_\psi$ există o dependenţă liniară realizată de transformarea W.

Funcţiile proprii ψ_μ ale operatorului hamiltonian $\hat{H}$,

$$\hat{H}\psi_\mu = E_\mu\psi_\mu \tag{44}$$

sunt soluţii staţionare ale ecuaţiei (42) de forma $\psi_\mu(t) = e^{-iE_\mu t/\sigma}\psi_\mu(0)$, corespunzatoare unor distribuţii f_{ψ_μ} independente de timp cu energia E_μ,

$$E = \langle H\rangle = \int \mathrm{d}^3q\mathrm{d}^3p\ \mathsf{f}_{\psi_\mu}H = \langle\psi_\mu|\hat{H}|\psi_\mu\rangle = E_\mu \quad . \tag{45}$$

În general, pentru o valoare proprie E dată (nivel energetic) se obţin mai multe funcţii proprii ψ_μ, $\mu = 1,2,...,\gamma_E$ liniar independente, iar numărul acestora γ_E reprezintă degenerarea nivelului.

Este important să remarcăm faptul că relaţia (45), aplicabilă şi la calcule variaţionale staţionare precum (78), este valabilă pentru o clasă mai largă de hamiltonieni decât am presupus pentru a obţine (39).

2.2.1 Particula nerelativistă liberă: unde plane şi sferice

Pentru o particulă cuantică liberă ($N = 1$, $\sigma = \hbar$, $V = 0$) de masă m operatorul hamiltonian are forma

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \quad , \tag{46}$$

unde Δ este operatorul Laplace pe spaţiul configuraţiilor $\mathbb{R}^3$. În coordonate carteziene $\mathbf{q} \equiv (x,y,z)$, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, iar ecuaţia (44) are soluţii de tip "undă plană" cu spectru continuu,

$$\psi_{k\mathbf{n}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} \quad , \quad E_k = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad . \tag{47}$$

Starea fundamentală $E = 0$ este nedegenerată, dar valorile proprii $E > 0$ sunt infinit degenerate după direcţia de propagare specificată de versorul $\mathbf{n}$, astfel încât

$$\langle\psi_{k\mathbf{n}}|\psi_{k'\mathbf{n}'}\rangle = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \quad .$$

În coordonate sferice $\mathbf{q} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$,

$$\nabla = \mathbf{e}_r\partial_r + \frac{1}{r}\nabla_Y \quad , \quad \nabla_Y = \mathbf{e}_\theta\partial_\theta + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sin\theta}\partial_\varphi \quad , \tag{48}$$

$\mathbf{e}_i = \mathbf{t}_i/|\mathbf{t}_i|$, $\mathbf{t}_i = \partial\mathbf{q}/\partial u_i$ (Anexa 1), iar operatorul Δ capătă forma

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r + \frac{\nabla_Y^2}{r^2} \quad , \quad \nabla_Y^2 = \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 \quad .$$

Componenta unghiulară $\mathbf{q}\times\nabla$ corespunde operatorului asociat momentului cinetic orbital

$$\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar\mathbf{q}\times\nabla = -i\hbar(\mathbf{e}_\varphi\partial_\theta - \frac{\mathbf{e}_\theta}{\sin\theta}\partial_\varphi) \quad ,$$

$$\hat{L}_x = i\hbar(\sin\varphi\partial_\theta + \cot\theta\cos\varphi\partial_\varphi) \quad , \quad \hat{L}_y = i\hbar(-\cos\varphi\partial_\theta + \cot\theta\sin\varphi\partial_\varphi) \quad ,$$

şi $\hat{L}_z = -i\hbar\partial_\varphi$. Deoarece $(\mathbf{q}\times\nabla)^2 = \nabla_Y^2$ şi

$$-\nabla_Y^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm} \quad , \quad \hat{L}_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm} \quad , \quad l = 0, 1, 2, ...$$

unde $Y_{lm}(\theta,\varphi)$, $m = -l, -l+1, ..., l$, sunt funcţiile sferice, stările proprii ψ_E capătă forma

$$\psi_{klm}(r,\theta,\varphi) = j_l(kr)Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{49}$$

unde j_l sunt funcţiile Bessel sferice.

Relaţia dintre soluţiile (47) şi (49) este dată de dezvoltarea

$$\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr)Y_{lm}^*(\frac{\mathbf{k}}{k})Y_{lm}(\frac{\mathbf{q}}{r}) \quad .$$

Funcţiile de undă definite astfel sunt câmpuri scalare [27], deoarece la rotaţia sistemului de coordonate se transformă potrivit relaţiei $\psi'(x',y',z') = \psi(x,y,z)$ sau

$$\psi'(x,y,z) = \hat{R}\psi(x,y,z) \quad , \quad \hat{R} = e^{-i\alpha\hat{L}_z/\hbar}e^{-i\beta\hat{L}_x/\hbar}e^{-i\gamma\hat{L}_z/\hbar}$$

unde ψ, ψ' sunt funcţiile de undă în sistemul O, respectiv în sistemul O' de coordonate $[x',y',z'] = \mathsf{R}^q[x,y,z]$, rotit cu unghiurile Euler α,β,γ (sau φ,θ,ψ) faţă de O. Pentru funcţiile sferice această relaţie de transformare capătă forma

$$Y_{lm'}(\theta',\varphi') = \sum_{m=-l}^{l} D_{mm'}^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

unde

$$D_{mm'}^l(\alpha,\beta,\gamma) = \langle lm|\hat{R}|lm'\rangle \tag{50}$$

sunt elementele de matrice ale operatorului $\hat{R}$ în spaţiul abstract $2l+1$-dimensional de reprezemtare ireductibilă a grupului $SO(3)$ având baza $\{|lm\rangle\}$,

$$D_{m0}^l(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_{lm}^*(\beta,\alpha) \quad , \quad Y_{lm}^* = (-1)^l Y_{l-m} \quad .$$

Distribuţiile de probabilitate generate folosind o singură funcţie de undă $\psi(\mathbf{q})$ corespund unor particule scalare, dar există şi particule cu proprietăţi “interne” care se modifică la rotaţii, şi necesită utilizarea unor funcţii de undă cu mai multe componente. De exemplu, funcţia de undă poate fi un câmp vectorial complex $\vec{B}(\mathbf{q}) \equiv [B_x, B_y, B_z](\mathbf{q})$, astfel încât $\vec{B}'(\hat{\mathsf{R}}^q[x,y,z]) = \hat{\mathsf{R}}^e\vec{B}([x,y,z])$, iar la orice $\mathbf{q}$ fixat $[B_x, B_y, B_z]$ generează un spaţiu Hilbert 3-dimensional de reprezentare ireductibilă a grupului $SO(3)$ prin matricile $\hat{\mathsf{R}}^e$ I.(15). Generatorii acestei acţiuni $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ nu sunt operatori diferenţiali ca $\hat{\mathbf{L}}$, ci matrici 3×3 I.(16) ce corespund momentului cinetic intern (spin) $\hat{\mathbf{S}} = i\hbar\hat{\vec{\xi}}$.

În general, la o particulă cu spinul $s = 0, 1/2, 1, ...$ componentele funcţiei de undă aparţin unui spaţiu Hilbert abstract $\mathcal{H}_s$, $2s+1$-dimensional de reprezentare a grupului $SU(2)$ de acoperire pentru $SO(3)$ ($SO(3)$ este conex dar nu şi simplu conex). În acest spaţiu operatorul $\hat{\mathbf{S}}^2$ are numai valoarea proprie $s(s+1)\hbar^2$, spre deosebire de operatorul orbital $\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar\mathbf{q} \times \nabla$ definit în spaţiul Hilbert infinit dimensional $\mathcal{H}_Y$ generat de funcţiile sferice, unde $\hat{\mathbf{L}}^2$ are diferite valori proprii $l(l+1)\hbar^2$, $l = 0, 1, 2, ...$ Operatorul $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ în $\mathcal{H}_Y \times \mathcal{H}_s$ este asociat momentului cinetic total, iar pentru indexarea stărilor

$$|jm\rangle \in \mathcal{H}_Y \times \mathcal{H}_s \quad , \quad j = |l-s|, ..., l+s \quad , \quad m = -j, -j+1, ..., j \tag{51}$$

se folosesc valorile proprii $j(j+1)\hbar^2$ şi $m\hbar$ pentru $\hat{\mathbf{J}}^2$, respectiv $\hat{J}_z$.

2.2.2 Rotatorul cuantic simplu şi rigid

Dacă potenţialul $V(\mathbf{q})$ în (42) are un minim abrupt la $|\mathbf{q}| = R_0$ mişcarea particulei este constrânsă la sfera de rază R_0. Pentru descrierea cuantică a acestui “rotator simplu” operatorul hamiltonian (46) se reduce la partea unghiulară

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{mR_0^2}\nabla_Y^2 \quad ,$$

având ca funcţii proprii funcţiile sferice Y_{lm} şi valorile proprii $E_l = \hbar^2 l(l+1)/mR_0^2$, $2l+1$-degenerate după m.

În cazul unui solid rigid liber spaţiul configuraţiilor este grupul $SO(3)$ I.(14), pe care $SO(3)$ acţionează independent prin translaţii la stânga, (L) sau la dreapta, $(\tilde{R})$. Astfel, grupul maximal de simetrie dinamică pentru rotator este $SO(3) \times SO(3) \simeq SO(4)$ [28]-XII. Energia cinetică I.(17) defineşte o metrică invariantă la stânga g pe spaţiul tangent $TSO(3)$, iar operatorul hamiltonian are forma $\hat{H} = -\hbar^2\Delta_g/2$, unde prin Δ_g am notat operatorul Laplace-Beltrami asociat metricii g, ($g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, Anexa 1),

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}\sum_{i,j}\partial_i\sqrt{\det(g)}g_{ij}^{-1}\partial_j \quad , \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial u_i} \quad ,$$

în coordonatele generale (u_1, u_2, u_3). Pentru un rotator sferic cu momentul de inertie I, I.(19) determină valorile $g_{\varphi\varphi} = g_{\theta\theta} = g_{\psi\psi} = I$, $g_{\varphi\psi} = g_{\psi\varphi} = I\cos\theta$, iar

$$\Delta_g = \frac{1}{I\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta\partial_\theta + \frac{1}{I\sin^2\theta}(\partial_\varphi^2 + \partial_\psi^2 - 2\cos\theta\partial_\varphi\partial_\psi) \quad , \tag{52}$$

astfel încât $\hat{H}$ are funcţiile proprii (50) $D^L_{MK}(\varphi, \theta, \psi)$ şi valorile proprii $E_L = \hbar^2 L(L+1)/2I$, $(2L+1)^2$-degenerate după M şi K. Operatorul Δ_g se poate exprima şi sub forma $\Delta_g = (Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2)/I$ unde [29]

$$Y_1 = \cos\psi\partial_\theta + \frac{\sin\psi}{\cos\theta}\partial_\varphi - \cot\theta\sin\psi\partial_\psi \quad , \quad Y_2 = -\sin\psi\partial_\theta + \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\partial_\varphi - \cot\theta\cos\psi\partial_\psi \quad ,$$

şi $Y_3 = \partial_\psi$ sunt câmpurile tangente la $SO(3)$ care generează acţiunea adjunctă la dreapta (Anexa 2).

2.2.3 Distribuţii cuantice relativiste

Descrierea particulelor cuantice relativiste libere se realizează folosind ecuaţii de undă asociate relaţiei relativiste dintre energie şi impuls, $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Astfel, la particulele masive ($m \neq 0$) cu spin 0 (Φ, scalare) se aplică ecuaţia Klein-Gordon [30]-I,

$$\partial_t^2\Phi = [c^2\Delta - (\frac{mc^2}{\hbar})^2]\Phi \quad , \tag{53}$$

la particule cu spin 1 ($B = (B_0, \mathbf{B})$, vectoriale) se aplică ecuaţia Proca [30]-I, [29],

$$\partial_t^2 B_\mu - c^2\partial_\mu\partial\cdot B = [c^2\Delta - (\frac{mc^2}{\hbar})^2]B_\mu \quad , \tag{54}$$

$c\partial\cdot B \equiv \partial_t B_0 + c\nabla\cdot\mathbf{B}$, iar la particule cu spin 1/2 ecuaţia Dirac

$$i\hbar\partial_t\psi_D = (2c\hat{\gamma}^5\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}Mc^2)\psi_D \quad . \tag{55}$$

Aici $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$, $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\sigma}/2$ cu $\hat{\sigma}$ din I.(59) sunt operatorii de spin,

$$\hat{s}_x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{s}_y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{s}_z = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \tag{56}$$

ψ_D este o matrice coloană cu 4 componente (spinor Dirac), iar $\hat{\gamma}^5$ şi $\hat{\beta}$ sunt matrici 4×4 cu forma bloc

$$\hat{\gamma}^5 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\mathbb{I}} \\ \hat{\mathbb{I}} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbb{I}} & 0 \\ 0 & -\hat{\mathbb{I}} \end{bmatrix} \quad , \tag{57}$$

unde $\hat{\mathbb{I}}$ este matricea unitate 2×2. Folosind notaţia $\hat{\gamma}^0 = \hat{\beta}$, $\vec{\gamma} = 2\hat{\mathbf{s}}\hat{\gamma}^5$ ecuaţia (55) se poate scrie şi sub forma compactă

$$i\hbar\gamma \cdot \partial\psi_D = Mc\psi_D \quad , \quad \gamma \cdot \partial \equiv \frac{1}{c}\hat{\gamma}^0\partial_t - \vec{\gamma} \cdot \nabla \quad .$$

Interpretarea statistică a soluţiilor acestor ecuaţii este mai dificilă decât în cazul ecuaţiei Schrödinger nerelativiste, şi se realizează în cadrul teoriei cuantice de câmp, considerând Φ, B_μ şi ψ_D ca "operatori de undă".

Distribuţii coerente clasice şi cuantice pentru ecuaţia Liouville relativistă în spaţiul fazic extins sunt prezentate în [6].

2.2.4 Sisteme cuantice de N particule

La un sistem cuantic format din N particule fără spin funcţia de distribuţie ρ_Ψ pe varietatea M_Γ (1) se poate defini prin transformata Wigner multiplă

$$\rho_\Psi(\tilde{q}, \tilde{p}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3N}} \int d^3k_1 ... d^3k_N \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{k}\cdot\tilde{p}} (\hat{U}_{-\tilde{k}}\Psi_{\tilde{q},t})^* (\hat{U}_{\tilde{k}}\Psi_{\tilde{q},t}) \tag{58}$$

a funcţiei de undă $\Psi_{\tilde{q},t} \equiv \Psi(\mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_N, t) \in \mathcal{H}_\otimes \equiv \mathcal{H}_1 \times ... \times \mathcal{H}_N$, unde $\tilde{k} \cdot \tilde{p} \equiv \sum_{a=1}^N \mathbf{k}_a \cdot \mathbf{p}_a$, şi

$$\hat{U}_{\pm\tilde{k}}\Psi_{\tilde{q},t} = \Psi(\mathbf{q}_1 \pm \frac{\hbar}{2}\mathbf{k}_1, ..., \mathbf{q}_N \pm \frac{\hbar}{2}\mathbf{k}_N, t) \quad .$$

Dacă particulele sunt identice ρ_Ψ este simetrică la permutări, astfel încât $\Psi_{\tilde{q}}$ poate fi simetrică sau antisimetrică. Totuşi, la sistemele fizice de particule fără spin ($s = 0$), $\Psi_{\tilde{q}}$ este întotdeauna simetrică.

Spinul reprezintă un "grad de libertate intern" suplimentar, iar la un sistem format din N particule identice care au spinul s funcţia de stare

$$\Psi(\tilde{q}, \tilde{s}, t) \equiv \Psi(\mathbf{q}_1, s_{z1} ..., \mathbf{q}_N, s_{zN}, t) \tag{59}$$

conţine şi N variabilele discrete $s_{z1}, ..., s_{zN}$, $s_z = -s, -s+1, ...s$, corespunzatoare valorilor proprii pentru operatorii $\hat{S}_{z1}, ..., \hat{S}_{zN}$. La sistemele fizice nerelativiste se observă ca funcţia (59) este simetrică (S) sau antisimetrică (A) la permutarea coordonatelor particulelor după cum s este întreg sau semi-întreg. Dacă hamiltonianul uniparticulă are stările proprii $\psi_\mu(\mathbf{q})$, $\mu = 1, K$, unde prin μ am notat un set complet de indici care include şi spinul (de exemplu $nljm$ sau $nlms_z$), funcţia (59) se poate scrie sub forma unei combinaţii liniare normate cu coeficienţi $C_{\mu_1 ... \mu_N}(t)$ de produse de N funcţii uniparticulă,

$$\Psi(\tilde{q}, \tilde{s}, t) = \sum_{\mu_1\mu_2...\mu_N=1}^{K} C_{\mu_1...\mu_N}(t)\psi_{\mu_1}(\mathbf{q}_1)\psi_{\mu_2}(\mathbf{q}_2)...\psi_{\mu_N}(\mathbf{q}_N) \quad .$$

Stările S sau A se obţin atunci când $C_{\mu_1...\mu_N}(t)$ sunt complet simetrici, respectiv antisimetrici la permutarea indicilor. Pentru a descrie aceste cazuri este convenabil sa introducem reprezentarea numerelor de ocupare, generată de combinaţii liniare specifice $\Psi_{[N]}(\tilde{q},\tilde{s},t)$ asociate unei partiţii $[N] \equiv [N_1, N_2, ..., N_K]$ a celor N particule pe K stări $(\psi_{\mu_1}, \psi_{\mu_2}, ..., \psi_{\mu_K})$. În cazul S acestea au forma

$$\Psi^S_{[N]}(\tilde{q},\tilde{s},t) = \frac{1}{\sqrt{N!N_1!N_2!...N_K!}} \sum_{\{i_1...i_N\}} \psi_{\mu_1}(\mathbf{q}_{i_1})\psi_{\mu_1}(\mathbf{q}_{i_2})...\psi_{\mu_K}(\mathbf{q}_{i_N}) \quad . \tag{60}$$

Fiecare termen al sumei este un produs de N_1 funcţii ψ_{μ_1}, N_2 funcţii ψ_{μ_2}, ..., N_K funcţii ψ_{μ_K}, deci în total N funcţii, în K grupuri aflate în ordinea fixată $\mu_1, \mu_2, ...\mu_K$ a indicilor de stare, ale căror argumente se modifică de la un termen la altul prin permutări $\{i_1, i_2, ..., i_N\}$ ale indicilor de particulă $1, 2, ...N$ ataşaţi vectorilor de poziţie. Pentru stările A numerele de ocupare N_k pot avea numai valorile $0, 1$, astfel încât $K \geq N$ iar $\Psi^A_{[N]}$ capătă forma unui determinant (Slater)

$$\Psi^A_{[N]}(\tilde{q},\tilde{s},t) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\{i_1...i_N\}} \mathrm{sgn}(\{i_1...i_N\})\ \psi_{\mu_1}(\mathbf{q}_{i_1})\psi_{\mu_2}(\mathbf{q}_{i_2})...\psi_{\mu_N}(\mathbf{q}_{i_N}) \quad , \tag{61}$$

unde $\mathrm{sgn}(\{i_1...i_N\}) = \pm 1$ după cum permutarea $\{i_1 i_2 ... i_N\}$ conţine un numar par sau impar de transpoziţii[15]. În acest caz funcţia (58) se reduce la un produs simetrizat de N funcţii Wigner uniparticulă,

$$\rho_\Psi(\tilde{q},\tilde{p},t) = \frac{1}{N!} \sum_{\{i_1...i_N\}} \mathsf{f}_{\psi_{\mu_1}}([i_1])\mathsf{f}_{\psi_{\mu_2}}([i_2])...\mathsf{f}_{\psi_{\mu_N}}([i_N]) \quad , [i] \equiv (\mathbf{q}, \mathbf{p})_i \quad , \tag{62}$$

iar densitatea f_Ψ determinată de ρ_Ψ prin (10) devine $\mathsf{f}_\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \mathsf{f}_{\psi_{\mu_i}}(\mathbf{q},\mathbf{p})$. Folosind (43) acest rezultat capătă forma $\mathsf{f}_\Psi(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \mathsf{W}(\hat{\mathsf{f}}_{1p})$ unde

$$\hat{\mathsf{f}}_{1p} = \sum_{i=1}^N |\psi_{\mu_i}\rangle\langle\psi_{\mu_i}| = \sum_\mu N_\mu |\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu| \quad , \quad N_\mu = 0, 1 \tag{63}$$

este operatorul densitate uniparticulă pe spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$. Similar, în cazul S obţinem $\hat{\mathsf{f}}_{1p} = \sum_\mu N_\mu |\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu|$ cu $N_\mu = 0, 1, 2, ...$

În general, un operator uniparticulă pe $\mathcal{H}_\otimes$ simetric la permutari $\hat{A} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + ... + \hat{a}_N$ se poate scrie sub forma

$$\hat{A} = \sum_{\mu\nu=1}^K a_{\mu\nu}\hat{e}_{\mu\nu} \quad , \quad \hat{e}_{\mu\nu} \equiv \sum_{i=1}^N (|\psi_\mu\rangle\langle\psi_\nu|)_i \quad , \tag{64}$$

[15]Permutarile pare formează un subgrup invariant al grupului permutarilor.

unde $(|\psi_\mu\rangle\langle\psi_\nu|)_i$ acţionează în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}_i$ al particulei i. Operatorii $\{\hat{e}_{\mu\nu}\ ;\ \mu,\nu = \overline{1,K}\}$ generează algebra $\mathfrak{gl}(K,\mathbb{C})$, iar acţiunea lor asupra stărilor (60), (61) se reduce la modificarea numerelor de ocupare astfel încât

$$\hat{e}_{\mu\nu} : [...N_\mu....N_\nu...] \mapsto [...N_\mu + 1....N_\nu - 1...] \quad .$$

În cazul S, o reprezentare convenabilă a acestei acţiuni se obţine introducând un set de operatori "bosonici" de generare şi anihilare $\{\hat{b}^\dagger_\mu, \hat{b}_\nu\ , \mu,\nu = \overline{1,K}\}$ cu relaţiile de comutare

$$[\hat{b}_\mu, \hat{b}_\nu] = [\hat{b}^\dagger_\mu, \hat{b}^\dagger_\nu] = 0 \quad , \quad [\hat{b}_\mu, \hat{b}^\dagger_\nu] = \delta_{\mu\nu} \tag{65}$$

şi o stare de vacuum $|0\rangle$ normată ($\langle 0|0\rangle = 1$) pentru care $\hat{b}_\mu|0\rangle = 0$, $\mu = \overline{1,K}$. În raport cu aceasta spaţiul stărilor $\Psi^S_{[N]}$ poate fi realizat sub forma

$$|N_1N_2...N_K\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_1!N_2!...N_k!}}(\hat{b}^\dagger_{\mu_1})^{N_1}(\hat{b}^\dagger_{\mu_2})^{N_2}...(\hat{b}^\dagger_{\mu_K})^{N_K}|0\rangle \quad .$$

Similar, folosind un set de operatori "fermionici" $\{\hat{c}_\mu, \hat{c}^\dagger_\nu\ , \mu,\nu = \overline{1,K}\}$ cu relaţiile de anticomutare

$$\{\hat{c}_\mu, \hat{c}_\nu\}_A = \{\hat{c}^\dagger_\mu, \hat{c}^\dagger_\nu\}_A = 0 \quad , \quad \{\hat{c}_\mu, \hat{c}^\dagger_\nu\}_A = \delta_{\mu\nu} \quad , \tag{66}$$

$\{\hat{a}, \hat{b}\}_A \equiv \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a}$, şi starea $|0\rangle$ pentru care $\hat{c}_\mu|0\rangle = 0$, $\mu = \overline{1,K}$, stările $\Psi^A_{[N]}$ pot fi realizate sub forma

$$|N_1N_2...N_K\rangle = (\hat{c}^\dagger_{\mu_1})^{N_1}(\hat{c}^\dagger_{\mu_2})^{N_2}...(\hat{c}^\dagger_{\mu_K})^{N_K}|0\rangle \quad . \tag{67}$$

Generatorii $\hat{e}_{\mu\nu}$ ai algebrei $\mathfrak{gl}(K,\mathbb{C})$ sunt reprezentaţi de $\hat{e}_{\mu\nu} = \hat{b}^\dagger_\mu\hat{b}_\nu$ în cazul S, respectiv $\hat{e}_{\mu\nu} = \hat{c}^\dagger_\mu\hat{c}_\nu$ în cazul A, iar folosind dezvoltarea (64) se poate obţine şi operatorul asociat hamiltonianului, sau generatorilor algebrelor Lie de simetrie (Anexa 4). În plus, se pot defini operatorii "de undă" locali, bosonici

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{q}) = \sum_\mu \psi_\mu(\mathbf{q})\hat{b}^\dagger_\mu \quad , \quad \hat{\psi}(\mathbf{q}) = \sum_\mu \psi^*_\mu(\mathbf{q})\hat{b}_\mu$$

respectiv "fermionici"

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{q}) = \sum_\mu \psi_\mu(\mathbf{q})\hat{c}^\dagger_\mu \quad , \quad \hat{\psi}(\mathbf{q}) = \sum_\mu \psi^*_\mu(\mathbf{q})\hat{c}_\mu \quad .$$

În cazul relativist aceştia au forma

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{q}) = \sum_\mu \psi_{\mu+}(\mathbf{q})\hat{u}^\dagger_\mu + \psi^*_{\mu-}(\mathbf{q})\hat{v}_\mu$$

unde $\psi_{\mu\pm}$ sunt soluţii staţionare ale ecuaţiilor prezentate în Sect. 2.2.3 cu energii pozitive şi negative,

$$E_{\pm} = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m_0^2c^4} \quad , \tag{68}$$

iar $\hat{u}^{\dagger}/\hat{u}$, $\hat{v}^{\dagger}/\hat{v}$ sunt operatori de generare/anihilare bosonici sau fermionici, în funcţie de spin, ce corespund particulelor (u), respectiv antiparticulelor (v). În cazul fotonilor funcţiile $\psi_{\mu\pm}$ corespund undelor "retardate" şi "avansate", particulele şi antiparticulele coincid, iar câmpul este real.

Este important de remarcat faptul că doi fermioni pot forma un quasi-boson generat de operatorul

$$\hat{P}^{\dagger} = \sum_{\mu>\nu} \Phi_{\mu\nu}\hat{c}^{\dagger}_{\mu}\hat{c}^{\dagger}_{\nu} \quad , \quad \Phi_{\mu\nu} = -\Phi_{\nu\mu} \quad , \tag{69}$$

iar la un sistem ce conţine un număr N par de fermioni, pot apare tranziţii de la stări $\Psi^{A}_{[N]}$ descrise prin determinanţi (61) cu N funcţii uniparticulă distincte ψ_{μ}, la stări "condensate" $|C_N\rangle$,

$$|C_N\rangle \sim (\hat{P}^{\dagger})^{N/2}|0\rangle \quad ,$$

descrise printr-o singură funcţie biparticulă $\Phi(q_1, q_2) = \sum_{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu}\psi_{\mu}(q_1)\psi_{\nu}(q_2)$. Deasemenea, în raport cu un set fixat de indici $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)$ se pot defini noi operatori fermionici $\hat{q}^{\dagger}_{\mu}, \hat{q}_{\nu}$, de "quasiparticule"

$$\hat{q}^{\dagger}_{\mu} = \hat{c}_{\mu} \quad , \quad \hat{q}_{\mu} = \hat{c}^{\dagger}_{\mu} \quad \text{daca} \quad \mu \in (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)$$

$$\hat{q}^{\dagger}_{\mu} = \hat{c}^{\dagger}_{\mu} \quad , \quad \hat{q}_{\mu} = \hat{c}_{\mu} \quad \text{daca} \quad \mu \notin (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)$$

astfel încât o stare de referinţă

$$|\tilde{0}_N\rangle = \hat{c}^{\dagger}_{\mu_1}\hat{c}^{\dagger}_{\mu_2}...\hat{c}^{\dagger}_{\mu_N}|0\rangle$$

de tip (67) cu N fermioni apare ca "vacuum de quasiparticule" deoarece $\hat{q}_{\mu}|\tilde{0}_N\rangle = 0$, $\forall\mu$. În aplicaţii un astfel de vacuum este starea fundamentală (de energie minimă) a sistemului,

$$\hat{H}|\tilde{0}_N\rangle = E_0|\tilde{0}_N\rangle \quad . \tag{70}$$

Pentru descrierea unui sistem cuantic de fermioni care interacţionează prin forţe biparticulă se foloseşte un operator hamiltonian de forma

$$H = \sum_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} c^{\dagger}_{\mu} c_{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\rho\zeta} V_{\mu\nu\rho\zeta} c^{\dagger}_{\mu} c^{\dagger}_{\nu} c_{\zeta} c_{\rho} \tag{71}$$

unde μ, ν, ρ, ζ indexează un set complet de stări ortonormate $\{\psi_\mu\}$ în spaţiul Hilbert uniparticulă, iar $\epsilon_{\mu\nu}$, $V_{\mu\nu\rho\zeta}$ sunt elemente de matrice corespunzatoare termenului uniparticulă, respectiv de interacţiune din hamiltonian. De exemplu, la un sistem format din N particule având hamiltonianul clasic

$$H_{cl} = \sum_{a=1}^{N} H_0(x_a, p_a) + \sum_{a>b} V(x_a, x_b)$$

ψ_μ se pot alege ca funcţii proprii ale termenului uniparticulă, $\hat{H}_0\psi_\mu = E_\mu\psi_\mu$, astfel încât $\epsilon_{\mu\nu} = E_\mu\delta_{\mu\nu}$ iar

$$V_{\mu\nu\rho\zeta} = \int\int d^3q_1 d^3q_2 \psi^*_\mu(q_1)\psi^*_\nu(q_2)V(q_1, q_2)\psi_\rho(q_1)\psi_\zeta(q_2) \quad .$$

În modelele algebrice cu simetrie dinamică un interes deosebit este prezentat de interacţiunile biparticulă separabile, fie în factori $\sim c^\dagger c$ ("particulă-gol"), când

$$H = \sum_{ij} \epsilon_{ij} c_i^\dagger c_j - \frac{\chi}{2} \sum_\mu Q_\mu^\dagger Q_\mu \quad , \quad Q_\mu^\dagger = \sum_{ij} q_{ij}^\mu c_i^\dagger c_j \tag{72}$$

fie în factori $\sim c^\dagger c^\dagger$ ("particulă-particulă"), de forma

$$H = \sum_{ij} \epsilon_{ij} c_i^\dagger c_j - \frac{G}{2} \sum_\mu P_\mu^\dagger P_\mu \quad , \quad P_\mu^\dagger = \sum_{ij} \Phi_{ij}^\mu c_i^\dagger c_j^\dagger \quad . \tag{73}$$

3 Echilibrul termic şi ecuaţia Fokker-Planck

Principiul II al termodinamicii afirmă că la un ansamblu izolat entropia (8) creşte în timp până când se atinge starea de echilibru în care are valoarea maximă. Pentru un ansamblu macroscopic Γ aflat la echilibru termodinamic se presupune că densitatea $\bar{\rho}_e$ nu depinde decât de integralele prime aditive, iar $\ln \bar{\rho}_e$ este o funcţie liniară de acestea. Dacă ansamblul Γ este localizat, fără simetrie de rotaţie, singura integrală primă este energia, iar $\ln \bar{\rho}_e = -\alpha - \beta\tilde{H}$, unde α şi β sunt constante. Folosind condiţia de normare (6) rezultă

$$\bar{\rho}_e = \frac{e^{-\beta\tilde{H}}}{Z_\Gamma} \quad , \quad Z_\Gamma = \int_{M_\Gamma} \frac{\Omega_\Gamma}{\mathrm{h}^{\mathrm{N}\nu}} e^{-\beta\tilde{H}} \quad , \tag{74}$$

şi entropia

$$S_e = k_B(\ln Z_\Gamma + \beta U) \quad , \tag{75}$$

unde $Z_\Gamma = e^\alpha$ este funcţia de partiţie, iar $U =< \tilde{H} >$ este energia internă.

În reprezentarea numerelor de ocupare starea macroscopică a sistemului de N

particule este specificată de o partiţie $[N] \equiv [N_1, N_2, ..., N_K]$ pe celulele b_j introduse prin (2). Ponderea statistică (probabilitatea termodinamică) $W_{[N]}$ reprezintă numărul de stări microscopice distincte corespunzatoare unei stări macroscopice (partiţii) $[N]$ date, iar entropia se exprimă ca $S = k_B \ln W$ [18].

Presupunând că stări microscopice distincte se obţin numai la permutarea particulelor între celule diferite, iar celulele sunt identice (în (5) $\gamma_j = 1$), $W_{[N]}$ se calculează împărţind numărul total de permutări $N!$ la numărul permutărilor care nu modifică microstarea, $N_1!N_2!...N_K!$, obţinând ponderea Boltzmann

$$W^B_{[N]} = \frac{N!}{N_1!N_2!...N_K!} \quad . \tag{76}$$

Pentru numere N_j mari, formula Stirling $\ln N! \approx N(\ln N - 1)$ conduce la

$$\ln W^B_{[N]} \approx N(\ln N - 1) - \sum_j N_j(\ln N_j - 1) = -\sum_j N_j \ln \frac{N_j}{N}$$
$$= -\sum_j \delta\Omega^j_\mu \mathsf{f}_j \ln(\rho_\mu \delta\Omega^j_\mu) \quad ,$$

astfel încât în limita continuă

$$S = k_B \ln W^B_{[N]} = -k_B N \int_{M_\mu} \frac{\Omega_\mu}{\mathrm{h}^\nu} \, \bar{\rho}_\mu \ln \bar{\rho}_\mu \quad . \tag{77}$$

Condiţia de maxim pentru entropie la o valoare dată a energiei interne U şi a numărului de particule, exprimată de ecuaţiile

$$\delta_{[N]} S = 0 \quad , \quad U = \sum_i N_i E_i = \text{const.} \quad , \quad \sum_i N_i = N \quad , \tag{78}$$

($\delta_{[N]} S$ reprezintă variaţia lui S la variaţii δN_i ale numerelor de ocupare, iar $E_j \equiv H|_{b_j}$), conduce la numerele medii de ocupare $< N_j >$,

$$\frac{< N_j >}{N} = \frac{e^{-\beta E_j}}{Z_\mu} \quad , \quad Z_\mu = \int_{M_\mu} \frac{\Omega_\mu}{\mathrm{h}^\nu} \, e^{-\beta H} \quad , \tag{79}$$

în acord cu densitatea corespunzatoare echilibrului termodinamic

$$\mathsf{f}_e = \frac{N}{\mathrm{h}^\nu} \frac{e^{-\beta H}}{Z_\mu} \quad , \tag{80}$$

ce rezultă din (10). La echilibru, între funcţiile de partiţie Z_Γ (74) pe M_Γ şi Z_μ pe M_μ există relaţia $Z_\Gamma = (Z_\mu)^N$, deoarece

$$Z_\Gamma = \int_{M_\Gamma} \frac{\Omega_\Gamma}{\mathrm{h}^{\mathrm{N}\nu}} e^{-\beta \tilde{H}} = \sum_{i_1 i_2 ... i_N = 1}^{K} \Pi_{\mu=1}^N \frac{\delta\Omega^{i_\mu}_\mu}{\mathrm{h}^\nu} e^{-\beta E_{i_\mu}} =$$

$$= \sum_{[N]} W_{[N]} \Pi_{j=1}^{K} [\frac{\delta\Omega_\mu^j}{\mathrm{h}^\nu} e^{-\beta E_j}]^{N_j} = [\sum_{j=1}^{K} \frac{\delta\Omega_\mu^j}{\mathrm{h}^\nu} e^{-\beta E_j}]^N = Z_\mu^N \ .$$

Astfel expresiile (75) şi (77) pentru entropie coincid.

Densitatea de echilibru f_e (80) este deasemenea soluţie staţionară a ecuaţiei de transport Fokker-Planck [20]

$$\partial_t \mathsf{f} + \frac{1}{m}\mathbf{p} \cdot \nabla \mathsf{f} - \nabla V \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \mathsf{f} = \gamma \nabla_p \cdot (\frac{\mathbf{p}}{m} + \frac{\nabla_p}{\beta})\mathsf{f} \quad , \tag{81}$$

spre care evoluează o distribuţie iniţală coerentă (21). Această ecuaţie, spre deosebire de (14) nu este invariantă la inversia temporală, şi poate fi obţinută presupunând că în (15) efectul ciocnirilor poate fi simulat introducând o forţă aleatoare gausiană $\mathbf{F}(t)$ dependentă de temperatură ($\beta = 1/k_B T$), şi o forţă de frecare proporţională cu viteza ($\mathbf{F}_f = -\gamma \mathbf{v}$), legate prin teorema fluctuaţie-disipare

$$<< F_i(t) F_j(t') >>= 2\gamma k_B T \delta_{ij} \delta(t - t') \ .$$

Starea macroscopică a unui sistem cuantic este specificată de partiţii $[N] = (N_1, N_2, ..., N_L)$ ale celor N particule pe L nivele energetice uniparticulă $\{E_\kappa, \kappa = 1, 2, ...L\}$, fiecare având degenerarea γ_κ, deci în total pe $K = \sum_\kappa \gamma_\kappa$ stări cuantice. În cazul bosonilor N_κ poate fi oricât de mare, iar ponderea statistică se obţine folosind expresia Bose-Einstein [31]

$$W_{[N]}^{BE} = \Pi_{\kappa=1}^{L} \frac{(N_\kappa + \gamma_\kappa - 1)!}{N_\kappa!(\gamma_\kappa - 1)!} \ .$$

La sistemele de fermioni restricţia $N_\kappa \leq 1$ conduce la ponderea Fermi-Dirac

$$W_{[N]}^{FD} = \Pi_{\kappa=1}^{L} \frac{\gamma_\kappa!}{N_\kappa!(\gamma_\kappa - N_\kappa)!} \ .$$

În aceste cazuri condiţia de echilibru exprimată de sistemul (78) determină valorile medii

$$< N_\kappa >^{BE} = \frac{\gamma_\kappa - 1}{e^{\beta E_\kappa + \alpha} - 1} \quad , \quad < N_\kappa >^{FD} = \frac{\gamma_\kappa}{e^{\beta E_\kappa + \alpha} + 1} \quad , \kappa = 1, ...L. \tag{82}$$

Este important să observăm că deşi numerele de ocupare se referă la celule b_j în cazul clasic, sau nivele energetice E_κ în cazul cuantic, mărimile statistice depind esenţial de numărul gradelor de libertate microscopice, care nu se modifică la trecerea de la descrierea clasică la cea cuantică. Funcţiile proprii ale hamiltonianului sunt normate şi au o dependenţă de timp periodică, similară oscilatorului armonic, dar aceşti "oscilatori" realizează numai o anumită partiţie a varietăţii

2ν-dimensionale M_μ în celule elementare, şi nu reprezintă noi grade de libertate. Astfel, pentru un gaz ideal de particule cu energia ϵ_k şi impulsul $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, descrise prin unde plane $|\psi_\mathbf{k}\rangle$ de forma (47), $\int d^3k|\psi_\mathbf{k}\rangle\langle\psi_\mathbf{k}| = \hat{I}$, iar operatorul densitate efectiv $\hat{\mathsf{f}}_{1p} = \sum_\mu < N_\mu > |\psi_\mu\rangle\langle\psi_\mu|$ determină densitatea de particule $\mathsf{n} = \langle\mathbf{q}|\hat{\mathsf{f}}_{1p}|\mathbf{q}\rangle$ şi de energie internă $u = \langle\mathbf{q}|\hat{\mathsf{f}}_{1p}\hat{H}|\mathbf{q}\rangle$ sub forma

$$\mathsf{n} = \gamma_s \int d^3k|\psi_\mathbf{k}|^2 \frac{1}{e^{\beta\epsilon_k+\alpha} \pm 1} \quad , \quad u = \gamma_s \int d^3k|\psi_\mathbf{k}|^2 \frac{\epsilon_k}{e^{\beta\epsilon_k+\alpha} \pm 1}$$

unde $|\psi_\mathbf{k}|^2 = 1/8\pi^3$ iar γ_s este degenerarea de spin. Cu schimbarea de variabilă $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, rezultatul corespunde unor funcţii de distribuţie pe spaţiul fazic $T^*\mathbb{R}^3$ de forma[16] $\mathsf{f}_\pm = \gamma_s/\mathrm{h}^3(\mathrm{e}^{\beta\mathrm{H}+\alpha} \pm 1)$, care în limita clasică $\alpha \to \infty$, $\gamma_s = 1$ tind la expresia (80).

În cazul fotonilor $\epsilon_k = c\hbar k = \mathrm{h}\nu$, $\alpha = 0$, iar $\gamma_s = 2$ (deşi $s = 1$ există numai două direcţii de polarizare independente), astfel încât

$$u = \frac{1}{4\pi^3}\int d^3k \frac{\epsilon_k}{e^{\beta\epsilon_k} - 1} = \frac{\hbar c}{\pi^2}\int_0^\infty dk \frac{k^3}{e^{\beta c\hbar k} - 1} \quad .$$

Prin schimbarea de variabilă $\nu = kc/2\pi$ de aici rezultă densitatea spectrală a radiaţiei termice $u_\nu = (8\pi\mathrm{h}\nu^3/\mathrm{c}^3)/(\exp\beta\mathrm{h}\nu - 1)$ dată de legea lui Planck, regăsită cu precizie în spectrul de microunde al radiaţiei cosmice de fond [32].

4 Distribuţii pentru sisteme cu simetrie

La un sistem clasic cu N particule densitatea de probabilitate pe spaţiul fazelor M este o funcţie $\mathsf{f}(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \geq 0$, care depinde de N seturi de variabile uniparticulă pozitie-impuls $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i,\ i = 1, N$, şi de timp.

Dacă $P_N = \{\Pi \equiv \{i_1, i_2, ..., i_N\}\}$ este grupul discret al permutărilor de N obiecte, iar particulele sunt identice, atunci hamiltonianul H este invariant la acţiunea lui P_N asupra indicilor de particulă $H((\tilde{q}, \tilde{p}) = H(\Pi(\tilde{q}, \tilde{p})$. Astfel, dacă f este o soluţie a ecuaţiei Liouville, şi $\Pi^*\mathsf{f}$ va fi o soluţie.

În cazul unui grup Lie de simetrie $G = \{g\}$ cu algebra $\mathfrak{g} = \{\xi\}$ şi aplicaţia moment $\hat{J}$ relaţia (7) determină legea de conservare

$$\frac{d < \hat{J}(\xi) >}{dt} =< \{\hat{J}(\xi), H\} >= 0 \quad , \quad \forall\, \xi \in \mathfrak{g} \quad . \tag{83}$$

Deasemenea, dacă $\hat{D}_L$ este operatorul diferenţial Liouville $\hat{D}_L = \partial_t - \{H, *\}$, iar X_ξ este câmpul generat de $\hat{J}(\xi)$, atunci $[X_H, X_\xi] = 0$ şi

$$\hat{D}_L\mathsf{f} = 0 \Longrightarrow \hat{D}_L X_\xi \mathsf{f} = 0 \quad .$$

[16] Acestea se pot obţine şi ca soluţii staţionare ale ecuaţiei (81) dacă se introduce o forţă "de frecare" suplimentară $\mathbf{F}'_f = \pm\gamma\mathbf{v}\mathsf{f}$.

Rezultă că spaţiul soluţiilor ecuaţiei Liouville $\mathcal{S}_L = \{\mathsf{f} \ ; \ \hat{D}_L\mathsf{f} = 0\}$ este invariant atât la transformările discrete $\mathsf{f} \mapsto \Pi^*\mathsf{f}$, cât şi la acţiunea operatorilor diferenţiali X_ξ, fiind spaţiu de reprezentare al grupului P_N şi algebrei Lie $\mathfrak{g}$. Reprezentările ireductibile ale grupului P_N se pot clasifica folosind diagramele Young [28], astfel încât există o reprezentare simetrică, una antisimetrică, şi diferire reprezentări cu simetrie mixtă. Pentru algebrele Lie, ca $\mathfrak{so}(3)$ se definesc două reprezentări, în spaţiul coodonatelor şi în spaţiul impulsurilor, iar subspaţiile ireductibile la produsul lor direct intervin în clasificarea modurilor nomale [33].

În starea de echilibru termodinamic funcţia de distribuţie f_e are simetria lui H,

$$\mathsf{f}_e = \Pi^*\mathsf{f}_e \quad , \quad \{\mathsf{f}_e, H\} = 0 \quad ,$$

deoarece $\mathsf{f}_e \sim \exp(-\beta H)$. Totuşi, la temperaturi joase ($\beta \to \infty$) interacţiunile dintre particule pot produce o "rupere spontană de simetrie", manifestată prin apariţia unui "câmp mediu" nenul şi o funcţie de distribuţie f_e cu simetrie mai scăzută. Această situaţie apare de exemplu la substanţele feromagnetice, deoarece hamiltonianul de interacţiune dintre momentele magnetice este invariant la acţiunea grupului rotaţiilor $SO(3,\mathbb{R})$, dar la scăderea temperaturii sub o anumită valoare critică sistemul prezintă o magnetizare spontană orientată pe o anumită direcţie din spaţiu. Similar, ruperea simetriei la translaţii se poate manifesta prin apariţia de picături de lichid localizate în volumul ocupat omogen de vapori, la condensare, sau prin apariţia de bule de vapori localizate în volumul ocupat omogen de lichid, la fierbere.

Pentru o particulă cuantică, soluţia ecuaţiei $\hat{D}_L f_\psi = 0$ pe $M = T^*Q$ este transformata Wigner a funcţiei de undă complexe $\psi \in \mathcal{L}^2(Q)$ obţinute prin rezolvarea ecuaţiei Schrödinger

$$\hat{D}_S\psi = 0 \quad , \quad \hat{D}_S = i\hbar\partial_t - \hat{H} \quad ,$$

unde $\hat{H}$ este operatorul hamiltonian.

Dacă $\Phi_a^*\omega = \omega$ este o acţiune simplectică a grupului Lie G pe M, potrivit (36) există operatorii $\hat{U}_a : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ care definesc o reprezentare proiectivă a lui G în $\mathcal{H}$. Transformările infinitezimale $g = \exp\xi$, $\xi \in \mathfrak{g}$ determină operatorii unitari $\hat{U}_g = \hat{I} + i\hat{\xi}$, astfel încât $\{i\hat{\xi} \ ; \hat{\xi} = \hat{\xi}^\dagger, \ \xi \in \mathfrak{g}\}$ formează o reprezentare a algebrei $\mathfrak{g}$ în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$ al funcţiilor de undă cuantice ψ. De regulă, dacă G este un grup de simetrie al hamiltonianului clasic cu aplicaţia moment $\hat{J}$, atunci la o cuantificare consistentă $\{H, \hat{J}(\xi)\} = 0$ implică $[\hat{H}, \hat{\xi}] = 0$.

Independent de proprietăţile sistemului clasic, algebra Lie de simetrie dinamică a ecuaţiei Schrödinger este generată de setul operatorilor hermitici $\hat{X}$ pentru care

$$\hat{D}_S\psi = 0 \Longrightarrow \hat{D}_S\hat{X}\psi = 0 \quad ,$$

şi include algebra de simetrie a operatorului hamiltonian,

$$\mathfrak{g}_H = \{\hat{X} \ ; \ [\hat{X}, \hat{H}] = 0\} \quad .$$

Aceasta are o importanţă deosebită pentru clasificarea soluţiilor ecuaţiei staţionare (44), şi implicit pentru calculul factorilor γ_κ din (82). Astfel, dacă $\hat{X} \in \mathfrak{g}_H$, şi $(\hat{H} - E)\psi_E = 0$, atunci $(\hat{H} - E)\hat{X}\psi_E = 0$, iar ψ_E şi $\hat{X}\psi_E$ sunt stări proprii degenerate ce aparţin unui subspaţiu $\mathcal{H}_E = \{\psi_E^k \ / \ \hat{H}\psi_E^k = E\psi_E^k, k = 1, 2, ..., \gamma_E\}$ de reprezentare proiectivă a grupului Lie de simetrie G_H al hamiltonianului. Reprezentările finit dimensionale pentru grupul rotaţiilor şi grupul Lorentz sunt discutate pe larg în [34, 35]. Pentru grupul de simetrie maximal reprezentarea în $\mathcal{H}_E$, în general ireductibilă, are dimensiunea γ_E minimală.

Degenerarea stărilor proprii ψ_E poate apare şi ca rezultat al simetriilor discrete ale hamiltonianului, cum ar fi invarianţa la inversia spaţială sau temporală. Dacă notăm prin $\hat{I}_S$ operatorul de inversie spaţială, $\hat{I}_S\psi(\mathbf{q}) = \psi(-\mathbf{q})$, atunci ca bază în subspaţiul 2-dimensional generat de ψ_E şi $\hat{I}_S\psi_E$ se aleg stările proprii $\psi_{E\pi} = (\psi_E + \pi\hat{I}_S\psi_E)/\sqrt{2}$ ale operatorului $\hat{I}_S$, unde $\pi = \pm 1$ reprezintă paritatea orbială iar ψ_E este o funcţie oarecare din $\mathcal{H}_E$. Inversia temporală se realizează prin acţiunea operatorului $\hat{I}_T$, $\hat{I}_T\psi(\mathbf{q}, t) = \psi^*(\mathbf{q}, -t)$ şi permutarea stărilor iniţiale cu cele finale. Pentru funcţiile sferice $\hat{I}_S Y_{lm} = (-1)^l Y_{lm}$ şi $\hat{I}_T Y_{lm} = Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{l-m}$.

Clasificarea (indexarea) stărilor din $\mathcal{H}_E$ se realizează efectiv folosind soluţiile sistemului de ecuaţii cu valori proprii

$$\hat{X}_\alpha \psi_{E[m]} = m_\alpha \psi_{E[m]} \quad , \quad [m] \equiv (m_1, m_2, ..., m_r) \quad , \tag{84}$$

pentru elementele $\hat{X}_\alpha$ din subalgebra Lie abeliană maximală r-dimensională $\mathfrak{g}_C \subset \mathfrak{g}_H$. În cazul algebrelor $\mathfrak{g}_H$ semisimple aceasta este subalgebra Cartan, iar pentru o indexare completă a celor γ_E stări poate fi necesar ca setul operatorilor din $\mathfrak{g}_C$ să fie extins prin operatori Casimir ai unui lanţ de subalgebre din $\mathfrak{g}_H$.

De exemplu, la atomul de hidrogen nivelele energetice electronice legate obţinute folosind hamiltonianul problemei Kepler nerelativiste au valorile $E_n = -m_0c^2\alpha^2/2n^2$ cu degenerarea $\gamma_n = n^2$, unde $n = 1, 2, ..., \infty$ este un număr întreg, m_0 este masa electronului, c viteza luminii în vid, iar $\alpha = 1/137$ constanta structurii fine. Deoarece $\hat{H}$ are simetrie la rotaţii şi comută cu operatorii momentului cinetic $i\hat{L}_x, i\hat{L}_y, i\hat{L}_z$ care generează algebra $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, cele n^2 stări degenerate se indexează folosind n valori posibile pentru numărul cuantic "orbital" $l = 0, 1, 2, .., n-1$, corespunzător valorilor proprii $l(l+1)\hbar^2$ ale operatorului Casimir $\hat{\mathbf{L}}^2$, şi pentru fiecare l prin cele $2l + 1$ valori posibile $-l, -l+1, ..., l$ ale numărului cuantic "magnetic" m, corespunzătoare valorilor proprii $m\hbar$ ale generatorului subalgebrei Cartan $\hat{L}_z$. Astfel, setul complet de numere cuantice (valori proprii) care indexează stările staţionare este n, l, m. Descrierea relativistă cu ecuaţia Dirac (55) ridică parţial degenerarea valorilor proprii[17]

$$E_{nj} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{(n-\delta_j)^2}}} \quad , \quad \delta_j = j + \frac{1}{2} - \sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - \alpha^2} \quad ,$$

şi înlocuieşte setul n, l, m prin n, l, j, m, cu aceleaşi valori pentru numărul cuantic principal n, şi cel orbital l, dar potrivit (51) cu valori semi-întregi $j = |l - 1/2|, l + 1/2$, $m = -j, -j+1, ..., j$. Alternativ, pentru indexare se poate folosi în loc de l paritatea $\pi = (-1)^l$, şi $j = 1/2, 3/2, ..., n - 1/2$. Modificarea dublează numărul total de stări, şi se datorează includerii în hamiltonian a operatorilor de spin $\hat{\mathbf{s}}$ ai electronului, care împreună cu $\mathbf{L}$ formează momentul cinetic total $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{s}}$. Folosind notaţia spectroscopică nL_j, starea $1S_{1/2}$ este dublu degenerată, dar primul nivel excitat $n = 2, L = S, P$ se despică în 2 subnivele (structura "fină"), $2P_{3/2}$ şi $2P_{1/2}$ încă degenerat cu $2S_{1/2}$. În 1947 s-a observat însă că şi între aceste nivele teoretic degenerate există o mică diferenţă de energie (deplasarea Lamb), $E_{2S1/2} - E_{2P1/2} = 1057,862$ MHz, atribuită fluctuaţiilor cuantice ale câmpului electromagnetic în vid.

În multe aplicaţii se observă spectre energetice formate din grupuri (subspaţii) distincte de stări cu energii apropiate care prin dimensiune şi numere cuantice de indexare corespund elementelor unor spaţii de reprezentare ireductibilă a unui grup Lie G. Aceste situaţii se pot atribui unei "ruperi dinamice de simetrie", prin care în hamiltonianul problemei $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{pert}$, dominat de termenul G-invariant $\hat{H}_0$, apare un termen de perturbaţie $\hat{H}_{pert}$ datorat unor interacţiuni slabe[18] care au o simetrie mai redusă decât $\hat{H}_0$.

Observăm astfel că deşi sistemul dinamic clasic şi corespondentul lui cuantic au practic aceleaşi grupuri de simetrie, consecinţele sunt diferite deoarece în cazul clasic restricţiile impuse de simetrie sunt compatibile cu o varietate infinită de soluţii staţionare (posibil instabile) distincte şi condiţii iniţiale, în timp ce în cazul cuantic ele elimină practic problema alegerii condiţiilor iniţiale şi a instabilităţii, determinând funcţia de undă până la un factor de fază global neesenţial. Din consideraţii termodinamice[19] se admite că starea fundamentală cuantică (70) $|\tilde{0}_N\rangle$ este nedegenerată. De regulă aceasta este o stare cu paritate pozitivă, invariantă la acţiunea grupului G_H de simetrie al hamiltonianului, astfel încât sistemul prezintă o realizare a simetriilor continue "de tip Wigner",

$$\hat{X}|\tilde{0}_N\rangle = 0 \quad , \quad \forall \hat{X} \in \mathfrak{g}_H \quad .$$

[17]Aceeaşi formulă dar cu l în loc de j rezultă din ecuaţia Klein-Gordon (53), iar cu mici diferenţe în valorile pentru $n_r = n - n_\varphi$ şi $n_\varphi = j + 1/2$ a fost obţinută de Sommerfeld folosind condiţii de integralitate $J_\mu = n_\mu$h pentru variabilele "de acţiune" J_μ [36].

[18]De exemplu la atomul de hidrogen plasat în câmp extern electric sau magnetic.

[19]Când temperatura $T \to 0$ entropia $S_e = Nk_B \ln \gamma_0 = 0$ numai dacă $\gamma_0 = 1$.

Deasemenea, dacă există operatorul $\hat{B}^\dagger \neq \hat{B}$, $\hat{B}|\tilde{0}_N\rangle = 0$, pentru care

$$([\hat{H}, \hat{B}^\dagger] - \hbar\Omega\hat{B}^\dagger)|\tilde{0}_N\rangle = 0 \quad , \quad \Omega > 0 \tag{85}$$

atunci $|1_N\rangle \sim \hat{B}^\dagger|\tilde{0}_N\rangle$ este stare proprie (excitată) a hamiltonianului, în general degenerată, corespunzatoare unui nivel de tip "vibraţional" cu energia $E_1 = E_0 + \hbar\Omega$. În anumite cazuri se observă că modificarea parametrilor termenilor de interacţiune din hamiltonian conduce la scăderea valorii $\hbar\Omega$ şi creşterea densităţii de nivele din vecinătatea stării fundamentale până când $\Omega = 0$ şi $\hat{B}^\dagger = \hat{B} \equiv \hat{X}_B$ devine generator al unei transformări de simetrie, dar

$$\hat{X}_B|\tilde{0}_N\rangle \neq 0 \quad , \quad \langle\tilde{0}_N|\hat{X}_B|\tilde{0}_N\rangle = 0 \quad .$$

Situaţia corespunde unei ruperi "sponntane" de simetrie prin degenerarea infinită a stării fundamentale, compensată dinamic de apariţia unei realizări "de tip Goldstone" [37, 38], prin separarea în $\hat{H}$ a unui termen "intrinsec" de câmp mediu, cu o simetrie mai scăzută ("deformat") şi a unui termen cinetic $\sim \hat{X}_B^2$ de "particulă liberă", corespunzator dinamicii sale. Rezultatul este că apariţia unor grade de libertate colective elimină instabilitatea iar starea fundamentala rămâne nedegenerată. De exemplu, la un sistem finit cu hamiltonianul (72), în care $Q^\dagger$ reprezintă operatorul momentului de cuadrupol se poate produce o rupere spontană a simetriei $SO(3)$ la rotaţii prin apariţia unui câmp mediu deformat în sistemul intrinsec, având o mişcare de rotaţie colectivă. Deasemenea, (73) în care $P^\dagger$ generează o pereche (Cooper) de particule în stări inversate temporal poate descrie apariţia stărilor suprafluide, neinvariante la transformările $U(1)$ generate de operatoul numărului de particule $\hat{N} = \sum_i \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i$.

Atunci când parametrul inerţial din termenul cinetic $\sim \hat{X}_B^2$ devine infinit ruperea spontană de simetrie devine dinamică deoarece câmpul mediu nesimetric este static şi apare în hamiltonian ca un termen de tip "câmp extern clasic". În teoria cuantică relativistă aceasta corespunde "mecanismului Higgs" [39, 40] prin care media termenului de "energie cinetică" a bosonilor Higgs în starea de vacuum determină masa de repaus pentru câmpurile de etalon Z, W.

4.1 Spaţiul fazic indus prin ruperea spontană de simetrie

Exemple de rupere spontană de simetrie apar atât la sistemele infinit dimensionale studiate în teoria cuantică a câmpului [41, 42], cât şi în cazul unor sisteme cuantice nerelativiste de particule în interacţiune [43]. Astfel, asemănarea [17] dintre structura algebrică a grupului Poincaré (Sect. I.6.1.2) de transformări ale coordonatelor spaţio-temporale, şi a grupului $CM(3)$ (Sect. I.6.1.3) pentru coordonatele nucleare colective sugerează că în ambele situaţii întâlnim acelaşi fenomen fundamental, de apariţie a unor structuri clasice la nivel cuantic, dar la o scară energetică diferită.

Un câmp mediu localizat sau deformat indică ruperea simetriei la translaţii sau rotaţii în starea fundamentala a unui sistem de N particule, iar bosonii Goldstone apar ca "soluţii spurioase" cu $\Omega = 0$ ale ecuaţiei (85). Aceste soluţii sunt legate de mişcări cu amplitudine mare ale sistemului, iar descrierea lor necesită definirea de coordonate şi impulsuri canonic conjugate cel puţin la nivel local. În [44] problema a fost rezolvată considerând mişcarea colectivă drept un caz particular de dinamică cuantică la joasă energie care apare atunci când starea fundamentală cuantică nu este invariantă la acţiunea unui grup continuu G de simetrie a hamiltonianului. La sistemele de microparticule această situaţie apare adesea la stările fundamentale aproximative $|\tilde{0}_N\rangle$, obţinute din calcule variaţionale statice $\delta_\Psi\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = 0$, (Hartree-Fock sau Hartree-Fock-Bogoliubov), care sunt puncte critice de energie minimă pentru sistemul clasic obţinut în urma constrângerii dinamicii cuantice din spaţiul Hilbert $\mathcal{H}_\otimes$ la o subvarietate finit dimensională $M \subset \mathcal{H}_\otimes$ de funcţii de probă. Se presupune că această varietate rămâne invariantă la acţiunea lui G şi poartă forma simplectică ω^M definită natural prin restricţia la M a formei simplectice I.(48) din $\mathcal{H}_\otimes$,

$$\omega^{\mathcal{H}}_\Psi(X,Y) = 2Im\langle X|Y\rangle \quad , \quad X, Y \in T_\Psi\mathcal{H}_\otimes \quad .$$

Dacă $|\tilde{0}\rangle$ este o stare fundamentală care rupe simetria, atunci prin acţiunea lui G se poate genera o întreagă subvarietate critică $Q = G \cdot |\tilde{0}\rangle \subset M \subset \mathcal{H}_\otimes$, cu semnificaţie de "spaţiu al configuraţiilor" pentru modurile Goldstone.
Propoziţia 12. Dacă ω^M se anulează pe spaţiul tangent TQ (Q este o subvarietate izotropă), atunci în orice punct $q \in Q$ spaţiul tangent T_qQ are un complement coizotrop ω^M-ortogonal F_q, iar raportul $E_q = F_q/T_qQ$ este un spaţiu vectorial simplectic [1].

Potrivit acestui rezultat, atunci când algebra $\mathfrak{g}$ a lui G este semisimplă condiţia $\omega^M|_{TQ} = 0$ implică valori aşteptate nule $\langle\tilde{0}|\hat{\xi}|\tilde{0}\rangle$ pentru operatorii de reprezentare $\hat{\xi}$ ai elementelor $\xi \in \mathfrak{g}$. În particular, pentru stările $|\tilde{0}\rangle$ deformate (neinvariante la acţiunea lui $G = SO(3)$), aceasta înseamnă că media operatorilor moment cinetic este zero, iar Q apare ca realizare "microscopică" a spaţiului de configuraţii pentru gradele de libertate colective de rotaţie.
Teorema 8. Fie (M, ω^M) o subvarietate simplectică a spaţiului Hilbert $\mathcal{H}$, $|\tilde{0}\rangle \subset M$ un punct de minim al energiei $E = \langle\hat{H}\rangle|_M$ cu simetrie mai scăzută decât hamiltonianul $\hat{H}$, iar $Q = \{G \cdot |\tilde{0}\rangle\} \subset M \subset \mathcal{H}$. Fie F_q, $q \in Q$, complementul coizotrop ω^M-ortogonal al lui T_qQ în T_qM, şi P_q complementul lui F_q în T_qM, astfel încât $T_qM = P_q + F_q$. Atunci [44]*:*
i) P_q este izotrop, cu aceeasi dimensiune ca T_qQ, iar $\omega^M|_{P_q \times T_qQ}$ este nedegenerată.
ii) în orice punct $q \in Q$ există o structură de spaţiu fazic clasic, cu T_qQ subspaţiul coodonatelor colective şi P_q subspaţiul impulsurilor canonic conjugate acestora. Variabilele "intrinseci" rămase sunt reprezentate în $E_q = F_q/T_qQ$.

III. Aplicaţii

1 Grupul de echivalenţă inerţială

Echivalenţa sistemelor de referinţă aflate în mişcare relativă uniformă de translaţie, exprimată de principiul inerţiei, poate fi descrisă considerând acţiunea pe spaţiul fazic extins $M = T^*R^4$ a grupului Galilei sau Poincaré.

Trecerea la un sistem de coordonate în mişcare de translaţie uniformă generată de funcţia $\delta\zeta_V$ I.(40) este un caz special al transformarii Galilei $\Phi^Q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ ce acţionează atât asupra coordonatelor din spaţiul configuraţiilor $Q = \mathbb{R}^3$, cât şi a timpului.

Fie $G = H \times V$ grupul Galilei, exprimat ca produs semidirect între $H = SO(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ şi $V = \mathbb{R}^6$. Astfel, un element $g \in G$,

$$g = \begin{bmatrix} \hat{\mathsf{R}} & \mathbf{V} & \mathbf{D} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{1}$$

este specificat de $\hat{\mathsf{R}} \in SO(3, \mathbb{R})$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3$ şi $T \in \mathbb{R}$. Acest element acţionează asupra unui punct $(\mathbf{q}, t)$ al varietăţii spaţiu-timp $Q^e = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ prin

$$\Phi_g^Q(\mathbf{q}, t) = (\hat{R}\mathbf{q} + \mathbf{D} + \mathbf{V}t, t + T) \quad . \tag{2}$$

Algebra $\mathfrak{g}$ a lui G are forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p} \simeq \mathfrak{so}(3) + \mathbb{R}^7$, unde $\mathfrak{k} = \{\hat{\xi} \in \mathfrak{so}(3)\}$, $\mathfrak{p} = \{(\mathbf{d}, \mathbf{v}, \tau) \in \mathbb{R}^7\}$, $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, iar $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ potrivit relaţiei

$$[\hat{\xi}, (\mathbf{d}, \mathbf{v}, \tau)] = (\hat{\xi}\mathbf{d}, \hat{\xi}\mathbf{v}, 0) \quad ,$$

şi $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ deoarece $[(\mathbf{d}, \mathbf{v}, \tau), (\mathbf{d}', \mathbf{v}', \tau')] = (\tau'\mathbf{v} - \tau\mathbf{v}', 0, 0)$.

Să considerăm o particulă cu masa m, descrisă pe spaţiul fazelor prin coordonatele carteziene $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, şi transformarea Galilei infinitezimală $\delta\Phi_\gamma^Q : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ este definită prin $[\mathbf{q}', t'] = [\mathbf{q}, t] + \gamma(\hat{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{v}, \tau)[\mathbf{q}, t]$, unde

$$\gamma(\hat{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{v}, \tau)[\mathbf{q}, t] = [\hat{\xi}\mathbf{q} - \mathbf{d} - t\mathbf{v}, -\tau] \quad , \tag{3}$$

cu elementul $\gamma \in \mathfrak{g}$ specificat de $\hat{\xi} \in \mathfrak{so}(3)$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ şi $\tau \in \mathbb{R}$. Componentele $\hat{\xi}$, $\mathbf{d}$ şi $\mathbf{v}$ generează rotaţii statice, translaţii statice şi translaţii uniforme, respectiv, ale sistemului de coordonate spaţiale, în timp ce τ descrie translaţii de-a lungul axei timpului.

Acţiunea $\delta\Phi_\gamma^Q$ a grupului Galilei se poate ridica la o acţiune $\delta\Phi_\gamma^M$ pe spaţiul fazelor $M = T^*\mathbb{R}^3$, presupunând că la transformările specificate de (3), impulsul se modifică potrivit relaţiei

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \hat{\xi}\mathbf{p} - m\mathbf{v} \quad . \tag{4}$$

Propoziţia 13. Dacă G este grupul Galilei, atunci spaţiul $H^2(\mathfrak{g})$ este 1-dimensional, şi până la o cofrontieră cociclul $\mathcal{Q} \in Z^2(\mathfrak{g})$ este dat de

$$\mathcal{Q}((\hat{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{v}, \tau), (\hat{\xi}', \mathbf{d}', \mathbf{v}', \tau')) = m(\mathbf{d} \cdot \mathbf{v}' - \mathbf{d}' \cdot \mathbf{v}) \quad . \tag{5}$$

Dem.: Dacă $M = T^*\mathbb{R}^3$ şi $\omega = \sum_{\mu=1}^{3} dq_\mu \wedge dp_\mu$, atunci $\Phi^*\omega = \omega$, iar acţiunea Φ^M a grupului Galilei este simplectică. Prin acţiunea Φ^M fiecare element $\gamma \in \mathfrak{g}$ generează un câmp $X_\gamma \in TM$. Câmpul X_v generat de translaţiile uniforme $\gamma_v \equiv \gamma(0, 0, \mathbf{v}, 0) \in \mathfrak{g}$ este

$$X_v = -\mathbf{v} \cdot (t\vec{\nabla}_q + m\vec{\nabla}_p) \quad . \tag{6}$$

Acest câmp este Hamiltonian, şi satisface ecuaţia $i_{X_v}\omega = dJ_v$ cu $J_v = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{q} - t\mathbf{p})$. Câmpul X_d, corespunzător translaţiilor statice $\gamma_d \equiv \gamma(0, \mathbf{d}, 0, 0) \in \mathfrak{g}$ este generat de $J_d = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{p}$ şi are expresia $X_d = -\mathbf{d} \cdot \vec{\nabla}_q$, Similar, un hamiltonian J_γ există pentru fiecare câmp X_γ, $\gamma \in \mathfrak{g}$, iar potrivit I.(45), acţiunea Φ^M induce un anti-homomorfism $d\Phi^M : g \to \mathfrak{h}am(M)$, între algebra Lie $\mathfrak{g}$ a grupului Galilei şi algebra Lie $\mathfrak{h}am(M)$ a câmpurilor vectoriale hamiltoniene pe M.

Acţiunea Φ^M este hamiltonian echivariantă dacă anti-homomorfismul $d\Phi^M$ poate fi ridicat la un homomofism $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathcal{F}(M)$, astfel încât diagrama (46) comută. Această proprietate poate fi exprimată în formă compactă prin ecuaţia $[\mathcal{Q}] = 0$, unde $[\mathcal{Q}] \in H^2(\mathfrak{g}, R)$ este clasa de coomologie a 2-cociclului I.(47) definit de $\mathcal{Q}(\gamma; \gamma') = \{J_\gamma, J_{\gamma'}\} - J_{[\gamma,\gamma']}$, $\gamma, \gamma' \in \mathfrak{g}$ ([8] p. 171).

În cazul ridicării Φ^M, comutatorul $[\gamma_v, \gamma_d]$ este 0, dar paranteza Poisson între J_v şi J_d este

$$\{J_v, J_d\} = -\mathrm{L}_{X_v} J_d = -m\mathbf{v} \cdot \mathbf{d} \quad . \tag{7}$$

Astfel, deşi transformările Galilei infinitezimale $\gamma(0, \mathbf{d}, \mathbf{v}, 0)$ şi $\gamma'(0, \mathbf{d}', \mathbf{v}', 0)$ comută, paranteza Poisson a funcţiilor generatoare corespunzatoare

$$\{J_\gamma, J_{\gamma'}\} = m(\mathbf{d} \cdot \mathbf{v}' - \mathbf{d}' \cdot \mathbf{v}) \tag{8}$$

în general nu este zero. Aceasta defineşte 2-cociclul $\mathcal{Q}(\gamma; \gamma') = \{J_\gamma, J_{\gamma'}\}$, parametrizat de masa m ([45], [8]-p. 434). Astfel, clasa de coomologie $[\mathcal{Q}]$ a lui $\mathcal{Q}$ în $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ este zero, şi acţiunea Φ^M a grupului de echivalenţă inerţială este hamiltonian echivariantă, numai dacă $m = 0$ $\square$.

Atunci când $m \neq 0$, absenţa echivarianţei şi obstrucţia în a găsi λ se datorează necomutării coordonatelor şi impulsurilor în raport cu paranteza Poisson.

Diagrama comută dacă λ aplică generatorii translaţiilor în spaţiul fazic pe coordonatele canonice. Dar această aplicaţie nu este homomorfism, deoarece algebra Lie a grupului translaţiilor este abeliană, în timp ce coordonatele canonice q_μ, p_ν, în raport cu paranteza Poisson, generează algebra Heisenberg, $\{q_\mu, q_\nu\} = 0$, $\{p_\mu, p_\nu\} = 0$, $\{q_\mu, p_\nu\} = \delta_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2, 3$.

La translaţiile uniforme parametrii depind explicit de timp, astfel încât acţiunea $\delta\Phi^Q$ se poate ridica direct la o acţiune globală $\delta\Phi^{M^e}$ pe spaţiul fazic extins M^e prezentat în Sect. I.1.4. Dacă reprezentăm coordonatele pe M^e prin vectori coloană,

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_0 \end{bmatrix} \ , \ \tilde{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ p_0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

atunci transformarea infinitezimală $\delta\Phi^{M^e}$ definită de (3) şi (4) capătă forma transformării canonice I.(37),

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}' \\ \tilde{p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tilde{Y} \\ -\tilde{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\hat{a}^T & \hat{c} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} \ , \tag{10}$$

unde

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} m\mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ \tilde{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \tau \end{bmatrix} \ , \ \hat{a} = \begin{bmatrix} \xi & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}/c & 0 \end{bmatrix} \ , \tag{11}$$

iar $\hat{b} = \hat{c}$ sunt matrici nule 4×4.

Elementul $\mathbf{v}/c$ al matricii $\hat{a}$ este determinat numai de (3), dar potrivit Ec. (10), prezenţa sa implică transformarea lui $p_0 = -E/c$ ca

$$p_0' = p_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}/c \ . \tag{12}$$

Această transformare este consistentă cu I.(41), şi conduce la ecuaţiile de mişcare corecte în noul referential. Astfel, acţiunea Φ^{M^e} obţinută prin ridicarea acţiunii Φ^Q este simplectică.

Câmpul $X_v^e = d\Phi^{M^e}(\gamma_v)$ are expresia

$$X_v^e = -q_0 \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \vec{\nabla}_q - m\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_p + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}}{c} \frac{\partial}{\partial p_0} \ , \tag{13}$$

iar $i_{X_v^e}\omega_0^e = dJ_v^e$, cu $J_v^e = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{q} - q_0\mathbf{p}/c)$. Câmpul X_d^e determinat de γ_d are funcţia generaoare $J_d^e = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{p}$, şi similar Ec. (7),

$$\{J_v^e, J_d^e\}^e = -m\mathbf{v} \cdot \mathbf{d} \ . \tag{14}$$

Astfel, acţiunea grupului Galilei pe spaţiul fazic extins Φ^{M^e} defineşte acelaşi element $[\mathcal{Q}]$ din $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ ca şi Φ^M, şi nu este Hamiltonian echivariantă.

Necomutarea coordonatelor spaţiale afectează echivarianţa deoarece γ_v acţionează prin variaţia componentelor impulsului. Aceasta variaţie ($\tilde{X}$), introdusă cu ridicarea (4), este proporţională cu parametrul inerţial m, definit de dependenţa hamiltonianului de impuls. În principiu, potrivit I.(28), fiecare componentă a impulsului p_μ are un parametru inerţial asociat $I_\mu = p_\mu(\partial H_0^e/\partial p_\mu)^{-1}$. Dacă dinamica în spaţiul fazic extins este determinată de H_0^e, atunci este natural să presupunem că parametrul inerţial corespunzator este quasi-izotrop, adică $I_1 = I_2 = I_3 = -\alpha I_0 = m > 0$, $\alpha = \pm 1$. Această presupunere este echivalentă cu o relaţie între masă şi energie de forma $E = \alpha mc^2$. Astfel, cu $m = -\alpha p_0/c$ ridicarea (4) a lui γ_v plasează termenul dependent de viteză în matricea $\hat{a}$, în loc de $\tilde{X}$. Transformarea infinitezimală (11) la un referenţial mobil capătă în acest caz forma

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \tau \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{a} = \begin{bmatrix} \xi & \alpha \mathbf{v}/c \\ \mathbf{v}/c & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{15}$$

Prezenţa termenului $\alpha\mathbf{v}/c$ în matricea $\hat{a}$ nu este consistentă cu acţiunea $\delta\Phi_\gamma^Q$ definită de (3). Astfel, (10) implică transformarea coordonatelor prin matricea $-\hat{a}^T$, şi înlocuieşte acţiunea (3) a algebrei grupului de echivalenţă inerţială prin

$$\gamma^e(\hat{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{v}, \tau)[\mathbf{q}, t] = [\hat{\xi}\mathbf{q} - \mathbf{d} - t\mathbf{v}, -\tau - \alpha\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}/c^2] \quad . \tag{16}$$

Pentru această acţiune

$$X_v^e = -\frac{q_0}{c}\mathbf{v}\cdot\vec{\nabla} + \alpha p_0\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\vec{\nabla}_p + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}}{c}\frac{\partial}{\partial p_0} - \frac{\alpha}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}\frac{\partial}{\partial q_0} \ , \tag{17}$$

$J_v^e = -\mathbf{v}\cdot(\alpha p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p})/c$, şi

$$[X_v^e, X_d^e] = -\frac{\alpha}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{d}\frac{\partial}{\partial q_0} \quad . \tag{18}$$

Aceasta ne arată că $J^e_{[X_v^e, X_d^e]} = -\alpha p_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{d}/c$, şi cum $[\gamma_v^e, \gamma_d^e] = \gamma^e(0, 0, 0, \alpha\mathbf{v}\cdot\mathbf{d}/c^2)$,

$$\{J_v^e, J_d^e\}^e - J^e_{[\gamma_v^e, \gamma_d^e]} = 0 \quad . \tag{19}$$

Astfel, clasa de coomologie a 2-cociclului definit de (19) este zero, demonstrând că noua acţiune este hamiltonian echivariantă.

În cazul $E > 0$ ($\alpha = 1$) (16) reprezintă acţiunea algebrei Poincaré $\mathfrak{so}(3,1) + \mathbb{R}^4$,

$$\gamma_P^e(\hat{\xi}, \mathbf{d}, \mathbf{v}, \tau)[\mathbf{q}, t] = [\hat{\xi}\mathbf{q} - \mathbf{d} - t\mathbf{v}, -\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}/c^2 - \tau] \quad . \tag{20}$$

Pentru a obţine acţiunea grupului Lorentz $SO(3,1)^*$, (20) trebuie integrată la transformări finite. Vom presupune că $\hat{\xi} = 0$, $\mathbf{d} = 0$, $\tau = 0$, şi descompunem vectorii $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ în raport cu versorul $\mathbf{n}$ al vitezei de translaţie ca $\mathbf{q} = \mathbf{q}_\perp + q_\parallel \mathbf{n}$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_\perp + p_\parallel \mathbf{n}$. În reprezentarea

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\perp \\ q_\parallel \\ q_0 \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_\perp \\ p_\parallel \\ p_0 \end{bmatrix} \quad ,$$

obţinem $\hat{a} = \rho \hat{a}_0$, unde $\rho \equiv |\mathbf{v}|/c$,

$$\hat{a}_0 = \begin{bmatrix} \hat{0}_\perp & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{\sigma}_x \end{bmatrix} \quad , \tag{21}$$

$\hat{0}_\perp = \hat{0}$ sunt matrici nule 2×2, iar $\hat{\sigma}_x$ are exprsia II.(59). Deoarece $e^{\rho \hat{\sigma}_x} = \cosh \rho \, \hat{1} + \sinh \rho \, \hat{\sigma}_x$, pentru o translaţie uniformă cu viteza finită $\mathbf{V} = V\mathbf{n}$, ecuaţiile

$$\frac{d\tilde{q}}{d\rho} = -\hat{a}_0^T \tilde{q} \quad , \quad \frac{d\tilde{p}}{d\rho} = \hat{a}_0 \tilde{p} \tag{22}$$

se integrează la $\mathbf{q}'_\perp = \mathbf{q}_\perp$, $\mathbf{p}'_\perp = \mathbf{p}_\perp$, şi

$$q'_\parallel = \cosh \rho \; q_\parallel - \sinh \rho \; q_0 \quad , \quad q'_0 = \cosh \rho \; q_0 - \sinh \rho \; q_\parallel$$

$$p'_\parallel = \cosh \rho \; p_\parallel + \sinh \rho \; p_0 \quad , \quad p'_0 = \cosh \rho \; p_0 + \sinh \rho \; p_\parallel \quad .$$

Aceste expresii arată clar invarianţa parantezei Poisson în spaţiul fazic extins, deoarece dacă $\{q_\mu, q_\nu\}^e = \{p_\mu, p_\nu\}^e = 0$, $\{q_\mu, p_\nu\}^e = \delta_{\mu\nu}$, atunci şi $\{q'_\mu, q'_\nu\}^e = \{p'_\mu, p'_\nu\}^e = 0$, $\{q'_\mu, p'_\nu\}^e = \delta_{\mu\nu}$, $\mu.\nu = 0, 1, 2, 3$.

Parametrul ρ este legat de viteza finită de translaţie V prin consideraţii de natură fizică, precum $V = c dq_\parallel / dq_0$ când $dq'_\parallel = 0$. Rezultatul $V = c \tanh \rho$ corespunde transformarilor Lorentz standard

$$\mathbf{q}'_\parallel = \frac{\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{V}t}{\sqrt{1 - \mathbf{V}^2/c^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - \mathbf{V} \cdot \mathbf{q}/c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{V}^2/c^2}} \quad , \tag{23}$$

$$\mathbf{p}'_\parallel = \frac{\mathbf{p}_\parallel - \mathbf{V}E/c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{V}^2/c^2}} \quad , \quad E' = \frac{E - \mathbf{V} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{1 - \mathbf{V}^2/c^2}} \quad . \tag{24}$$

Pentru particule (stări) cu energie negativă ($E = -mc^2 < 0$), $\pm\mathbf{v}$ în (15) ia semnul $-$, funcţiile hiperbolice devin funcţii trigonometrice, şi

$$\mathbf{q}'_\parallel = \frac{\mathbf{q}_\parallel - \mathbf{V}t}{\sqrt{1 + \mathbf{V}^2/c^2}} \quad , \quad t' = \frac{t + \mathbf{V} \cdot \mathbf{q}/c^2}{\sqrt{1 + \mathbf{V}^2/c^2}} \quad . \tag{25}$$

Aceste transformări reprezintă rotaţii pure între coordonatele spaţiale şi timp, iar grupul Lorentz SO(3,1)* este înlocuit de grupul rotaţiilor în spaţiu-timp $SO(4, \mathbb{R})$

[4], acoperit de SU(2)$\times$SU(2). Impulsul şi energia la aceste stări se transformă prin

$$\mathbf{p}'_{\|} = \frac{\mathbf{p}_{\|} + \mathbf{V}E/c^2}{\sqrt{1+\mathbf{V}^2/c^2}} \quad , \quad E' = \frac{E - \mathbf{V}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{1+\mathbf{V}^2/c^2}} \quad , \tag{26}$$

astfel încât, spre deosebire de II.(68), $E_- = -c\sqrt{m_0^2c^2 - \mathbf{p}^2}$.

2 Algebra $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ şi problema Kepler

Pentru o particulă punctiformă nerelativistă cu masa m, descrisă de coordonatele canonice $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ pe $T^*\mathbb{R}^3$, aflată în potenţialul central $V(\mathbf{q}) = -C/|\mathbf{q}|$, hamiltonianul are expresia

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{C}{|\mathbf{q}|} \quad . \tag{27}$$

În raport cu paranteza Poisson I.(3) algebra de simetrie dinamică $\mathfrak{g}_H$ a hamiltonianului

$$\mathfrak{g}_H = \{f \in \mathcal{F}(M) \ ; \ \{f,H\} = 0\}$$

este generată de cele 3 componente ale vectorului moment cinetic orbital $\mathbf{L} = \mathbf{q}\times\mathbf{p}$, şi 3 componente ale vectorului Runge-Lenz, $\mathbf{A} = \mathbf{L}\times\mathbf{p} + mC\mathbf{q}/|\mathbf{q}|$, astfel încât [29, 28] $\mathbf{A}\cdot\mathbf{L} = 0$, $\mathbf{A}^2 - 2mH\mathbf{L}^2 = m^2C^2$, $\{\mathbf{A},H\} = \{\mathbf{L},H\} = 0$ şi

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}L_k \quad , \quad \{L_i, A_j\} = \epsilon_{ijk}A_k \quad , \quad \{A_i, A_j\} = -2mH\epsilon_{ijk}L_k \quad .$$

Aceste relaţii, asemănatoare cu I.(58), ne arată că

$$\mathfrak{g}_H = \begin{cases} \mathfrak{so}(4,\mathbb{R}) & \text{pentru } H < 0 \\ \mathfrak{so}(3,1) & \text{pentru } H > 0 \end{cases} \quad .$$

Există 3 integrale prime în involuţie, H, $\mathbf{L}^2$ şi L_z, astfel încât sistemul hamiltonian

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{p}}{m} \quad , \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{C}{\mathbf{q}^2} \tag{28}$$

este complet integrabil. Pentru $H = E < 0$ integrarea se poate reduce la calculul orbitelor oscilatorului armonic 4-dimensional având hamiltonianul

$$H_{4d}(\tilde{Q},\tilde{P}) = \frac{\tilde{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\tilde{Q}^2}{2} \quad , \quad (\tilde{Q},\tilde{P}) \in T^*\mathbb{R}^4 \quad .$$

Astfel, în ecuaţia Hamilton-Jacobi staţionară $H_{4d}(\tilde{Q},\nabla_4 S) = \epsilon$, $\nabla_4 \equiv (\nabla, \partial_0)$,

$$\frac{1}{2m}(\nabla_4 S)^2 + \frac{m\omega^2\tilde{Q}^2}{2} = \epsilon \quad , \tag{29}$$

operatorul gradient ∇_4 în $\mathbb{R}^4$ admite o descompunere similară cu II.(48) în $\mathbb{R}^3$, de forma

$$\nabla_4 = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R}\nabla_{Y4} \quad , \quad R = |\tilde{Q}|$$

în componenta radială $\mathbf{e}_R \partial_R$ şi unghiulară ∇_{Y4}/R. Dacă împărţim (29) la $\tilde{Q}^2 = R^2$ şi facem schimbarea de variabila $R^2 = r$, obţinem

$$\frac{1}{2m}(2\frac{\partial_r S}{r}\mathbf{e}_R + \frac{\nabla_{Y4} S}{r})^2 + \frac{m\omega^2}{2} = \frac{\epsilon}{r} \quad . \tag{30}$$

Variabilele unghiulare "polare" în $\mathbb{R}^4$ sunt coorrdonatele pe sfera $\mathrm{S}^3 \simeq SU(2)$ [34], şi se pot exprima în funcţie de unghiurile Euler φ, θ, ψ din II.(52). Astfel, atunci când S nu depinde de ψ, $\nabla_{Y4} S/2$ se reduce la termenul unghiular uzual din $\mathbb{R}^3$, $\nabla_Y S$, iar (30) devine ecuaţia Hamilton-Jacobi $H(\mathbf{q}, \nabla S) = E$,

$$\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 - \frac{\epsilon}{4r} = -\frac{m\omega^2}{8} \tag{31}$$

pentru hamiltonianul (27) în care

$$C = \frac{\epsilon}{4} \quad , \quad E = -\frac{m\omega^2}{8} \quad .$$

Rezultatul este important în studiile de cuantificare geometrică [46], fiind un caz particular al exemplului lui Moser de regularizare a curentului pentru hamiltonianul geodezic $H_g(\tilde{Q}, \tilde{P}) = \tilde{Q}^2 \tilde{P}^2/2$ pe $M = T^*\mathbb{R}^{n+1}$ [47]:
Propoziţia 14. Fie (M, ω) o varietate simplectică , X_H câmpul hamiltonian $i_{X_H}\omega = dH$ definit de hamiltonianul H, şi $f \in \mathcal{F}(M)$. Atunci pe orice subvarietate de energie constantă $N_E = \{m \in M \ ; \ H(m) = E\}$, câmpul fX_H coincide cu restricţia la N_E a unui câmp hamiltonian.
Dem.: Considerăm câmpul X definit de $i_X\omega = d(fH - fE)$. Deoarece $d(fH - fE) = (H - E)df + fdH$, rezultă $i_X\omega|_{N_E} = fdH|_{N_E}$, astfel încât $X = fX_H$ $\square$.

3 Operatorul conjugat momentului cinetic

Problema "cinematică" a existenţei unui opeator hermitic $\hat{\phi}$ asociat fazei undei electromagnetice[20], conjugat cu numărul de fotoni $\hat{n} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$, sau unghiului conjugat cu momentul cinetic $\hat{L} = -i\hbar\partial_\phi$, este discutată în [48, 49], respectiv în [50, 51]. În

[20] Presupunând că între faza φ a unei unde corente cu densitatea de energie w şi acţiunea S pentru fotoni există relaţia $S = \hbar\varphi$ [7], o condiţie de integralitate pentru $\hat{\omega}$ din II.(26), unde $\mathsf{n} = w/\mathrm{h}\nu$ conduce la cuantificarea energiei câmpului $E = Nh\nu$, $N \in \mathbb{Z}_+$.

cazul dinamic prezintă interes un operator $\hat{\phi}$ care să satisfacă ecuaţia Heisenberg de evoluţie temporală în forma exactă

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} \equiv \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\phi}] = \frac{\hat{L}}{I} \quad ,$$

sau mediată,

$$I\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, \hat{\phi}]\rangle = \langle\hat{L}\rangle \quad , \tag{32}$$

unde I este o constantă cu semnificaţie de moment de inerţie. Acest operator este util în rezolvarea ecuaţiei II.(85) pentru stările izovectoriale datorate corelaţiilor dintre protoni şi neutroni în nucleele deformate [52, 53, 54], şi poate fi obţinut prin aplicarea Teoremei 8 la cazul unei stări fundamentale $|\tilde{0}\rangle$ care nu este invariantă la rotaţii în jurul axei X.

Fie G_x grupul rotaţiilor în jurul axei X generate de operatorul momentului cinetic orbital $\hat{L}_x$, M o varietate de funcţii de probă, $|\tilde{0}\rangle \in M$ o stare fundamentală deformată şi $J : M \rightarrow \mathbb{R}$ aplicaţia moment $J(|Z\rangle) = \langle Z|\hat{L}_x|Z\rangle$, $|Z\rangle \in M$. Atunci, pentru orice valoare regulară p a lui J, $\mathcal{F}_p = J^{-1}(p)$ este invariantă la G_x, iar $Q = G_x \cdot |\tilde{0}\rangle \subset \mathcal{F}_0$. Pentru $F_q = T_q\mathcal{F}_0$, un complement unidimensional P_q în M este reprezentat de tangenta $T_q\tau$ la orice curbă τ transversală la $\mathcal{F}_0$ în q. Ambiguitatea în alegerea curbei τ poate fi înlăturată folosind argumente geometrice (de exemplu prin asociere cu orbitele coadjuncte din Sect. I.7), sau dinamice, prin selectarea transversalei obţinute unind continuu punctele de energie minimă din fiecare varietate $\mathcal{F}_p$ aflată în vecinatătea $\mathcal{F}_0$. Astfel de minime cu constrângeri ale hamiltonianului $\hat{H}$ pot fi generate folosind multiplicatori Lagrange, obţinând mai întai o soluţie $|Z\rangle_\omega$ a ecuaţiei variaţionale $\delta\langle Z|\hat{H} - \omega\hat{L}_x|Z\rangle = 0$, şi apoi fixând ω la valoarea ω_p dată de $J(|Z_{\omega_p}\rangle) = p$. Rezultatul este o varietate simplectică

$$\mathcal{S} = \{|\tilde{Z}_{\varphi,p}\rangle = e^{-i\varphi\hat{L}_x/\hbar}|Z_{\omega_p}\rangle\}$$

parameterizată de variabilele canonice φ şi p. Astfel, relaţia (32) de medie pe stările $|Z_0\rangle$ rezultă din condiţia de minim

$$\frac{d}{d\omega}\langle Z_\omega|\hat{H} - \omega\hat{L}_x|Z_\omega\rangle = 0$$

folosind operatorul $\hat{\varphi}$ pentru care $|Z_\omega\rangle = \exp(iI\omega\hat{\varphi}/\hbar)|Z_0\rangle$. Avantajul acestei metode faţă de argumentele geometrice este că determină nu numai spaţiul fazic $\mathcal{S}$, ci şi parametrul inerţial asociat.

Dacă $\hat{H}$ este un operator hamiltonian N-particulă II.(72) constituit dintr-un termen $\hat{H}_0$ de oscilator armonic izotrop şi un termen de interacţiune de tip cuadrupul-cuadrupol, iar M este varietatea stărilor II.(61), ruperea spontană a simetriei la rotaţii se manifestă prin apariţia unui câmp mediu (potenţial) de oscilator anizotrop aflat în rotaţie uniformă în jurul unei axe fixe, care se alege prin convenţie drept axa X. Astfel, în sistemul intrinsec $|Z_\omega\rangle$ este un determinant Slater format cu stările proprii ψ'_{klm}

$$\hat{H}'\psi'_{klm} = E'_{klm}\psi'_{klm} \quad , \quad \hat{H}' = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) - \omega \hat{L}_x$$

pentru $\hat{H}'$ de forma I.(43) în care $\hat{H}$ este hamiltonianul de oscilator armonic anizotrrop iar viteza unghiulară de rotaţie ω are direcţia axei X. Se poate arăta [44] că ψ'_{klm} se obţin din stările proprii[21]

$$\psi_{klm} = \frac{1}{\sqrt{k!l!m!}}(\hat{b}_1^\dagger)^k(\hat{b}_2^\dagger)^l(\hat{b}_3^\dagger)^m\psi_0 \quad , \tag{33}$$

$\hat{b}_i\psi_0 = 0$, ale hamiltonianului $\hat{H}_o$ de oscilator armonic izotrop,

$$\hat{H}_o\psi_{klm} = \hbar\omega_0(k + l + m + \frac{3}{2})\psi_{klm} \quad , \quad \hat{H}_o = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{m\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \quad , \tag{34}$$

printr-o transformare unitară, astfel încât $\psi'_{kml} = \hat{U}\psi_{klm}$ unde operatorul

$$\hat{U} = e^{-i\lambda\hat{c}_x}e^{-i\sum_{k=1}^{3}\theta_k\hat{s}_k} \tag{35}$$

este definit de relaţiile

$$\hat{c}_x = \hat{b}_2^\dagger\hat{b}_3 + \hat{b}_3^\dagger\hat{b}_2 \quad , \quad \hat{s}_k = \frac{i}{2}[(\hat{b}_k^\dagger)^2 - (\hat{b}_k)^2]$$

$$\hat{b}_k^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}(x_k - \frac{i}{m\omega_0}\hat{p}_k) \quad , \quad \omega_0^2 = (\omega_2^2 + \omega_3^2)/2 \quad , \tag{36}$$

$$\tan 2\lambda = \frac{2\omega}{\omega_0\eta} \quad , \quad \sinh 2\theta_k = \frac{\omega_0}{2\Omega_k}(1 - \frac{\omega_k^2}{\omega_0^2}) \quad , \quad \eta = \frac{\omega_2^2 - \omega_3^2}{2\omega_0^2} \quad ,$$

$$\Omega_1 = \omega_1 \quad , \quad \Omega_{2,3}^2 = (\omega_0 + \epsilon_{2,3})^2 - (\omega_0\eta/2)^2 \quad , \quad \epsilon_2 = -\epsilon_3 = \omega_0\eta/2\cos 2\lambda \quad .$$

Operatorii $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3$ de 'comprimare“ generează transformarea bazei “sferice” (33) în cea “deformată”. Împreună cu operatorii $\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_k$ fiecare $\hat{s}_k$, $k = 1, 2, 3$ generează algebra $\mathfrak{s}u(1,1) \simeq \mathfrak{s}p(1,\mathbb{R})$.

Când $\omega \to 0$, $\lambda \approx \omega/\omega_0\eta$, astfel încât $I\hat{\varphi} = -\hbar\hat{c}_x/\omega_0\eta$. Cu notaţia $I = \hbar/\omega_0\eta$ operatorul $-\hat{c}_x$ apare ca operator asociat unghiului conjugat cu $\hat{L}_x$, deoarece generează tranziţia de la referenţialul fix la cel aflat în rotaţie uniformă în jurul axei X. Operatori similari $\hat{c}_y$ şi $\hat{c}_z$ sunt asociaţi cu $\hat{L}_y$ şi $\hat{L}_z$, iar prin comutare setul $\hat{c}_x, \hat{c}_y, \hat{c}_z, \hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ generează algebra $\mathfrak{s}u(3)$. Prin comutare $\hat{s}_{2x}, \hat{s}_{2y}, \hat{s}_{2z}, \hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ generează algebra $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$. Acest set complicat de subalgebre face parte din $\mathfrak{sp}(3,\mathbb{R})$.

[21] În coordonate sferice, dacă R_{nl} este funcţia de undă radială atunci pentru n par $R_{n0}Y_{00} = (n+1)!^{-1/2}[(\hat{b}_1^\dagger)^2 + (\hat{b}_2^\dagger)^2 + (\hat{b}_3^\dagger)^2]^{n/2}\psi_0$ [55].

4 Grupul $SU(3)$, rotaţia colectivă şi modelul octet

Primele aplicaţii ale teoriei grupului SU(3) au apărut în fizica nucleară, ca urmare a eforturilor de a descrie proprietăţile nucleare colective în cadrul modelului păturilor nucleare. Problema dificilă a clasificarii stărilor şi a determinării spectrului energetic a fost simplificată folosind simetria dinamică a hamiltonianului, reflectată prin anumite regularităţi în spectre şi a unei degenerări mai ridicate decât cea datorată simetriilor geometrice. După cum s-a arătat în Sect. II.3, subspaţiul stărilor degenerate poartă o reprezentare a acestei algebre de simetrie, integrabilă la grupul Lie de simetrie dinamică. Grupul $SU(3)$ reprezintă simetria dinamică a hamiltonianului oscilatorului armonic 3-dimensional izotrop $\hat{H}_o$ (34), ale cărui funcţii proprii degenerate (33) constituie baza unui spaţiu de reprezentare ireductibilă (RI). Spaţiile şi reprezentările ireductibile pentru $SU(3)$ vor fi notate prin $V(P,Q)$ şi $D(P,Q)$, respectiv, unde P şi Q sunt întregi pozitivi. Clasificarea stărilor de oscilator armonic poate fi obţinută folosind setul complet de operatori care comută, ale căror valori proprii sunt indicii vectorilor de bază ale reprezentărilor ireductibile $SU(3)$ [28]-XIII. Clasificarea stărilor sistemului de nucleoni în potenţialul de oscilator armonic a fost obţinută de Elliott [56], şi a fost aplicată la nuclee uşoare. Bargmann şi Moshinsky au adăugat la potenţialul de oscilator armonic interacţiunile reziduale biparticulă [57, 58]. Hamiltonianul rezultat rămâne $SU(3)$-invariant, iar pentru a obţine funcţiile proprii ale unui sistem de 3 nucleoni este necesar să cunoaştem coeficienţii Clebsch-Gordan (CG) $SU(3)$ pentru produsul $D(P,Q)\otimes D(P_1,0)$.

Cuplajul funcţiilor de undă de oscilator în pătura 2s-1d a fost obţinut de Hecht [59] folosind coeficienţii CG pentru produsele

$$D(P,Q)\otimes D(P_1,0)\quad,\quad D(P,Q)\otimes D(P_1,1)\quad,\quad D(P,Q)\otimes D(0,Q_1)\quad. \tag{37}$$

La nuclee par-pare a fost utilizat cu succes modelul bosonilor în interacţiune [60]. În acest model se consideră numai simetria nucleonilor de valenţă, presupunând că sunt cuplaţi în perechi bosonice s şi d. La un numar fixat de bosoni cel mai general hamiltonian pentru acest sistem are simetria $SU(6)$, iar stările sunt indexate de valorile proprii ale operatorilor Casimir pentru un lanţ de subgrupuri ale $SU(6)$. Există numai trei lanţuri posibile, iar unul dintre ele începe cu $SU(3)$. Nivelele energetice calculate folosind acest lanţ sunt în bun acord cu datele experimentale pentru nuclee care au pătura de valenţă semi-ocupată. În acest caz simetria $SU(3)$ descrie spectre de rotaţie, şi este independentă de degenerarea nivelelor uniparticulă.

Importanţa teoriei grupurilor Lie simple pentru fizica particulelor elementare a fost prezentată detaliat în [61]. Descoperirea numerelor cuantice de "aromă" cum ar fi izospinul, hipersarcina [30]-II, sau "farmecul", conservate de interacţiunile tari, a condus la introducerea unor modele de simetrie dinamică bazate pe $SU(2)$,

$SU(3)$, respectiv $SU(4)$. Aceste simetrii sunt numai aproximative, deoarece particulele atribuite multipleţilor au mase diferite. Totuşi, clasificarea este corectă, deoarece interacţiunile care rup simetria nu modifică valorile numerelor cuantice interne.

În general, un model hadronic cu n_F cuarci constituenţi (arome) este legat de simetria $SU(n_F)$. Cei n_F cuarci se pot distinge prin valorile unui set de n_F numere cuantice de aromă. Dacă nu includ şi particule "cu farmec", sistemele hadronice sunt descrise corect de modelul octet, bazat de grupul de simetrie de aroma $SU(3)^F$ [62, 63].

În modelul octet barionii sunt stări $L^\pi = 0^+$ ale unui sistem de 3 cuarci, inexplicabile pentru un sistem de trei particule cu spin 1/2 descrise de statistica Fermi-Dirac. Paradoxul a fost rezolvat adaugând la indicii de aromă şi spinor Dirac din funcţia de undă relativistă a cuarcului un nou număr cuantic de "culoare", având trei valori posibile [64]. Cuarcii coloraţi sunt fermioni obişnuiţi cu spin 1/2, dar inobservabili, deoarece prin postulat, numai sistemele fără culoare ("albe") pot fi libere. Sistemul de trei cuarci coloraţi este antisimetric la permutarea indicilor de culoare, şi este invariant la transformarea lor cu $SU(3)$. Totuşi, spre deosebire de $SU(3)^F$, grupul transformărilor de culoare globale $SU(3)^C$ este o simetrie exactă. Presupunând invarianţa lagrangeanului nu numai la transformări $SU(3)^C$ globale, dar şi locale, se poate formula o teorie Yang-Mills a interacţiunilor tari, cromodinamica cuantică [65].

În anumite situaţii fizice grupul $SU(3)$ este prea restrictiv, şi este necesar să folosim grupuri semisimple mai largi, ca $SU(n)$. Teoria generală a grupurilor Lie semisimple a fost elaborată în lucrările clasice ale lui Cartan şi Weyl [66]. Dezvoltarea teoriei cuantice a momentului cinetic a determinat studiul intensiv al grupului $SU(2)$. Rezultatele obţinute de Wigner [2] şi Racah [67] în teoria reprezentărilor $SU(2)$ şi a operatorilor tensoriali ireductibili au rezolvat practic toate problemele spectroscopiei atomice. Extinderea acestor rezultate la $SU(n)$ a fost prezentată de Baird şi Biedenharn în seria de lucrări [68]. În [68]-II metoda generatorilor bosonici este aplicată pentru a regăsi formulele generale ale lui Gel'fand şi Zetlin pentru elementele de matrice ale generatorilor. O atenţie particulară este acordată cazului $SU(3)$, deoarece în studiul său apar aspecte caracteristice pentru $SU(n)$ în general, dar care nu sunt prezentate de structura simplă a lui $SU(2)$. Dintre acestea, problema multiplicităţii ponderilor va fi discutată şi în continuare, pe baza rezultatelor din lucrarea de sinteză [69].

4.1 Grupul SU(3)

Grupul $SU(3)$ este format din transformările liniare unimodulare ale spaţiului complex $\mathbb{C}^3$ care păstrează invariantă forma biliniară hermitică

$$\langle a, b\rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + a_3^* b_3 \quad , \quad a, b \in \mathbb{C}^3 \ . \tag{38}$$

Matricile operatorilor liniari unitari asociaţi acestor transformări în baza

$$\{x_j \in \mathbb{C}^3, j = 1, 2, 3; \langle x_j, x_k\rangle = \delta_{jk}\} \tag{39}$$

sunt matrici unitare unimodulare U care dau o reprezentare 3-dimensională a grupului $SU(3)$. O structură analitică pe acest grup poate fi introdusă considerând partea reală şi imaginară a celor 9 elemente de matrice complexe ale matricii U drept cordonate analitice ale unui punct în spaţiul $\mathbb{R}^{18}$. Aceşti 18 parametri reali sunt constrânşi de 10 relaţii algebrice determinate de condiţiile

$$\mathrm{det} U = 1 \quad , \quad UU^\dagger = I \quad , \tag{40}$$

astfel încât numai opt dintre ei sunt independenţi. Restul parametrilor se pot exprima ca funcţii analitice de aceştia, şi astfel $SU(3)$ este varietate analitică reala, opt-dimensională.

Dacă $U_1, U_2 \in SU(3)$, atunci coordonatele lui $U = U_1 U_2^{-1}$ sunt funcţii analitice de coordonatele lui U_1 and U_2. Astfel, $SU(3)$ este grup Lie real.

Folosind continuitatea elementelor de matrice şi (40) se poate arăta că $SU(3)$ este homeomorf cu o mulţime compactă din $\mathbb{R}^8$ [70]-IV. În plus, se poate demonstra prin recurenţă că $SU(n)$ este simplu conex dacă $SU(n-1)$ este simplu conex [70]-(Sect. VIII.4). Cum $SU(1) = \{I\}$ este simplu conex, atunci orice $SU(n)$, şi în particular $SU(3)$, este simplu conex.

Coordonatele pe $SU(3)$, $\{q_j, j = \overline{1, 8}\}$, se definesc astfel încât originea spaţiului $\mathbb{R}^8$ corespunde matricii unitate I. Alegerea lor este simplificată de existenţa subgrupurilor $SU(2)$ şi $SUD(3) = D(3) \cap SU(3)$ (format din matrici 3×3 unitare unimodulare diagonale), pentru care coordonatele se cunosc. Cei patru parametri rămaşi se aleg de regulă în forma dată de Nelson [71]. Alte parametrizări sunt prezentate în [72, 73, 74].

Orice matrice $SU(3)$ se poate obţine pornind de la identitatea I printr-o serie de transformări infinitezimale corespunzatoare unei variaţii continue a parametrilor grupului, şi poate fi reprezentată sub forma

$$U(q_1, ..., q_8) = e^{i \sum_{k=1}^{8} q_k \lambda_k / 2} \quad . \tag{41}$$

Parameterii acestei reprezentări q_k, $k = \overline{1, 8}$ definesc un sistem de coordonate canonice ([70], Sect. IX.3), iar matricile generatorilor transformărilor infinitezimale

$$F_k = \frac{1}{2} \lambda_k \quad , \quad k = \overline{1, 8} \tag{42}$$

dau o reprezentare în $\mathbb{C}^3$ a algebrei Lie reale $\mathfrak{su}(3)$. Aceste matrici sunt elementele unei baze în spaţiul liniar real al matricilor 3×3 hermitice cu urmă nulă. Deoarece $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{su}(3)$, este convenabil să alegem aceste matrici în forma dată de Gell-Mann

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{43}$$

$$\lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} , \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \tag{44}$$

$$\lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} , \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} , \tag{45}$$

Deoarece există o transformare $SU(3)$ care aduce orice matrice $SU(3)$ la forma $SUD(3)$, elementele lui $SU(3)$ aparţin unor clase de echivalenţă, astfel încât fiecare clasă conţine numai un singur element $SUD(3)$. În consecinţă, caracterele pentru $SU(3)$ sunt funcţii analitice de cele două variabile care parametrizează $SUD(3)$. O măsură invariantă, normată, în spaţiul caracterelor este definită în [75].

Matricile λ satisfac relaţia

$$\lambda_i \lambda_j = \frac{2}{3} \delta_{ij} I + \sum_{k=1}^{8} (d_{ijk} + i f_{ijk}) \lambda_k \quad . \tag{46}$$

Aici d_{ijk} este un tensor real, simetric de ordinul trei, f_{ijk} este deasemenea real, dar antisimetric, iar δ_{ij} este simbolul Kronecker. Componentele nenule ale acestor tensori sunt

$$f_{123} = 1 \quad , f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{47}$$

$$f_{147} = f_{246} = f_{345} = f_{257} = -f_{156} = -f_{367} = \frac{1}{2} \quad ,$$

şi

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \tag{48}$$

$$d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad ,$$

$$d_{146} = d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{247} = -d_{366} = -d_{377} = \frac{1}{2} \quad .$$

Folosind (46) este posibil să verificăm relaţiile de comutare şi anticomutare

$$[F_i, F_j] = i \sum_{k=1}^{8} f_{ijk} F_k \quad , \quad \{F_i, F_j\}_A = \frac{1}{3}\delta_{ij} I + \sum_{k=1}^{8} d_{ijk} F_k \quad . \tag{49}$$

Rangul algebrei $\mathfrak{s}u(3)$, definit ca dimensiunea subalgebrei Lie nilpotente maximale, este dat de dimensiunea subalgebrei $\mathfrak{s}ud(3)$, egal cu 2. Cele două elemente ale $\mathfrak{s}u(3)$ care comută sunt F_3 şi F_8, iar baza (39) a fost aleasă astfel încât matricile lor să fie diagonale. Elementele diagonale sunt legate de numerele cuantice caracteristice pentru sisteme cu simetrie $SU(3)$, şi potrivit II.(84), pot fi utilizate la indexarea stărilor. În cazul hadronilor acestea sunt indexate de valorile proprii i_3 şi y ale operatorilor I_3 şi Y,

$$I_3 = F_3 \quad , \; Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8 \quad . \tag{50}$$

Relaţiile de comutare

$$[iF_j, iF_k] = \sum_{j=1}^{8} c_{jk}^{l} (iF_l)$$

definesc constantele de structură $c_{jk}^{l} = -f_{jkl}$, $i, j, k = 1, 8$. Tensorul metric Cartan determinat prin

$$g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{8} c_{il}^{k} c_{jk}^{l} \quad , \tag{51}$$

are expresia simplă $g_{ij} = -3\delta_{ij}$. Astfel, forma Cartan-Killing

$$(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{8} g_{ij} X^i Y^j \tag{52}$$

este nedegenerată, negativ definită, iar algebra $\mathfrak{s}u(3)$ este semisimplă. Aceasta înseamnă că $\mathfrak{s}u(3)$ nu conţine ideal comutativ, şi arată că $SU(3)$ este grup Lie semisimplu [70]-(Sect. XI.4).

Proprietăţile rezumate mai sus arată că $SU(3)$ este un grup Lie real, compact, simplu conex, semisimplu. Un astfel de grup nu conţine vreun subgrup invariant propriu conex, dar poate conţine unul discret. Pentru $SU(3)$ acesta este

$$Z_3 = \{I, e^{2\pi i/3} I, e^{4\pi i/3} I\} \quad . \tag{53}$$

Grupul $SU(3)/Z_3$ se obţine prin identificarea elementelor din $SU(3)$ care diferă printr-un factor $e^{2\pi i/3}$ sau $e^{4\pi i/3}$, şi este triplu conex[22]. Acest grup factor este important în fizica particulelor elementare deoarece numai stările hadronice atribuite reprezentărilor sale au sarcina electrică şi hipersarcina numere întregi.

[22] $SU(2)$ conţine subgrupul discret $Z_2 = \{I, -I\}$, iar $SU(2)/Z_2 \simeq SO(3, \mathbb{R})$.

4.2 Algebra $\mathfrak{su}(3)$

Teoria reprezentărilor liniare a algebrelor Lie semisimple $\mathfrak{L}$ şi a grupurilor corespunzătoare se bazează pe descompunerea algebri $\mathfrak{L}$ în sumă directă de subspaţii invariante pentru restricţia reprezentării adjuncte

$$X \rightarrow ad_X = [X, *] \quad , \quad X \in \mathfrak{L} \tag{54}$$

la subalgebra nilpotentă

$$\mathfrak{H} = \{X, Y \in \mathfrak{L}/(ad_X)^k Y = 0 \quad , \quad 0 < k \in \mathbb{Z}\} \quad . \tag{55}$$

Un exemplu important este reprezentat de descompunerea Gauss, $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}^+ + \mathfrak{H} + \mathfrak{N}^-$, unde $\mathfrak{N}^\pm$ sunt subalgebre nilpotente, iar $\mathfrak{N}^\pm + \mathfrak{H}$ sunt solvabile ([28]-Sect. I.6).

Algebra $\mathfrak{su}(3)$ şi grupul $SU(3)$ nu admit descompunere Gauss deoarece sunt semisimple compacte ([28]- Sect. III.6), dar sunt forme reale compacte ale algebrei $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, respectiv grupului $SL(3, \mathbb{C})$, care sunt semisimple complexe, şi admit descompunerea Gauss. Astfel, reprezentările $\mathfrak{su}(3)$ şi $SU(3)$ care apar în aplicaţii sunt complet determinate de reprezentările $\mathfrak{sl}(3, C)$, respectiv $SL(3, C)$ prin metoda unitară Weyl [70]-XI, XII.

Algebra Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, (A_2), este subalgebra $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$ generată de matricile 3×3 cu urmă nulă. O baza în $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ este reprezentată de matricile F_k, $k = 1, 8$ introduse în sectiunea precedentă, dar această alegere nu este adecvată descompunerii Gauss. Mai convenabil este să exprimăm elementele de bază prin combinaţii liniare ale bazei algebrei $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$. Baza Weyl în $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$ este reprezentată de nouă matrici 3×3, $\{e_{ik}, i, k = 1, 3\}$, care au un singur element nenul, egal cu 1, $(e_{ik})_{\alpha\beta} = \delta_{i\alpha}\delta_{k\beta}$. Comutatorul

$$[e_{ik}, e_{jl}] = \delta_{kj} e_{il} - \delta_{il} e_{jk} \tag{56}$$

este o matrice din $\mathfrak{sl}(3, C)$, astfel încât aceleaşi relaţii de comutare vor fi satisfacute şi de cele nouă matrici cu urmă nulă $A^i_k = e_{ik} - \delta_{ik} I/3$,

$$[A^i_k, A^j_l] = \delta_{kj} A^i_l - \delta_{il} A^j_k \quad . \tag{57}$$

Pentru aplicaţiile în fizică este util să notăm că operatorii e_{ik} ce satisfac relaţiile de comutare (56) se pot construi folosind operatori bosonici. Astfel, dacă $\hat{b}^\dagger_i$ şi $\hat{b}_i$, $i = 1, 2, 3$, sunt operatorii de generare şi anihilare bosonici (36) (cu relaţiile de comutare II.(65)), care apar în hamiltonianul oscilatorului armonic izotrop (34)

$$\hat{H}_o = \hbar\omega_0 \sum_{i=1}^{3} (\hat{b}^\dagger_i \hat{b}_i + \frac{1}{2}) \quad , \tag{58}$$

atunci $e_{ik} = \hat{b}^\dagger_i \hat{b}_k$ satisfac (56), iar $[e_{ik}, \hat{H}_o] = 0$.

Relaţia dintre cele două seturi de bază pentru $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $\{A^i_k; i, k = 1, 3\}$ şi

$\{F_k, k = 1, 8\}$ capătă o formă simplă dacă introducem combinaţiile complexe

$$I_\pm = F_1 \pm iF_2 \quad , \quad K_\pm = F_4 \pm iF_5 \quad , \quad L_\pm = F_6 \pm iF_7 \ . \tag{59}$$

Folosind aceşti noi operatori, relaţia dintre cele două seturi de bază este dată de

$$A_1^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}F_8 + F_3 \quad , \quad A_2^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}F_8 - F_3 \quad , \quad A_3^3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}F_8 \ , \tag{60}$$

$$\begin{aligned} A_2^1 = I_+ \quad , \quad A_3^1 = K_+ \quad , \quad A_3^2 = L_+ \quad , \\ A_1^2 = I_- \quad , \quad A_1^3 = K_- \quad , \quad A_2^3 = L_- \quad . \end{aligned} \tag{61}$$

Algebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ se descompune în subalgebra Cartan $\mathfrak{H}$, generată de elementele F_3 şi F_8, şi subalgebrele $\mathfrak{N}^\pm$, generate de $I_\pm$, $K_\pm$ şi $L_\pm$. Folosind dezvoltarea

$$F_\rho = \sum_{k=1}^{3} \Phi_k(\rho) e_{kk} \tag{62}$$

unde ρ este 3 sau 8, relaţiile de comutare pentru $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ în baza Cartan-Weyl sunt exprimate de

$$[F_\rho, A_k^j] = \alpha_{jk}(\rho) A_k^j \tag{63}$$

$$[A_k^i, A_l^j] = \delta_{kj} A_l^i - \delta_{il} A_k^j \quad , i \neq k \ , \ j \neq l \quad . \tag{64}$$

Coeficienţii α_{jk} sunt funcţii liniare pe $\mathfrak{H}$ definite de

$$\alpha_{jk}(\rho) = \Phi_j(\rho) - \Phi_k(\rho) \quad , \tag{65}$$

iar setul

$$\Delta = \{\alpha_{jk}; j, k = 1, 2, 3\} \tag{66}$$

reprezintă sistemul rădăcinilor.

Combinaţiile liniare ale rădăcinilor generează spaţiul dual lui $\mathfrak{H}$, notat $\mathfrak{H}^*$. Dacă α_{12}, α_{13} şi α_{23} se aleg pozitive, atunci α_{12} şi α_{23} sunt rădăcini simple (Anexa 4). Noile constante de structură

$$C_{\rho(jl)}^{(ik)} = \alpha_{jl}(\rho) \delta_{ij} \delta_{kl} \tag{67}$$

dau restricţia tensorului metric la subalgebra Cartan

$$g_{\rho\sigma} = (F_\rho, F_\sigma) = \sum_{j,l=1}^{3} \alpha_{jl}(\rho) \alpha_{jl}(\sigma) = 3\delta_{\rho\sigma} \quad , \tag{68}$$

unde $\rho, \sigma = 3$ sau 8. Astfel, restricţia formei Cartan-Killing la $\mathfrak{H}$ este nedegenerată, şi pentru orice $\alpha \in \mathfrak{H}^*$ există un element unic $h_\alpha \in \mathfrak{H}$, notat în continuare tot cu α, astfel încât $\forall h \in \mathfrak{H}$

$$\alpha(h) = (h_\alpha, h) \quad , \quad (\alpha, \beta) \equiv (h_\alpha, h_\beta) \quad , \alpha, \beta \in \mathfrak{H}^* \quad . \tag{69}$$

Reciproc, această relaţie asociază funcţii liniare elementelor din $\mathfrak{H}$. Funcţiile liniare α_3 şi α_8 asociate prin (63) lui F_3 şi F_8 sunt identic zero. Totuşi, (68) şi (69) conduc la o bază ortogonală covariantă $\hat{g}_\sigma$, $\sigma = 3$ sau 8, în $\mathfrak{H}^*$, definită de $\hat{g}_\sigma(\rho) = g_{\sigma\rho}$. Coordonatele covariante ale rădăcinilor din Δ în această bază sunt date de (69), şi permit reprezentarea sistemului rădăcinilor sub forma diagramei din Figura 1.

O altă bază covariantă în $\mathfrak{H}^*$ este reprezentată de rădăcinile simple. Acestea au lungimea $1/\sqrt{3}$ în raport cu forma Killing, şi formează un unghi de 120 grade. Matricile asociate prin (69) acestor rădăcini sunt

$$\alpha_{12} = \sum_{\rho,\sigma} g^{\rho\sigma} \alpha_{12}(\rho) F_\sigma = \frac{1}{3} F_3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \tag{70}$$

$$\alpha_{23} = \sum_{\rho,\sigma} g^{\rho\sigma} \alpha_{23}(\rho) F_\sigma = \frac{1}{6}(\sqrt{3} F_8 - F_3) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad . \tag{71}$$

Vectorii contravarianţi α^μ, $\mu = 12$ sau 23 asociaţi rădăcinilor simple se definesc prin relaţia

$$\frac{(\alpha^\mu, \alpha_\nu)}{(\alpha_\nu, \alpha_\nu)} = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \quad , \tag{72}$$

iar coordonatele unui element arbitrar $M \in \mathfrak{H}^*$ în baza contravariantă sunt

$$m_\mu = 2 \frac{(M, \alpha_\mu)}{(\alpha_\mu, \alpha_\mu)} \quad . \tag{73}$$

4.3 Reprezentări fundamentale

Reprezentările ireductibile ale unui grup Lie G care admite o descompunere Gauss de forma $G = Z^- D Z^+$, cu $Z^\pm$, D, generate de $\mathfrak{N}^\pm$, $\mathfrak{H}$, respectiv, sunt induse de reprezentări unidimensionale (caractere) $\tau(\delta)$, $\delta \in D$ ale subgrupului D. Fie R_g, $g \in G$ o reprezentare a grupului G pe spaţiul liniar finit dimensional V. Elementele lui V care sunt vectori proprii ai operatorilor R_δ, $\delta \in D$ se numesc vectori de pondere. În particular, vectorii de pondere $|M\rangle$,

$$R_\delta |M\rangle = \tau_M(\delta) |M\rangle \quad , \quad \forall \delta \in D \tag{74}$$

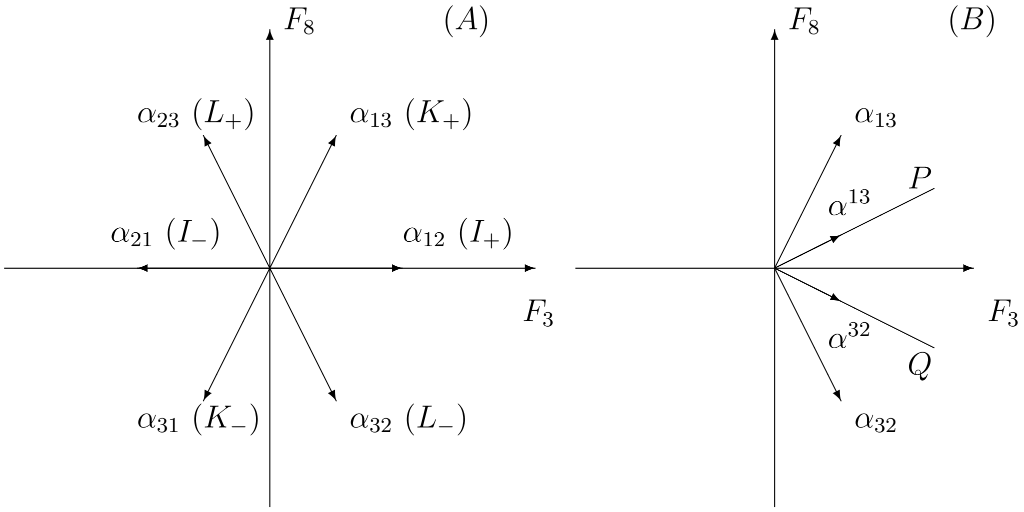


Figura 1. Diagrama rădăcinilor pentru algebra $\mathfrak{su}(3)$ (A) şi vectorii contravarianţi α^{13}, α^{32} (B). Unitatea de lungime este $1/\sqrt{3}$ pe axele F_3, F_8 şi $1/3$ pe axele P, Q.

care rămân invarianţi la acţiunea subgrupului Z^+,

$$R_z|M\rangle = |M\rangle \quad , \forall z \in Z^+ \quad , \tag{75}$$

se numesc vectori de pondere maximă.

În teoria reprezentărilor liniare ireductibile (RI) ale grupului $GL(n, \mathbb{C})$ se demonstrează urmatoarele teoreme importante:

Teorema 9. Orice spaţiu purtator V al unei RI finit dimensionale R a $GL(n, \mathbb{C})$ conţine un vector de pondere maxima unic, ciclic pentru V.

Teorema 10. RI indusă de caracterul τ_M apare în descompunerea unei reprezentări reductibile pe spaţiul V cu o multiplicitate egală cu numărul vectorilor de pondere maximă $|M\rangle$ conţinuţi în V ([70]-Sect. VI.3.1).

Teorema 11. Caracterele inductive complex-analitice pentru reprezentările grupului $GL(3, \mathbb{C})$ au expresia

$$\tau(\delta) = \gamma_1^{m_1}\gamma_2^{m_2}\gamma_3^{m_3} \quad , \delta = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix} \in D \quad , \tag{76}$$

unde $m_1 \geq m_2 \geq m_3$ sunt numere întregi ([28]-Sect. VIII.3).

Reprzentările ireductibile finit dimensionale ale grupului $SU(3)$ se pot realiza pe spaţii de RI ale extensiei sale complexe $SL(3, \mathbb{C})$. Restricţia caracterelor τ ale grupului $D \subset GL(3, \mathbb{C})$ la $SUD(3) \subset D$ defineşte un caracter τ^0 care determină complet RI pentru $SU(3)$. Această restricţie se obţine considerînd numai matrici δ cu elemente γ_i, $i = 1, 2, 3$ astfel încât

$$|\gamma_i| = 1 \quad , \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1 \quad . \tag{77}$$

Dacă rădăcinile simple sunt α_{12} şi α_{23}, atunci orice matrice $d \in SUD(3)$ se poate scrie ca

$$d = e^{ih} \quad , \quad h = t^{12}\alpha_{12} + t^{23}\alpha_{23} \quad , \tag{78}$$

unde parameterii reali t^{12} şi t^{23} sunt

$$t^{12} = 2\frac{(h, \alpha^{12})}{(\alpha_{12}, \alpha_{12})} \quad , \quad t^{23} = 2\frac{(h, \alpha^{23})}{(\alpha_{23}, \alpha_{23})} \quad . \tag{79}$$

Înlocuind α_{12} şi α_{23} din (78) cu expresiile din (70) şi (71), elementele de matrice ale lui d capătă forma

$$\gamma_1 = e^{it^{12}/6} \quad , \quad \gamma_2 = e^{-i(t^{12}-t^{23})/6} \quad , \quad \gamma_3 = e^{-it^{23}/6} \quad . \tag{80}$$

Aceste elemente satisfac condiţiile (77) şi astfel, prin Teorema 11, caracterul inductiv se poate scrie sub forma

$$\tau^0_{\underline{M}}(d) = e^{i(\underline{M},h)} \quad , \tag{81}$$

cu $\underline{M} \in \mathfrak{H}^*$ definit de $\underline{M} = (m_1 - m_2)\alpha^{12} + (m_2 - m_3)\alpha^{23}$. Elementul $\underline{M}$ din $\mathfrak{H}^*$ este numit pondere maximă. Astfel, orice RI a $SU(3)$ este complet specificată de două numere întregi nenegative, $P = m_1 - m_2$ şi $Q = m_2 - m_3$, şi se notează $D(P, Q)$. Spaţiul purtător al acestei RI va fi notat în continuare $V(P, Q)$. Folosind aceeaşi notaţie pentru elementele algebrei $\mathfrak{su}(3)$ şi operatorilor de reprezentare corespunzători în $V(P, Q)$, dezvoltarea relaţiilor (74) şi (75) pentru $SU(3)$ în vecinatâtea identităţii conduce la ecuaţiile

$$\alpha_{12}|\underline{M}\rangle = (\alpha_{12}, \alpha^{12})P|\underline{M}\rangle \quad , \quad \alpha_{23}|\underline{M}\rangle = (\alpha_{23}, \alpha^{23})Q|\underline{M}\rangle \quad , \tag{82}$$

şi, respectiv

$$I_+|\underline{M}\rangle = 0 \quad , \quad L_+|\underline{M}\rangle = 0 \quad . \tag{83}$$

Astfel, prin (70), (71), $|\underline{M}\rangle$ este un vector propriu pentru F_3 şi F_8, iar prin (50) şi pentru I_3 şi Y, cu valorile proprii

$$(i_3)_{\underline{M}} = \frac{P}{2} \quad , \quad (y)_{\underline{M}} = \frac{P + 2Q}{3} \quad . \tag{84}$$

Uneori este convenabil să alegem α_{13} şi α_{32} ca rădăcini simple. În acest caz vectorul de pondere maximă, notat $|M\rangle$, va satisface ecuaţiile

$$K_+|M\rangle = 0 \quad , \quad L_-|M\rangle = 0 \quad , \tag{85}$$

iar ponderea maximă $M = P\alpha^{13} + Q\alpha^{32}$ este reflexia ponderii $\underline{M}$ faţă de vectorul contravariant $\alpha^{13} = \alpha^{12}$. Numerele cuantice i_3 şi y care indexează $|M\rangle$ sunt

$$(i_3)_M = \frac{P + Q}{2} \quad , \quad (y)_M = \frac{P - Q}{3} \quad . \tag{86}$$

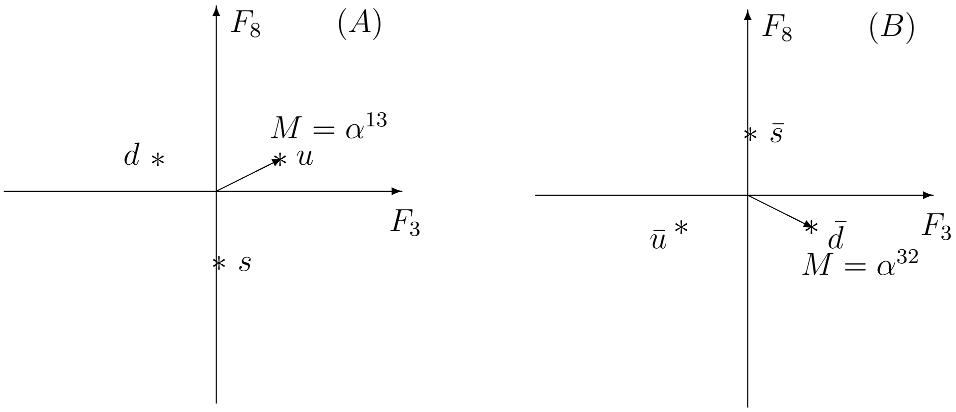


Figura 2. Diagrama ponderilor pentru reprezentările $SU(3)$ fundamentale $D(1,0)$ (A) şi $D(0,1)$ (B). Ponderile u,d,s şi $\bar{u},\bar{d},\bar{s}$ corespund vectorilor x_1,x_2,x_3, respectiv η_1,η_2,η_3.

O bază în $V(P,Q)$ este reprezentată de vectorii proprii $|m\rangle$ ai operatorilor I_3 şi Y, unde cu m am notat perechea de valori proprii (i_3,y). Aceste valori proprii sunt legate de componentele m_{13} şi m_{32} ale ponderii m în baza contravariantă prin

$$i_3 = \frac{m_{13}+m_{32}}{2} \quad , \quad y = \frac{m_{13}-m_{32}}{3} \quad . \tag{87}$$

Potrivit Teoremei 9, toţi vectorii de bază $|m\rangle \equiv |i_3,y\rangle$ se pot obţine prin aplicarea operatorilor L_+, I_- şi K_- asupra vectorului de pondere maximă $|(P+Q)/2,(P-Q)/3\rangle$. Numerele P şi Q specifică deasemenea valorile proprii f şi g,

$$f = \frac{P^2+PQ+Q^2}{3} + P + Q \quad , \quad g = \frac{1}{9}(P-Q)(2P+Q+3)(P+2Q+3) \quad ,$$

ale celor doi operatori Casimir F şi G ([28]-Sect. IX.4) definiţi prin

$$F = \sum_{k=1}^{8} F_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{3} A_k^i A_i^k \quad , \quad G = \frac{1}{2}\sum_{i,k,l=1}^{3}(A_l^i A_i^k A_k^l + A_i^l A_k^i A_l^k) \quad .$$

Reprezentările $D(1,0)$ şi $D(0,1)$ sunt 3-dimensionale, neechivalente, şi se numesc reprezentări fundamentale. Ele au ponderile maxime α^{13} şi α^{32}, respectiv (Figura 2), iar orice reprezentare se poate construi prin descompunerea produsului lor direct multiplu.

Aplicarea comutatorului $[F_\rho, A_k^j]$, $\rho = 3,8$, din (63) vectorului de pondere $|m\rangle$, urmată de folosirea ecuaţiilor cu valori proprii

$$F_\rho|m\rangle = m_\rho|m\rangle \quad , \quad m_3 = i_3 \ , \ m_8 = \frac{\sqrt{3}}{2}y \quad , \tag{88}$$

conduce la relaţia

$$F_\rho A_k^j|m\rangle = (m_\rho + \alpha_{jk}(\rho))A_k^j|m\rangle \quad , \tag{89}$$

care exprimă ponderea vectorului $A^j_k|m\rangle$.

Matricile de reprezentare ale generatorilor $\mathfrak{su}(3)$ în spaţiul $V(1,0)$ au forma (43 -45), iar baza constă din vectorul de pondere maximă $x_1 = |\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle$ şi

$$x_2 = I_- x_1 = |-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \quad , \quad x_3 = K_- x_1 = |0, -\frac{2}{3}\rangle \quad . \tag{90}$$

Ponderile i_3, y ale vectorilor x_1, x_2, x_3, se pot reprezenta pe diagrama rădăcinilor prin punctele u,d,s din Figura 2 (A).

Matricile de reprezentare ale grupului $SU(3)$ pe spaţiul $V(1,0)$ sunt chiar elementele de grup (41). Acestea acţionează transformând vectorii x_j în $\underline{x}_j$,

$$\underline{x}_j = \sum_{k=1}^{3} U^k_j x_k \quad . \tag{91}$$

O altă reprezentare ireductibilă tridimensională se obţine prin conjugarea complexă a expresiei (91),

$$\underline{y}^j = \sum_{k=1}^{3} (U^k_j)^* y^k \quad . \tag{92}$$

Aici $y^j = x^*_j$ sunt vectori de bază contravarianţi care generează spaţiul de reprezentare $V(1,0)^*$. Matricile elementelor $SU(3)$ în reprezentarea $D(1,0)^*$,

$$U|_{(1,0)^*} = (U|_{(1,0)})^* = e^{-\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{8} \lambda^*_k a_k} \quad , \tag{93}$$

ne arată că matricile de reprezentare ale generatorilor $\mathfrak{su}(3)$ sunt

$$F_i|_{(1,0)^*} = -(F_i|_{(1,0)})^* \quad . \tag{94}$$

Matricile operatorilor $F_\rho|_{(1,0)^*}$ şi $A^i_k|_{(1,0)^*}$ se obţin folosind (59), astfel încât

$$F_\rho|_{(1,0)^*} = -(F_\rho|_{(1,0)})^* \quad , \quad A^i_k|_{(1,0)^*} = -(A^k_i|_{(1,0)})^* \quad . \tag{95}$$

Deoarece matricile $F|_{(1,0)}$ şi $A^i_k|_{(1,0)}$ sunt reale, rezultă

$$F_\rho|_{(1,0)^*} = -F_\rho|_{(1,0)} \quad , \quad A^i_k|_{(1,0)^*} = -A^k_i|_{(1,0)} \quad . \tag{96}$$

Diagrama ponderilor vectorilor y^k se obţine prin reflexia diagramei de ponderi pentru x_k, $k = 1, 2, 3$ faţă de origine, şi coincide cu cea a bazei în $V(0,1)$. Dacă vectorii bazei se indexează prin ponderile lor, astfel încât x_m reprezintă vectorii bazei (90), iar y^m vectorii y^k, atunci

$$y^{-m} = (x_m)^* \quad . \tag{97}$$

Prin convenţie, elementele de matrice ale operatorilor $I_\pm$ şi $K_\pm$ în baza canonică din $V(P,Q)$ se aleg pozitive [62]. Această convenţie nu este respectată în baza $\{y^i, i=1,2,3\}$, deoarece, aşa cum rezultă din (96)

$$I_+y^1 = -y^2 \ ,\ I_-y^2 = -y^1 \ ,\ K_+y^1 = -y^3 \ ,\ K_-y^3 = -y^1 \ . \tag{98}$$

Totuşi, o bază canonică în $V(0,1)$, notată $\{\eta_i, i = 1,2,3\}$ se poate obţine din $\{y^i, i=1,2,3\}$ prin transformarea

$$\eta_1 = -y^1 \quad , \quad \eta_2 = y^2 \quad , \quad \eta_3 = y^3 \quad , \tag{99}$$

sau

$$\eta_{m'} = \sum_m G^m_{m'} x^*_m = \sum_m G^m_{m'} y^{-m} \quad . \tag{100}$$

Matricea G a transformării, ca şi vectorii bazei, este definită până la un factor de fază. Alegerea din (99) corespunde la

$$G^m_{m'} = (-1)^{\frac{1}{3}+\mathrm{Q}_m}\delta_{m',-m} \quad , \tag{101}$$

unde

$$\mathrm{Q}_m = (i_3 + \frac{y}{2})_m \tag{102}$$

este sarcina electrică (în unităţi $|e|$) a ponderii $m = (i_3, y)$ [76]. În continuare, spaţiile $V(1,0)$, $V(0,1)$ vor fi notate şi prin $V(3)$ sau $\{3\}$ şi $V(3^*)$ sau $\{3\}^*$, respectiv, deoarece sunt 3-dimensionale.

4.4 Reprezentări tensoriale

Definiţia I. Obiectul $T_{i_1,\ldots,i_P}$ este numit tensor covariant de rang P în raport cu $SU(3)$ dacă la acţiunea lui $U \in SU(3)$ se transformă potrivit relaţiei

$$\underline{T}_{i_1,\ldots,i_P} = U^{k_1}_{i_1} \ldots U^{k_P}_{i_P} T_{k_1,\ldots,k_P} \quad . \tag{103}$$

Aici şi în continuare se presupune convenţia de sumare pe indicii care se repetă.
Definiţia II. Obiectul $T^{i_1,\ldots,i_Q}$ este numit tensor contravariant de rang Q în raport cu $SU(3)$ dacă la acţiunea lui $U \in SU(3)$ are legea de transformare

$$\underline{T}^{i_1,\ldots,i_Q} = (U^{k_1}_{i_1})^* \ldots (U^{k_Q}_{i_Q})^* T^{k_1,\ldots,k_Q} \quad . \tag{104}$$

Reprezentările corspunzătoare acestor formule de transformare se numesc reprezentări tensoriale, şi sunt prezentate în detaliu în [28]-(Sect. X.2). Componentele tensorilor (I) şi (II) se pot considera ca elemente ale unui spaţiu liniar 3^P, respectiv 3^Q - dimensional. Tensori micşti se pot obţine prin produsul direct al tensorilor covarianţi şi contravarianţi. În general, aceste spaţii poartă reprezentări $SU(3)$ care sunt reductibile. Astfel, de interes particular sunt acei tensori, numiţi ireductibili, ale căror componente sunt elemente de bază ale unor spaţii de reprezentare $SU(3)$ ireductibile.

Acţiunea $SU(3)$ definită de (103) şi (104) comută cu acţiunea grupului permutarilor setului de indici tensoriali. Astfel, ireductibili sunt numai tensorii care, ca funcţii de indici, realizează o reprezentare ireductibilă a grupului permutarilor. Asemenea tensori se obţin prin combinaţii liniare ale tensorilor de tip (I) şi (II). Tensorul rezultant trebuie să fie complet simetric sau antisimetric în raport cu permutarea unor subseturi de indici bine definite.

Obiecte având proprietăţile de transformare ale tensorilor (I.) şi (II.) apar ca elemente de bază în spaţiile obţinute în urma produsului direct multiplu al spaţiilor $V(3)$ şi $V(3^*)$, respectiv. Spaţiile

$$V(P) = V^1(3) \otimes ... \otimes V^P(3) \quad , \quad V(Q) = V^1(3^*) \otimes ... \otimes V^P(3^*) \quad , \qquad (105)$$

au ca elemente de bază tensorii

$$(a)\ T_{i_1...i_P} = x^{(1)}_{i_1}...x^{(P)}_{i_P} \quad , \quad (b)\ T^{j_1...j_Q} = y^{(1)j_1}...x^{(Q)j_Q} \quad . \qquad (106)$$

Generatorii transformărilor infinitezimale în $V(P)$ au forma

$$F_k = F^{(1)}_k \otimes I^{(2)} \otimes ... \otimes I^{(P)} + ...I^{(1)} \otimes I^{(2)} \otimes ... \otimes F^{(P)}_k \ , \qquad (107)$$

unde prin $F^{(i)}_k$, $k = 1, 8$, şi $I^{(i)}$ am notat generatorul $\mathfrak{su}(3)$, respectiv operatorul unitate, în spaţiul $V^i(3)$. Similar se defineşte acţiunea pe $V(P)$ a operatorilor $su(3)$ $\{A^i_k, i, k = 1, 2, 3\}$.

Produsul direct al vectorilor de pondere maximă $x^{(k)}_1$, $k = 1, ..., P$ reprezintă componenta tensorului $T^{\otimes_P}$,

$$T^{\otimes_P}_{11...1} = |\underline{M}\rangle = x^{(1)}_1...x^{(P)}_1 \quad , \qquad (108)$$

care este vector de pondere maximă în $V(P)$, cu $(i_3, y)_{\underline{M}} = (P/2, P/3)$. Expresiile operatorilor de reprezentare I_-, K_- sunt similare lui F_k din (107), şi sunt simetrice în raport cu $I^{(k)}_-$, $K^{(k)}_-$, $k = 1, P$. Astfel, acţiunea lor asupra componentei cu pondere maximă $T^{\otimes_P}_{11...1}$ generează componentele unui tensor simetric, ireductibil, covariant. Simetria în raport cu permutarile indicilor inferiori permite înlocuirea produsului Kronecker din (106) cu produsul Young. În produsul Young, vectorii $x^{(k)}_i$ şi $x^{(j)}_i$, din $V^k(3)$ şi $V^j(3)$, cu $k \neq j$, se consideră identici, ambii fiind notaţi cu x_i. Acest procedeu conduce la o aplicaţie $T^{\otimes_P} \to T^P$, unde T^P este un polinom de grad P în trei variabile având aceleaşi proprietăţi de transformare la $SU(3)$ ca şi elementele de bază din $V(3)$,

$$T^P_{i_1...i_P} = x_{i_1}...x_{i_P} = (x_1)^{p_1}(x_2)^{p_2}(x_3)^{p_3} \quad , \qquad (109)$$

unde p_1, p_2, p_3 sunt intregi ne-negativi astfel încât

$$p_1 + p_2 + p_3 = P \quad . \tag{110}$$

Componentele lui T^P sunt vectori proprii ai operatorilor F_3 şi F_8, şi generează o bază ortogonală în $V(P,0)$. Similar este posibil să obţinem reprezentări ireductibile echivalente cu $D(0,Q)$ pe spaţii generate de tensori simetrici contravarianţi

$$T^{Qj_1...j_Q} = y^{j_1}...y^{j_Q} = (y^1)^{q_1}(y^2)^{q_2}(y^3)^{q^3} \quad , \tag{111}$$

unde q_1, q_2, q_3 sunt întregi ne-negativi astfel încât

$$q_1 + q_2 + q_3 = Q \quad . \tag{112}$$

Generatorii $\mathfrak{su}(3)$ acţionează asupra tensorilor T^P şi T^Q ca operatori diferenţiali, complet definiţi de acţiunea lor în spaţiile $V(3)$ şi $V(3^*)$.

Dimensiunea spaţiului $V(P,0)$ este egală cu numărul componentelor tensorului T^P. Acesta este dat de numărul partiţiilor lui P în p_1, p_2, p_3, astfel încât

$$\dim V(P,0) = N_P = \sum_{p_1=0}^{P} \sum_{p_2=0}^{P-p_1} 1 = \frac{(P+1)(P+2)}{2} \quad . \tag{113}$$

Similar se obţine dimensiunea spaţiului generat de tensorul T^Q,

$$\dim V(Q,0)^* = \dim V(0,Q) = N_Q = \frac{(Q+1)(Q+2)}{2} \quad . \tag{114}$$

Reprezentări echivalente cu $D(P,Q)$ se pot obţine prin descompunerea produsului direct $D(P,0) \otimes D(Q,0)^*$. Baza spaţiului produs are forma

$$T^{j_1...j_Q}_{i_1...i_P} = (x_1)^{p_1}(x_2)^{p_2}(x_3)^{p_3}(y^1)^{q_1}(y^2)^{q_2}(y^3)^{q_3} \quad , \tag{115}$$

cu

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = P \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} q_i = Q \quad . \tag{116}$$

Acest tensor este simetric atât în raport cu permutătrile indicilor superiori, cât şi inferiori. Prin contracţie cu tensorul invariant $\delta^i_j \equiv \delta_{ij}$, se obţine şirul se tensori $T^{(k)}$,

$$T^{(k)j_{k+1}...j_Q}_{i_{k+1}...i_P} = \delta^{i_k}_{j_k} T^{(k-1)j_k...j_Q}_{i_k...i_P} \quad . \tag{117}$$

Toate spaţiile $V^{(k)}$ generate de aceştia sunt $SU(3)$ invariante, şi satisfac relaţia

$$V(P,0) \otimes V(Q,0)^* = V^{(0)} \supset V^{(1)} \supset ... \supset V^{(n)} \quad , \quad n = \min(P,Q) \ . \tag{118}$$

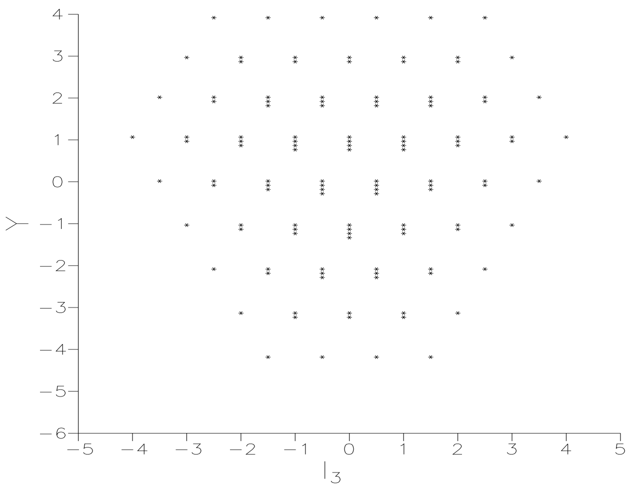


Figura 3. Diagrama de ponderi pentru reprezentarea 120-dimensională $D(5,3)$ a grupului $SU(3)$. Ponderile degenerate apar cu mici deviaţii pe direcţia axei Y de la valorile exacte.

Complementul ortogonal al spaţiului $V^{(k+1)}$ în $V^{(k)}$ în raport cu produsul scalar definit de contracţia indicilor este reprezentat de combinaţiile liniare ale tensorilor din $V^{(k)}$ care au urmă nulă în raport cu orice contracţie, şi este notat prin $V_0^{(k)}$. Astfel,

$$V^{(k)} = V_0^{(k)} \oplus V^{(k+1)} \quad , \tag{119}$$

iar

$$V(P,0) \otimes V(Q,0)^* = \sum_{k=0}^{n} V_0^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} V(P-k, Q-k) \quad . \tag{120}$$

Reprezentarea pe spaţiul $V_0^{(0)}$ este echivalentă cu $D(P,Q)$, iar

$$\dim V(P,Q) = \dim V^{(0)} - \dim V^{(1)} = N_P N_Q - N_{P-1} N_{Q-1} = \tag{121}$$

$$= \frac{(P+1)(Q+1)(P+Q+2)}{2} \quad .$$

Acesta este un caz particular al formulei generale date de Weyl pentru dimensiunile RI ale oricărui grup Lie simplu, [70]-Sect. X.13.4, [28]-Sect. VIII.8.

Diagrama ponderilor în $V(P,Q)$ se obţine scăzând din ponderea maximă $(i_3, y)_M = ((P{+}Q)/2, (P{-}Q)/3)$ combinaţiile liniare cu coeficienţi întregi ale rădăcinilor simple α_{12}, α_{13}, şi α_{32}. Această diagramă are trei axe de simetrie, şi pentru $P = 5$, $Q = 3$ este reprezentată în Figura 3. Numărul ponderilor din această diagramă este mai mic decât $\dim V(P,Q)$, iar pentru indexarea stărilor este necesar să găsim operatori suplimentari care să comute cu I_3 şi Y, dar nu cu toţi A^i_k, $i \neq k$.

Problema indexării stărilor din spaţiile de RI pentru $SU(n)$ este rezolvată de factorizarea canonică $SU(n) \supset U(1) \otimes SU(n-1)$ [68]-II. Operatorii suplimentari sunt în acest caz operatorii Casimir pentru subgrupurile $SU(k)$, $k = 2, ..., n-1$.

La $SU(3)$ drept operator suplimentar se poate alege operatorul Casimir I^2 al subalgebrei $\mathfrak{su}(2) = \{I_-, I_3, I_+\}$,

$$I^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 \quad , \tag{122}$$

pentru care

$$[I^2, F_3] = 0 \quad , \quad [I^2, Y] = 0 \quad , \quad [I^2, I_\pm] = 0 \quad . \tag{123}$$

Vectorii bazei spaţiului $V(P, Q)$ se pot indexa folosind operatorii care formează un set complet, în acest caz F, G, I^2, I_3 şi Y. Totuşi, în aplicaţii în loc de valorile proprii f şi g este mai convenabil să folosim întregii P şi Q. Ecuaţiile cu valori proprii pentru operatorii de indexare au forma II.(84)

$$I^2|PQii_3y\rangle = i(i+1)|PQii_3y\rangle \quad ,$$

$$I_3|PQii_3y\rangle = i_3|PQii_3y\rangle \quad , \quad Y|PQii_3y\rangle = y|PQii_3y\rangle \quad ,$$

iar vectorii bazei canonice sunt normaţi prin condiţia

$$\langle PQii_3y|PQi'i_3'y'\rangle = \delta_{ii'}\delta_{i_3i_3'}\delta_{yy'} \quad . \tag{124}$$

4.5 Descrierea mişcării rotaţionale colective

Fie un sistem format din N particule identice de masă M, indexate prin $j = \overline{1, N}$, aflate într-un potenţial de oscilator armonic cu pulsatia ω, având coordonatele $q_{j\mu}$ şi impulsurile $p_{j\mu}$, $\mu = 1, 2, 3$. Definim operatorii bosonici

$$\hat{b}_{j\mu}^\dagger = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(q_{j\mu} - \frac{i}{\hbar\alpha^2}\hat{p}_{j\mu}) \quad , \quad \hat{p}_{j\mu} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_{j\mu}} \quad , \quad \alpha = \sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}$$

astfel încât cei 9 operatori hermitici

$$\hat{A}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(\hat{b}_{j\mu}^\dagger\hat{b}_{j\nu} + \hat{b}_{j\nu}\hat{b}\dagger_{j\mu}) \quad , \mu, \nu = 1, 2, 3$$

satisfac relaţiile de comutare $[\hat{A}_{\mu\nu}, \hat{A}_{\sigma\rho}] = \delta_{\nu\sigma}\hat{A}_{\mu\rho} - \delta_{\mu\rho}\hat{A}_{\sigma\nu}$ ale algebrei $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$.

Hamiltonianul $\hat{H}_0 = \hbar\omega(\hat{A}_{11} + \hat{A}_{22} + \hat{A}_{33})$ comută cu toţi aceşti operatori, $[\hat{H}_0, \hat{A}_{\mu\nu}] = 0$, şi generează centrul algebrei $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$.

Definim operatorul momentului cinetic total

$$\hat{\mathbf{L}} = \sum_{j=1}^{N}\mathbf{q}_j \times \hat{\mathbf{p}}_j$$

şi operatorul cuadrupolar (ca polinom de gradul 2 în $q_{j\mu}$ şi $\hat{p}_{j\mu}$)

$$\hat{Q}_m = \hbar\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\alpha^2 \sum_{j=1}^{N} \hat{}[\mathbf{q}^2 Y_{2m}(\mathbf{n}_q) + \frac{\mathbf{p}^2}{\alpha^4\hbar^2} Y_{2m}(\mathbf{n}_p)]_j \quad , \quad m = -2, -1, 0, 1, 2$$

unde $\mathbf{n}_q = \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$, $\mathbf{n}_p = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ iar Y_{2m} sunt funcţiile sferice. Operatorul

$$\hat{C} = \frac{1}{6}\hat{Q} \cdot \hat{Q} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$$

este operator Casimir pentru subalgebra $\mathfrak{su}(3)$ generată de $\hat{A}_{\mu\nu}$ astfel încât atunci când particulele sistemului nu sunt independente, ci interacţionează printr-un termen de energie potenţială de forma $\hat{Q} \cdot \hat{Q}$, hamiltonianul

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{\chi}{2}\hat{Q} \cdot \hat{Q}$$

are un spectru de tip rotaţional, cu valorile proprii $E_{LKM} \sim L(L+1)$. Numărul cuantic $L = 0, 1, 2, ...$ descrie modulul momentului cinetic, M este proiecţia sa pe axa Z din sistemul laboratorului, iar K proiecţia pe axa Z din sistemul intrinsec. Funcţiile proprii $|LKM\rangle$ aparţin unei reprezentări ireductibile $D(P, Q)$ a grupului $SU(3)$. Dacă notăm cu $N_1 = \min(P, Q)$ şi $N_2 = \max(P, Q)$ atunci

$$K = N_1, N_1 - 2, N_1 - 4, ..., 1 \text{ sau } 0 \quad ,$$

$$L = \begin{cases} K, K+1, K+2, ..., K+N_2 & \text{pentru } K \neq 0 \\ N_2, N_2 - 1, ..., \ 1 \text{ sau } 0 & \text{pentru } K = 0 \end{cases} \quad ,$$

iar $M = -L, -L+1, ..., L-1, L$.

După cum s-a menţionat în II.2.2.2, la rotatorul rigid există două acţiuni ale grupului $SO(3, \mathbb{R})$ care comută, generate de $\mathbf{L}_s$ şi $\mathbf{L}_i$, $\mathbf{L}_s^2 = \mathbf{L}_i^2 \equiv L^2$, corespunzătoare rotaţiilor în jurul axelor din sistemul laboratorului, respectiv intrinsec, iar M şi K din funcţiile de undă cuantice D^L_{MK} sunt valorile proprii pentru $\hat{L}_{sz}$ şi $\hat{L}_{iz}$.

4.6 Modelul octet

Proprietăţile intrinseci ale constituenţilor nucleului atomic, protonul (p) şi neutronul (n), sunt descrise de mărimi fizice clasice ca masa (M), sarcina electrică (Q), momentul cinetic (J), paritatea (π). În 1932 W. Heisenberg introduce ipoteza izospinului (spinului izotopic sau izobaric), după care p şi n reprezintă două stări ale unei singure particule, nucleonul, care are un alt grad de libertate intern similar spinului, fără echivalent clasic, cu două stări staţionare $|I, I_3\rangle$ descrise de cei doi vectori de bază ai reprezentării fundamentale a grupului $SU(2)$,

$$|p\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \quad , \quad |n\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \quad .$$

Astfel, pentru proton şi neutron izospinul I este $1/2$, iar proiecţia sa I_3 pe "axa Z din izospaţiu" determină sarcina electrică (102) prin relaţia Q $= I_3 + Y/2$, unde $Y = 1$ este hipersarcina. Descoperirea de noi particule generate prin interacţii tari (hadroni) a arătat că şi Y se poate descompune sub forma $Y = B + S$, unde B şi S sunt noi numere cuantice interne, denumite sarcină barionică şi stranietate. Pentru nucleoni $B = 1$ şi $S = 0$, dar există o variatare largă de particule, denumite barioni, pentru care $B = 1$ şi $S = 0, 1, 2$.

Numerele cuantice I_3 şi Y permit clasificarea particulelor elementare folosind vectorii de pondere $|P, Q, i, i_3, y\rangle$ ai spaţiilor ireductibile de reprezentare a grupului $SU(3)$. Spaţiul de reprezentare fundamentală $V(1,0) \equiv \{3\}$ (Figura 2(A)) corespunde particulelor denumite cuarci u, d, s,

$$|u\rangle = |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \quad , \quad |d\rangle = |1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \quad , \quad |s\rangle = |1, 0, 0, 0, -\frac{2}{3}\rangle \quad ,$$

având următoarele proprietăţi:

q	M (MeV)	J	I	I_3	Q	B	S
u	5,6 $\pm 1,1$	1/2	1/2	1/2	2/3	1/3	0
d	9,9 $\pm 1,1$	1/2	1/2	-1/2	- 1/3	1/3	0
s	199 ± 33	1/2	0	0	- 1/3	1/3	-1

Antiparticulele acestora $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$,

$$|\bar{u}\rangle = |0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \quad , \quad |\bar{d}\rangle = |0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \quad , \quad |\bar{s}\rangle = |1, 0, 0, 0, \frac{2}{3}\rangle$$

au aceleasi valori pentru M, J, I, dar I_3, Q, B, S cu semn opus, şi corespund bazei spaţiului de reprezentare fundamentală $V(0,1) \equiv \{3\}^*$ (Figura 2(B)).

Cuarci liberi nu au fost observaţi, dar există nmeroase rezultate care arată că hadronii sunt compuşi din cuarci. Astfel, combinaţile $q_1\bar{q}_2$ dintre cuarci şi anticuarci reprezimtă mezoni, iar cele de trei cuarci $q_1 q_2 q_3$, barioni. Spre deosebire de cuarci, sarcina electrică a acestor particule compuse este un multiplu întreg al sarcinii elementare, în acord cu condiţia de integralitate pentru 2-formele electromagnetice ω_f, ω_f^* din Sect. I.1.4 [7]. Acest aspect este descris de numărul T denumit trialitate $T = (P - Q)$ mod 3 cu valorile $-1, 0, 1$, deoarece numai reprezentările $D(P, Q)$ pentru care $T = 0$ conţin stări cu sarcină electrică şi hipersarcină întregi, cu semnificaţie fizică.

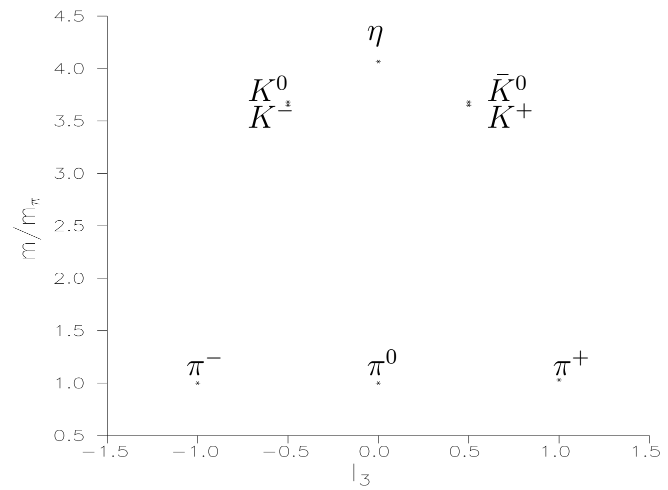


Figura 4. Masa particulelor care formează octetul mezonilor pseudoscalari (m) raportată la masa mezonului π^0 (m_π) ca funcţie de I_3.

Descompunerea produsului direct

$$D(1,0) \otimes D(0,1) = D(1,1) \oplus D(0,0)$$

($\{3\} \otimes \{3\}^* = \{8\} \oplus \{1\}$) arată că în clasificarea combinaţiilor $q_1\bar{q}_2$ intervine spaţiul de reprezentare 8-dimensional $V(1,1)$, iar mezonii

$$K^+ = u\bar{s} \quad , \quad K^- = \bar{u}s \quad , \quad K^0 = \bar{d}s \quad , \quad \bar{K}^0 = d\bar{s}$$

$$\pi^+ = u\bar{d} \quad , \quad \pi^- = \bar{u}d \quad , \quad \pi^0 = \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} \quad , \quad \eta = c_1(u\bar{u} + d\bar{d}) + c_2 s\bar{s}$$

formează un "octet". Datele obţinute experimental

	m (MeV)	J^P	I	I_3	Q	B	S	τ (10^{-10} s)
$K^\pm$	493,64	0^-	1/2	$\pm$ 1/2	± 1	0	± 1	120
$K^0_{S;L}$	497,6	0^-	1/2	-1/2	0	0	1	0,89 ; 500
$\pi^\pm$	139,56	0^-	1	± 1	± 1	0	0	260
π^0	134,97	0^-	1	0	0	0	0	8,4 $\times 10^{-7}$
η^0	548,8	0^-	0	0	0	0	0	5,5 $\times 10^{-9}$

arată că mezonul K^0 este o combinaţie cu ponderi egale a două particule instabile denumite K^0_S şi K^0_L, care diferă numai prin timpul de viaţă τ.

Masele acestor mezoni sunt reprezentate ca funcţie de I_3 în Figura 4. Pentru bosoni variabila cu semnificaţie dinamică se consideră a fi m^2, iar în cazul octetului mezonic aceasta este bine aproximată de formula Gell-Mann-Okubo

$$m^2 = m_0^2 + m_1^2[I(I+1) - \frac{Y^2}{4}] \tag{125}$$

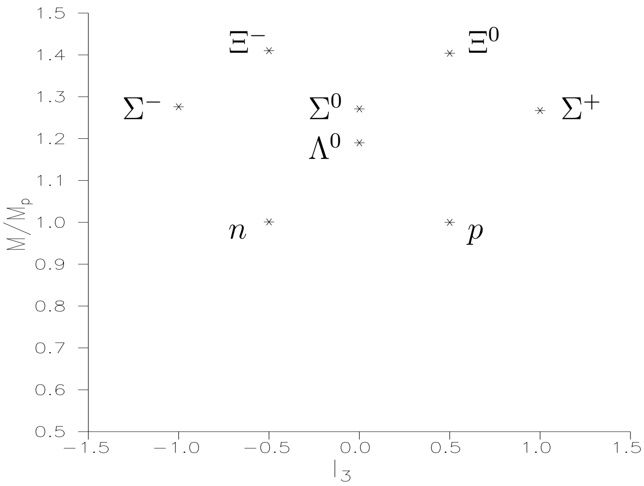


Figura 5. Masa particulelor care formează octetul barionic (M) raportată la masa protonului (M_p) ca funcţie de I_3.

unde m_0 şi m_1 sunt parametri.

Seriile Clebsch-Gordan

$$D(1,0) \otimes D(1,0) = D(2,0) \oplus D(0,1)$$

$$D(1,0) \otimes D(1,0) \otimes D(1,0) = D(3,0) \oplus D(1,1) \oplus D(1,1) \oplus D(0,0)$$

($\{3\} \otimes \{3\} \otimes \{3\} = \{10\} \oplus \{8\} \oplus \{8\} \oplus \{1\}$) arată că în clasificarea stărilor sistemului $q_1q_2q_3$ intervine spaţiul de reprezentare 10-dimensional $V(3,0)$ şi spaţiul de reprezentare 8-dimensional $V(1,1)$. Ambele au semnificaţie fizică, corespunzând decupletului barionic format din combinaţiile

$$\Delta^-(ddd) \quad \Delta^0(udd) \quad \Delta^+(uud) \quad \Delta^{++}(uuu)$$

$$\Sigma^-(dds) \quad \Sigma^0(uds) \quad \Sigma^+(uus) \quad \Xi^-(dss) \quad \Xi^0(uss) \quad \Omega^-(sss) \quad ,$$

simetrice la permutări, cu $J^P = 3/2^+$, respectiv octetului barionic cu proprietăţile:

	M (MeV)	J^P	I	I_3	Q	B	S	τ (10^{-10} s)
p (uud)	938,27	$1/2^+$	1/2	1/2	1	1	0	∞
n (udd)	939,56	$1/2^+$	1/2	-1/2	0	1	0	888,6 $\times 10^{10}$
Σ^+ (uus)	1189,37	$1/2^+$	1	1	1	1	-1	0,8
Σ^0 (uds)	1192,55	$1/2^+$	1	0	0	1	-1	7,4 $\times 10^{-10}$
Σ^- (dds)	1197,43	$1/2^+$	1	-1	- 1	1	-1	1,5
Λ^0 (uds)	1115,6	$1/2^+$	0	0	0	1	-1	2,6
Ξ^- (dss)	1321,32	$1/2^+$	1/2	-1/2	- 1	1	-2	1,6
Ξ^0 (uss)	1314,9	$1/2^+$	1/2	1/2	0	1	-2	2,9

Masa acestor particule este reprezentată ca funcţie de I_3 în Figura 5. Pentru fermioni variabila cu semnificaţie dinamică se consideră a fi M, iar în cazul octetului barionic formula de masă Gell-Mann-Okubo capătă forma

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2[I(I+1) - \frac{Y^2}{4}] \tag{126}$$

unde M_0, M_1 şi M_2 sunt parametri. Această formulă permite calculul maselor cu o precizie de $\approx 0,6\%$ din masa medie, de valoare comprabilă cu diferenţa de masă electromagnetică.

5 Algebra $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$ şi corelaţiile de 2 protoni - 2 neutroni

5.1 Sistemul rădăcinilor $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$

În reprezentarea de definiţie, generatorii $\mathfrak{so}(5)$ sunt matrici 5×5 de forma $f_{pq} = e_{pq} - e_{-q-p}$, unde indicii p şi q au valorile -2,-1,0,1,2, iar e_{pq} este matricea 5×5 având elementul din linia p şi coloana q egal cu 1, iar în rest 0. Astfel, $[e_{pq}, e_{kl}] = \delta_{qk} e_{pl} - \delta_{lp} e_{kq}$, şi relaţiile de comutare între generatorii $\mathfrak{so}(5)$ sunt

$$[f_{pq}, f_{kl}] = \delta_{qk} f_{pl} - \delta_{pl} f_{kq} + \delta_{p-k} f_{-lq} - \delta_{-ql} f_{p-k} \quad . \tag{127}$$

Subalgebra Cartan la $\mathfrak{so}(5)$ este generată de două elemente, f_{pp} şi $p = 1,2$, cu tensorul metric Cartan-Killing $(f_{pp}, f_{qq}) = 6\delta_{pq}$. Sistemul rădăcinilor $\alpha_{kl} = -\alpha_{lk}$ cu $k > -l$ are 8 elemente: 4 elemente $\alpha_{0l}(p) = -\alpha_{l0}(p) = -\delta_{lp}$, $l > 0$ şi 4 elemente

$$\alpha_{kl}(p) = \delta_{pk} - \delta_{pl} + \delta_{p-l} - \delta_{p-k} \quad .$$

Dacă se aleg pozitive rădăcinile

$$\alpha_{-12}(p) = -\delta_{p1} - \delta_{p2} \quad , \quad \alpha_{01}(p) = -\delta p1 \quad , \quad \alpha_{02}(p) = -\delta_{p2} \quad , \quad \alpha_{12}(p) = \delta_{p1} - \delta_{p2} \quad ,$$

determinate prin

$$[f_{pp}, f_{kl}] = (\delta_{pk} - \delta_{pl}) f_{kl} \quad , \quad \text{pentru } k > 0, \ l > k$$

$$[f_{pp}, f_{kl}] = -(\delta_{p|k|} + \delta_{pl}) f_{kl} \quad , \quad \text{pentru } -l < k < 0, \ l > 0$$

$$[f_{pp}, f_{0l}] = -\delta_{pl} f_{0l} \quad ,$$

atunci rădăcinile simple sunt α_{01} şi α_{12}. În raport cu f_{22} şi f_{11} ca elemente de bază ale subalgebrei Cartan, diagrama rădăcinilor este reprezentată în Figura 6 [61].

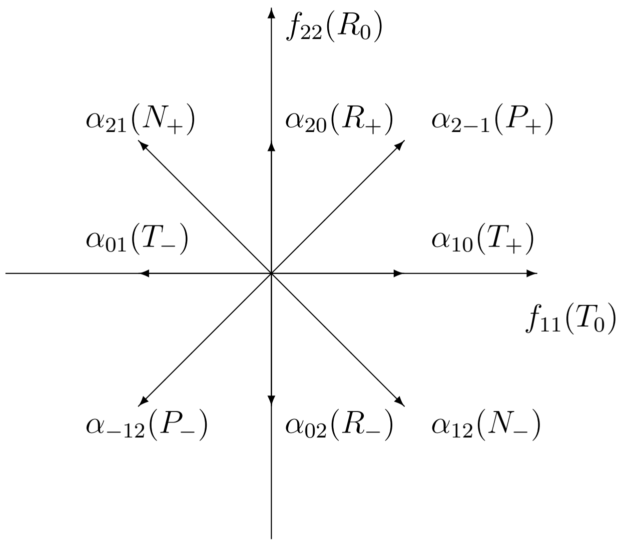


Figura 6. Diagrama rădăcinilor algebrei $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$. Unitatea de lungime pe direcţia axelor f_{11} şi f_{22} este $1/\sqrt{6}$.

Algebra $\mathfrak{so}(5)$ este semisimplă de rang 2, şi reprezentările sale ireductibile se pot indexa folosind numerele întregi $[N_1, N_2]$, $N_1 \geq N_2 \geq 0$ ale diagramei Young asociate, sau prin valorile proprii ale generatorilor subalgebrei Cartan pentru vectorii de pondere maximă. Dacă aceasta este $|M\rangle$, atunci similar cazului $\mathfrak{su}(3)$, stările $|klm\rangle$

$$|klm\rangle = (f_{2-1})^k (f_{21})^l (f_{20})^m |M\rangle \quad , \tag{128}$$

cu $k + l + m \leq 2\Omega$ vor genera spaţiul V_Ω, purtător al reprezentării ireductibile simetrice $[\Omega, 0]$ de dimensiune

$$\dim[\Omega, 0] = \frac{1}{6}(2\Omega + 3)(\Omega + 2)(\Omega + 1) \quad . \tag{129}$$

Acţiunea generatorilor asupra stărilor (ne-ortonormate) (128) se exprimă prin $f_{2-1}|klm\rangle = |k+1lm\rangle$, $f_{21}|klm\rangle = |kl+1m\rangle$, $f_{20}|klm\rangle = |klm+1\rangle$, şi

$$f_{-12}|klm\rangle = -k(k+m-\Omega-1)|k-1lm\rangle + m(m-1)|kl+1m-2\rangle \quad ,$$

$$f_{12}|klm\rangle = -l(l+m-\Omega-1)|kl-1m\rangle + m(m-1)|k+1lm-2\rangle \quad ,$$

$$f_{02}|klm\rangle = kl|k-1l-1m+1\rangle - 2m(k+l-\Omega+\frac{m-1}{2})|klm-1\rangle \quad .$$

5.2 Descrierea corelaţiilor 2p-2n

La descrierea interacţiunilor dintre perechi de particule intervin şi termeni mai complicaţi decât II.(73), cum ar fi

$$H_4 \sim \sum V_{ijklpqrs} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k^\dagger c_l^\dagger c_p c_q c_r c_s \quad . \tag{130}$$

În fizica nucleară, primele încercări de a defini o interacţiune izoscalară de acest tip au avut la bază proprietăţile algebrice ale operatorilor de perechi II.(69) de a avea relaţii de comutare închise cu operatorii de izospin. Cu notaţia (a,m), $a \equiv (n,l,j)$, pentru stările de model în pături (n,l,j,m), operatorii care generează perechi $J^P = 0^+$ proton-proton, neutron-neutron şi proton-neutron P_+, N_+, R_+, sunt:

$$P_+ = \frac{1}{2}\sum_{a,m} s_{am} c_{pam}^\dagger c_{pa-m}^\dagger \quad , \quad s_{am} = (-1)^{j-m} \tag{131}$$

$$N_+ = \frac{1}{2}\sum_{a,m} s_{am} c_{nam}^\dagger c_{na-m}^\dagger \tag{132}$$

$$R_+ = \frac{1}{2}\sum_{a,m} s_{am} c_{pam}^\dagger c_{na-m}^\dagger \quad . \tag{133}$$

Dacă prin P_-, N_-, R_- vom nota operatorii conjugaţi hermitic, atunci

$$[P_+, P_-] = 2P_0 \quad , \quad [N_+, N_-] = 2N_0 \quad , \quad [R_+, R_-] = 2R_0 \quad , \tag{134}$$

iar fiecare set (P_-, P_0, P_+), (N_-, N_0, N_+), (R_-, R_0, R_+), cu

$$P_0 = \frac{1}{2}\sum_{a,m}(c_{pam}^\dagger c_{pam} - \frac{1}{2}) \tag{135}$$

$$N_0 = \frac{1}{2}\sum_{a,m}(c_{nam}^\dagger c_{nam} - \frac{1}{2}) \tag{136}$$

$$R_0 = \frac{1}{2}\sum_{a,m}(c_{pam}^\dagger c_{pam} + c_{nam}^\dagger c_{nam} - 1) \tag{137}$$

generează o algebră $\mathfrak{su}(2)$. Mai mult, dacă (T_-, T_0, T_+) sunt operatorii de izospin (I_-, I_3, I_+) din secţiunea anterioară în reprezentarea numerelor de ocupare,

$$T_+ = \sum_{a,m} c_{pam}^\dagger c_{nam} \quad , \quad T_- = \sum_{a,m} c_{nam}^\dagger c_{pam} \tag{138}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{a,m}(c_{pam}^\dagger c_{pam} - c_{nam}^\dagger c_{nam}) \tag{139}$$

atunci $(P_\pm, N_\pm, R_\pm, T_\pm, P_0, N_0)$ generează algebra $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$ [77].

Corespondenţa dintre generatorii reprezentării de definiţie a $\mathfrak{so}(5)$ şi realizarea prin operatori fermionici este

$$f_{22} = P_0 + N_0 \quad , \quad f_{11} = P_0 - N_0 \quad . \tag{140}$$

pentru elementele subalgebrei Cartan şi

$$f_{21} = N_+ \quad , \quad f_{20} = R_+/\sqrt{2} \quad , \quad f_{2-1} = P_+ \quad , \quad f_{10} = T_+/\sqrt{2}$$

pentru generatorii cu rădăcini negative. Alegând vacuumul de particule $|0\rangle$ anihilat de P_-, R_-, N_- ca vector de pondere maximă, baza simetrică (128) capătă forma

$$|klm\rangle = (P^\dagger)^k (N^\dagger)^l (R^\dagger)^m |0\rangle \quad .$$

Pentru indexarea stărilor acestei reprezentări ireductibile este nevoie de trei indici. Unul dintre aceştia este numărul total de particule $2(k+l+m)$, care ia valori cuprinse între 0 şi 4Ω, iar altul este valoarea proprie $k-l$ a lui T_0. Alegerea celui de-al treilea este o problemă veche dificilă, deoarece setul tuturor stărilor posibile $|klm\rangle$ la valori N şi $k-l$ date este neortogonal şi supracomplet [77]. De exmplu, există o amplitudine nenulă $\langle kk0|002k\rangle = (2k)!k!\Omega!/(\Omega-k)!$ de a recupla $2k$ perechi proton-neutron în k perechi protonice şi k perechi neutronice. O bază a spaţiilor de reprezentare ireductibilă $[\Omega, 0]$ se poate obţine prin proiecţie din vectorul de pondere maximă folosind stări coerente vectoriale [78, 79]. În [80] baza a fost construită numeric, prin restrângerea setului supracomplet (128) folosind metoda Gramm-Schmidt.

Cei trei operatori care comută $\mathcal{P}^\dagger_{-1} = P_+$, $\mathcal{P}^\dagger_0 = R_+/\sqrt{2}$, $\mathcal{P}^\dagger_1 = N_+$ sunt componentele unui vector de izospin, iar cuplajul la operatorul monopolar $Q^\dagger_0 = 2\sqrt{3}[\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}^\dagger]_{00}$ a fost folosit în [81] pentru a defini interacţiunea de patru particule de "cuadrupling" $H_Q = -G_Q Q^\dagger_0 Q_0/4$, separabilă în factori de tip 2 particule - 2 particule.

O altă alegere, prezentată în [82, 83] se obţine prin cuplajul izovectorului $\mathcal{P}^\dagger_\mu$ cu conjugatul sau hermitic $\mathcal{P}_\mu$ pentru a forma un cuadrupol de izospin $Q_{2\mu} = [\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}]_{2\mu}$. Astfel, se poate defini o interacţiune izoscalară de patru particule separabilă în factori de tip 2 particule - 2 goluri,

$$H_4 = -G_4\sqrt{5}[Q_2 Q_2]_{00} = -G_4 \sum_{\mu=-2}^{2} Q^\dagger_{2\mu} Q_{2\mu} \quad . \tag{141}$$

Cu aceasta hamiltonianul microscopic total, care include şi termenul uzual biparticulă, devine $H = H_0 + H_2 + H_4$, unde

$$H_0 = \sum_{a,m} (\epsilon_{pa} c^\dagger_{pam} c_{pam} + \epsilon_{na} c^\dagger_{nam} c_{nam}) \quad , \quad H_2 = -G_p P_+ P_- - G_n N_+ N_- \quad . \tag{142}$$

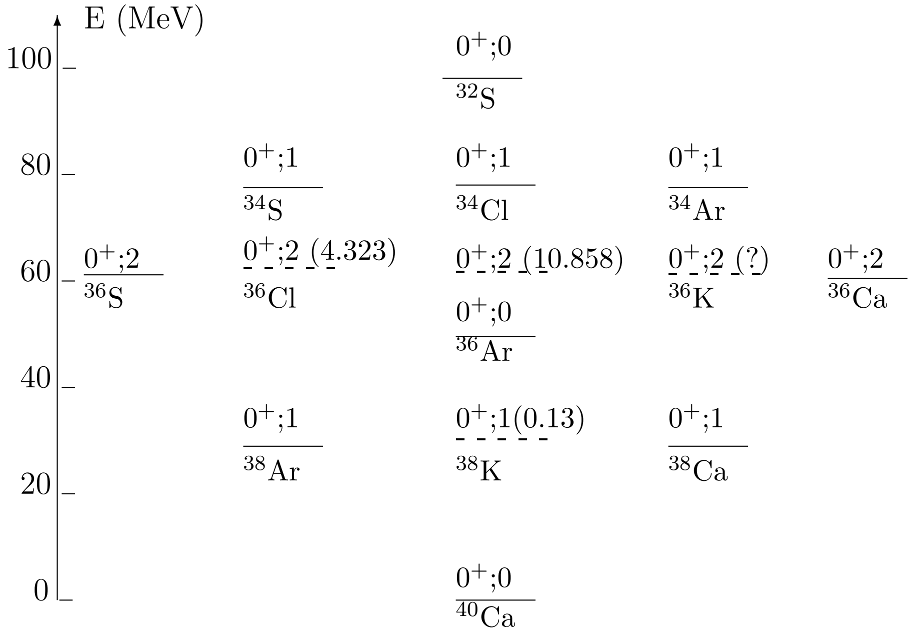


Figura 7. Multipletul $\mathfrak{so}(5)$ al stărilor (J$^\pi$,I) fundamentale (___) şi excitate (− − −) pentru nucleele la care se completează nivelul de valenţă $1d_{3/2}$. Unde există date, energiile de excitaţie în raport cu starea fundamentală ($(2^+;1)$ pentru ^{36}Cl, ^{36}K şi $(3^+;0)$ pentru ^{38}K) sunt specificare în paranteze rotunde (MeV) [82].

Relevanţa acestui hamiltonian şi a simetriei $SO(5)$ în clasificarea datelor experimentale se poate observa la nucleele uşoare care au perechi de protoni şi neutroni pe acelaşi nivel $2j+1$-degenerat. Astfel, stările 0^+ de joasă energie ale nucleelor care completează nivele cu $j = 3/2$, cum ar fi $1p_{3/2}$, $1d_{3/2}$ şi $2p_{3/2}$ se pot atribui vectorilor de pondere ai repezentării ireductibile 14-dimensionale $[2,0]$ pentru $\mathfrak{so}(5)$ ([84] şi independent în [82]). În aceşti multipleţi sunt incluse atât stări fundamentale cât şi stări excitate, iar Figura 7 prezintă energiile lor relative cu corecţii coulombiene. Valorile experimentale ale energiilor de legătură şi de excitaţie provin din [85, 86]. Starea fundamentală de referinţă $|\tilde{0}\rangle$ în acest caz este nucleul $|^{32}\mathrm{S}\rangle$, iar nivelul complet ocupat prin adăugarea a 2 perechi pp şi 2 perechi nn corespunde nucleului ^{40}Ca.

Cu o singură pereche nn, np sau pp se obţin nucleele

$$|^{34}\mathrm{S}\rangle \sim N_+|\tilde{0}\rangle \quad , \quad |^{34}\mathrm{Cl}\rangle \sim R_+|\tilde{0}\rangle \quad , \quad |^{34}\mathrm{Ar}\rangle \sim P_+|\tilde{0}\rangle$$

cu energie mai joasă decât ^{32}S, dar practic identică, explicabilă prin termenul H_2. La adăugarea unei noi perechi nn la ^{34}S sau pp la ^{34}Ar se observă o nouă scădere a energiei cu aproximativ acelaşi interval, obţinând ^{36}S şi ^{36}Ca. Totuşi, o scădere semnificativă apare la ^{36}Ar, rezultat din ^{32}S tot prin adăugarea a două perechi, dar de tip diferit, pp şi nn. Această scădere este explicabilă prin efectele termenului de interacţiune H_4, care printr-o rupere spontană a simetriei de izospin capătă forma liniarizată [82, 53]

$$H_g = -2G_4(q_2^* N_+ P_- + q_2 N_- P_+) \quad , \tag{143}$$

unde $q_2 = \langle \tilde{0} | N_+ P_- | \tilde{0} \rangle \neq 0$ este parametrul de câmp mediu.

6 Mezonul π ca mod Goldstone pentru ruperea simetriei chirale

Pentru particula relativistă cu spin 1/2 de masă nulă ($M = 0$) descrisă de ecuaţia Dirac II.(55)

$$i\hbar \partial_t \psi_D = 2c\hat{\gamma}^5 \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_D \tag{144}$$

se introduce operatorul elicitate $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$, cu valori proprii $\pm\hbar/2$, corespunzatoare proiecţiei spinului pe direcţia de mişcare. De exemplu, pentru neutrin (ν) $\epsilon_\nu = -\hbar/2$, iar pentru antineutrin ($\bar{\nu}$) $\epsilon_{\bar{\nu}} = \hbar/2$.

Chiralitatea χ se defineşte prin relaţia $\chi = 2\epsilon/\hbar$ pentru particulă şi $\chi = -2\epsilon/\hbar$ pentru antiparticulă, astfel încât $\chi_\nu = \chi_{\bar{\nu}} = -1$. Operatorul asociat $\hat{\chi}$ admite o reprezentare independentă de $\hat{\mathbf{p}}$,

$$\hat{\chi} = \hat{\gamma}^5 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\mathbb{I}} \\ \hat{\mathbb{I}} & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

asociată unei reprezentări unitare a grupului $U(1)$ prin transformarile de chiralitate globale

$$\psi'_D = \hat{U}_\chi \psi_D \quad , \quad \hat{U}_\chi = e^{i\alpha\hat{\gamma}^5} \quad . \tag{145}$$

La aceste transformări ecuaţia (144) rămane invariantă, dar nu şi II.(55), din cauza termenului de masă. Dacă notăm $\bar{\psi}_D \equiv \psi_D^\dagger \gamma^0$, observăm că [87]

$$\bar{\psi}'_D \psi'_D = \cos 2\alpha \bar{\psi}_D \psi_D + i \sin 2\alpha \bar{\psi}_D \hat{\gamma}^5 \psi_D \quad ,$$

$$\bar{\psi}'_D \hat{\gamma}^5 \psi'_D = i \sin 2\alpha \bar{\psi}_D \psi_D + \cos 2\alpha \bar{\psi}_D \hat{\gamma}^5 \psi_D \quad ,$$

astfel încât combinaţia $(\bar{\psi}_D \psi_D)^2 + (i\bar{\psi}_D \hat{\gamma}^5 \psi_D)^2$ rămâne invariantă.

Pentru o particula de masă finită stările proprii de chiralitate dată $\chi = 1$ (R, dreaptă) şi $\chi = -1$ (L, stângă) se pot obţine dintr-o stare ψ_D oarecare folosind operatorii de proiecţie $\hat{P}_\pm = (1 \pm \hat{\gamma}^5)/2$. În modelul standard componentele (L) ale cuarcilor şi leptonilor apar ca dubleţi de izospin, iar (R) apar ca singleţi. Interacţiunile tari au o simetrie mai ridicată decât cea de izospin, deoarece există practic două grupuri de izospin (sau două acţiuni) independente pentru componentele L şi R. Astfel, când masa $M = 0$ grupul de simetrie chirală este $G_\chi = SU(2)_R \times SU(2)_L$. La dubletul de izospin

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{Du} \\ \psi_{Dd} \end{bmatrix} \quad ,$$

format din stările ψ_{Du} şi ψ_{Dd} pentru cuarcii u şi d, se pot introduce transformări unitare de izospin vectoriale (V) şi axiale (A) independente, prin operatorii

$$\hat{U}_V = e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\hat{\tau}}} \quad , \quad \hat{U}_A = e^{i\vec{\varphi}'\cdot\vec{\hat{\tau}}\hat{\gamma}^5} \quad ,$$

unde $\vec{\hat{\tau}}$ sunt matricile Pauli II.(59) pentru izospin.

În modelul Nambu-Jona-Lasinio (NJL) [87] se studiază densitatea de lagrangean

$$L = i\bar{\Psi}\gamma \cdot \partial\Psi - g[(\bar{\Psi}\Psi)^2 + (i\bar{\Psi}\hat{\gamma}^5\vec{\hat{\tau}}\Psi)^2] \quad ,$$

invariantă la ambele transformări. Dacă în starea de vacuum valorile medii

$$\sigma = \langle 0|\bar{\Psi}\Psi|0\rangle \quad , \quad \vec{\pi} = i\langle 0|\bar{\Psi}\hat{\gamma}^5\vec{\hat{\tau}}\Psi|0\rangle$$

sunt nenule, atunci prin liniarizare

$$L \simeq i\bar{\Psi}\gamma \cdot \partial\Psi - g[\bar{\Psi}\Psi\sigma + i\bar{\Psi}\hat{\gamma}^5\vec{\hat{\tau}}\Psi \cdot \vec{\pi}]$$

şi transformarea unitară $\Psi_W = \hat{U}_A\Psi$, $\hat{U}_A = \sqrt{\hat{A}}$,

$$\hat{A} = \frac{\sigma + i\hat{\gamma}^5\vec{\hat{\tau}} \cdot \vec{\pi}}{f_\pi} \quad , \quad f_\pi = \sqrt{\sigma^2 + \vec{\pi}^2}$$

se pot introduce noi cuarci cu masa $M = gf_\pi$ descrişi de densitatea

$$L' = i\bar{\Psi}_W\gamma \cdot \partial\Psi_W - M\bar{\Psi}_W\Psi_W$$

şi un câmp izovectorial $\sim \vec{\pi}$ fără masă, care poate fi asociat mezonilor π.

IV. Anexe

Anexa 1: Derivata Lie şi derivata covariantă

Fie $\chi(M) \subset TM$ spaţiul câmpurilor vectoriale pe varietatea netedă n-dimensională M, iar $\mathcal{F}(M)$ mulţimea funcţiilor reale netede pe M. În sistemul de coordonate locale $\{u_i, i = \overline{1,n}\}$ pe $U \subset M$ câmpul $X \in \chi(M)$ este reprezentat de un operator diferenţial liniar

$$X = \sum_i X_i \partial_i \quad , \quad X_i \in \mathcal{F}(U) \quad , \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial u_i} \quad .$$

Derivata Lie $\mathrm{L}_X f$ a funcţiei $f \in \mathcal{F}(M)$ în raport cu X este tot o funcţie din $\mathcal{F}(M)$, definită intrinsec prin relaţia[23] $\mathrm{L}_X f = i_X df = df(X)$ sau local prin

$$\mathrm{L}_X f = \sum_i X_i \partial_i f \quad .$$

Derivata Lie $\mathrm{L}_X Y$ a câmpului $Y \in \chi(M)$ în raport cu X este tot un câmp din $\chi(M)$, definit intrinsec prin relaţia de comutare

$$\mathrm{L}_X Y = [X, Y] = -[Y, X] \quad , \quad \mathrm{L}_{[X,Y]} = [\mathrm{L}_X, \mathrm{L}_Y] \quad ,$$

sau local prin

$$\mathrm{L}_X Y = \sum_{i,j} [X_i(\partial_i Y_j) - Y_i(\partial_i X_j)]\partial_j \quad .$$

Dacă $B(M)$ este un fibrat vectorial d-dimensional pe M, pentru $X \in \chi(M)$ se poate introduce derivata covariantă ("conexiunea") $\nabla : \chi(M) \mapsto End(B)$ ca aplicaţie liniară $X \mapsto \nabla_X$, astfel încât $\nabla_{X+Y} = \nabla_X + \nabla_Y$ şi

$$\nabla_X(f\xi) = (\mathrm{L}_X f)\xi + f\nabla_X \xi \quad , \quad f \in \mathcal{F}(M) \quad , \quad \xi \in B(M) \quad .$$

În raport cu o bază locală $\{\xi_i, i = \overline{1,d}\}$ în $B_m, m \in U \subset M$ şi un sistem de coordonate $\{u_i, i = \overline{1,n}\}$ pe U

$$\nabla_{\partial_i} \xi_j = \sum_{k=1}^{d} \Gamma_{ij}^k \xi_k \quad ,$$

unde Γ_{ij}^k sunt coeficienţii de conexiune afină (simbolurile Christoffel). În particular, dacă $B(M) = TM$ este fibratul tangent şi $X, Y \in \chi(M)$, într-un sistem local de coordonate carteziene avem $\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$ şi

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^{n} X_i(\partial_i Y_j)\partial_j \quad , \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad .$$

[23] Caz particular al identităţii pentru k-forme $\mathrm{L}_X = i_X d + d i_X$.

Atunci când TM are o structură metrică indusă de forma biliniară simetrică $g : TM \times TM \mapsto \mathbb{R}$ ("tensorul metric" $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = g_{ji}$) ∇-invariantă,

$$\mathrm{L}_X g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad ,$$

coeficienţii Γ sunt complet determinaţi de g prin I.(12), iar ∇ este o conexiune riemanniană. Derivata covariantă a vectorului $X \in TM$ în lungul unei curbe $\gamma \subset M$ se defineşte prin

$$\frac{DX}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} X \quad ,$$

iar "geodezicele" pe M sunt curbele pentru care $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$.

De exemplu, pentru $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, se pot introduce coordonate carteziene $\mathbf{q} = (x,y,z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, sau coordonate sferice $(u_1,u_2,u_3) \equiv (r,\theta,\varphi)$ astfel încât

$$\mathbf{q} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \quad .$$

Aceste sisteme sunt asociate unor câmpuri din $\chi(\mathbb{R}^3)$, de vectori tangenţi la curbele de coordonate, determinate de acţiunea grupului translaţiilor sau a grupului rotaţiilor pe $\mathbb{R}^3$ ca spaţiu afin [34]. Vectorii locali tangenţi la curbele de coodonate sferice $\mathbf{t}_i \equiv \partial_{u_i}\mathbf{q}$ [88] se exprimă în baza carteziană prin relaţiile de transformare

$$\mathbf{t}_r = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z \quad ,$$

$$\mathbf{t}_\theta = r\cos\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + r\cos\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y - r\sin\theta\mathbf{e}_z \quad ,$$

$$\mathbf{t}_\varphi = -r\sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_x + r\sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_y \quad ,$$

aceleaşi ca pentru elementele corespunzatoare din $\chi(\mathbb{R}^3)$,

$$\partial_r = \sin\theta\cos\varphi\partial_x + \sin\theta\sin\varphi\partial_y + \cos\theta\partial_z \quad ,$$

$$\partial_\theta = r\cos\theta\cos\varphi\partial_x + r\cos\theta\sin\varphi\partial_y - r\sin\theta\partial_z \quad ,$$

$$\partial_\varphi = -r\sin\theta\sin\varphi\partial_x + r\sin\theta\cos\varphi\partial_y \quad .$$

Dacă notăm $\nabla_u \equiv \nabla_{X_u}$, cu $X_u = \partial_u$, atunci

$$\nabla_r\partial_r = 0 \quad , \quad \nabla_\theta\partial_r = \frac{1}{r}\partial_\theta \quad , \quad \nabla_\varphi\partial_r = \frac{1}{r}\partial_\varphi \quad ,$$

$$\nabla_r\partial_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta \quad , \quad \nabla_\theta\partial_\theta = -\partial_r \quad , \quad \nabla_\varphi\partial_\theta = \nabla_\theta\partial_\varphi = \cot\theta\partial_\varphi \quad ,$$

$$\nabla_r\partial_\varphi = \frac{1}{r}\partial_\varphi \quad , \quad \nabla_\varphi\partial_\varphi = -r\sin^2\theta\partial_r - r\sin\theta\cos\theta\partial_\theta \quad ,$$

astfel încât $\Gamma^r_{rr} = \Gamma^\theta_{rr} = \Gamma^\phi_{rr} = 0$, $\Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = 1/r$, $\Gamma^r_{\theta\theta} = -r$, $\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot\theta$, $\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta$, $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -r\sin\theta\cos\theta$, iar geodezicele sunt razele $r\mathbf{t}_r$. Pe sfera S^2 de rază unitate cu metrica $g_{\theta\theta} = 1$, $g_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta$, $g_{\theta\varphi} = 0$ indusă din $\mathbb{R}^3$ coeficienţii I.(12) conduc la

$$\nabla_\varphi \partial_\varphi = -\sin\theta\cos\theta\partial_\theta \quad , \quad \nabla_\theta\partial_\varphi = \nabla_\varphi\partial_\theta = \cot\theta\partial_\varphi \quad , \quad \nabla_\theta\partial_\theta = 0 \quad ,$$

iar geodezicele sunt cercurile tangente la ∂_θ plus cercul $\{\varphi \in [0, 2\pi], \theta = \pi/2\}$.

Curbura conexiunii afine ∇ este dată de expresia

$$\Omega(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} \quad , \quad \Omega(\partial_l, \partial_m)\partial_k = \sum_i R^i_{klm}\partial_i \quad ,$$

unde R^i_{klm} este tensorul Riemann.

Definirea metricii pe (M, g) presupune şi alegerea unui etalon de lungime local, care poate să difere de la punct la punct. Existenţa unui etalon ℓ variabil poate fi descrisă introducând o "conxiune metrică" $\tilde{\nabla}$, astfel încât $\tilde{\nabla}_X \ell^2 = -\alpha(X)\ell^2$, unde $\alpha \in T^*(M)$ este o 1-formă asociată conexiunii. Local, $\alpha = \sum_i A_i dx_i$, iar la transformarea de etalon $\ell \to \ell' = \sqrt{\lambda}\ell$ [89, 90]

$$g \to g' = \lambda g \quad , \quad A_i \to A'_i = A_i - \partial_i \ln\lambda \quad .$$

Anexa 2: Acţiunile adjuncte ale grupurilor [91]

Fie G group Lie, şi $M = T^*G$. Translaţiile la stânga (L) şi la dreapta (R) pe G se definesc prin $L_a(h) = ah$, şi $R_a(h) = ha$, respectiv, iar $\tilde{R}_a = R_{a^{-1}}$ este acţiunea la dreapta. Pentru $\xi_h \in T_hG$ obţinem

$$T_hL_a\xi_h \in T_{ah}G \quad , \quad T_hR_a\xi_h \in T_{ha}G \quad ,$$

iar pentru $\alpha \in T^*_hG$,

$$T_{ah}L^*_{a^{-1}}\alpha_h \in T^*_{ah}G \quad , \quad T_{ha^{-1}}R^*_a\alpha_h \in T^*_{ha^{-1}}G \quad .$$

Notăm cu $\Phi^\ell_a = TL^*_{a^{-1}}$ şi $\Phi^r_a = TR^*_a$ acţiunile induse de L şi $\tilde{R}$ pe M. Fie $\Psi : M \mapsto G \times \mathfrak{g}^*$ aplicaţia

$$\Psi(\alpha_a) = (a, T_eL^*_a\alpha_a) = (a, \Phi^\ell_{a^{-1}}\alpha_a) \in G \times \mathfrak{g}^* \quad .$$

În harta $\Psi(M)$, (a "coordonatelor intrinseci"), acţiunile Φ^ℓ şi Φ^r sunt reprezentate de acţiunile notate λ şi ρ, respectiv,

$$\Psi(\Phi^\ell_a\alpha_h) \equiv \lambda_a\Psi(\alpha_h) \quad , \quad \Psi(\Phi^r_a\alpha_h) \equiv \rho_a\Psi(\alpha_h) \quad ,$$

date de

$$\lambda_a(h, \mu) = (ah, \mu) \quad , \quad \rho_a(h, \mu) = (ha^{-1}, Ad^*_{a^{-1}}\mu) \quad ,$$

unde

$$Ad^*_{a^{-1}} = \Phi^r_a \Phi^\ell_{a^{-1}} = T_e(L_{a^{-1}}R_a)^* \quad .$$

Proiecţiile pe TG ale generatorilor infinitezimali pentru aceste acţiuni sunt

$$\xi^\ell_G(a) = T_e R_a \xi \quad , \quad \xi^r_G(a) = -T_e L_a \xi \quad .$$

astfel încât aplicaţiile moment în $\alpha_a = \Phi^\ell_a \mu$ au forma

$$J^\ell_{\alpha_a} \cdot \xi = \alpha_a(\xi^\ell_G(a)) = T_e R^*_a \alpha_a(\xi) = (Ad^*_{a^{-1}}\alpha) \cdot \xi \quad ,$$

$$J^r_{\alpha_a} \cdot \xi = \Phi^\ell_a \mu(\xi^r_G(a)) = -(\Phi^\ell_{a^{-1}} \Phi^\ell_a \mu)(\xi) = -\mu \cdot \xi \quad ,$$

sau

$$J^\ell(a,\mu) = Ad^*_{a^{-1}}\mu \quad , \quad J^r(a,\mu) = -\mu \quad .$$

Aceste aplicaţii sunt echivariante, deoarece

$$J^\ell(\lambda_a(h,\mu)) = Ad^*_{a^{-1}} J^\ell(h,\mu) \quad , \quad J^r(\rho_a(h,\mu)) = Ad^*_{a^{-1}} J^r(h,\mu) \quad .$$

Ca exemplu, să considerăm

$$G = SU(2) = \{ \begin{bmatrix} z_0 & z_1 \\ -\bar{z}_1 & \bar{z}_0 \end{bmatrix} ; |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\} \simeq \mathrm{S}^3 \subset \mathbb{C}^2. \tag{1}$$

Algebra $\mathfrak{su}(2) \equiv T_e SU(2)$ constă din matricile

$$x_a = -\frac{\mathrm{i}}{2} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 - \mathrm{i}a_3 \\ a_2 + \mathrm{i}a_3 & -a_1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_i E_i$$

cu $(a_1, a_2, a_3) \equiv \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ şi $[E_i, E_j] = \epsilon_{ijk} E_k$.

Câmpurile invariante la dreapta (stânga) Y_a (Z_a) generate de $x_a \in \mathfrak{g}$ sunt [21]

$$Y_a = -\frac{\mathrm{i}}{2}[(a_1 z_0 - (a_2 - \mathrm{i}a_3)\bar{z}_1)\partial_{z_0} + (a_1 z_1 + (a_2 - \mathrm{i}a_3)\bar{z}_0)\partial_{z_1}] + c.c. \tag{2}$$

$$Z_a = -\frac{\mathrm{i}}{2}[(a_1 z_0 + (a_2 + \mathrm{i}a_3) z_1)\partial_{z_0} + (-a_1 z_1 + (a_2 - \mathrm{i}a_3) z_0)\partial_{z_1}] + c.c. \tag{3}$$

unde prin *c.c.* am notat conjugatul complex al termenului precedent. Pentru $\forall x_a, x_b \in \mathfrak{su}(2)$, $[x_a, x_b] = x_c$, se verifică relaţiile

$$[Z_a, Z_b] = Z_c \quad , \quad [Y_a, Y_b] = -Y_c \quad , \quad [Z_a, Y_b] = 0 \quad .$$

Anexa 3: Folieri unidimensionale care nu sunt fibrări [91]

1. *Curentul liniar pe torul 2-dimensional*

Fie $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ torul 2-dimensional, cu coordonatele

$$[x, y] = (x, y)\mathrm{mod}\mathbb{Z}^2 \quad , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

O acţiune $\Phi_t : T \mapsto T$, $t \in \mathbb{R}$ a lui $\mathbb{R}$ pe T se poate defini prin

$$\Phi_t[x,y] = [x + at, y + bt] \quad ,$$

unde a, b sunt constante reale. Astfel, $\{\Phi_t[x,y]/t \in \mathbb{R}\}$ este foaia prin $[x,y]$. Când raportul a/b este iraţional, oricare asemenea orbită este densă pe tor. Fie $\bar{M}$ spaţiul foilor folierii, şi $\pi : T \mapsto \bar{M}$,

$$\pi[x,y] = \{\Phi_t[x,y]/t \in \mathbb{R}\} \quad ,$$

proiecţia pe $\bar{M}$. Presupunând că există o topologie pe $\bar{M}$ în raport cu care π este continuă, fie U o mulţime deschisă din $\bar{M}$. Dacă $U \neq \emptyset$, atunci $\pi^{-1}(U) = T$, astfel încât $U = \bar{M}$. Rezultă că singura topologie admisibilă pe $\bar{M}$ este cea trivială.
2. *Orbitele* S^1 *pe banda Möbius*
Fie $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ acţiunea lui $\mathbb{Z}$ pe $\mathbb{R}^2$ dată de

$$\varphi_n(x,y) = A^n(x,y) \quad , n \in \mathbb{Z}, \quad A(x,y) = (x+1, -y) \quad .$$

Astfel, banda Möbius $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, cu punctele

$$[x,y] = \{\varphi_n(x,y)/n \in \mathbb{Z}\} \in M \quad ,$$

este fibrat pe cercul S^1, cu proiecţia $\pi : M \mapsto S^1$,

$$\pi[x,y] = x \mathrm{mod}\ \mathbb{Z} \quad .$$

Fie $\Phi : G \times M \mapsto M$ acţiunea cercului $G = \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ pe M dată de

$$\Phi_t[x,y] = [x+t, y] \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad .$$

Orbitele lui G pe M sunt acoperiri duble pentru cercul central $\mathrm{S}^1 = \Phi_{\mathbb{R}}[x,0]$, iar $\bar{M} = M/G$ este o semidreaptă. Poate fi parametrizată de $y \geq 0$, dar nu este o varietate în apropiere de $y = 0$.

Anexa 4: Algebrele Lie semisimple clasice [91]
Descompunerea după spaţiul rădăcinilor $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$ a unei algebre Lie semisimple complexe $\mathfrak{g}$ în raport cu reprezentarea adjunctă ($ad_x y = [x,y]$) a subalgebrei Cartan $\mathfrak{h}$ conduce la baza Weyl $\{h_i, e_\alpha, i = 1, \mathrm{rang}(\mathfrak{g}), \alpha \in \mathfrak{h}^*\}$, cu

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha \quad , \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = (e_\alpha, e_{-\alpha}) h_\alpha \quad .$$

Aici $(x,y) \equiv Tr(ad_x ad_y)$ este forma (nedegenerată) Cartan-Killing , $\alpha(h) \equiv (h_\alpha, h)$, $(\alpha, \beta) \equiv (h_\alpha, h_\beta)$ (III.(69). Dacă $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ este o baza ordonată în $\mathfrak{h}^*$, atunci $\beta = \sum_i c_i \alpha_i$ se numeşte pozitivă ($\in \Sigma$) dacă primul coeficient $c_i \neq 0$ este pozitiv, şi simplă dacă este pozitivă, dar nu sumă de rădăcini pozitive. Pentru rădăcinile simple β_i, β_j, elementele matricii Cartan $A_{ij} = 2(\beta_i, \beta_j)/(\beta_i, \beta_i)$ sunt numere întregi, astfel încât acoperirea reală a bazei Weyl este forma reală normală (split) a lui $\mathfrak{g}$. Matricile Cartan se pot reprezenta grafic sub forma diagramelor Dinkin [92, 93]. Condiţia de integralitate $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ implică existenţa a numai 7 tipuri de diagrame Dinkin conexe, corespunzătoare la 4 tipuri de algebre "clasice" (A_n, B_n, C_n, D_n) şi 5 algebre "excepţionale" $(E_6, E_7, E_8, F_4, G_2)$.

Dacă V este spaţiu vectorial finit dimensional, $\mathfrak{g}l(V)$ este reductivă [92], iar $[\mathfrak{g}l(V), \mathfrak{g}l(V)] = \mathfrak{s}l(V)$ este semisimplă. Dacă $V = \mathbb{C}^n$, o baza în $\mathfrak{g}l(\mathbb{C}^n) \equiv \mathfrak{g}l(n, \mathbb{C})$ este reprezentată de n^2 matrici reale $\{e_{pq}, p, q = 1, n\}$, având singurul element nenul, egal cu 1, în linia p şi coloana q, $(e_{pq})_{ij} = \delta_{pi}\delta_{qj}$, si $[e_{pq}.e_{rs}] = \delta_{qr}e_{ps} - \delta_{ps}e_{rq}$, $(e_{pp}, e_{qq}) = \sum_{ij}(\delta_{ip} - \delta_{jp})(\delta_{iq} - \delta_{jq}) = 2n\delta_{pq} - 2$. Această bază poate fi reprezentată folosind un set de n operatori bosonici II.(65), $\{\hat{b}_p^\dagger, \hat{b}_p, p = 1, n\}$, ca $e_{pq} = \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_q$, sau un set de n operatori fermionici II.(66), $\{\hat{c}_p^\dagger, \hat{c}_p, p = 1, n\}$, ca $e_{pq} = \hat{c}_p^\dagger \hat{c}_q$.

4.1 Algebrele $A_n : \mathfrak{s}l(n + 1, \mathbb{C})$

$\mathfrak{s}l(n+1, \mathbb{C}) = \{\xi \in \mathfrak{g}l(n+1, \mathbb{C})/Tr\xi = 0\}$. Dacă $e_{pq} \in \mathfrak{g}l(n+1, \mathbb{C})$, $(e_{pq})_{ik} = \delta_{ip}\delta_{kq}$, matricile diagonale h_m, $m = 1, n$, cu

$$h_m = \sum_{i=1}^{n+1} c_m^i e_{ii} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n+1} c_m^i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n+1} c_m^i c_{m'}^i = \delta_{mm'}$$

satisfac $(h_m, h_{m'}) = 2(n + 1)\delta_{mm'}$, şi reprezintă o bază ortogonală în subalgebra Cartan $\mathfrak{h}$ din $\mathfrak{s}l(n + 1, \mathbb{C})$. Pentru aceste elemente $[h_m, e_{pq}] = \alpha_{pq}(m)e_{pq}$ cu

$$\alpha_{pq}(m) = -\alpha_{qp}(m) = \sum_{i=1}^{n+1} c_m^i(\delta_{ip} - \delta_{iq}) = c_m^p - c_m^q \quad .$$

Dacă notăm $\beta_p \equiv \alpha_{pp+1}$, obţinem $\alpha_{pq} = \sum_{i=p}^{q-1} \beta_i$. Aceste rezultate specifică:
- setul rădăcinilor: $\Delta = \{\alpha_{pq}, p \neq q\}$ cu $(n + 1)^2 - (n + 1)$ elemente.
- setul rădăcinilor pozitive: $\Sigma = \{\alpha_{pq}, p < q\}$ cu $n(n + 1)/2$ elemente.
- setul rădăcinilor simple: $\Pi = \{\beta_p = \alpha_{pp+1}, p = 1, n\}$ cu n elemente. O bază particulară în $\mathfrak{h}$ constă din elementele $g_m = e_{mm} - e_{m+1m+1}$, $m = 1, n$. Pentru această bază

$$[g_m, e_{pq}] = (g_m, h'_{\alpha_{pq}})e_{pq} \quad , \quad [e_{pq}, e_{qp}] = e_{pp} - e_{qq} = \sum_{i=p}^{q-1} g_i = 2(n + 1)h'_{\alpha_{pq}}$$

unde

$$h'_{\alpha_{pq}} = \frac{1}{2(n + 1)} \sum_{i=p}^{q-1} g_i \quad , \quad (g_m, h'_{\alpha_{pq}}) = \delta_{mp} - \delta_{mq} + \delta_{m+1q} - \delta_{m+1p} \quad .$$

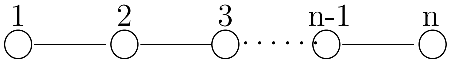


Figura 8. Diagrama Dinkin pentru algebrele A_n, $n \geq 1$.

Deoarece $(\beta_p, \beta_q) = (h'_{\beta_p}, h'_{\beta_q}) = (g_p, g_q)/4(n+1)^2 = (2\delta_{pq} - \delta_{pq+1} - \delta_{p+1q})/2(n+1)$, obţinem matricea Cartan

$$A_{mm'} = 2\frac{(\beta_m, \beta_{m'})}{(\beta_m, \beta_m)} = 2\delta_{mm'} - \delta_{mm'+1} - \delta_{m+1m'} \quad ,$$

şi diagrama Dinkin[24] din Figura 8.

Forma reală compactă $\mathfrak{s}u(3)$ a algebrei $\mathfrak{s}l(3, \mathbb{C})$ a fost prezentată în Cap. III.

4.2 Algebrele $B_n : \mathfrak{s}o(2n+1, \mathbb{C})$

$\mathfrak{s}o(2n+1, \mathbb{C}) = \{\xi \in \mathfrak{g}l(2n+1, \mathbb{C})/\xi^T = -\xi\}$, cu baza reprezentată de $n(2n+1)$ matrici independene $\xi_{pq} = e_{pq} - e_{qp}$, $p, q = -n, ..., -1, 0, 1, ...n$. Acoperirea reală a acestei baze generează forma reală compactă $\mathfrak{s}o(2n+1, \mathbb{R})$, dar pentru a obţine baza Weyl reprezentarea trebuie schimbată la $w\xi w^{-1}$, cu $w_{ij} = [(1+i)\delta_{ij} + (1-i)\delta_{i-j}]/2$, $(w^{-1} = w^\dagger = w^*)$. În noua reprezentare $\mathfrak{s}o(2n+1, \mathbb{C})$ este generată de elementele

$$\{f_{pq} = -f_{-q-p} = e_{pq} - e_{-q-p}/p, q = -n, ..., -1, 0, 1, ..., n\} \quad ,$$

iar acoperirea reală a bazei f_{pq} generează $\mathfrak{s}o(n+1, n)$.

Deoarece $[f_{pq}, f_{kl}] = \delta_{qk} f_{pl} - \delta_{lp} f_{kq} + \delta_{p-k} f_{-lq} + \delta_{-ql} f_{k-p}$ obţinem

$$[f_{pp}, f_{kl}] = \alpha_{kl}(p) f_{kl} \quad ,$$

cu $\alpha_{kl}(p) = \delta_{pk} - \delta_{pl} + \delta_{p-l} - \delta_{p-k}$, şi $[f_{kl}, f_{lk}] = f_{kk} - (1 - 2\delta_{k-l}) f_{ll}$. Aceste relaţii de comutare specifică:

- setul rădăcinilor $\Delta = \{\alpha_{kl}(p), k > -l, k \neq l\}$ cu $2n^2$ elemente.
- setul rădăcinilor pozitive:

$$\Sigma = \{\alpha_{kl}(p) = \delta_{pk} - \delta_{pl}, l > k > 0\} \cup$$
$$\{\alpha_{kl}(p) = -\delta_{p-k} - \delta_{pl}, -l < k < 0\} \cup \{\alpha_{0l}(p) = -\delta_{pl}, 1 \leq l \leq n\}$$

cu n^2 elemente.

- setul rădăcinilor simple $\Pi = \{\beta_0 = \alpha_{01}\} \cup \{\beta_k = \alpha_{kk+1}, k = 1, n-1\}$ cu n

[24]Cercurile $\{\circ^i\}$ corespund rădăcinilor simple $\{\beta_i\}$ iar numărul de linii între $\circ^i$ şi $\circ^j$ este egal cu $A_{ij}A_{ji} = 4\cos^2\theta_{ij}$, unde θ_{ij} este unghiul dintre β_i şi β_j. Dacă $(\beta_i, \beta_i) < (\beta_j, \beta_j)$, atunci liniile au o săgeată orientată spre $\circ^i$ [94].

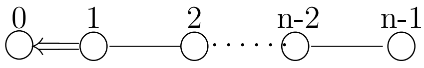


Figura 9. Diagrama Dinkin pentru algebrele B_n, $n \geq 2$.

elemente. Ca funcţii de rădăcinile simple

$$\alpha_{kl} = \sum_{i=|k|}^{l-1} \beta_i + 2\sum_{i=0}^{|k|-1} \beta_i \ \text{ la } \ -l < k < 0 \quad ,$$

$\alpha_{0l} = \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i$, şi

$$\alpha_{kl} = \sum_{i=k}^{l-1} \beta_i \ \text{ la } \ l > k > 0 \quad .$$

Deoarece

$$h'_{\alpha_{0l}} = -\frac{f_{ll}}{2(2n-1)} \quad , \quad h'_{\alpha_{kk+1}} = \frac{f_{kk} - f_{k+1\ k+1}}{2(2n-1)} \quad ,$$

şi

$$(f_{pp}, f_{qq}) = \sum_{-l<k=-n}^{n} \alpha_{kl}(p)\alpha_{kl}(q) = 2(2n-1)\delta_{pq} \quad ,$$

obţinem

$$(\beta_0, \beta_0) = \frac{1}{2(2n-1)} \quad , \quad (\beta_k, \beta_k) = -2(\beta_{k-1}, \beta_k) = \frac{1}{2n-1}\ , k = 1, n-1 \quad ,$$

astfel încât unghiurile dintre rădăcinile simple sunt specificate de $\cos\varphi_{01} = -1/\sqrt{2}$ şi $\cos\varphi_{kk+1} = -1/2$, $k > 0$. Diagrama Dinkin asociată matricii Cartan $[2(\beta_i, \beta_j)/(\beta_i, \beta_i)]$ este reprezentată în Figura 9.

În cazul algebrei $\mathfrak{so}(5.\mathbb{C})$, dacă $\Sigma = \{\alpha_{-12}, \alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{12}\}$, atunci $\Pi = \{\alpha_{01}, \alpha_{12}\}$. Aplicaţii la descrierea corelaţiilor biparticulă în sisteme de fermioni cu două componente, unde $\mathfrak{so}(5)$ apare ca subalgebră a $\mathfrak{so}(16)$, sunt prezentate în [82] (corelaţii nucleare de 2 protoni - 2 neutroni), şi în [80] (dublul strat Cu-O din materialele supraconductoare la temperaturi înalte).

4.3 Algebrele $C_n : \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$

$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{\xi \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) / \xi^T J = -J\xi\}$, unde J are forma bloc $n \times n$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Deoarece orice element $\xi \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ poate fi exprimat ca

$$\xi = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a^T \end{bmatrix} \quad , \quad b = b^T \ , \ c = c^T \quad ,$$

o bază în $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ este constituită din n^2 matrici independente A,

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} e_{ij} & 0 \\ 0 & -e_{ji} \end{bmatrix} \quad ,$$

$n(n+1)/2$ matrici independente B,

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & e_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e_{ji} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

şi $n(n+1)/2$ matrici independente C,

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e_{ij} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e_{ji} & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Relaţiile de comutare sunt specificate de

$$[A_{ii}, A_{pq}] = (\delta_{ip} - \delta_{iq})A_{pq} \quad , \quad [A_{pq}, A_{qp}] = A_{pp} - A_{qq} \quad , \quad [A_{ii}, B_{pq}] = (\delta_{ip} + \delta_{iq})B_{pq} \quad ,$$

$$[A_{ii}, C_{pq}] = -(\delta_{ip} + \delta_{iq})C_{pq} \quad , \quad [B_{pq}, C_{pq}] = (2\delta_{pq} + 1)A_{pp} + A_{qq} \quad ,$$

unde $i, p, q = 1, n$. Dacă notăm $\alpha_{pq}(i) = \delta_{ip} - \delta_{iq}$, $p > q$ şi $\alpha'_{pq}(i) = (\delta_{ip} + \delta_{iq})$, cu $p \geq q$, obţinem setul rădăcinilor:

$$\Delta = \{\alpha_{pq}, -\alpha_{pq}, \ p, q = 1, n/p > q\} \cup \{\alpha'_{pq}, -\alpha'_{pq}, \ p, q = 1, n/p \geq q\} \quad ,$$

cu $2n^2$ elemente.
- setul rădăcinilor pozitive:

$$\Sigma = \{\alpha_{pq}, \ p, q = 1, n/p < q\} \cup \{\alpha'_{pq}, , \ p, q = 1, n/p \leq q\} \quad ,$$

cu n^2 elemente.
- setul rădăcinilor simple $\Pi = \{\beta_p = \alpha_{pp+1}, p = 1, n-1\} \cup \{\beta_n = \alpha'_{nn}\}$ cu n elemente. Ca funcţii de rădăcinile simple

$$\alpha_{pq} = \sum_{i=p}^{q-1} \beta_i \quad , \quad \alpha'_{qq} = \beta_n + 2\sum_{i=q}^{n-1} \beta_i \quad , \quad \alpha'_{pq} = (1 - \delta_{pq})\alpha_{pq} + \alpha'_{qq} \quad .$$

Subalgebra Cartan este generată de n matrici diagonale independente,

$$h'_{\beta_p} = \frac{A_{pp} - A_{p+1p+1}}{4(n+1)} \ , \ p < n \quad , \quad h'_{\beta_n} = \frac{A_{nn}}{2(n+1)} \quad .$$

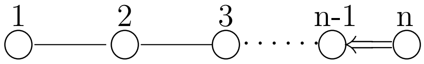


Figura 10. Diagrama Dinkin pentru algebrele C_n, $n \geq 3$.

Deoarece

$$(A_{ii}, A_{jj}) = 2\sum_{p>q} \alpha_{pq}(i)\alpha_{pq}(j) + 2\sum_{p\geq q} \alpha'_{pq}(i)\alpha'_{pq}(j) = 4(n+1)\delta_{ij} \quad ,$$

obţinem

$$(\beta_p, \beta_q) = \frac{2\delta_{pq} - \delta_{pq+1} - \delta_{p+1q}}{4(n+1)} \quad , \quad (\beta_p, \beta_n) = -\frac{\delta_{pn-1}}{2(n+1)} \quad , p < n \quad ,$$

şi $(\beta_n, \beta_n) = 1/(n+1)$. Diagrama Dinkin asociată matricii $[2(\beta_i, \beta_j)/(\beta_i, \beta_i)]$ este reprezentată în Figura 10.

4.4 Algebrele $D_n : \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$

$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) = \{\xi \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})/\xi^T = -\xi\}$ Cu notaţia introdusă mai sus pentru B_n, baza Weyl la $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ este generată de elementele

$$\{f_{pq} = -f_{-q-p} = e_{pq} - e_{-q-p}/p, q = -n, ..., -1, 1, ..., n\} \quad ,$$

care au drept acoperire reală algebra $\mathfrak{so}(n, n)$. Deoarece $\mathfrak{h} = \{f_{pp},\ p = 1, n\}$, şi

$$[f_{pq}, f_{kl}] = \delta_{qk} f_{pl} - \delta_{lp} f_{kq} + \delta_{p-k} f_{-lq} + \delta_{-ql} f_{k-p} \quad ,$$

obţinem $[f_{pp}, f_{kl}] = \alpha_{kl}(p) f_{kl}$ cu $\alpha_{kl}(p) = \delta_{pk} - \delta_{pl} + \delta_{p-l} - \delta_{p-k}$ şi $[f_{kl}, f_{lk}] = f_{kk} - (1 - 2\delta_{k-l}) f_{ll}$. Aceste relaţii specifică:

- setul rădăcinilor $\Delta = \{\alpha_{kl}(p), k > -l, k \neq l/k, l = -n, ..., -1, 1, ...n\}$ cu $2n(n-1)$ elemente.
- setul rădăcinilor pozitive α_{kl} cu $k > |l|$ sau $l > |k|$:

$$\Sigma = \{\alpha_{kl}(p) = \delta_{pk} - \delta_{pl}, l > k > 0\} \cup \{\alpha_{kl}(p) = -\delta_{p|k|} - \delta_{pl}, -l < k < 0\}$$

cu $n(n-1)$ elemente.
- setul rădăcinilor simple $\Pi = \{\beta_0 = \alpha_{-12}\} \cup \{\beta_k = \alpha_{kk+1}, k = 1, n-1\}$ cu n elemente. Ca funcţii de rădăcinile simple

$$\alpha_{kl} = \sum_{i=k}^{l-1} \beta_i \quad , \quad l > k > 0 \quad ,$$

$$\alpha_{-|k||k|+1} = \beta_0 + \beta_1 + \beta_k + 2\sum_{i=2}^{|k|-1} \beta_i \quad , \quad k = 1, n-1 \quad ,$$

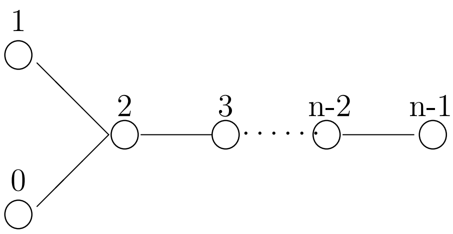


Figura 11. Diagrama Dinkin pentru algebrele D_n, $n \geq 4$.

şi $\alpha_{-|k|l} = \alpha_{-|k||k|+1} + \alpha_{|k|+1l}$, $l > |k|$. Deoarece

$$h'_{\alpha_{-12}} = \frac{-f_{11} - f_{22}}{4(n-1)} \quad , \quad h'_{\alpha_{kl}} = \frac{f_{kk} - f_{ll}}{4(n-1)} \; , l > k > 0 \quad ,$$

iar

$$(f_{pp}, f_{qq}) = \sum_{-l<k=-n}^{n} \alpha_{kl}(p)\alpha_{kl}(q) = 4(n-1)\delta_{pq} \quad ,$$

obţinem $(\beta_0, \beta_1) = 0$ şi

$$(\beta_0, \beta_0) = (\beta_k, \beta_k) = -2(\beta_0, \beta_2) = -2(\beta_k, \beta_{k+1}) = \frac{1}{2(n-1)} \quad , k = \overline{1, n-1} \quad ,$$

astfel încât unghiurile dintre rădăcinile simple sunt specificate de $\cos\varphi_{01} = 0$, $\cos\varphi_{02} = -1/2$ şi $\cos\varphi_{kk+1} = -1/2$ pentru $k \geq 1$. Diagrama Dinkin asociată matricii $[2(\beta_i, \beta_j)/(\beta_i, \beta_i)]$ este reprezentată în Figura 11.

Fie $c_i^\dagger, c_i$ operatorii fermionici de generare şi anihilare pentru un sistem cuantic având $n > 1$ stări uniparticulă indexate de $i = \overline{1, n}$. Atunci

$$[c_i^\dagger c_i, c_j^\dagger c_k^\dagger] = (\delta_{ij} + \delta_{ik}) c_j^\dagger c_k^\dagger \quad , \quad [c_i^\dagger c_i, c_j c_k] = -(\delta_{ij} + \delta_{ik}) c_j c_k \quad ,$$

şi $[c_i^\dagger c_i, c_j^\dagger c_k] = (\delta_{ij} - \delta_{ik}) c_j^\dagger c_k$, astfel încât setul $S = \{c_i^\dagger c_j^\dagger, c_i c_j, c_i^\dagger c_j / i, j = \overline{1, n}\}$ generează o algebră $\mathfrak{so}(2n)$. Pentru un sistem cu două nivele $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) + \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ este generată de

$$J_+ = c_1^\dagger c_2 \quad , \quad J_0 = \frac{1}{2}(c_1^\dagger c_1 - c_2^\dagger c_2), \quad J_- = c_2^\dagger c_1$$

şi

$$P_+ = c_1^\dagger c_2^\dagger \quad , \quad P_0 = \frac{1}{2}(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2 - 1), \quad P_- = c_2 c_1 \quad .$$

O aplicaţie a stărilor coerente generate de S este prezentată în [52].

Bibliografie

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., The Benjamin/Cummings Publishing Company Inc., Reading, MA (1978).
[2] E. P. Wigner, *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of the Atomic Spectra*, Academic Press NY (1959).
[3] W. Macke, *Mechanik der Teilchen, Systeme und Kontinua*, 2 Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig (1964).
[4] M. Grigorescu, *Energy and time as conjugate dynamical variables*, Can. J. Phys. **78** 959 (2000).
[5] J. Śniatycki, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer, New York (1980).
[6] M. Grigorescu, *Relativistic probability waves*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **55** 131 (2010).
[7] M. Grigorescu, *Electromagnetic 2-forms on space-time*, e-print arXiv:0912.1998 [v3] 29 Nov (2010).
[8] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press (1984).
[9] E. L. Hill, *Hamilton's principle and the conservation theorems of mathematical physics*, Rev. Mod. Phys. **23** 253 (1951).
[10] D. G. Currie, T. F. Jordan, E. C. G. Sudarshan, *Relativistic invariance and Hamiltonian theories of interacting particles* Rev. Mod. Phys. **35** 350 (1962).
[11] R. N. Hill, *The Origins of Predictive Relativistic Mechanics*, in Relativistic Action at a Distance: Classical and Quantum Aspects, Ed. J. Llosa, Springer-Verlag, Berlin (1982), p. 104.
[12] G. N. Fleming, *Covariant position operators, spin, and locality*, Phys. Rev. **137** B188 (1965).
[13] N. R. Wallach, *Symplectic Geometry and Fourier Analysis*, Math. Sci. Press, Brookline, Mass. (1977).
[14] B. Kostant, *Quantization and unitary representations*, Lecture Notes in Mathematics, **170**, Springer Verlag, Berlin (1970).
[15] S. R. Komy, *First cohomology groups of Lie groups*, in Proc. Diff. Geom. Meth. in Theor. Phys., Trieste, 1982, Eds. G. Desmonds, H. D. Döbner.
[16] F. Hirzebruch, *Neue Topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Springer (1956).
[17] G. Rosensteel, E. Ihrig, *Geometric quantization of the CM(3) model*, Ann. of Phys. **121** 113 (1979).
[18] A. Sommerfeld, *Thermodynamik und Statistik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1962).
[19] C. Lanczos, *Tetraden-Formalismus und definite Raum-Zeit-Struktur*, In: H.-J. Treder, Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitation-

stheorie. Akademie-Verlag, Berlin (1966).
[20] M. Grigorescu, *Classical probability waves*, Physica A **387** 6497 (2008).
[21] M. Grigorescu, *Geometrical framework of quantization problem*, J. Geom. Symm. Phys. **23** 1 (2011).
[22] E.P. Wigner, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. **40** 749 (1932).
[23] M. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer, New York, 1990, p. 241.
[24] Ş. Ţiţeica, *Mecanica Cuantică*, Editura Academiei, Bucureşti (1984).
[25] K. L. Nagy, *State Vector Spaces with Indefinite Metric in Quantum Field Theory*, P. Noordhoff, Groningen (1966).
[26] G. M. Helmberg, *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*, North Holland Publishing Company, Amsterdam (1969).
[27] M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York (1957).
[28] A. O. Barut, R. Raczka, *Theory of Group Representations and Applications*, Polish Scientific Publishers, Warszawa (1980).
[29] N. E. Hurt, *Geometric Quantization in Action: Applications of Harmonic Analysis in Quantum Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, Reidel, Dordrecht (1980).
[30] L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie Quantique Relativiste I,II*, Éditions Mir, Moscou (1972).
[31] M. Born, *Fizica Atomică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti (1973).
[32] D. Scott, G. F. Smoot, *Cosmic microwave background mini-review*, Review of Particle Physics, Phys. Rev. D **86** 010001 (2012).
[33] Y. Sobonti, *Liouville's equation: I. Symmetries and classification of modes*, Astron. Astrophys. **210** 18 (1989).
[34] R. Purice, *Teoria Cuantică a Câmpului*, Partea a II-a, Grupul Rotaţiilor şi Grupul Lorentz. Note de Curs, Universitatea Bucureşti, Facultatea de Fizică, 1986-1987.
[35] R. Purice, *Teoria Cuantică a Câmpului*, Partea a IV-a, Reprezentări Finit Dimensionale ale Grupului Rotaţiilor şi ale Grupului Lorentz; Câmpul Dirac Liber. Note de Curs, Universitatea Bucureşti, Facultatea de Fizică, 1986-1987.
[36] A. Sommerfeld, *Zur Quantentheorie der Spektrallinien*, Ann. Phys. **356** 1, 125 (1916).
[37] J. Goldstone, *Field theories with "superconducting" solutions* , Il Nuovo Cimento, **XIX** 154 (1961).
[38] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, *Broken symmetries*, Phys. Rev. **127** 965 (1962).
[39] P. W. Higgs, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*, Phys.

Lett. **12** 132 (1964).
[40] P. W. Higgs, *Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons* , Phys. Rev. **145** 1156 (1966).
[41] I. J. R. Aitchinson, *Nothing's plenty. The vacuum in modern quantum field theory*, Contemp. Phys. **26** 333 (1985).
[42] T.D. Lee, *Missing symmetries, unseen quarks and the physical vacuum*, Nucl. Phys. **A538** 3c (1992)
[43] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer Verlag, Berlin (1980).
[44] M. Grigorescu, *Classical phase space structure induced by spontaneous symmetry breaking*, FT-383-1992 (February), in Proc. NATO ASI Frontier Topics in Nuclear Physics, Predeal, Romania, 1993. Ed. W. Scheid, A. Sandulescu, Plenum Press, New York, 1994, p. 491.
[45] J.-M. Souriau, *Structure of Dynamical Systems*, Birkhäuser (1997).
[46] I. Mladenov, V. Tsanov, *Geometric quantization of the multidimensional Kepler problem*, J. Geom. Phys. **8** 17 (1985).
[47] V. Guillemin, S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, Mathematical Surveys and Monographs Vol. 14, American Mathematical Society (1977).
[48] P. A. M. Dirac, *The quantum theory of the emission and absorption of radiation*, Proc. R. Soc. Lond. A. **114** 243-265 (1927).
[49] L. de Broglie, *Despre relaţia de incertitudine* $\delta n \delta \varphi \geq 2\pi$, C. R. Acad. Sci. Paris **260** 6041-6043 (1965), în Certitudinile şi Incertitudinile Ştiinţei, Editura Politică, Bucureşti (1980).
[50] S. M. Barnett, D. T. Pegg, *Quantum theory of rotation angles*, Phys. Rev. A **41** 3427 (1990).
[51] D. Loss, K. Müllen, *Commutation relations for periodic operators*, J. Phys. A: Math. Gen. **25** L235 (1992).
[52] M. Grigorescu, *Semiclassical treatment of the ground-state rotational band and of the isovector angle vibrations for deformed superfluid nuclei*, FT-326-1988, LANL e-print nucl-th/0306052.
[53] M. Grigorescu, *Cuantificarea Sistemelor Dinamice cu Simetrie*, Teză de Doctorat, Institutul de Fizică Atomică, Bucureşti (1991).
[54] M. Grigorescu, D. Rompf, W. Scheid, *Dynamical effects of deformation in the coupled two-rotor system*, Phys. Rev. C **57** 1218 (1998).
[55] M. Grigorescu, A. Sandulescu, *Coherent states description of* α *decay*, Phys. Rev. C **48** 940 (1993).
[56] J. P. Elliott, *Collective motion in the nuclear shell model. I. Classification schemes for states of mixed configurations*, Proc. Roy. Soc. A **245** 128, *II. The introduction of intrinsic wave-functions*, 562 (1958).
[57] V. Bargmann, M. Moshinsky, *Group theory of harmonic oscillators: (I). The*

collective modes, Nucl. Phys. **18** 697 (1960); *(II). The integrals of motion for the quadrupole-quadrupole interaction*, Nucl. Phys. **23** 177 (1961).
[58] M. Moshinsky, *Wigner coefficients for the SU(3) group and some applications*, Rev. Mod. Phys. **34** 813 (1962).
[59] K. T. Hecht, *SU(3) recoupling and fractional parentage in the 2s-1d shell*, Nucl. Phys. **62** 1 (1965).
[60] A. Arima, T. Ohtsuka, Phys. Lett. **66B** 205 (1972).
[61] R. E. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdal, W. Lee, *Simple groups and strong interaction symmetries*, Rev. Mod. Phys. **34** 1 (1962).
[62] J. J. de Swart, *The octet model and its Clebsch-Gordan coefficients*, Rev. Mod. Phys. **35** 916 (1963).
[63] N. Nélipa, *Physique des Particules Élémentaires*, Éditions Mir, Moscou (1981).
[64] M. Gell-Mann, *Quarks*, Acta Physica Austriaca, Suppl. IX, 733 (1972).
[65] M. Bohm, H. Joos, *Eichtheorien der Schwachen, Electromagnetischen und Starken Wechselwirkung*, DESY 78/27 (1978).
[66] H. Weyl, *The Classical Groups, their Invariants and Representations*, Princeton University Press (1946).
[67] G. Racah, *Theory of complex spectra. I.* Phys. Rev. **61** 186 (1942), *II.* **62** 438 (1942), *III* **63** 367 (1943).
[68] L. C. Biedenharn, *On the representations of the semisimple Lie groups I.-The explicit construction of invariants for the unimodular unitary group in N dimensions*, J. Math. Phys. **4** 436 (1963), G. E. Baird and L. C. Biedenharn, *On the representations of the semisimple Lie groups*-II, J. Math. Phys. **4** 1449 (1963), III-*The explicit conjugation operation for SU(n)*, **5** 1723 (1964), IV-*A canonical classification for tensor operators in SU(3)*, **5** 1730 (1964), V-*Some explicit Wigner operators for SU(3)*, **6** 1847 (1965).
[69] M. Grigorescu, *Coeficienţi Clebsch-Gordan pentru grupul* $SU(3)$, St. Cerc. Fiz. **36** 3 (1984).
[70] M. Naïmark, A. Stern, *Théorie des Représentations des Groupes*, Éditions Mir, Moscou (1979).
[71] J. T. Nelson, *A set of harmonic functions for the group SU(3) as specialized matrix elements of a general finite transformation*, J. Math. Phys. **8** 857 (1967).
[72] D. A. Akyeampong, M. A. Rashid, *On the finite transformations of SU(3)*, J. Math. Phys. **13** 1218 (1972).
[73] M. A. B. Beg, H. Ruegg, *A set of harmonic functions for the group SU(3)*, J. Math. Phys. **6** 677 (1965).
[74] A. J. Mac'farlane, A. Sudbery, P. H. Weisz, *On Gell-Mann's -matrices, d- and f-tensors, octets, and parametrizations of SU(3)*, Commun. Math. Phys. **11** 77 (1968).
[75] J. R. Derome, *Symmetry properties of the 3j symbols for SU(3)*, J. Math.

Phys. **8** 714 (1967).
[76] J. J. de Swart, *Symmetries of strong interaction*, CERN School of Physics (1966).
[77] K. T. Hecht, *Five-dimensional quasi-spin: the n, T dependence of shell-model matrix elements in the seniority scheme*, Nucl. Phys. A **102** 11 (1967).
[78] D. J. Rowe, *Vector-coherent-state representations of so(5) in an so(3) basis*, J. Math. Phys. **35** 3163, 3178 (1994).
[79] D. J. Rowe, K. T. Hecht, *Representation of the five-dimensional harmonic oscillator with scalar-valued* $U(5) \supseteq SO(5) \supseteq SO(3)$*-coupled VCS wave functions*, J. Math. Phys. **36** 4711 (1995).
[80] M. Grigorescu, *Low-lying excitations in superconducting bilayer systems*, Can. J. Phys. **78** 119 (2000).
[81] J. Eichler, M. Yamamura, *Quadrupling and pairing in the shell model*, Nucl. Phys. A **182** 33 (1972).
[82] M. Grigorescu, *Low-lying isovector monopole resonances*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **16** 417 (1990).
[83] M. Grigorescu, *Structure effects of the two-protons two-neutrons correlations*, Rev. Roum. Phys. **37** 107 (1992).
[84] P. Camiz, U. Catani, *Group-theoretical analysis of nuclear states in some* $j=3/2$ *shells*, Nuovo Cimento B **64** 56 (1969).
[85] A. H. Wapstra, K. Bos, *The 1977 atomic mass evaluation*, Atomic Data and Nuclear Data Tables **19** 177 (1977).
[86] P. M. Endt, C. van dèr Leun, *Energy levels of A=21-44 nuclei*, Nucl. Phys. A **214** 1 (1973).
[87] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity*, Phys. Rev. **122** 345 (1961).
[88] S. Kästner, *Vektoren, Tensoren, Spinoren: eine Einführung in den Tensorkalkül unter Berücksichtigung der physikalischen Anwendung*, Akademie Verlag, Berlin (1964).
[89] H. Weyl, *Gravitation und Elektrizität*, Sitz. Kön. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 465 (1918).
[90] E. Cartan, *Le Parallelisme Absolu et la Théorie Unitaire du Champ*, Hermann et cie, Paris (1932).
[91] M. Grigorescu, *Symmetry and collective motion*, e-print arXiv:1009.1071 [v2] 22 Nov 2010.
[92] N. Bourbaki, *Groupes et algébres de Lie*, Diffusion C.C.L.S. (1971).
[93] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algbras*, Vol. II, Van Nostrand (1953).
[94] J. A. Wolf, *Foundations of Representation Theory for Semisimple Lie Groups*, in Harmonic Analysis and Representations of Semi-Simple Lie Groups, Ed. J. A. Wolf, M. Cahen, M. De Wilde, Reidel, Dordrecht, (1980), pp. 69-130.