INSTITUTUL DE MATEMATICA
AL ACADEMIEI ROMANE

ISSN 0250 3638

ALGEBRE LIE SEMISIMPLE

Volumul II

SEMINARIILE INSTITUTULUI DE MATEMATICA
Nr. 1/1991

BUCURESTI

LECTIA XII

CLASIFICAREA ALGEBRELOR LIE SEMISIMPLE REALE

(cu un epilog de Bogdan Bucicovschi)

Stefan PAPADIMA

Chestiunea clasificării algebrelor Lie semisimple reale prezintă un interes deosebit, din cel puțin următoarele două puncte de vedere: ilustrează ideal dificultățile clasificării algebrelor Lie (finit dimensionale) peste un corp de caracteristică zero dar nealgebric închis și în același timp se pretează în mod natural utilizării metodelor transcendente legate de teoria grupurilor Lie compacte (a se vedea și comentariile finale). Există mai multe metode de abordare a problemei considerate, ce au drept numitor comun stabilirea legăturii cu clasificarea algebrelor Lie semisimple complexe; în paragraful următor lămurim această chestiune, reducînd problema la clasificarea formelor reale ale unei algebre Lie simple complexe. In § 2 reformulăm această problemă (generală) de clasificare a formelor k-raționale ale unui obiect algebric definit peste o extensie K a lui k în limbajul coomologiei galoisiene; tot aici se găsește calculul coomologiei galoisiene relevante pentru problema formelor reale, care ne reduce încă o dată problema și anume la descrierea claselor de conjugare ale involuțiilor din grupul automorfismelor unei forme reale <u>compacte</u> a algebrei Lie simple complexe considerată inițial. Prezența acestui grup Lie <u>compact</u> face în continuare posibilă utilizarea avantajoasă a metodelor transcendente . Paragraful 3 reprezintă un obligato-

riu intermezzo: sînt enunțate o serie de rezultate fundamentale legate de structura grupurilor Lie compacte, cu precădere la structura claselor lor de conjugare; aici demonstrațiile în general lipsesc. Rezultatul principal e conținut în secțiunea următoare: clasele de conjugare ale automorfismelor involutive ale unei* forme reale compacte ale unei algebre Lie simple complexe sînt descrise în mod explicit în termenii sistemului de rădăcini. (a se vedea și completările aduse în §6).
În §5 este analizat în detaliu un exemplu concret, formele reale ale algebrei Lie $\underline{sl}(n;\mathbb{C})$. In încheiere, adăugăm cîteva comentarii, în speranța întregirii tabloului acestui important capitol de matematică clasică ce se cheamă algebrele Lie semisimple reale. Intreaga expunere reprezintă dezvoltarea unei idei preluate din [Serre 1965, p.II136-37].

1. ALGEBRE LIE SIMPLE REALE SI COMPLEXE

Teoria generală a algebrelor Lie semisimple - peste un corp de caracteristică zero, nu neapărat algebric închis, a se revedea Lecția I (sau [Humphreys 1972], p.23) ne asigură că o algebră Lie reală semisimplă $\underline{r}$ se descompune (unic!) în produsul direct al componentelor sale simple, $\underline{r}=\bigoplus \underline{r}_i$. In ceea ce privește algebrele reale <u>simple</u>, propoziția următoare furnizează modul lor de obținere, pornind de la algebre <u>complexe simple</u> și totodată reduce clasificarea lor la o problemă formulată în termeni complecși.

PROPOZITIA 1.1.

(i) Fie $\underline{g}$ o algebră Lie complexă simplă. Atunci algebra Lie reală $\underline{g}_{\mathbb{R}}$ obținută prin restricția scalarilor este simplă.
(ii) Fie $\underline{g}$ o algebră Lie complexă semisimplă. Să notăm cu $\mathrm{Inv}\,\underline{g}$ (<u>involuțiile</u> lui $\underline{g}$) mulțimea automorfismelor Lie $c\in \mathrm{Aut}(\underline{g}_{\mathbb{R}})$ care sînt $\mathbb{C}$-antiliniare, și involutive (i.e. $c^2=1$); să asociem lui

$c \in \mathrm{Inv}\ \underline{g}$ subalgebra reală a lui $\underline{g}$ definită prin

$$\underline{g}^c = \{x \in \underline{g} \mid c(x) = x\}$$

Dacă $\underline{g}$ este simplă complexă atunci $\underline{g}^c$ este simplă reală, $\forall c \in \mathrm{Inv}\ \underline{g}$.

(iii) Orice algebră semisimplă complexă are involuții.

(iv) Fie $\underline{g}$ o algebră complexă semisimplă și $c \in \mathrm{Inv}\ \underline{g}$. Atunci

$$\underline{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \underline{g} \oplus \underline{g} \ ; \qquad \underline{g}^c \otimes \mathbb{C} = \underline{g}$$

(izomorfism de algebre Lie complexe!)

(v) Dacă $\underline{r}$ este o algebră simplă reală, atunci fie $\underline{r} = \underline{g}_{\mathbb{R}}$ (pentru o anume algebră simplă complexă $\underline{g}$), fie $\underline{r} = \underline{g}^c$ (pentru o anume algebră simplă complexă $\underline{g}$ și o anume involuție c).

(vi) Fie $\underline{g}$ semisimplă complexă și $c, c' \in \mathrm{Inv}\ \underline{g}$. Algebrele reale $\underline{g}^c$ și $\underline{g}^{c'}$ sînt izomorfe dacă și numai dacă involuțiile c și c' sînt <u>conjugate</u> prin $\mathrm{Aut}\ \underline{g}$ (i.e. există un automorfism Lie complex $a \in \mathrm{Aut}\ \underline{g}$ a.î. $c' = aca^{-1}$).

<u>Demonstrație</u>

(i) Să observăm întîi că dacă $\underline{g}$ este complexă semisimplă atunci $\underline{g}_{\mathbb{R}}$ este încă semisimplă. Fie într-adevăr $\underline{a} \subset \underline{g}_{\mathbb{R}}$ un $\mathbb{R}$-ideal abelian. Evident $\underline{a} \subset \mathbb{C}.\underline{a} = \mathbb{C}$-spațiul vectorial generat de $\underline{a}$, care este un $\mathbb{C}$-ideal abelian în $\underline{g}$; rezultă $\mathbb{C}.\underline{a} = 0$, deci $\underline{a} = 0$. Putem deci scrie $\underline{g}_{\mathbb{R}} = \underline{r}_1 \oplus \ldots \oplus \underline{r}_m$ (descompunerea în produs de ideale simple reale). Pentru a arăta că $m = 1$ și deci că $\underline{g}_{\mathbb{R}}$ este simplă odată cu $\underline{g}$, este suficient să observăm că fiecare $\underline{r}_i$ este stabil la înmulțirea cu scalarii complecși $z \in \mathbb{C}$; într-adevăr $z\underline{r}_i = z[\underline{r}_i, \underline{r}_i]$ ($\underline{r}_i$ e simplă!) $= [z\underline{r}_i, \underline{r}_i] \subset \underline{r}_i$ ($\underline{r}_i$ e ideal!).

(iii) O formulare mai precisă a afirmației din enunț a fost demonstrată în lecția X : orice algebră semisimplă complexă $\underline{g}$ posedă o <u>formă reală compactă</u> $\underline{k}$. Reluăm (pe scurt) construcția deoarece va fi fundamentală în cele ce urmează. Fie deci $\underline{h} \subset \underline{g}$ o subalgebră Cartan, Φ sistemul de rădăcini corespunzătoare și $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\} \subset \Phi$ o bază (căreia îi corespund, via identificarea dată de forma Killing, vectorii $h_1, \dots, h_\ell \in \underline{h}$); să presupunem de asemenea că în descompunerea $\underline{g} = \underline{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \underline{g}^\alpha$ am făcut o alegere de bază Chevalley (vezi Lecția) $\underline{g}^\alpha = \mathbb{C} x_\alpha$. Atunci $\mathbb{R}$-subspațiul vectorial al lui $\underline{g}$

$$(1.2) \quad \underline{k} = \mathbb{R}\text{-sp}\{Jh_1, \dots, Jh_\ell\} + \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{R}\text{-sp}\{x_\alpha - x_{-\alpha}, J(x_\alpha + x_{-\alpha})\}$$

(unde $J = \sqrt{-1}$) este o $\mathbb{R}$-subalgebră a lui $\underline{g}$. Mai mult, $\underline{k}$ este o formă reală a lui $\underline{g}$ $(= \underline{k} \otimes \mathbb{C})$ compactă (i.e. forma Killing a lui $\underline{k}$ este negativ definită: $B_{\underline{k}} < 0$); o vom numi (cu alegerile făcute) forma compactă canonică a lui $\underline{g}$. Este acum evident faptul că, în $\underline{k} \otimes \mathbb{C}$, conjugarea complexă induce o involuție (pe care o vom numi de asemenea canonică) $c \in \mathrm{Inv}\,\underline{g}$, și de asemenea că $\underline{g}^c = \underline{k}$

(iv) Prima afirmație rezultă combinînd izomorfismul standard $\underline{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \underline{g} \oplus \overline{\underline{g}}$ (unde $\overline{\underline{g}}$ este algebra $\underline{g}$ cu structura complexă conjugată), valabil pentru orice algebră obținută prin complexificare , în particular pentru orice algebră complexă semisimplă, vezi (iii). Pentru a doua afirmație, să observăm întîi că există o descompunere în spații vectoriale reale proprii, indusă de c, $\underline{g} = \underline{g}^+ \oplus \underline{g}^-$, unde $\underline{g}^\varepsilon = \ker\{c - \varepsilon . id\}$, $\varepsilon = \pm 1$, în care prin definiție $\underline{g}^+ = \underline{g}^c$ și $\underline{g}^- = J\underline{g}^+$ (c e $\mathbb{C}$-antiliniară!) Punînd $x \otimes (a + Jb) \longrightarrow ax + Jbx$ $(x \in \underline{g}^+, a, b \in \mathbb{R})$ obținem izomorfismul dorit $\underline{g}^c \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \underline{g}$.

(ii) Stim acum că $\underline{g}^c \otimes \mathbb{C} = \underline{g}$. Dacă $\underline{g}^c$ nu ar fi simplă am putea scrie $\underline{g}^c = \underline{r}_1 \oplus \underline{r}_2$ cu $\underline{r}_i \subset \underline{g}^c$ ideale (deoarece $\underline{g}^c$ este semisimplă odată cu $\underline{g}$, după cum rezultă usor observînd că proprietatea de nedegenerare a formei Killing este independentă de extensia scalarilor). De aici ar rezulta că $\underline{g} = (\underline{r}_1 \otimes \mathbb{C}) \oplus (\underline{r}_2 \otimes \mathbb{C})$, în contradicție cu simplitatea lui $\underline{g}$.

(v) Să notăm cu $\underline{g}$ algebra (semisimplă) complexă

$\underline{r} \otimes \mathbb{C}$ și să o descompunem în ideale complexe simple: $\underline{g} = \underline{g}_1 \oplus \dots \oplus \underline{g}_m$. Conjugarea complexă în $\underline{r} \otimes \mathbb{C}$ dă naștee unei involuții $\tilde{c} \in \mathrm{Inv}\,\underline{g}$, care induce o permutare (involutivă) a idealelor simple ale lui $\underline{g}$ și o descompunere corespunzătoare în ideale a subalgebrei reale a punctelor fixe ale lui c în $\underline{g}$, de forma

$$\underline{r} = \underline{g}^c = (\underline{g}_1 \oplus \underline{g}_2)^c \oplus \dots \oplus (\underline{g}_{2n-1} \oplus \underline{g}_{2n})^c \oplus \underline{g}^c_{2n+1} \oplus \dots \oplus \underline{g}^c_m .$$

Deoarece algebra $\underline{r}$ a fost presupusă simplă, rezultă că fie $\underline{r} = \underline{g}^c$ ($\underline{g}$ complexă simplă și $c \in \mathrm{Inv}\,\underline{g}$), fie $\underline{r} = (\underline{g} \oplus c\underline{g})^c$ (unde de asemenea $\underline{g}$ e complexă și simplă). In al doilea caz, scriind, pentru $x, y \in \underline{g}$, $c(x \oplus cy) = y \oplus cx$ $(c^2 = 1\,!)$, rezultă că $\underline{r} = \{x \oplus cx \mid x \in \underline{g}\} = \underline{g}_{\mathbb{R}}$, ca în enunț.

(vi) Un izomorfism de algebre reale $b : \underline{g}^c \longleftrightarrow \underline{g}^{c'}$ dă naștere, după (iv), unui automorfism complex $b \otimes \mathbb{C} = a \in \mathrm{Aut}\,\underline{g}$. Deoarece $\underline{g}^+(c) = \underline{g}^c$, $\underline{g}^-(c) = \rceil\,\underline{g}^+(c)$ (și similar pentru c'), rezultă că a trasformă descompunerea $\underline{g} = \underline{g}^+(c) \oplus \underline{g}^-(c)$ în descompunerea $\underline{g} = \underline{g}^+(c') \oplus \underline{g}^-(c')$ și deci conjugă pe c în c'. Invers, dacă involuțiile c și c' sînt conjugate prin $a \in \mathrm{Aut}\,\underline{g}$, atunci restricția lui a la subalgebrele reale ale punctelor fixe dă un izomorfism Lie <u>real</u>: $b : \underline{g}^c \longleftrightarrow \underline{g}^{c'}$. Demonstrația propoziției e încheiată.

Să recitim enunțul precedent: o algebră complexă simplă dă naștere la algebre reale simple, fie prin restricția scalarilor, fie prin luarea subalgebrelor de puncte fixe ale involuțiilor sale ((i), (ii), (iii)); toate algebrele simple reale se obțin în acest mod (v); algebre reale simple izomorfe provin din algebre complexe simple izomorfe (iv); algebrele obținute ca puncte fixe de involuții nu sînt izomorfe cu cele obținute prin restricția scalarilor (iv); clasele de izomorfism ale subalgebrelor de puncte fixe provenind din algebra simplă complexă $\underline{g}$ sînt parametrizate de spațiul de orbite $\mathrm{Inv}\,\underline{g}$ mod $\mathrm{Aut}\,\underline{g}$, unde $\mathrm{Aut}\,\underline{g}$ acționează prin conjugare pe Inv $\underline{g}$ (vi).

Cu această reducere, observăm că singurele complicații suplimentare oferite de clasificarea reală față de cea complexă constau în determinarea spațiilor de orbite de tipul Inv $\underline{g}$ mod Aut $\underline{g}$, $\underline{g}$=semisimplă complexă. Cu alte cuvinte, asociind involuției $c' \in \mathrm{Inv}\,\underline{g}$ algebra Lie reală $\underline{g}^{c'}$, rezultă la nivelul spațiilor - cît o bijecție

$$(1.3)\quad \mathrm{Inv}\,\underline{g}\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Aut}\,\underline{g} \xrightarrow{\sim} \{\underline{r} = \text{alg.Lie reală} \mid \underline{r} \otimes \mathbb{C} \cong \underline{g}\}\ \text{modulo izomorfism}$$

în al cărei membru drept găsim <u>formele reale</u> ale algebrei semisimple complexe $\underline{g}$, a căror determinare o urmărim în cele ce urmează.

Pentru aceasta vom fixa, odată cu $\underline{g}$, o alegere de subalgebră Cartan $\underline{h} \subset \underline{g}$, de rădăcini pozitive $\Phi^+ \subset \Phi$ și de bază Chevalley $\{x_\alpha \in \underline{g}^\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$. Vom considera forma reală canonică compactă $\underline{k} \subset \underline{g}$ și vom nota cu $c \in \mathrm{Inv}\,\underline{g}$ involuția canonică ($\underline{g}^c = \underline{k}$), ca în 1.1 (iii).

2. COOMOLOGIE GALOISIANA

Problema determinării formelor k-raționale ale unui obiect algebric definit peste K (unde $k \subset K$ este o extensie Galois, în cazul nostru $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) admite cea mai naturală formulare în termeni de <u>coomologie galoisiană (neabeliană)</u>. Urmează deci o scurtă digresiune, consacrată definițiilor (pentru informații suplimentare și pentru o versiune mai adecvată studiului extensiilor Galois infinite, care reclamă și luarea în considerație a modulelor topologice, a se vedea [Serre 1965]).

Fixînd un grup (abstract) G, definiția functorului covariant

$$H^1(G;\,\cdot): \underline{G\text{-}Mod} \longrightarrow \underline{Ens_*}$$

reprezintă o generalizare naturală a definiției grupurilor de coomologie $H^*(G;$ G-module abeliene), în dimensiune $*=1$. Grupul A (nu neapărat abelian) se va zice astfel un <u>G-modul</u> dacă G acționează la stînga pe A prin automorfisme de grup (acțiunea fiind notată ${}^{s}a \in A$, pentru $s \in G$ și $a \in A$), noțiunea de morfism în <u>G-Mod</u> fiind cea evidentă. Unui G-modul A i se asociază <u>1-cociclii lui G cu coeficienți în A</u>, notați cu $Z^1(G;A)$ și definiți prin

$$(2.1) \quad Z^1(G;A) = \{a_*: G \to A \mid a_{st} = a_s \cdot {}^{s}a_t,\ \forall s,t \in G\}$$

(unde am notat $a(s)$ cu a_s).

Se introduce în continuare o relație de echivalență pe $Z^1(G;A)$

$$(2.2) \quad a'_* \sim a_* \iff \exists\, b \in A \text{ a.î. } a'_s = b^{-1} a_s\, {}^{s}b\,,\ \forall s \in G$$

și se consideră mulțimea cît

$$(2.3) \quad H^1(G;A) = Z^1(G;A)/\sim$$

Spre deosebire de cazul în care A este abelian, $H^1(G;A)$ nu are în general decît structura unei mulțimi cu punct bază și anume clasa cociclului constant 1_* $(1_s = 1,\ \forall s \in G)$

2.4. OBSERVAȚII. Făcînd $s=t=1$ în (2.1) rezultă că în mod necesar $a_1 = 1$, $\forall a_* \in Z^1$. Reciproc, dacă $a_1 = 1$, se observă că restricțiile impuse de (2.1) sînt verificate, dacă $s=1$ sau $t=1$; de asemenea, dacă $a'_1 = a_1 = 1$, (2.2) are loc pentru $s=1$.

2.5. EXEMPLU. (Admiratorii algebrelor Lie reale și complexe pot trece direct la exemplul următor.) Fie $k\subset K$ o extindere Galois finită și $G=Gal(K/k)$ grupul său Galois. Fie L o k-algebră Lie finit dimensională și $A=Aut_K(L\otimes K)$ grupul K-automorfismelor K-algebrei Lie $L\otimes K$. Se verifică îndată că pentru orice $s\in G$ avem

$1\otimes s\in Aut_k(L\otimes K)=\{$ k-autuomorfismele K-algebrei Lie $L\otimes K)$

și că $1\otimes s$ este s-liniar (i.e. $(1\otimes s)(z.x)=s(z)(1\otimes s)(x), \forall z\in K, x\in L\otimes K$ prin urmare A devine în mod natural un G-modul, acțiunea fiind indusă de conjugate: ${}^{s}a=(1\otimes s)a(1\otimes s)^{-1}$, pentru $s\in G$ și $a\in A$ (mai mult, A este un G-submodul al grupului general liniar peste K al lui $L\otimes K$, asupra căruia $s\in G$ acționează în reprezentarea matricială în mod familiar și anume ${}^{s}(a_{ij})=(s(a_{ij}))$, pentru $a=(a_{ij})\in GL_K(L\otimes K)$. Există o corespondentă naturală între <u>formele k-raționale</u> ale K-algebrei Lie $L\otimes K$ și $H^1(G;A)$

$$(2.6)\quad \{L'=k\text{-alg.Lie} \mid L'\otimes K\cong L\otimes K\}\ \text{modulo k-izomorfism} \longrightarrow H^1(G;A)$$

definită în felul următor: unui K-izomorfism Lie $f: L\otimes K \xrightarrow{\sim} L'\otimes K$ i se asociază funcția $a_*: G\longrightarrow A$ dată de egalitatea ${}^{s}f=fa_s$ pentru $s\in G$ (unde ${}^{s}f$ desemnează ca de obicei conjugarea $(1\otimes s)f(1\otimes s)^{-1}$. Fie $s,t\in G$. Avem, pe de o parte:
${}^{st}f={}^{s}({}^{t}f)={}^{s}(fa_t)={}^{s}f\,{}^{s}a_t=fa_s\,{}^{s}a_t$, și pe de altă parte ${}^{st}f=fa_{st}$. Comparînd deducem că $a_*\in Z^1(G;A)$. Orice altă alegere de K-izomorfism Lie $L\otimes K\xrightarrow{\sim} L'\otimes K$ este de forma fb, cu $b\in A$. Notînd cu a'_* 1-cociclul corespunzător lui fb avem, pentru orice $s\in G$: ${}^{s}(fb)=fba'_s$ și ${}^{s}(fb)={}^{s}f\,{}^{s}b=fa_s\,{}^{s}b$ de unde deducem $a'_*\sim a_*$. In sfîrșit fie c un k-izomorfism Lie și a''_* 1-cociclul corespunzător lui $(c\otimes 1)f$; avem, pentru orice $s\in G$, prin definiție, ${}^{s}(c\otimes 1)\,{}^{s}f=(c\otimes 1)fa''_s$ și, de asemenea din definiție, ${}^{s}(c\otimes 1)=(1\otimes s)(c\otimes 1)(1\otimes s)^{-1}=c\otimes 1$.
Scriind ${}^{s}f=fa_s$ și comparînd rezultă că $a''_*=a_*$, și

prin urmare corespondența (2.6) e bine definită.

Faptul remarcabil este că această corespondență nu este numai bine definită, ci și bijectivă. Injectivitatea ei, spre exemplu, pune în evidență rolul teoriei Galois. Să vedem cum. Fie deci $f': L\otimes K \xrightarrow{\sim} L'\otimes K$ și $f'': L\otimes K \xrightarrow{\sim} L''\otimes K$ două K-izomorfisme. Să presupunem, conform (2.2) că între 1-cociclu asociați a'_* și a''_* există relația

$$a'_s = a^{-1} a''_s \, {}^s a, \quad \forall s\in G \qquad \text{pentru un anume } a\in A$$

Reamintindu-ne că, prin definiție ${}^s f' = f' a'_s$ și ${}^s f'' = f'' a''_s$ $\forall s\in G$, calculăm ${}^s(f' a^{-1} f''^{-1}) = f' a'_s \, {}^s(a^{-1}) \, a''^{-1}_s f''^{-1} = f' a^{-1} f''^{-1}$, $\forall s\in G = Gal(K/k)$. Deducem despre K-izomorfismul $f' a^{-1} f''^{-1}: L''\otimes K \xrightarrow{\sim} L'\otimes K$ că este definit peste k, deci că L' și L'' sînt k-izomorfe . Surjectivitatea corespondenței de mai sus poate fi stabilită utilizînd proprietățile de naturalitate ale coomologiei galoisiene și faptul că $H^1(Gal(K/k); GL_K(K^n)) = 0$, vezi [Serre 1965, p.III-3] și [Serre 1962, Ch.X, §2]. Nu vom intra în detalii. Vom reveni în schimb la extensia noastră favorită: $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

2.7. EXEMPLU. Fie $G = \mathbb{Z}_2 \,(= Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}))$. Să notăm cu c generatorul grupului $\mathbb{Z}_2$ ($c\in\mathbb{Z}_2$, $c\neq 1$ - respectiv c=conjugarea complexă). O structură de $\mathbb{Z}_2$- modul pe grupul A este unic determinată de acțiunea lui c pe A, deci este dată de un automorfism involutiv al lui A ($c\in$Aut A, $c^2=1$). După observațiile făcute în (2.4), un 1-cociclu $a_*\in Z^1(\mathbb{Z}_2; A)$ este unic determinat de valoarea sa în c, a_c, pe care o vom nota simplu cu a, iar (2.1) se reduce la

(2.8) $$Z^1(\mathbb{Z}_2; A) = \{a\in A \mid 1 = a.{}^c a\}$$

(unde am notat, ca de obicei, c(a)= ^{c}a).

In acelaşi mod se observă că (2.2) se reduce la

(2.9) $a' \sim a \iff \exists\, b \in A$ a.î. $a' = b^{-1}\, a\, {}^{c}b$

Fie acum $\underline{g}$ o algebră semisimplă complexă, $\underline{k}$ forma reală compactă canonică (în particular $\underline{g} = \underline{k} \otimes \mathbb{C}$) şi $c \in \mathrm{Inv}\,\underline{g}$ involuţia canonică, în notaţiile convenite în finalul secţiunii precedente. Fie A=Aut $\underline{g}$. Conjugarea prin c (${}^{c}a = cac^{-1}$, pentru a∈A) induce o structură de $\mathbb{Z}_2$- modul pe A - care coincide de fapt cu structura considerată în general în exemplul precedent.

PROPOZITIA 2.10. Corespondenţa $a \to ac$ (a∈Aut $\underline{g}$) induce o bijecţie $H^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inv}\,\underline{g}$ mod Aut $\underline{g}$.

<u>Demonstraţie.</u> Corespondenţa considerată realizează, evident, o bijecţie între $\mathbb{C}$-automorfismele Lie ale lui $\underline{g}$ şi $\mathbb{R}$-automorfismele Lie $\mathbb{C}$-antiliniare ale lui $\underline{g}$. Condiţia de involutivitate se traduce prin $1 = (ac)^2 = a(cac^{-1}) = a.{}^{c}a$, deci, după (2.8), $Z^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{g})$ şi $\mathrm{Inv}\,\underline{g}$ se corespund bijectiv. Involuţiile a'c şi ac sînt conjugate prin Aut $\underline{g}$ dacă şi numai dacă există b∈Aut $\underline{g}$, astfel încît $a'c = b^{-1}acb$, condiţie echivalentă cu $a' = b^{-1}a\,{}^{c}b$, deci, după (2.9), spaţiile cît $H^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{g})$ şi $\mathrm{Inv}\,\underline{g}$ mod $\mathrm{Aut}\,\underline{g}$ sînt puse în bijecţie.

COROLAR 2.11. Pentru extinderea $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ şi $\mathbb{R}$-algebră $\underline{k}$, (2.6) e o bijecţie.

<u>Demonstraţie</u>. Se verifică fără dificultate comutativitatea diagramei următoare

$$\text{(2.12)}\quad \begin{tikzcd} & \{\underline{r} = \mathbb{R}\text{-alg Lie} \mid \underline{r}\otimes\mathbb{C} \cong \underline{k}\otimes\mathbb{C}\} \text{ modulo } \mathbb{R}\text{-izomorfism} \arrow[dl, "\sim"'] & \\ H^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{g}) \arrow[rr, "\sim"] & & \mathrm{Inv}\,\underline{g} \text{ mod } \mathrm{Aut}\,\underline{g} \arrow[ul, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

în care săgeata orizontală reprezintă bijecția stabilită în propoziția precedentă, săgeata din dreapta este bijecția (1.3), iar săgeata din stînga este cea construită în (2.6).

Ținînd cont de Propoziția 2.10, problema clasificării reale se reformulează astfel: a se calcula $H^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{g})$.

Pe cît de ușor de definit, coomologia galoisiană este în general pe atît de dificil de calculat. După reducerile succesive ale problemei inițiale de clasificare pe care le-am efectuat, pasul următor constituie primul rezultat serios, și anume un calcul de H^1 neabelian.

Să considerăm deci $\mathbb{Z}_2$ - modulul Aut $\underline{g}$, și odată cu el submodulul punctelor fixe $(\mathrm{Aut}\,\underline{g})^{\mathbb{Z}_2} = \{a \in \mathrm{Aut}\,\underline{g} \mid {}^s a = a, \forall s \in \mathbb{Z}_2\} = \{a \in \mathrm{Aut}\,\underline{g} \mid {}^c a = a\} \cong \mathrm{Aut}\,\underline{k}$, înzestrat cu $\mathbb{Z}_2$- structură trivială. (În ultima identificare, $a \in \mathrm{Aut}\,\underline{k}$ se corespunde cu $a\otimes\mathbb{C} \in \mathrm{Aut}\,\underline{g}$). Reluînd definițiile (2.8) și (2.9) în ipoteza că c acționează trivial, se observă imediat că avem

$$(2.13)\quad H^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{k}) = 2\text{-tors Aut}\,\underline{k} \text{ mod conjugare}$$

(unde, dat grupul A, notăm $2\text{-tors}\,A = \{a \in A \mid a^2 = 1\}$ și spunem că $a' \sim a$ mod conjugare dacă există $b \in A$ a.î. $a' = bab^{-1}$).

<u>TEOREMA 2.14</u>. Incluziunea $\mathbb{Z}_2$-modulului trivial Aut $\underline{k}$ în $\mathbb{Z}_2$- modulul Aut $\underline{g}$ dată de complexificare induce un izomorfism

$$H^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{k}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{g})$$

<u>Demonstrație</u>. Vom utiliza în mod decisiv existența formei

reale compacte $\underline{k}$, împreună cu consecințele ei legate de posibilitatea folosirii descompunerii polare.

Definind, pentru $x,y \in \underline{g}$, $\langle x,y\rangle = -B(x,cy)$, unde c este involuția canonică, se verifică imediat că obținem în acest mod o formă hermitiană pozitiv definită pe $\underline{g}$. Reamintim că în acest caz se poate vorbi de descompunerea polară a elementelor $a \in GL_{\mathbb{C}}(\underline{g})$: dat a, acesta se scrie în mod unic sub forma $a=up$, unde $u \in U = \{$operatorii unitari$\}$ și $p \in P = \{$operatorii hermitici pozitivi$\}$. Noțiunile sînt cele uzuale și anume: dat $a \in GL(\underline{g})$, adjunctul său, notat a^*, e definit prin $\langle ax,y\rangle = \langle x,a^* y\rangle$, $\forall x,y \in g$; u e unitar dacă $u^* = u^{-1}$; p e hermitic dacă $p^* = p$ și pozitiv dacă $\langle px,x\rangle \geq 0, \forall x \in \underline{g}$. In ceea ce privește existența și unicitatea descompunerii polare, ele se bazează pe faptul că $a^* a \in P$, pentru orice $a \in GL_{\mathbb{C}}(\underline{g})$, și pe faptul că orice operator hermitic și pozitiv se poate diagonaliza, cu valori reale pozitive pe diagonală, și prin urmare admite o unică rădăcină pătrată hermitică și pozitivă; în descompunerea polară a lui a se ia atunci $p = (a^* a)^{1/2}$. Pentru detalii, vezi de exemplu [Hausner-Schwartz, p.8-9].

Forma hermitică a lui $\underline{g}$ fiind strîns legată de forma Killing, este de așteptat ca descompunerea polară a elementelor din Aut $\underline{g}$ să aibă proprietăți speciale. Fie într-adevăr $a=up$ descompunerea polară a lui $a \in \mathrm{Aut}\,\underline{g}$. Atunci

$$(2.15) \qquad u,p \in \mathrm{Aut}\,\underline{g}\ ; \quad {}^c u = u \quad \text{și} \quad {}^c p = p^{-1},$$

cu alte cuvinte urma descompunerii polare pe Aut $\underline{g}$ reprezintă descompunerea neliniară a acțiunii Galoisiene a lui c corespunzătoare descompunerii liniare uzuale în subspațiile proprii ale valorilor proprii ± 1 ale unui automorfism liniar involutiv. O primă consecință importantă a proprietăților (2.15) este egalitatea imediată $\mathrm{Aut}\,\underline{k} = \mathrm{Aut}\,\underline{g} \cap U$.

Să demonstrăm (2.15). Fie $a \in \mathrm{Aut}\,\underline{g}$ și $x,y \in \underline{g}$. Avem

$\langle ax, y\rangle = -B(ax, cy) = -B(x, a^{-1}cy) = \langle x, ca^{-1}cy\rangle$, de unde $a^* = {}^c a^{-1}$, sau ${}^c a = a^{*-1}$. Scriind $a = up$, ultima egalitate devine ${}^c u\, {}^c p = (pu^{-1})^{-1} = up^{-1}$. Deoarece ${}^c U = U$, ${}^c P = P$ și $P^{-1} = P$, rezultă din unicitatea descompunerii polare că ${}^c u = u$ și ${}^c p = p^{-1}$. Rămîne de văzut că $p \in \mathrm{Aut}\, \underline{g}$. Dar $p^2 = a^* a = {}^c(a^{-1}) a \in \mathrm{Aut}\, \underline{g}$. Nu ne rămîne decît de observat faptul că, în general, dacă $p \in P$, atunci $p \in \mathrm{Aut}\, \underline{g}$ este echivalent cu $p^k \in \mathrm{Aut}\, \underline{g}, \forall k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$. Intr-adevăr, putem diagonaliza p într-o bază $\{x_i\}$: $px_i = \lambda_i x_i$, $\lambda_i > 0$. In această bază condiția ca p^k să fie un automorfism Lie se reformulează cu ușurință sub forma $c_{ij}^{\ell}(\lambda_i^k \lambda_j^k - \lambda_\ell^k) = 0, \forall i,j,\ell$, unde c_{ij}^{ℓ} sînt constantele de structură ale algebrei Lie $\underline{g}$ în raport cu baza $\{x_i\}$ și în această formă ea este vizibil independentă de k.

Să trecem la demonstrația propriu-zisă a teoremei. Vom începe prin a arăta surjectivitatea enunțată. După (2.8), un 1-cociclu din $Z^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\, \underline{g})$ este reprezentat de un element $a = up \in \mathrm{Aut}\, \underline{g}$. Proprietatea de a fi cociclu revine la $1 = a.{}^c a$ sau, după (2.15), $1 = upup^{-1}$, sau, echivalent, $p = u^2(u^{-1}pu)$. Deoarece $u^{-1}Pu = P, \forall u \in U$, unicitatea descompunerii polare dă $u^2 = 1$ și $pu = up$. Fie $q = p^{1/2}, q \in P$. Conform unei observații anterioare $q \in \mathrm{Aut}\, \underline{g}$. Afirmăm că, în general, dacă $p \in P$ și $b \in GL_{\mathbb{C}}(\underline{g})$ atunci proprietatea de comutare $p^k b = b p^k$ este independentă de $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, deci că în particular q comută cu u. Diagonalizînd p într-o bază $\{x_i\}$ ca mai sus, se vede ușor că proprietatea $p^k b = b p^k$ este echivalentă cu $b_{ij}(\lambda_i^k - \lambda_j^k) = 0, \forall i,j$, unde (b_{ij}) e matricea lui b în baza $\{x_i\}$ și că prin urmare ea este independentă de k. Arătăm în sfîrșit că $up = qu{}^c q^{-1}$. Va rezulta de aici, ținînd cont de (2.15) și de defințiile (2.8) și (2.9), că a este echivalent în $Z^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\, \underline{g})$ cu 1-cociclul reprezentat de $u \in Z^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\, \underline{k})$, de unde surjectivitatea enunțată. Deoarece q și u comută, egalitatea dorită e echivalentă cu $p = q\, {}^c q^{-1}$ sau cu $q = {}^c q^{-1}$, ori ${}^c q = q^{-1}$. Ținînd cont de faptul că ${}^{c}q, q^{-1} \in P$, se poate ridica la pătrat în ultima egalitate, ajungînd la ${}^{c}p = p^{-1}$, care rezultă din (2.15).

Pentru a verifica injectivitatea enunțată, fie $u, v \in \mathrm{Aut}\,\underline{k}$

Să presupunem că $u^2 = v^2 = 1$ și că există $a \in \mathrm{Aut}\,\underline{g}$ a.î. $v = a^{-1} u\, {}^{c}a$. Scriind descompunerea polară $a = wp$, presupunerea făcută revine la $v(v^{-1} p v) = (w^{-1} u w)\, p^{-1}$. Egalînd componentele unitare deducem $v = w^{-1} u w$, deci $u \sim v$ în $Z^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{k})$. Demonstrația teoremei e încheiată.

COROLAR 2.16 (al demonstrației). Orice două forme reale compacte ale unei algebre Lie semisimple complexe sînt conjugate printr-un automorfism interior.

Demonstrație. Fie $\underline{k} \subset \underline{g}$ forma compactă canonică. Orice altă formă reală este de forma $\underline{g}^{ac}$, cu $a \in Z^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{g})$, vezi (1.3), 2.10. Reluînd demonstrația teoremei precedente, putem găsi $q \in \mathrm{Aut}\,\underline{g}$ a.î. $ac = q(uc)q^{-1}$, unde $u \in \mathrm{Aut}\,\underline{g}$ comută cu c și $uc \in \mathrm{Inv}\,\underline{g}$.

Reamintindu-ne că de fapt $q \in P$, să observăm acum că automorfismul q este interior. Să scriem $\underline{g} = \oplus\, \underline{g}^{\lambda}$ și să notăm că valorile proprii care apar în această descompunere în subspații proprii ale lui q au proprietatea $\lambda > 0$. Definim aplicația $\mathbb{C}$-liniară $\theta : \underline{g} \longrightarrow \underline{g}$ prin $\theta|_{\underline{g}^{\lambda}} = (\log \lambda)\cdot \mathrm{id}$. Faptul că avem $q \in \mathrm{Aut}\,\underline{g}$ implică: $[\underline{g}^{\lambda}, \underline{g}^{\mu}] \subset \underline{g}^{\lambda\mu}$, $\forall \lambda, \mu$,de unde rezultă că θ este o derivare, (interioară - $\underline{g}$ e semi-simplă!). Pe de altă parte, deducem din construcție $q = \exp\theta$.

Involuțiile c și uc comută, prin urmare c invariază subspațiul propriu $\underline{g}^{+}(uc)$ și induce descompunerea $\underline{g}^{+}(uc) = \underline{g}^{+}(uc) \cap \underline{g}^{+}(c) \oplus \underline{g}^{+}(uc) \cap \underline{g}^{-}(c)$. Presupunînd acum că forma reală $\underline{g}^{+}(ac)$ este compactă, rezultă că și $\underline{g}^{+}(uc)$ este compactă și deci că restricția formei Killing la cel de-al doilea sumand al descompunerii de mai sus are proprietatea $B| < 0$. Pe de altă parte avem $\underline{g}^{+}(uc) \cap \underline{g}^{-}(c) = J(\underline{g}^{-}(uc) \cap \underline{g}^{+}(c))$ $(J = \sqrt{-1})$ și deci compacitatea lui $\underline{g}^{+}(c)$ implică $B| > 0$

In concluzie sumandul considerat e trivial, deducem o incluziune $\underline{g}^+(uc) \subset \underline{g}^+(c)$, deci egalitatea $\underline{g}^{uc} = \underline{g}^c$, de unde uc=c, și deci forma compactă arbitrară $\underline{g}^{ac}$ este conjugată, prin automorfismul interior q, cu forma compactă canonică $\underline{g}^c$.

2.17. OBSERVATII

(i) Teorema precedentă nu reprezintă încă un calcul efectiv de H^1 neabelian, dar este o reducere mai mult decît substanțială: în primul rînd la cazul $\mathbb{Z}_2$- modulelor triviale, deci la analiza claselor de conjugate în grupul abstract Aut $\underline{k}$. Dar Aut $\underline{k}$ nu este numai un grup abstract! El este un subgrup închis în grupul ortogonal compact $O(\underline{k})$, unde metrica este dată de -B, deci un grup Lie compact. Faptul că metodele transcendente permit o analiză satisfăcătoare a claselor de conjugare în grupuri Lie compacte ne va permite, în continuare, să finalizăm calculul început aici.

(ii) Există o bună legătură între Aut $\underline{k}$ și algebra Lie $\underline{g}$ cu care am pornit.

Deocamdată să observăm că algebra Lie a lui Aut $\underline{k}$, Lie(Aut $\underline{k}$) coincide cu Der $\underline{k} \cong \underline{k}$. Pentru prima egalitate vezi [Warner], p.117-118, iar cel de-al doilea izomorfism e indus de ad, vezi lecția I ($\underline{k}$ fiind semisimplă, odată cu $\underline{g}$).

(iii) Pentru o mai bună înțelegere a Obs. (i) și (ii) se recomandă parcurgerea § 3.

3. GRUPURI LIE COMPACTE (MINIDICTIONAR)

Este indicat a se privi cele ce urmează ca o secțiune de tranziție. Măsura efectivă a eficacității metodelor transcendente în calculul coomologiei $H^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{k})$ e de căutat în următoarele două secțiuni. Aici, în general, nu sînt de aștentat demonstrații complete. Pentru faptele generale esențiale ale teoriei grupurilor Lie recomandăm [Spivak, Ch.10] și [Warner, Ch.3]; pentru structura grupurilor Lie compacte, a se vedea [Adams, Ch.4-5], [Bröcker - tom Dieck, Ch.IV-V]. Urmărind în mod sistematic exemplul important al grupului Lie compact și conex $U(n) = \{$ operatorii unitari din $\mathbb{C}^n\}$ (vezi [Warner]), vom schița un dicționar de corespondențe între obiectele fundamentale ale teoriei structurale a algebrelor Lie semisimple complexe(și proprietățile acestor obiecte) și cele ale teoriei paralele pentru grupuri Lie <u>compacte și conexe</u>

	subalgebre Cartan (existență,conjugare)	$\longleftrightarrow$	toruri maximale (existență, conjugare)
(3.0)	sistemul de rădăcini (infiniezimal)	$\longleftrightarrow$	sistemul de rădăcini (global)
	grupul Weyl (infinitezimal)	$\longleftrightarrow$	grupul Weyl (global)

De asemenea vom trece în revistă rezultatele generale legate de analiza claselor de conjugare ale grupurilor Lie compacte (nu neapărat conexe).

Grupurile Lie (reale) reprezintă forma globală a algebrelor Lie (reale). Să ne reamintim că există un functor (covariant) Lie (.): $\{$grupuri Lie reale$\} \to \{$algebre Lie reale$\}$ ale cărui proprietăți justifică afirmația de mai sus (vezi [Spivak], [Warner]). Unui grup G i se asociază Lie(G)= $T_eG = \{$spațiul tangent în elementul neutru e la G$\}$, înzestrat cu o anumită structură de algebră Lie, iar unui morfism de grupuri Lie, f, i se asociază aplicația tangentă $d_e f$, notată Lie (f), sau pur și simplu f'; evident construcțiile nu depind decît de ceea ce se întîmplă la nivelul componentelor conexe ale elementului neutru în grupurile considerate(componente notate G_e). Orice algebră Lie reală finitdimensională este de forma Lie(G) cu G conex, iar două grupuri conexe au algebre Lie izomorfe dacă și numai dacă ele sînt local izomorfe ca grupuri. Corespondența de mai sus induce o echivalență {grupuri Lie conexe și 1-conexe} $\xrightarrow{\sim}$ {algebre Lie finit dimensionale}. Ea este de asemenea deosebit de fidelă (și utilă) la nivelul morfismelor (în sensul că pentru două morfisme $f_1, f_2 : G \to H$, unde G este conex, proprietățile f=g și f'=g' sînt echivalente) și al subgrupurilor (în sensul că, dat grupul conex G, ea induce un izomorfism de latici - i.e. compatibil cu incluziunile - {subgrupuri conexe în G} $\xrightarrow{\sim}$ {subalgebre în Lie G}). Să reținem, în aceeași ordine de idei a dicționarului global $\leftrightarrow$ infinitezimal și egalitățile:

$$\{\text{Lie}(G) \mid G=\text{compact}\} = \{\text{alg.Lie compacte}\} = \{\mathbb{C}\text{-alg.Lie reductive}\}$$

(prima explicată în lecția X și cea de-a doua indusă de complexificare - după cum rezultă ușor din lecția X ținînd cont de Corolarul 2.16), ce sugerează intens existența unui dicționar de tipul (3.0).

Un alt exemplu de același tip îl constituie faptul că, pentru un grup conex G, proprietățile "G=abelian" și "Lie G=abeliană" sînt echivalente ([Spivak]), iar dacă în plus G este compact, abelianitatea algebrei lui Lie este echivalentă cu determinarea structurală "G este un tor T^n, n=dim Lie G" ([Warner, p.135]), unde am notat, conform uzanțelor, $T^n=(S^1)^n$, $n\geq 0$ $(S^1=U(1))=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (ultimul izomorfism fiind indus de exponențierea complexă, $e^{2\pi J}$).

Să notăm în continuare cu G_o un grup Lie compact și <u>conex</u>. Există, evident, toruri maximale în G_o. Fie T un <u>tor maximal</u> fixat. Primul rezultat fundamental îl constituie următoarea

3.1. TEOREMA (E. Cartan, vezi [Adams, p.89]). Pentru orice $g_o \in G_o$ există $g \in G_o$ a.î. $g g_o g^{-1} \in T$.

Fie, spre exemplificare, T^n = {elementele diagonale din $U(n)$} (tor evident inclus intr-un tor maximal; vom vedea în curînd că T^n este de fapt maximal). In acest caz afirmația de mai sus rezultă din proprietatea familiară de diagonalizare.

O primă proprietate importantă a torurilor T este aceea de a fi grupuri topologic ciclice (i.e. de a admite un generator topologic, adică un element $t \in T$ a.î. $T = \{$subgrupul închis generat de $t\}$). Dacă $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, este elementar de văzut că numerele iraționale produc exemple de astfel de generatori; cazul general nu este cu mult mai dificil, vezi [Adams, p.79]. Mai mult, grupurile topologic ciclice se pot caracteriza printre cele compacte, ca fiind produsele de forma $\{$tor$\} \times \{$grup finit ciclic$\}$, vezi [Bröcker-tom Dieck, p.39].

3.2. TEOREMA. Orice două toruri maximale sînt conjugate.

Demonstrație. Fie T_1 și T două toruri maximale și $t \in T_1$ un generator. Există, conform teoremei 3.1, un element $g \in G_o$ a.î. $gtg^{-1} \in T$. Rezultă că $gT_1g^{-1} \subset T$ (t generează topologic pe T_1!) de unde, din maximalitate, $gT_1g^{-1} = T$.

In acest punct se poate deja pune în evidență legătura cu analiza claselor de conjugare. Dacă $T \subset G_o$ este un tor maximal, definim grupul Weyl global, $W_{gl} = N_{G_o}(T)/T$ (unde N=normalitor). Grupul Weyl acționează în mod natural pe T, prin conjugare.

3.3. COROLAR. Aplicația naturală T mod $W_{gl} \longrightarrow G_o$ mod conjugare este o bijecție. Ea induce o bijecție 2-tors T mod $W_{gl} \xrightarrow{\sim}$ 2-tors G_o mod conjugare.

Demonstrație. Surjectivitatea primei aplicații rezultă direct din 3.1. Fie acum $x, y \in T$ și să presupunem că există $g \in G_o$ a.î. $gxg^{-1} = y$. Rezultă incluziunile $T, gTg^{-1} \subset C_{G_o}(y)_e$ (C=centralizator), ambele toruri fiind maximale în G_o, și deci și în centralizatorul conex considerat. Găsim (3.2) $h \in C_{G_o}(y)$ a.î. $hgTg^{-1}h^{-1} = T$, deci $hgT \in W_{gl}$, și hg conjugă pe x în y, de unde injectivitatea anunţată. Cea de-a doua afirmaţie e imediată.

E momentul să facem unele observaţii. In primul rînd, grupurile compacte Aut $\underline{k}$ nu sînt în general conexe, după cum vom vedea în secţiunea următoare, fapt ce va atrage complicaţii suplimentare. In cazul fericit (Aut $\underline{k}$=conex) dacă $T=T^n$ atunci 2 tors $T=\mathbb{Z}_2^n$, unde $\mathbb{Z}_2 \subset S^1$ sînt rădăcinile de ordin 2 ale unităţii, deci în particular mulţimea formelor reale ale algebrei $\underline{g}=\underline{k}\otimes\mathbb{C}$ este finită (după cum vom vedea, acest fapt nu depinde de conexitatea lui Aut $\underline{k}$, dacă $\underline{g}$ este o algebră Lie, simplă; pentru explicaţia fenomenului general vezi [Serre 1965] III29-30 .

3.4. PROPOZITIE. Fie $H\subset G_o$ un subgrup conex. Atunci H este un tor maximal în G_o dacă şi numai dacă Lie H este o subalgebră Cartan în Lie G_o.

<u>Demonstraţie.</u> Dacă $T\subset G_o$ este un tor maximal, avem de arătat, conform lecţiilor precedente, că Lie T este o subalgebră abeliană maximală în Lie G_o. Fie deci L o subalgebră abeliană care conţine Lie T. Ea este deci de forma L=Lie S, cu $S\subset G_o$ conex şi abelian, şi $T\subset S$. Deducem $T\subset \overline{S}$, iar $\overline{S}$ este conex şi abelian şi odată cu S, şi în plus compact, odată cu G_o, deci un tor. Din maximalitate $\overline{S}=T$, deci L = Lie T. Reciproc, dacă Lie H e subalgebră abeliană (maximală), un argument asemănător ne indică (întîi) faptul că $\overline{H}$ e un tor, apoi că $\mathrm{Lie}(H)=\mathrm{Lie}(\overline{H})$, deci că H e un tor, şi în final faptul că H e un tor maximal.

Putem verifica acum că torul diagonal $T^n\subset U(n)$ e maximal. Deoarece proprietăţile de definiţie ale subalgebrelor Cartan sînt independente de extensia scalarilor, putem complexifica. Deoarece Lie $U(n)\otimes\mathbb{C} \cong \underline{gl}(n;\mathbb{C})$ şi în această identificare Lie $T^n\otimes\mathbb{C}$ se corespunde cu subalgebra matricilor diagonale (exerciţiu!), putem aplica criteriul din Propoziţia 3.4, vezi Lecţia VI..

Trecînd la următoarea corespondență din dicționarul (3.0), să începem prin a revedea analogul global al reprezentării adjuncte a unei algebre Lie (Lecția X , vezi și [Warner]). Reprezentarea adjunctă a unui grup Lie G, notată $Ad:G\to GL(\mathrm{Lie}\ G)$, e un morfism de grupuri definit prin $Adg=(\mathrm{int}\ g)'$, pentru $g\in G$, unde int g desemnează automorfismul interior definit de g, și ia evident valori în subgrupul Aut(Lie G). Avem egalitatea $(Ad)'=ad$.

Să precizăm cu această ocazie și legătura dintre reprezentarea adjunctă globală și aplicația exponențială. Aceasta din urmă (vezi [Spivak]) se notează tradițional $\exp.:\mathrm{Lie}\ G\to G$ și se definește în modul următor: dat $X\in \mathrm{Lie}\ G=T_eG$, există un unic morfism $f:\mathbb{R}\to G$ (numit subgrup cu un parametru) cu proprietatea $\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}=X$; punem atunci $\exp x=f(1)$. Spre exemplu, dacă $G=GL(n;k)$, $k=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, și $X\in \underline{gl}(n;k)$, atunci $\exp X=\sum_{n\geq 0}(1/n!).X^n$ ([Spivak]), iar dacă $G=T^n$ și $X\in \mathrm{Lie}\ T^n\cong\mathbb{R}^n$, atunci $\exp X=e^{2\pi JX}$ (exponențiala uzuală complexă, pe componente). Construcția e naturală: dacă f e un morfism de grupuri, atunci $f\circ\exp=\exp\circ f'$ (exercițiu). Aplicînd această observație reprezentării adjuncte globale, obținem pentru orice $x\in \mathrm{Lie}\ G$

(3.5) $Ad\exp x=\exp ad\, x\in \mathrm{Int}(\mathrm{Lie}\ G)=\{$automorfismele interioare$\}$ (unde exponențiala din membrul drept e cea infinitezimală uzuală).

Fie $T\subset G_o$ un tor maximal fixat. Paralel cu teoria infinitezimală, obiectul central în teoria globală îl constituie reprezentarea adjunctă $Ad:T\to GL(\mathrm{Lie}\ G_o\otimes\mathbb{C})$.

Fie, în general, T un tor și $\rho:T\to GL(V)$ o reprezentare complexă finit dimensională. Ca o consecință a existenței integralei invariante pe grupul compact T se poate presupune că reprezentarea se face prin operatori unitari, deci $\rho(T)$ reprezintă o familie comutativă de automorfisme semisimple și, în paralel cu cazul subalgebrelor torale maximale ale algebrelor Lie semisimple complexe, automorfismele $\varrho(T)$ se pot diagonaliza simultan, rezultatul fiind descompunerea ([Adams, Ch.3])

(3.6) $V=\bigoplus V^{\lambda}$, unde $\lambda\in \mathrm{Hom}(T,S^1)$ și

$$V^{\lambda}=\{v\in V \mid \varrho(t)v=\lambda(t).v,\ \forall\ t\in T\}$$

In această descompunere, morfismele Lie λ cu proprietatea $V^{\lambda}\neq 0$ se numesc <u>ponderile globale</u> ale reprezentării. Ele sînt unic determinate de derivatele lor, $\lambda'\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\underline{t},\mathbb{R})$, (unde am notat Lie $T=\underline{t}$), care se numesc <u>ponderile liniare</u> ale reprezentării.

Revenind la reprezentarea globală fundamentală, $\mathrm{Ad}:T\longrightarrow GL(\mathrm{Lie}\ G_o\otimes\mathbb{C})$, vom considera, în mod natural, <u>rădăcinile globale</u>, notate prin $\Phi_{gl}\subset \mathrm{Hom}(T,S^1)$, ca fiind ponderile diferite de 1 ale acestei reprezentări. Prin derivare, ele se identifică cu <u>rădăcinile linare</u>, notate $\Phi_{lin}=\Phi'_{gl}$. Acestea din urmă constituie o familie finită de vectori nenuli din $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\underline{t},\mathbb{R})$, care poate fi de asemenea gîndită, prin complexificare, în $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\underline{t}\otimes\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Care este legătura cu teoria infinitezimală? Să ne reamintim că $\underline{t}\otimes\mathbb{C}$ este o subalgebră Cartan a algebrei Lie complexe <u>reductive</u> Lie $G_o\otimes\mathbb{C}$. fie deci $\underline{a}\oplus\underline{g}$ o algebră complexă reductivă ($\underline{a}$=abeliană, $\underline{g}$=semisimplă) și $\underline{h}\subset\underline{g}$ o subalgebră torală maximală. Se verifică fără dificultate că $\underline{a}\oplus\underline{h}$ este o subalgebră Cartan în $\underline{a}\oplus\underline{g}$, care este abeliană și constă din elemente ad-semisimple. Prin urmare reprezentarea adjunctă a lui $\underline{a}\oplus\underline{h}$ în $\underline{a}\oplus\underline{g}$ se descompune în subspații proprii corespunzătoare ponderilor (și analog pentru <u>orice</u> subalgebră Cartan a lui $\underline{a}\oplus\underline{g}$, datorită teoremei de conjugare, vezi Lecția IV). Definim <u>rădăcinile</u> algebrei Lie reductive $\underline{a}\oplus\underline{g}$ ca fiind ponderile nenule ale reprezentării adjuncte (relativ la o subalgebră Cartan fixată). Relativ la subalgebra Cartan $\underline{t}\otimes\mathbb{C}\subset \mathrm{Lie}G_o\otimes\mathbb{C}$, vom vorbi astfel despre <u>rădăcinile infinitezimale</u>, notate $\Phi_{inf}\subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\underline{t}\otimes\mathbb{C},\mathbb{C})$. Ținînd cont de relația $(\mathrm{Ad})'=\mathrm{ad}$, este ușor de stabilit următoarea egalitate (vezi și [Bröcker-tom Dieck, p.114]

$$(3.7) \qquad 2\pi J\, \Phi_{lin} = \Phi_{inf}$$

Relativ la subalgebra Cartan $\underline{a} \oplus \underline{h}$, rădăcinile algebrei Lie reductive $\underline{a} \oplus \underline{g}$ se identifică ușor, via proiecția pe $\underline{h}$, cu rădăcinile algebrei semisimple $\underline{g}$, relativ la $\underline{h}$. Ele vor da încă naștere unui sistem de rădăcini, într-un sens puțin mai larg - vezi [Varādarajan, Appendix 4.15] - și anume fără a mai impune condiția de normalizare legată de $\mathbb{C}$-generarea dualului $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\underline{a} \oplus \underline{h}, \mathbb{C})$. Dacă G_o e un grup semisimplu (i.e. dacă Lie G_o e semisimplă), atunci $\underline{a}=0$ și noțiunea este cea obișnuită. In general, această modificare a noțiunii de sistem de rădăcini folosite anterior este minimă (deoarece înlocuind spațiul ambient al unui sistem de rădăcini în sens larg cu spațiul generat de rădăcini se obține evident un sistem de rădăcini în sens forte), și (aproape) toată teoria prezentată în Lecția VI (în particular teoria grupului Weyl asociat) se poate reface, vezi [Varadarajan, Appenxix 4.15] sau [Adams, Ch.5]. Menționăm în sfîrșit că sistemul de rădăcini $\Phi_{lin} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\underline{t}, \mathbb{R})$ poate fi privit și ca sistem de rădăcini în $\underline{t}$, via identificarea procurată de restricția la $\underline{t}$ a unei matrici Ad G_o-invariante definite pe Lie G_o, vezi [Adams, Ch.5]; dacă G_o e semisimplu se poate alege drept metrică forma Killing a lui Lie G_o, cu semn schimbat.

Cu aceasta putem trece la ultimul punct al dicționarului (3.0). Fie deci $T \subset G_o$ un tor maximal fixat. Să considerăm grupul Weyl infinitezimal, notat $W_{inf} \subset GL(\underline{t})$, ca fiind grupul Weyl asociat sistemului de rădăcini $\Phi_{lin} \subset \underline{t}$. Tinînd cont de (3.7), el depinde numai de datele infinitezimale $\underline{t} \otimes \mathbb{C} \subset \mathrm{Lie}\, G_o \otimes \mathbb{C}$. Legătura cu grupul Weyl global definit anterior se face via aplicația $W_{gl} \to GL(\underline{t})$, natural indusă de conjugare și derivare, care este injectivă, vezi [Adams, p.94-95].

3.8. TEOREMA ([Adams, p.110]). Aplicația naturală

$N_{G_o}(T)/_T \to GL(t)$ induce un izomorfism între grupul Weyl global și cel infinitezimal.

Dacă $G_o=U(n)$ și $T=T^n$=torul maximal diagonal, am remarcat identificările Lie $U(n)\otimes\mathbb{C} \cong \underline{gl}(n;\mathbb{C})$ și $\underline{t}\otimes\mathbb{C} \cong \{$matricele diagonale$\}$. Deoarece $\underline{gl}(n;\mathbb{C})=\mathbb{C}\oplus\underline{sl}(n;\mathbb{C})$, grupul W_{inf} coincide cu grupul Weyl al sistemului standard de rădăcini pentru $\underline{sl}(n;\mathbb{C})$-vezi Lecția VI - și deci (deoarece este generat de reflexiile ortogonale în raport cu hiperplanele $\{x_i-x_j = 0\}$, $1\leq i<j\leq n$, care reprezintă transpoziția coordonatelor i și j, în coordonatele canonice din $\underline{t}=\mathbb{R}^n$), coincide cu grupul simetric $\sum_n$, canonic scufundat în $GL(\underline{t})$, $\underline{t}=\mathbb{R}^n$. Pe de altă parte, grupul $\sum_n$ e canonic scufundat și în $U(n)$, acționînd prin conjugare pe $T^n=(S^1)^n$ prin permutarea coordonatelor. Un calcul direct arată că $N_{U(n)}T^n=T^n\rtimes\sum_n$ (produs semidirect), de unde $W_{gl}=\sum_n$.

Incheiem această secțiune indicînd modificările ce apar în rezultatele fundamentale legate de analiza claselor de conjugare în cazul grupurilor Lie compacte dar nu neapărat conexe. Fie G un asemenea grup. Situația e în principiu mult mai complicată (să ne gîndim că G poate fi un grup finit arbitrar!) Noțiunea care înlocuiește cu succes pe cea de tor maximal este cea de <u>subgrup Cartan</u>, i.e. un subgrup închis $\overline{S}\subset G$ care este topologic ciclic și de index finit în normalizatorul său. Dacă G este conex atunci torurile sale maximale evident sînt subgrupuri Cartan (de fapt ele coincid cu subgrupurile Cartan). Existența a suficiente subgrupuri Cartan (analogul Teoremei 3.1) e dată de

3.9. TEOREMA ([Bröcker-tom Dieck, p.177]).

(i) Fie $x\in G$ un element arbitrar. Fie $S\subset C_{Ge}(x)_e$ un tor maximal. Fie $\overline{S}$ subgrupul închis generat de x și de S. Atunci $\overline{S}$ este un subgrup Cartan ce conține pe x.

(ii) Fie $\overline{S}\subset G$ un subgrup Cartan și fie $z\in\overline{S}$ un generator (topologic)

Atunci orice element din $G_e z$ e conjugat cu un element din $\overline{S}_e z$.

Avem în sfîrşit (de comparat cu 3.3)

3.10. TEOREMA ([Bröcker-tom Dieck, p.180]). Fie $\overline{S} \subset G$ un subgrup Cartan. Să notăm

$$\overline{S}^* = \{ z \in \overline{S} \mid z \text{ reprezintă un generator în } \overline{S}/\overline{S}_e \}$$

Atunci două elemente din $\overline{S}^*$ sînt conjugate în G dacă şi numai dacă sînt conjugate printr-un element din $N_G(\overline{S})$.

4. H^1 NEABELIAN CU METODE TRANSCENDENTE

Fie $\underline{g}$ o algebră semisimplă complexă, $\underline{h} \subset \underline{g}$ o subalgebră Cartan. Alegem o bază Chevalley şi considerăm forma compactă canonică $\underline{k} \subset \underline{g}$ (ca în § 1). Secţiunea de faţă conţine rezultatul principal al acestei lecţii: calculul coomologiei $H^1(\mathbb{Z}_2; \operatorname{Aut} \underline{k})$, în cazul în care $\underline{g}$ este simplă. Vom utiliza în mod consistent metodele trecute în revistă în secţiunea precedentă. Celor mai puţin familiarizaţi cu ele, mult succes!

După cum am anticipat, grupul compact Aut $\underline{k}$ nu este în general conex. Acest lucru este legat de existenţa unor automorfisme netriviale ale diagramei Dynkin a lui $\underline{g}$.

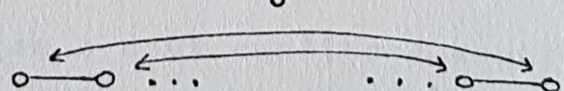
Vom începe deci prin a lămuri această chestiune, în contextul (abstract) al sistemelor de rădăcini - vezi Lecţia VI şi [Humphreys, 1972, p.65-66]. Fie deci $\Phi \subset V$ un sistem de rădăcini şi $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ o bază $C \subset V$ camera Weyl corespunzătoare. Definim <u>grupul automorfismelor lui Φ</u>, notat Aut Φ, ca fiind subgrupul izometriilor lui V care invariază pe Φ. Definim <u>grupul automorfismelor diagramei Dynkin</u> a lui Φ, notat D, ca fiind subgrupul permutărilor din $\operatorname{Aut} \Delta \cong \Sigma_\ell$ care păstrează întregii lui Cartan (compară cu [Humphreys 1972, p.43]).

4.1. PROPOZITIE. $\mathrm{Aut}\Phi = W \rtimes D$, dacă Φ este ireductibil.

<u>Demonstrație</u>. Evident $W \subset \mathrm{Aut}\Phi$; mai mult, deoarece conjugarea cu elemente din $\mathrm{Aut}\Phi$ permută (în mod vizibil) reflexiile ortogonale corespunzătoare vectorilor din Φ, rezultă că W este normal în $\mathrm{Aut}\Phi$. Considerăm subgrupul Aut^{Δ} al elementelor $\sigma \in \mathrm{Aut}\Phi$ care invariază Δ $(\sigma\Delta = \Delta)$ și arătăm întîi că $\mathrm{Aut}\Phi = W \rtimes \mathrm{Aut}^{\Delta}$. Fie $\sigma \in \mathrm{Aut}\Phi$. Deoarece $\sigma\Delta$ este, odată cu Δ, o bază, deducem că există $w \in W$ a.î. $w\sigma\Delta = \Delta$, și deci că $\mathrm{Aut}\Phi$ este generat de W și Aut^{Δ} . Faptul că $W \cap \mathrm{Aut}^{\Delta} = \{1\}$ rezultă din faptul că W acționează <u>simplu</u> tranzitiv pe baze. Este clar modul în care Aut^{Δ} se identifică cu un subgrup în D. In sfîrșit, dat $\sigma \in D$, există un (unic) automorfism $\sigma \in GL(V)$ care extinde, în baza Δ , permutarea σ, și care are proprietatea că $\sigma\Phi = \Phi$. Pentru a încheia demonstrația nu ne rămîne decît să observăm că σ păstrează, odată cu întregii lui Cartan, atît unghiurile cît și raportul lungimilor perechilor arbitrare de rădăcini simple, deci este o izometrie - ținînd cont de faptul că un sistem ireductibil conține rădăcini de cel mult două lungimi [Humphreys 1972 , p.53].

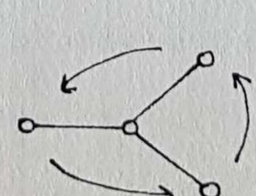
4.2. EXEMPLE. Dacă <u>g</u> este simplă, atunci Φ este ireductibil (de exemplu [Humphreys 1972 , p.73]). Inspectînd cu ochiul liber lista diagramelor Dynkin conexe, putem lista grupurile lor de simetrii, după cum urmează

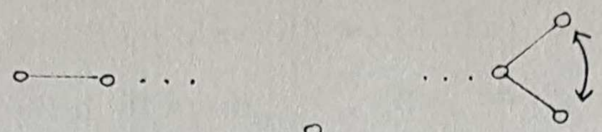
A_1  $D = \{1\}$

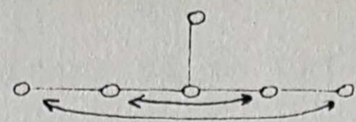
$A_l\ (l \geq 2)$  $D = \mathbb{Z}_2$

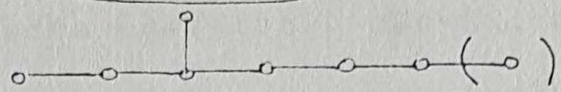
$B_l\ (l \geq 2)$  $D = \{1\}$

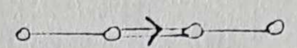
$C_l\ (l \geq 3)$  $D = \{1\}$

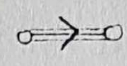
D_4  $D = \Sigma_3$

$D_l\ (l \geq 5)$  $D = \mathbb{Z}_2$

E_6  $D = \mathbb{Z}_2$

$E_{7(8)}$  $D = \{1\}$

F_4  $D = \{1\}$

G_2  $D = \{1\}$

După cum se observă, grupurile care pot apare sînt extrem de simple. Adăugînd acestei observații rezultatul ce urmează, devin transparente motivele pentru care analiza claselor de conjugare în grupurile Lie Aut $\underline{k}$ poate fi finalizată.

4.3. PROPOZITIE. $(\mathrm{Aut}\ \underline{k})_e = \mathrm{Int}\ \underline{k} = \exp \mathrm{ad}\ \underline{k}$; $\mathrm{Aut}\ \underline{k} = \mathrm{Int}\ \underline{k} \rtimes D$.

<u>Demonstrație.</u> Dacă $x \in \underline{k}$, atunci curba $\exp \mathrm{ad}(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, este în întregime conținută în Aut $\underline{k}$. Rezultă incluziunile $\exp \mathrm{ad}\ \underline{k} \subset \mathrm{Int}\ \underline{k} \subset (\mathrm{Aut}\ \underline{k})_e$. Pe de altă parte, $(\mathrm{Aut}\ \underline{k})_e$ este un grup Lie compact și <u>conex</u>, prin urmare aplicația sa exponențială este surjectivă (după cum rezultă din Teorema 3.1, din surjectivitatea aplicației exponențiale a torurilor și din naturalitate). Tinînd cont de faptul că exponențiala lui $(\mathrm{Aut}\ \underline{k})_e$ este inclusă de exponențierea uzuală a matricilor din $gl(\underline{k})$ și de Obs.2.17(ii), deducem că $(\mathrm{Aut}\ \underline{k})_e \subset \exp \mathrm{ad}\ \underline{k}$, și cu aceasta prima afirmație este demonstrată.

In ceea ce privește a doua egalitate enunțată, să reamintim că $\mathrm{Aut}\ \underline{k} \cong \{a \in \mathrm{Aut}\ \underline{g} \mid cac = a\}$, unde $c \in \mathrm{Inv}\ \underline{g}$ este involuția canonică (a se revedea preliminariile la enunțul Teoremei 2.14!) și să începem prin a construi o scufundare $D \subset \mathrm{Aut}\ \underline{k}$ provenind dintr-o scufundare $D \subset \mathrm{Aut}\ \underline{g}$. Al doilea obiectiv este ușor de realizat: după teorema lui Serre (vezi Lecția VII), $\underline{g}$ admite o prezentare cu generatori h_i, $x_i = x_{\alpha_i}$, $y_i = x_{-\alpha_i}$, $1 \leq i \leq l$ și cu relații exprimabile numai în funcție de întregii lui Cartan. Prin urmare, pentru $\sigma \in D \subset \Sigma_1$, punînd $\sigma h_i = h_{\sigma i}$, $\sigma x_i = x_{\sigma i}$, $\sigma y_i = y_{\sigma i}$, relațiile Serre sînt păstrate și se obține o scufundare (canonică!) $D \subset \mathrm{Aut}\,\underline{g}$. Verificarea egalității $c\sigma c = \sigma$, pentru $\sigma \in D$, se face pe generatori. Pentru aceasta vom scrie incluziunea $\underline{k} \subseteq \underline{g}^c$ pe generatorii (1.2) ai lui $\underline{k}$ și vom deduce ușor

$$ch_\alpha = -h_\alpha,\ cx_\alpha = -x_{-\alpha},\ \forall \alpha \in \Phi, \text{ de unde}$$

$ch_i = -h_i$, $cx_i = -y_i$, $cy_i = -x_i$, $1 \le i \le \ell$, de unde $c\sigma c = \sigma$, și deci $D \subset \mathrm{Aut}\,\underline{k}$.

Pentru a arăta că $\mathrm{Aut}\,\underline{k}$ este produsul semidirect între $\mathrm{Int}\,\underline{k}$ și D, să notăm întîi egalitatea imediată

$$(4.4)\qquad a(\exp \mathrm{ad}\,x)a^{-1} = \exp \mathrm{ad}\,a(x),\quad \forall a \in \mathrm{Aut}\,\underline{k},\ \forall x \in \underline{k}$$

In continuare, să notăm $\underline{t} = \mathbb{R}\text{-sp}\{Jh_i \mid 1 \le i \le \ell\}$, să observăm că $\underline{t}$ este o subalgebră (abeliană) în $\underline{k}$, să notăm apoi $\exp \mathrm{ad}\,\underline{t} = T \subset \mathrm{Int}\,\underline{k}$ și să facem observația importantă

(4.5) $T = \exp\mathrm{ad}\,\underline{t} \subset \mathrm{Int}\,\underline{k}$ este un tor maximal. Intr-adevăr, conform Propoziției 3.4 subgrupul conex al lui $\mathrm{Int}\,\underline{k}$ de algebră Lie $\mathrm{ad}\,\underline{t}$ este un tor maximal ($\underline{t} \otimes \mathbb{C} = \underline{h}$!), fie acesta T; egalitatea (4.5) revine atunci la surjectivitatea exponențialei torurilor. Din (4.4) și (4.5) rezultă că $\sigma T \sigma^{-1} = T, \forall \sigma \in D$ și că $(\mathrm{int}\,\sigma)'|_{\mathrm{Lie}\,T}$ se identifică cu $\sigma \in D \subset \mathrm{Aut}\,\Phi$ (modulo identificările evidente). Să presupunem acum că $\sigma \in D \cap \mathrm{Int}\,\underline{k}$. Din observațiile precedente și din Teorema 3.8 deducem $\sigma \in W_{inf}$=grupul Weyl al sistemului de rădăcini Φ_{lin}=grupul Weyl al sistemului de rădăcini Φ_{inf} (vezi (3.7))=W (deoarece prin construcție $\Phi_{inf} = \Phi$). Din Propoziția 4.1 deducem $\sigma = 1$. Pentru simplificare, în continuare vom identifica W_{gl}, W_{inf} și W, de asemenea Φ_{lin}, Φ_{inf} și Φ. Fie în sfîrșit, $a \in \mathrm{Aut}\,\underline{k}$ un automorfism arbitrar. Rezultă că $a\underline{t}$ este o subalgebră Cartan a lui $\underline{k}$, odată cu $\underline{t}$, și deci, conform teoremei de conjugare din una din lecțiile precedente, există $b \in \mathrm{Int}\ \underline{k}$ a.î. $b a \underline{t} = \underline{t}$. Cum scopul nostru final este de a arăta că Aut $\underline{k}$ este generat de Int $\underline{k}$ și de D, putem presupune în continuare că $a \underline{t} = \underline{t}$. Complexificînd, rezultă că $a \otimes \mathbb{C}$ induce un automorfism al lui Φ, pe care îl scriem, după Propoziția 4.1, sub forma $w\sigma$, cu $w \in W$ și $\sigma \in D$. Conform identificării $W = W_{gl}$ procurate de Teorema 3.8, există $n \in N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(T)$ a.î. $(\mathrm{int}\ n)'|_{\mathrm{Lie}\ T} = w$. Pe de altă parte, din (4.4) rezultă identificarea

(4.6) $$\mathrm{Ad}\ a = a\ ,\quad \forall\ a \in \mathrm{Aut}\ \underline{k}$$

ce ne permite să presupunem în continuate $a \underline{t} = \underline{t}$ și $a|_{\underline{t}} = \sigma|_{\underline{t}}$ sau în fine $a|_{\underline{t}} = \mathrm{id}$. Vom încheia deducînd de aici $a \in \exp \mathrm{ad}\ \underline{t}$. Din $a \otimes \mathbb{C}|_{\underline{h}} = \mathrm{id}$ deducem imediat că $a \otimes \mathbb{C}(\underline{g}^{\alpha}) = \underline{g}^{\alpha}$, $\forall \alpha \in \Phi$, deci că $a \otimes \mathbb{C}(x_{\alpha}) = \lambda(\alpha).x$, cu $\lambda(\alpha) \in \mathbb{C}$ nenul, $\forall\ \alpha \in \Phi$. Scriind că $[x_{\alpha}, x_{-\alpha}] = h_{\alpha}$ și aplicînd morfismul Lie $a \otimes \mathbb{C}$, rezultă că $\lambda(\alpha).\lambda(-\alpha) = 1$, $\forall\ \alpha \in \Phi$, iar scriind că $c(a \otimes \mathbb{C})\, c(x_{\alpha}) = (a \otimes \mathbb{C})\ (x_{\alpha})$ obținem $\lambda(-\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}$, $\forall\ \alpha \in \Phi$. Combinînd, putem scrie $\lambda(\alpha) = \exp \mathrm{J}\, \mu(\alpha)$, $\forall\ \alpha \in \Phi$, cu $\mu(\alpha) \in \mathbb{R}$, și astfel încît $\mu(\alpha) + \mu(-\alpha) = 0$. Ținînd cont de independența liniară a rădăcinilor simple $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, putem găsi $x \in \underline{t}$ a.î. $\alpha_i(x) = \mathrm{J}\, \mu(\alpha_i)$, $1 \le i \le \ell$. Cu aceste alegeri, se verifică ușor că automorfismele Lie $\exp \mathrm{ad}\ x$ și $a \otimes \mathbb{C}$ coincid pe x_i și y_i $1 \le i \le l$. Cum $h_i = [x_i, y_i]$, rezultă că $a = \exp \mathrm{ad}\ x$, și demonstrația propoziției e încheiată.

Revenim la chestiune: în calculul lui $H^1(\mathbb{Z}_2; G)$, unde G este un grup Lie compact și structura de $\mathbb{Z}_2$- modul este trivială, apare în general o descompunere naturală:

$$H^1(\mathbb{Z}_2; G) = \mathrm{J}H^1(\mathbb{Z}_2; G) \amalg EH^1(\mathbb{Z}_2; G),$$

în clase de G-conjugare de <u>involuții interioare</u>, i.e.

$\mathrm{J}H^1(\mathbb{Z}_2; G) =$ 2-tors G_e mod G-conjugare și clase de G-conjugare de <u>involuții exterioare</u>. In cazul nostru ($G = \mathrm{Aut}\ \underline{k}$), lucrurile vor fi complicate de prezența involuțiilor exterioare, dar nu într-un mod inextricabil. Aceasta se datorează în primul rînd faptului (ușor de verificat pe lista 4.2) că grupurile de simetrii Dynkin ce apar au proprietățile

(i) Există cel mult două clase de conjugare de involuții (i.e. elemente de 2-torsiune) în D.

(4.7)

(ii) Dacă σ e o involuție netrivială a lui D, atunci centralizatorul în D al lui σ coincide cu subgrupul generat de σ.

4.9. PROPOZITIE. Fie $\sigma \in D$, $\sigma^2=1, \sigma \neq 1$. Atunci

$$EH^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{k}) = EH^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Int}\,\underline{k} \rtimes \mathbb{Z}_2),$$

(unde automorfismul structural al produsului semidirect este $\mathrm{int}\,\sigma$).

<u>Demonstrație.</u> Scriem $\mathrm{Aut}\,\underline{k}=\mathrm{Int}\,\underline{k} \rtimes D$, ca în Propoziția 4.3. Fie $g,h \in \mathrm{Int}\,\underline{k}, \nu, \tau \in D$. Un calcul simplu ne arată că $\mathrm{int}\,h\tau\,(g\nu) = \mathrm{int}\,h\tau(g).\,h.\,\mathrm{int}\,{}^{\tau}\nu(h^{-1}).\,{}^{\tau}\nu$ (unde am notat $\mathrm{int}\,\tau(\nu)={}^{\tau}\nu$). Conform definițiilor, $EH^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Int}\,\underline{k} \rtimes \mathbb{Z}_2) = \{2\text{-tors}\,\mathrm{Aut}\,\underline{k}\} \cap \{\mathrm{Int}\,\underline{k}.\,\sigma\}$ mod $\mathrm{Int}\,\underline{k} \rtimes (\sigma)$ - conjugare, unde am notat cu (σ) subgrupul generat de σ în D, deci există o aplicație naturală $EH^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Int}\,\underline{k} \rtimes \mathbb{Z}_2) \longrightarrow EH^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{k})$.
Un alt calcul simplu indică faptul că $\{2\text{-tors}\,\mathrm{Aut}\,\underline{k}\} \cap \{\mathrm{Int}\,\underline{k}.\,\nu\}$ e nevidă, pentru $\nu \in D$ fixat, dacă și numai dacă $\nu^2 = 1$. Orice element din $EH^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\,\underline{k})$ provine deci dintr-o involuție ce se află în componenta lui $\mathrm{Aut}\,\underline{k}$ indexată de un element $\nu \in D$, $\nu^2=1, \nu \neq 1$. După (4.7)(i), există $\tau \in D$ a.î. ${}^{\tau}\nu = \sigma$. Calculul făcut la începutul demonstrației ne arată că aplicația naturală considerată e surjectivă. Același calcul (pentru $\nu = \sigma$) arată că dacă elementele $g\sigma$ și $g'\sigma$ sînt conjugate prin $h\tau$, atunci, conform

(4.7)(ii), $\tau \in (\sigma)$, şi deci aplicaţia în cauză e şi injectivă.

Rezultatul următor oferă descrierea claselor de conjugare de involuţii interioare în termenii sistemului de rădăcini.

4.9. PROPOZITIE. Fie $\underline{g}$ o algebră Lie simplă complexă şi $\underline{k}$ forma ei compactă canonică. Avem egalitatea

$$IH^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\ \underline{k}) = 2\text{-tors } T \bmod \mathrm{Aut}\ \Phi$$

unde T e torul maximal al lui Int $\underline{k}$ dat de (4.5), Lie $T \cong \underline{t}$, $\Phi \subset \underline{t}$ este sistemul de rădăcini al lui $\underline{g}$, iar acţiunea lui AutΦ pe T e indusă de acţiunea naturală a lui AutΦ pe $\underline{t}$.

<u>Demonstraţie.</u> Există o aplicaţie naturală (conform 4.3) 2-tors $T \longrightarrow IH^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\ \underline{k}) = 2$-tors Int $\underline{k}$ mod Aut $\underline{k}$ - conjugare, care, datorită Teoremei 3.1, este surjectivă. Fie $x, y \in T$ şi să presupunem că x şi y sînt conjugate în Aut $\underline{k}$. Există deci (Propoziţia 4.3) $g \in$ Int $\underline{k}$ şi $\sigma \in D$ a.î. $y = \mathrm{int}\ g\sigma\ (x) = \mathrm{int}\ g(\mathrm{int}\ \sigma(x))$, iar $\mathrm{int}\sigma\ (x) \in T$, vezi demonstraţia Prop.4.3. Putem atunci presupune $g \in N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(T)$, vezi Cor.3.3. Cu alte cuvinte avem o bijecţie, indusă de aplicaţia de mai sus, 2-tors T mod $W_{gl}.D \xrightarrow{\sim} IH^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Aut}\ \underline{k})$, unde $W_{gl}.D$ desemnează subgrupul lui Aut T generat de acţiunea prin conjugare a grupurilor W_{gl} şi D, deci de acţiunile lui W_{gl} şi D pe T indus de acţiunile infinitezimale corespunzătoare pe algebra Lie $\underline{t}$ (cu identificarea uzuală $\underline{k} \cong$ ad $\underline{k}$). La rîndul lor, acţiunea infinitezimală a lui W_{gl} se identifică (Teorema 3.8) cu acţiunea grupului Weyl W al lui Φ pe $\underline{t}$, iar acţiunea infinitezimală a lui D coincide (4.6) cu acţiunea naturală a lui D pe $\underline{t}$. Utilizînd acum Propoziţia 4.1 rezultă că grupul infinitezimal astfel generat coincide cu AutΦ, ceea ce încheie demonstraţia.

Trecînd la ultimul pas de efectuat - determinarea claselor de conjugare de involuţii exterioare - să începem prin a generaliza în mod convenabil Propoziţia 4.8.

4.10. PROPOZITIE. Fie $\sigma \in D$, $\sigma^2=1$, $\sigma \neq 1$, Fie $a \in \mathrm{Aut}\ \underline{k}$, $a^2=1$. Să presupunem că $\mathrm{int}\,a(T)=T$ şi că $\mathrm{Ad}\ a|_{\underline{t}} = \sigma|_{\underline{t}}$. Atunci: subgrupul lui Aut $\underline{k}$ generat de Int $\underline{k}$ şi de a este un produs semidirect $\mathrm{Int}\ \underline{k} \rtimes (a)$ şi coincide cu $\mathrm{Int}\ \underline{k} \rtimes (\sigma)$.

<u>Demonstraţie</u>. Prima afirmaţie va rezulta observînd că $a \notin \mathrm{Int}\ \underline{k}$. Presupunînd contrariul vom deduce, exact ca în demonstraţia Propoziţiei 4.3, că $\sigma \in W$, de unde (Prop.4.1) $\sigma=1$, o contradicţie. A doua afirmaţie rezultă observînd că ambele subgrupuri ale lui Aut $\underline{k}$ din enunţ au două componente conexe şi aceeaşi componentă a elementului neutru, deci este suficient de dovedit egalitatea $\mathrm{Int}\ \underline{k}.a=\mathrm{Int}\ \underline{k}.\sigma$. Apelînd la (4.6) deducem că automorfismul $a^{-1}\sigma$ restrîns la $\underline{t}$ e identitatea, prin urmare (vezi demonstraţia Propoziţiei 4.3) el este interior, deci $a \in \mathrm{Int}\ \underline{k}.\sigma$, de unde egalitatea dorită.

In contextul propoziţiei precedente, să facem următoarele notaţii: să notăm $S=T^a_e$ (componenta conexă a elementului neutru al subgrupului punctelor fixe din T ale automorfismului inta este un subtor al lui T); să considerăm grupul $N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(S)/S$, care acţionează prin conjugare pe S; automorfismul $\mathrm{int}\,a|_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}$ induce un automorfism al grupului factor de mai sus, al cărui subgrup de puncte fixe îl vom nota cu $(N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(S)/S)^a$ şi care acţionează la rîndul său prin conjugare pe S; să observăm că int a induce de asemenea un automorfism al grupului factor T/S, ale cărui puncte fixe le vom nota cu $(T/S)^a \subset (N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(S)/S)^a$; în fine, să ne reamintim (Propoziţia 4.1) că σ acţionează prin conjugare pe W şi să notăm cu W^{σ} subgrupul punctelor fixe.

Să considerăm acum subgrupul $S\times(a)\subset \mathrm{Int}\,\underline{k}\rtimes(a)$ si să facem următoarea precizare importantă

4.11. PROPOZITIE. Fie $g\in N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S)$. Atunci $g\in N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S\times(a))$ dacă şi numai dacă $gS\in(N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S)/S)^a$.

Demonstraţie. Deoarece g normalizează pe S, g normalizează pe $S\times(a)$ dacă şi numai dacă $\mathrm{int}\,g(Sa)=Sa$. Deoarece $\mathrm{int}\,g(Sa)=$ $=Sgag^{-1}=Sg\,\mathrm{int}\,a(g^{-1}).a$, acest fapt este echivalent cu condiţia $g\,\mathrm{int}\,a(g^{-1})\in S$, la rîndul ei echivalentă cu $gS\in(N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S)/S)^a$.

4.12. COROLAR. $(N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S)/S)^a$ acţionează prin conjugare pe Sa.

Demonstraţie. Conform propoziţiei precedente există un izomorfism natural $N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S\times(a))/S\xrightarrow{\sim}(N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S)/S)^a$, de unde acţiunea lui $(N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S)/S)^a$, indusă de acţiunea prin conjugare a lui $N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S\times(a))$ pe Sa.

Putem descrie acum clasele de conjugare de involuţii exterioare.

4.13. PROPOZITIE. Fie $\underline{g}$ o algebră simplă complexă şi $\underline{k}$ forma ei compactă canonică. Fie $\sigma\in D$, $\sigma^2=1$, $\sigma\neq 1$. Fie $a\in \mathrm{Aut}\,\underline{k}$, $a^2=1$, cu proprietăţile: $\mathrm{int}\,a(T)=T$, $\mathrm{Ad}\,a|_{\underline{t}}=\sigma|_{\underline{t}}$, unde $T\subset \mathrm{Int}\,\underline{k}$ este torul maximal descris în (4.5), iar $\underline{t}=\mathrm{Lie}\,T$ ($a=\sigma$ constituie întotdeauna un exemplu). Avem:

(i) $$EH^1(\mathbb{Z}_2;\mathrm{Aut}\,\underline{k})\cong 2\text{-tors}\,S\ \mathrm{mod}\ (N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S)/S)^a,$$

unde $S=T_e^a$, iar acţiunea grupului de puncte fixe din enunţ pe S este indusă de acţiunea prin conjugare a acestui grup pe Sa, via izomorfismul canonic $S\xrightarrow{\sim}Sa$, dat de translaţia cu a.

(ii) Există un şir exact

$$1 \to (T/S)^a \to (N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(S)/S)^a \to W^{\sigma} \to 1$$

(indicii superiori desemnează subgrupuri de puncte fixe în raport cu acţiunile induse de conjugare).

Demonstraţie. (i) Utilizînd 4.8 şi 4.10, putem înlocui $EH^1(\mathbb{Z}_2, \mathrm{Aut}\ \underline{k})$ prin $EH^1(\mathbb{Z}_2; \mathrm{Int}\underline{k} \rtimes (a))$. Analiza claselor de conjugare ale grupului compact $\mathrm{Int}\ \underline{k} \rtimes (a)$ o vom face cu ajutorul teoremelor 3.9 şi 3.10. Să aplicăm construcţia descrisă în 3.9 (i) elementului a. Pentru început să arătăm că $S \subset C_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(a)_e$ este un tor maximal. Fie deci un tor $S_1 \supset S$, $S_1 \subset C_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(a)$. Facem afirmaţia

(4.14) $\qquad \exists\ s_o \in S \qquad$ a.î. $\lambda s_o \neq 1$, $\forall \lambda \in \Phi_{gl}$

unde Φ_{gl} desemnează rădăcinile globale ale grupului compact şi conex $\mathrm{Int}\ \underline{k}$, relative la torul maximal T. Amînînd demonstraţia afirmaţiei, vedem că $S_1 \subset C_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(s_o)_e = T$, unde ultima egalitate rezultă din faptul că s_o este un element regulat al torului maximal T (i.e. $\lambda s_o \neq 1, \forall \lambda \in \Phi_{gl}$), vezi [Adams, p.99]. Pe de altă parte S_1 comută cu a, deci $S_1 \subset T$ implică $S_1 \subset S$, din construcţia lui S, prin urmare $S_1 = S$ şi maximalitatea torului S e dovedită.

Revenind la (4.14) să observăm că $\mathrm{Lie}\ S = \mathrm{Lie}\ T^a_e = (\mathrm{Lie}\ T)^{\mathrm{Ad}a} = \underline{t}^a = \{x \in \underline{t} \mid ax = x\}$, unde singurele egalităţi netriviale sînt $\mathrm{Ad}a = a$ (4.6) şi cea de-a doua egalitate, care decurge dintr-un fapt general uşor de enunţat ("algebra Lie a punctelor fixe ale unui automorfism coincide cu punctele fixe ale automorfismului infinitezimal obţinut prin derivare") şi uşor de stabilit (prin derivare pur şi simplu şi utilizînd existenţa şi unicitatea subgrupurilor cu un parametru $\mathbb{R} \subset G$). Alegem $y \in C$ = camera Weyl asociată bazei alese pentru

$\Phi \subset \underline{t}$ şi notăm $x=y+ay$. Evident $ax=x$, dar în acelaşi timp, deoarece am presupus că $a|_{\underline{t}}=\sigma|_{\underline{t}}$, rezultă că $aC\subset C$ (deoarece $\sigma\in D$ - a se revedea demonstraţia Prop.4.1!), de unde $C\cap \mathrm{Lie}\ S\neq\emptyset$. Identificarea dintre $\Phi\subset\underline{t}$ şi $\Phi_{lin}=\Phi'_{gl}\subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\underline{t},\mathbb{R})$ via forma Killing, discutată în secţiunea precedentă, plus definiţia însăşi a camerei Weyl C, arată că $\lambda'|_{\mathrm{Lie}\ S}\neq 0$, $\forall\lambda\in\Phi_{gl}$. De aici deducem, ţinînd cont de egalităţile $\lambda\circ\exp=\exp\circ\lambda'$ şi de surjectivitatea exponenţialei lui S, că afirmaţia obţinută din (4.14) prin reducere la absurd, şi anume $\mathrm{Lie}\ S=\bigcup_{\substack{\lambda\in\Phi_{gl}\\ k\in\mathbb{Z}}}\{\lambda' x=k\}$, conduce la o contradicţie.

Reluînd reţeta 3.9 (i) obţinem că $S\times(a)$ este un subgrup Cartan în $\mathrm{Int}\ \underline{k}\rtimes(a)$. Fie $u\in S$ un generator (topologic). Atunci $z=ua$ generează (topologic) pe $S\times(a)$ (exerciţiu!). Folosind 3.9 (ii) deducem că aplicaţia naturală între $2\text{-tors}\ S\cong\{2\text{-tors}\ S\times(a)\}\cap Sa$ şi $EH^1(\mathbb{Z}_2;\mathrm{Int}\ \underline{k}\rtimes(a))$ e surjectivă. In sfîrşit 3.10 asigură o bijecţie între 2-tors S mod $N_{\mathrm{Int}\underline{k}\rtimes(a)}(S\times(a))/S\times(a)$ (unde acţiunea se face prin conjugare şi identificarea standard $S\simeq Sa$) şi componenta exterioară EH^1 de calculat,

Identificăm acum cîtul normalizatorului apărut mai sus cu grupul din enunţ, după cum urmează : $N_{\mathrm{Int}\underline{k}\rtimes(a)}(S\times(a))/S\times(a)=N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(S\times(a))\rtimes(a)/S\times(a)=N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(S\times(a))/S$. Ultimul grup stă ca subgrup în $N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(S)/S$ şi anume ca subgrupul de puncte fixe $(N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(S)/S)^a$ din enunţ, vezi Prop.4.11. Acţiunea pe S este şi ea identificată, graţie corolarului 4.12.

(ii) Aici faptul crucial este stabilirea incluziunii $N_{\mathrm{Int}\underline{k}}(S)\subset N_{\mathrm{Int}\underline{k}}(T)$. Odată făcută, aceasta produce şirul exact

$$1\longrightarrow T/S\longrightarrow N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(S)/S\longrightarrow N_{\mathrm{Int}\ \underline{k}}(T)/T$$

compatibil cu diversele acţiuni induse de int a, din care, prin trecere la subgrupurile de puncte fixe, vom obţine şirul exact din enunț, mai puțin surjectivitatea săgeții ce intră în W^{σ} (identificarea $(N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(T)/T)^{a} \cong W^{\sigma}$ se face via Teorema 3.8, folosind ipoteza $\mathrm{Ad}|_{\underline{t}} = \sigma|_{\underline{t}}$).

Să arătăm întîi incluziunea normalizatorilor. Fie $g \in N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S)$ Să examinăm reprezentarea adjunctă $\mathrm{Ad}|_S : S \to GL(\mathrm{Lie\ Int}\,\underline{k} \otimes \mathbb{C}) \cong GL(\underline{g})$ (vezi 2.17(ii)) și legătura ei cu reprezentarea adjunctă a torului maximal T. Există descompunerile (3.6)

$$\underline{g} = \bigoplus_{\lambda \in \Phi_{ge} \cup \{1\}} \underline{g}^{\lambda} \qquad \text{și} \qquad \underline{g} = \bigoplus_{\mu \in \Psi \cup \{1\}} \underline{g}^{\mu}$$

prima corespunzînd reprezentării $\mathrm{Ad}|_T$, a doua reprezentare $\mathrm{Ad}|_S$. Deoarece $\mathrm{Ad}|_S$ se obține din $\mathrm{Ad}|_T$ prin restricție, ponderile ei globale se obțin din ponderile globale ale lui $\mathrm{Ad}|_T$, prin restricție la S. Din (4.14) deducem că ponderile globale netriviale Ψ coincid cu restricțiile rădăcinilor globale. Pe de altă parte, deoarece $g \in N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S)$, un calcul simplu ne arată că prin izomorfismul natural indus de int g, prin compunere, $(\mathrm{int}\ g)^{*} : \mathrm{Hom}(S,S^1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(S,S^1)$ ponderile lui $\mathrm{Ad}|_S$ sînt invariante, prin urmare sînt invariante și restricțiile rădăcinilor globale, și deci, considerînd elementul regulat $s_o \in S$ procurat de (4.14), deducem că $\mathrm{int}g(s_o) \in S$ este de asemenea un element regulat. Avem ([Adams, p.99]) $\mathrm{int}g(T) = \mathrm{int}g(C_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(s_o)_e) = C_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(\mathrm{int}\ g(s_o))_e = T$, și incluziunea anunțată e demonstrată.

Fie acum $gT \in (N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(T)/T)^{a}$, i.e. $g \in N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(T)$ și $\mathrm{int}a(g) = gt$, cu $t \in T$. Să deducem de aici că g normalizează pe S. Va fi suficient să arătăm că $\mathrm{int}g(T^{a}) \subset T^{a}$. Fie $s \in T^{a}$. $\mathrm{int}a . \mathrm{int}g(s) = \mathrm{int}(\mathrm{int}a(g))(\mathrm{int}a(s)) = \mathrm{int}g . \mathrm{int}\ t(s) = \mathrm{int}g(s)$, deci $\mathrm{int}g(s) \in T^{a}$ și $g \in N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S)$. Surjectivitatea dorită va rezulta arătînd că există $u \in T$ a.î. $\mathrm{int}a(gu) = gus$, cu $s \in S$, egalitate echivalentă cu $gt . \mathrm{int}a(u) = gus$, sau cu $t\ \mathrm{int}a(u) = us$. Scriem $t = \exp \bar{t}$ și căutăm în continuare o soluție de forma $u = \exp \bar{u}$, $\bar{u} \in \underline{t}$, $s = \exp \bar{s}$, $\bar{s} \in \underline{t}^{a} = \mathrm{Lie}\ S$. Va fi suficient să găsim $\bar{u} \in \underline{t}$ a.î. $\bar{t} + a(\bar{u}) - \bar{u} \in \underline{t}^{a}$. Deoarece $a|_{\underline{t}}$ este un automorfism liniar involutiv, putem scrie $\bar{t} = \bar{s} + \bar{v}$, cu $\bar{s} \in \underline{t}^{a}$, și cu $\bar{v} \in \ker\{a + id\} = \mathrm{im}\{a - id\}$, ceea ce oferă soluția căutată, și încheie (în sfîrșit!) demonstrația propoziției.

Pentru a face efectiv rezultatul precedent, mai e necesar să lămurim două lucruri: cum este legată acțiunea grupului $(N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(S)/S)^a$ pe 2-tors S considerată în (i) de descompunerea (ii) a acestui grup, precum și apariția automorfismului - surpriză a într-un calcul care nu depinde de a.

Pentru a lămuri aceste două chestiuni (legate între ele, după cum vom vedea imediat), să mai facem cîteva notații. Endomorfismul grupului abelian T definit de $t \to \mathrm{int}\,a(t).t^{-1}$ se factorizează la subgrupul S și induce un morfism $(T/_S)^a \to$ 2-tors S (faptul că elementele din imagine sînt de 2-torsiune rezultă imediat din $a^2=1$); să notăm imaginea cu $\mathcal{T} \subset$ 2-tors S. La rîndul său, grupul Weyl W se identifică cu un subgrup în Aut T (Teorema 3.8), și în această identificare subgrupul $W^{\mathfrak{S}}$ se corespunde cu $C_W(\mathrm{int}\,\alpha) \subset \mathrm{Aut}\,T$ (T e conex!). Prin urmare automorfismele din grupul $W^{\mathfrak{S}}$ acționează, prin restricție, pe S (forma infinitezimală a acestei acțiuni fiind acțiunea, prin restricție, a grupului infinitezimal $W^{\mathfrak{S}} \subset GL(\underline{t})$, pe Lie S$=\underline{t}^{\mathfrak{S}}$, vezi demonstrația Prop.4.13). Să notăm cu $\mathcal{L} \subset$ Aut(2-tors S) subgrupul indus de acțiunea prin restricție a lui $W^{\mathfrak{S}}$, și în sfîrșit să notăm cu $\mathcal{A}$ subgrupul generat de grupul de translații $\mathcal{T}$ și de grupul de automorfisme liniare $\mathcal{L}$ în grupul afin al grupului abelian 2-tors S.

4.15. PROPOZITIE. In enunțul Propoziției 4.13 să presupunem în plus că automorfismul a are următoarea proprietate

(4.16) $\forall g \in N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}(T)$ a.î. $\mathrm{int}\,a(g) \in gT, \exists h \in gT$ a.î. $\mathrm{int}\,a(h)=h$

Avem atunci o bijecție

$EH^1(\mathbb{Z}_2;\ \mathrm{Aut}\,\underline{k}) \cong$ 2-tors S mod $\mathcal{A}$

<u>Demonstrație</u>. Este imediat de văzut faptul că proprietatea (4.16) revine la faptul că în șirul exact 4.13(ii) orice element din $W^{\mathfrak{G}}$ provine dintr-un element din $(N_{Int\,\underline{k}}(S)/S)^a$ care admite un reprezentant în $N_{Int\,\underline{k}}(S)$ ce comută cu a (cu identificarea uzuală $W^{\mathfrak{G}} \cong (N_{Int\,\underline{k}}(T)/T)^a$ - vezi demonstrația Prop.4.13). Fie deci $h \in C_{Int\,\underline{k}}(a) \subset N_{Int\,\underline{k}}(S)$, și $s \in S$. Avem $\operatorname{int} h(sa) = \operatorname{int} h(s).a$, prin urmare acțiunea lui h pe S descrisă în 4.13(i) coincide cu cea indusă de conjugare (pe S!).

Fie acum $tS \in (T/S)^a$, i.e. $\operatorname{int} a(t) = ts_1$, cu $s_1 \in S$ și fie $s \in S$. Avem $\operatorname{int} t(sa) = st.\operatorname{int} a(t^{-1}).a$, prin urmare acțiunea lui t pe S din 4.13(i) coincide cu translația cu elementul $\operatorname{int} a(t^{-1}).t \in \mathcal{T}$.

Prin urmare grupul de permutări ale lui 2-tors S indus de acțiunea grupului $(N_{Int\,\underline{k}}(S)/S)^a$ coincide cu subgrupul generat de $\mathcal{T}$ și de $\mathcal{L}$, care este prin construcție $\mathcal{A}$.

Rezultatul din enunț decurge atunci din 4.13 (i).

4.17. OBSERVATII (i) Ca o consecință imediată a calculelor 4.9 și 4.13 (i), a teoremei 2.14 și a bijecției (2.12), rezultă că listele de forme reale ale unei algebre simple complexe sînt <u>finite</u>.

(ii) Să observăm că, în condițiile (4.16), tot ceea ce intervine în membrul drept al egalității din enunțul precedent nu depinde decît de sistemul de rădăcini Φ, în particular este independent de a (așa cum era de sperat). Intr-adevăr, subtorul S este determinat de algebra sa Lie $S = \underline{t}^{\mathfrak{G}}$, egalitate deja remarcată. Deoarece $a|_{\underline{t}} = \mathfrak{G}|_{\underline{t}}$, rezultă că $a = \mathfrak{G}t$, cu $t \in T$, vezi demonstrația Propoziției 4.3. Rezultă de aici că grupurile $(T/S)^a$ și $\mathcal{T} \subset$ 2-tors S nu depind decît de $\mathfrak{G}$. In fine $W^{\mathfrak{G}} \subset \operatorname{Aut} T$ nu depinde în mod vizibil decît de Φ, prin urmare la fel și $\mathcal{L} \subset \operatorname{Aut}(2\text{-tors } S)$. După cum vom vedea în secțiunea următoare, formularea Propoziției 4.15 ne lasă libertatea unei alegeri convenabile a automorfismului a, legată de proprietatea (4.16), care permite înlăturarea singurei necunoscute din enunțul 4.13 și anume: cum se exprimă acțiunea grupului W^G pe S în funcție de Φ ? Există din fericire și posibilitatea unei alegeri canonice, vezi § 6.

5. UN EXEMPLU: $\underline{sl}(n;\mathbb{C})$

In această secțiune vom descrie în detaliu formele reale ale algebrelor simple complexe $\underline{sl}(n;\mathbb{C})$, $n\geq 2$.

Alegerile de precizat (vezi finalul § 1) vor fi cele standard: notînd cu E_{ij}, $1\leq i,j\leq n$, matricile din $\underline{gl}(n;\mathbb{C})$ care acționează în baza standard din $\mathbb{C}^n$ prin $E_{ij}v_k=\delta_{jk}v_i$, și cu $e_i=E_{ii}$, $1\leq i\leq n$, baza standard a subalgebrei matricilor diagonale, vom alege drept subalgebră Cartan $\underline{h}\subset\underline{sl}(n;\mathbb{C})$ matricile diagonale de urmă nulă. Sistemul corespunzător de rădăcini, notat A_{n-1}, dă naștere sistemului de rădăcini $\Phi=A_{n-1}\subset\underline{h}$ (reprezentat de vectorii $h_\alpha,\alpha\in\Phi$) format de vectorii $\{e_i-e_j \mid 1\leq i\neq j\leq n\}$; sistemului standard de rădăcini simple $\Delta=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\}$ îi corespund vectorii $\{e_1-e_2,\ldots,e_{n-1}-e_n\}$ - compară cu Lecția VI . Un calcul simplu arată că alegerea matricilor E_{ij}, $1\leq i\neq j\leq n$, este o alegere bună de bază Chevalley. Forma compactă canonică (1.2) coincide atunci cu $\underline{su}(n)=\{X\in\underline{sl}(n;\mathbb{C}) \mid X^*+X=0\}$ (care reprezintă algebra Lie a grupului $SU(n)=\{$operatorii unitari de determinant 1$\}$, vezi [Warner, p.107-108]).

Avem un șir exact

$$(5.1)\qquad 1 \longrightarrow Z \longrightarrow U(n) \xrightarrow{Ad} \mathrm{Int}\,su(n) \longrightarrow 1$$

în care Z este centrul lui U(n) (care constă din matricile scalare și se identifică cu S^1), iar Ad este indusă de reprezentarea adjunctă a lui U(n), $AdA(X)=AXA^{-1}$, pentru $A\in U(n)$ și $X\in \mathrm{Lie}\,U(n)=\underline{u}(n)=\{X\in\underline{gl}(n;\mathbb{C}) \mid X^*+X=0\}$. Intr-adevăr, deoarece U(n) este generat de Z și de SU(n), putem remarca faptul că SU(n) este un grup compact și conex, [Warner, p.1,30], deci aplicația sa exponențială este surjectivă, după cum am observat în § 3, și prin urmare putem conchide că aplicația adjunctă de mai sus ia valori în $\operatorname{Int} su(n)$, utilizînd (3.5); surjectivitatea ei rezultă din Prop.4.3, iar identificarea nucleului se face utilizînd faptul că nucleul reprezentării adjuncte a lui $U(n)$ coincide cu centrul lui $U(n)$ ($U(n)$ e conex!). Avem un șir exact indus

$$(5.2) \qquad 0 \to Z \to \tilde{T} \xrightarrow{'Ad} T \to 0$$

în care $\tilde{T} \subset U(n)$ este torul maximal diagonal considerat în § 3, iar $T \subset \operatorname{Int} su(n)$ este torul maximal construit în (4.5). Intr-adevăr, notînd cu $\underline{\tilde{t}}$ și cu $\underline{t}$ algebrele Lie corespunzătoare, să observăm că ave egalitatea $\underline{\tilde{t}} = \underline{t} \oplus \operatorname{Lie} Z$ și să utilizăm din nou (3.5) pentru a obține egalitatea $\operatorname{Ad} \tilde{T} = T$.

Avînd la dispoziție această reprezentare concretă convenabilă a torului maximal T, $T = \tilde{T}/Z$, să mai remarcăm egalitățile $\underline{\tilde{t}} = \mathbb{R}\text{-sp}\{Je_1, \ldots, Je_n\}$, $\underline{t} = \mathbb{R}\text{-sp}\{J\Phi\}$, $\operatorname{Lie} Z = \mathbb{R}\text{-sp}\{J(e_1 + \ldots + e_n)\}$, $W = \sum_n$ (cu acțiunea standard pe $\underline{\tilde{t}}$ dată de permutarea elementelor bazei, cu acțiunea corespunzătoare pe $\tilde{T}$ dată de permutarea coordonatelor, și cu acțiunile induse pe $\underline{t}$, respectiv T), și să trecem la calculul explicit al claselor de conjugare de involuții interioare.

Cazul n=2 este singular și îl vom trata întîi, cu remarca faptului că în acest caz (vezi 4.2) $H^1(\mathbb{Z}_2; \operatorname{Aut} \underline{su}(n)) = \operatorname{I}H^1(\mathbb{Z}_2; \operatorname{Aut} \underline{su}(n))$. In general, din șirul exact (5.2) se deduce imediat izomorfismul

$$(5.3) \qquad 2\text{-tors}\ \tilde{T}/Z \cap 2\text{-tors}\ \tilde{T} \xrightarrow{\sim} 2\text{-tors}\ T$$

unde $2\text{-tors}\ \tilde{T} = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i = \pm 1\}$ și $Z \cap 2\text{-tors}\ \tilde{T} = \{\pm 1\}$.

Avem de asemenea în general, ca o consecință a Prop.4.9

(5.4) $$\mathrm{IH}^1(\mathbb{Z}_2;\ \mathrm{Aut}\,\underline{su}(n)) \cong 2\text{-tors } T \bmod W$$

egalitate evidentă pentru n=2 (Prop.4.1), și care se deduce pentru n>2 din 4.1 și 4.2 după cum urmează: fie $\sigma \in D$ elementul netrivial construit în 4.2; deoarece, evident $-1 \in \mathrm{Aut}\,\Phi$, dar $-1 \notin W$ dacă n>2, deducem din 4.1 existența unui unic element $w \in W$ cu proprietatea

(5.5) $$-1 = w\sigma$$

deci știm că W și -1 generează $\mathrm{Aut}\,\Phi$; pe de altă parte -1 acționează pe $\widetilde{T}$ prin $\mathrm{diag}(z_1,\ldots,z_n) \to \mathrm{diag}(z_1^{-1},\ldots,z_n^{-1})$, prin urmare acțiunea indusă pe 2-tors T e trivială.

In cazul n=2 conchidem că algebra $\underline{sl}(2;\mathbb{C})$ are două forme reale, reprezentate în 2-tors T de elementele 1 și Ad(1,-1). In ceea ce privește descrierea lor concretă, afirmăm că (5.6) formele reale ale lui $\underline{sl}(2;\mathbb{C})$ sînt $\underline{sl}(2;\mathbb{R})$ și Lie S^3 (S^3 se identifică aici cu grupul - necomutativ! - al cuaternionilor de normă 1). Algebra 3-dimensională, compactă și neabeliană, Lie S^3, conține, după complexificare, o parte semisimplă netrivială. Deoarece $\dim_{\mathbb{C}} \underline{g} \geq 3$, pentru orice algebră semisimplă complexă, cu egalitate dacă și numai dacă $\underline{g} \cong \underline{sl}(2;\mathbb{C})$, (ca o consecință a clasificării), recunoaștem în algebra Lie S^3 forma reală compactă a lui $\underline{sl}(2;\mathbb{C})$, iar în algebra simplă necompactă $\underline{sl}(2;\mathbb{R})$ cealaltă formă reală prezisă de clasificarea generală.

Vom presupune deci în continuare n>2. Combinînd (5.3) și (5.4) deducem că elementele

(5.7) $$\mathrm{Ad}\,\mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{k},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n-k}) \in 2\text{-tors } T, \quad 0 \leq k \leq [n/2]$$

reprezintă lista formelor reale de tip interior.

Pentru a descrie concret formele reale corespunzătoare, apelăm de data aceasta la un şir de identificări mecanice prescrise de teoria generală: după 4.9 şi 2.14 trebuie considerat 1-cociclul din $Z^1(\mathbb{Z}_2;\ \mathrm{Aut}\ \underline{sl}(n;\mathbb{C}))$ reprezentat de $\mathrm{Ad}\ \tilde{t}$, unde $\tilde{t}=\mathrm{diag}(\overbrace{1,\dots,1}^{k},-1,\dots,-1)\in\tilde{T}$, iar după (2.12) trebuiesc calculate punctele fixe ale involuţiei $(\mathrm{Ad}\ \tilde{t})c\in \mathrm{Inv}\ \underline{sl}(n;\mathbb{C})$, unde involuţia canonică e indusă de $cX=-X^*(X\in\underline{gl}(n;\mathbb{C}))$. Considerînd forma hermitică pe $\mathbb{C}^n$ dată de

$$\langle\langle u,v\rangle\rangle=u_1\bar{v}_1+\dots+u_k\bar{v}_k-u_{k+1}\bar{v}_{k+1}-\dots-u_n\bar{v}_n$$

se constată că punctele fixe ale involuţiei $(\mathrm{Ad}\ \tilde{t})c$ coincid cu matricile din $\underline{sl}(n;\mathbb{C})$ care sînt antihermitice în raport cu forma de mai sus.

Trecem la descrierea formelor reale de tip exterior. Vom considera involuţia netrivială $\sigma\in D$ din Exemplul 4.2 şi vom utiliza reţeta din Propoziţia 4.13, identificînd pentru început obiectele ce depind numai de Φ (vezi Obs. 4.17(ii)). Notăm în continuare cu $\sigma\in\mathrm{Aut}\ \tilde{T}$ automorfismul involutiv dat de

$$(5.8)\qquad \sigma\,\mathrm{diag}(z_i)=\mathrm{diag}(z^{-1}_{n+1-i})$$

Se observă că el induce un automorfism $\sigma\in\mathrm{Aut}\ T$ (în reprezentarea (5.2) $T=\tilde{T}/Z$). Un calcul infinitezimal direct arată că acţiunea astfel obţinută pe T coincide cu cea din Prop.4.13 ($a=\sigma$!) Deoarece descompunerea infinitezimală $\underline{\tilde{t}}=\underline{t}\oplus\mathrm{Lie}\ Z$ e compatibilă cu acţiunea infinitezimală a lui σ, rezultă că morfismul natural indus, $\mathrm{Ad}:\tilde{S}\longrightarrow S$ $(\tilde{S}=\tilde{T}^{\sigma}_e,\ S=T^{\sigma}_e)$ este surjectiv, fiind surjectiv la nivelul algebrelor Lie ($\mathrm{Lie}\ \tilde{S}=\underline{\tilde{t}}^{\sigma}$, $\mathrm{Lie}\ S=\underline{t}^{\sigma}$). Pentru a calcula subgrupul $\mathcal{T}\subset$2-tors S ce apare în Propoziţia 4.15 (a se revedea Obs. 4.17(ii)), considerăm diagrama comutativă evident indusă de Ad

$$(5.9)\qquad \begin{array}{ccc} 2\text{-tors }\tilde{S} & \longrightarrow & 2\text{-tors }S \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\tilde{T}/\tilde{S})^{\sigma} & \longrightarrow & (T/S)^{\sigma} \end{array}$$

în care săgeata verticală dreaptă este indusă de $tS \to \sigma(t).t^{-1}$ și are drept imagine subgrupul $\mathcal{T}$, și analog pentru obiectele marcate cu $\sim$, din care vom deduce $\mathcal{T}=\mathrm{Ad}\,\tilde{\mathcal{T}}$, arătînd surjectivitatea săgeții orizontale inferioare. Fie atunci $t\in T$ a.î. $\sigma(t)t^{-1}\in S$. Vom scrie $t=\mathrm{Ad}\,\tilde{t}(\tilde{t}\in\tilde{T})$ și vom deduce că există $\tilde{s}\in\tilde{S}$ și $z\in Z$ a.î. $\sigma(\tilde{t})\tilde{t}^{-1}=\tilde{s}z$. Va fi suficient să găsim $u\in Z$ a.î. $\sigma(\tilde{t}u)(\tilde{t}u)^{-1}=\tilde{s}$. Ultima condiție este echivalentă cu $zu^{-2}=1$, ecuație ce admite întotdeauna o soluție în $Z=S^1$.

Pentru a calcula 2-tors $S/\mathcal{T}$ va fi necesar să distingem două cazuri ($n=2m+1$ și $n=2m$), corespunzînd descompunerii în cicli a permutării ce intervine în construcția (5.8).

<u>Cazul I</u>: $n=2m+1$. In calculul algebrei Lie $\underline{\tilde{t}}^{\sigma}=\mathrm{Lie}\,\tilde{S}$ apare un singur ciclu de lungime unu, căruia îi corespunde condiția $x_{m+1}=\sigma' x_{m+1}=-x_{m+1}$ și cicli de lungime doi, cărora le corespund condiții de forma $(x_i, x_{2m+2-i})=\sigma'(x_i,x_{2m+2-i})=-(x_{2m+2-i},x_i)$. Rezultă egalitatea

$$(5.10)\qquad \tilde{S}=\{\mathrm{diag}(z_1,\dots,z_m,1,z_m^{-1},\dots,z_1^{-1})\mid z_i\in S^1\}$$

și prin urmare existența unei surjecții Ad: 2-tors $\tilde{S}\to$ 2-tors S. Fie $\tilde{s}\in$ 2-tors $\tilde{S}$. Notăm $\tilde{t}=(z_1,\dots,z_m,1,1,\dots,1)$ și găsim calculînd: $\sigma(\tilde{t})\tilde{t}^{-1}=\tilde{s}$, de unde $\tilde{\mathcal{T}}=$ 2-tors $\tilde{S}$, deci $\mathcal{T}=$ 2-tors S. Conform Propoziției 4.13

$$(5.11)\qquad EH^1(\mathbb{Z}_2;\mathrm{Aut}\,\underline{su}(2m+1))\cong\{1\}$$

<u>Cazul II:</u> $n=2m$. Un calcul ca mai sus conduce (în absența ciclilor de lungime unu) la egalitățile

$$(5.12)\qquad \tilde{S} = \{ \operatorname{diag}(z_1, \dots, z_m, z_m^{-1}, \dots, z_1^{-1}) \mid z_i \in S^1 \}$$

$$\tilde{T} = 2\text{-tors}\, \tilde{S} = \{ \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \varepsilon_m, \dots, \varepsilon_1) \mid \varepsilon_i = \pm 1 \}$$

Pe de altă parte, din reprezentarea (5.2) rezultă șirul exact

$$(5.13)\qquad 0 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \tilde{S} \xrightarrow{Ad} S \longrightarrow 0$$

Alegînd $\tilde{j}\in\tilde{S}$ cu proprietatea $\tilde{j}^2=-1$, vom putea deci scrie elementele din 2-tors S fie sub forma $Ad\tilde{s}$, fie sub forma $Ad\,\tilde{j}\tilde{s}$, cu $\tilde{s}\in 2\text{-tors}\,\tilde{S}$, deci, conform Propoziției 4.13 și ținînd cont de (5.12), $EH^1(\mathbb{Z}_2; \operatorname{Aut} \underline{su}(2m))$, conține cel mult două elemente, reprezentate de 1 și $Ad\tilde{j}$ în 2-tors S. Pentru a decide că aceste elemente sînt distincte, va trebui să apelăm la formularea mai precisă pusă la dispoziție de Propoziția 4.15.

Automorfismul definit de conjugarea complexă, $\tau(X)=\overline{X}$, este o involuție a algebrei complexe $\underline{gl}(n;\mathbb{C})$ și induce prin restricție automorfismul involutiv $\tau\in\operatorname{Aut}\underline{su}(n)$, care are proprietățile: $\operatorname{int}\tau(T)=T$ și $Ad\tau|_{\underline{t}} = \tau|_{\underline{t}} = -1$. Definim automorfismul $a\in\operatorname{Aut}\underline{su}(n)$ prin

$$(5.14)\qquad a = (Adw)\tau$$

unde w desemnează simultan elementul $w\in W = \Sigma_n$ dat de (5.5) și matricea $w\in N_{U(n)}(T)$ ce acționează asupra bazei canonice din $\mathbb{C}^n$ prin permutarea corespunzătoare. Rezultă că $\operatorname{int} Ad\, w(T)=T$ și că $Adw|_{\underline{t}}=w$ și de asemenea, ținînd cont de (5.5), că $(Ad\, w)^2=1$. Pentru a ne putea pune în condițiile din Prop.4.13, va fi suficient să arătăm că automorfismele Adw și τ comută. Fie $X \in \underline{gl}(n;\mathbb{C})$. Avem $(Adw)\tau X = w\overline{X}w^{-1} = \overline{wXw^{-1}} = \tau(Adw)X$. Un calcul asemănător ne va conduce la verificarea proprietății (4.16). Fie deci $u \in W^{\sigma}$ (prin urmare, conform cu (5.5) $u \in C_W(w)$) și fie $u \in N_{U(n)}(\tilde{T})$ reprezentantul în U(n) construit în același mod cu reprezentantul lui w de mai sus. Va fi suficient să arătăm că reprezentantul din Int $\underline{su}(n)$, și anume Adu, comută cu a. La rîndul ei, această proprietate rezultă din permutabilitatea lui Ad u cu τ (ca mai sus) și cu Adw (implicată de condiția $u \in W^{\sigma}$), și ne permite, utilizînd în toată legitimitatea acum Propoziția 4.15, să identificăm acțiunea lui W^{σ} pe 2-tors S ca fiind indusă de acțiunea standard a lui W pe $\tilde{T}$ prin <u>automorfisme de grup.</u> Rezultă, în cazul n=2m (m>1), că 1 și Ad $\tilde{j}$ reprezintă elemente distincte în 2-tors S mod $\mathcal{H}$ și că avem egalitatea

$$(5.15) \qquad EH^1(\mathbb{Z}_2;\ \mathrm{Aut}\,\underline{su}(2m)) \cong \{1, \mathrm{Ad}\,\tilde{j}\}$$

Menționăm că în calculul lui $EH^1(\mathbb{Z}_2;\ \mathrm{Aut}\,\underline{su}(n))$ $(n>2)$ lui 1 îi corespunde forma reală $\underline{sl}(n;\mathbb{R})$, iar lui Ad $\tilde{j}$ (n=2m) o formă reală de tip cuaternionic. Nu intrăm în detalii.

6. EPILOG: INVOLUTIILE DIAGRAMELOR DYNKIN SI FORMA FINALA A CLASIFICARII

Secțiunea este consacrată demonstrării faptului că pentru orice $\underline{g}$ algebră Lie complexă simplă, pentru care $D \neq (1)$, se poate alege un automorfism $a \in \mathrm{Aut}\,\underline{k}$ care satisface (4.16). Mai exact, dacă $1 \neq \sigma \in D$, $\sigma^2=1$, considerînd scufundarea $D \subset \mathrm{Aut}\,\underline{k}$ ca în demonstrația propoziției 4.3, obținem $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\underline{k}$ și evident $\sigma T \sigma^{-1}=T$, $\mathrm{Ad}\sigma_{|\underline{t}} = \sigma_{|\underline{t}}$.
Rămîne de arătat că:

6.1. PROPOZITIE. Oricare ar fi $g \in N_{\mathrm{Int}\,\underline{k}}T$ a.î. $\mathrm{int}\,\sigma(g) \in gT$, există $t \in T$ a.î. $\mathrm{int}\,\sigma(gt) = gt$.

Demonstrație. Pentru $g \in N_{\mathrm{int}\,\underline{k}}T$ fixat, căutăm $t \in T$ de forma $t = \exp \mathrm{ad}\, x$ cu $x \in \underline{t} = R\text{-sp}\{\mathcal{J} h_i\}$

Conform teoremei 3.8 și 4.6 $\mathrm{Ad}\, g_{|\underline{t}} = g_{|\underline{t}} = w$ cu $w \in W$.

Considerăm extensia $g = g \otimes \mathbb{C} : \underline{g} \mapsto \underline{g}$ și $\{x_\alpha, x_{-\alpha}, \alpha \in \Phi_+; h_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ un sistem standard de generatori ai algebrei Lie $\underline{g}$. Obținem [Goto, Grosshans, 5.3.2]:

$$\begin{aligned} g h_\alpha &= h_{w\alpha} \quad \text{și} \\ g x_\alpha &= \Lambda(\alpha)\, x_{w\alpha},\ \Lambda(\alpha) \in \mathbb{C}^* \quad \forall \alpha \in \Phi . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Un raționament analog din demonstrația propoziției 4.3 ne arată că:

$$\Lambda(\alpha) = \overline{\Lambda(-\alpha)} = \Lambda(-\alpha)^{-1} \qquad \text{și deci } |\Lambda(\alpha)| = 1 . \tag{6.2'}$$

In cazul în care $t \in T$, $t = \exp \mathrm{ad} x$ cu $x \in \underline{t}$, $t h_\alpha = h_\alpha$ și

$$t x_\alpha = (\mathrm{Ad}\, t) x_\alpha = \exp \mathrm{ad}\, x (x_\alpha) = e^{\alpha x} \cdot x_\alpha \tag{6.3}$$

Analog, pentru $\sigma = \sigma \otimes \mathbb{C} \in \mathrm{Aut}\, \underline{g}$:

$$\begin{aligned} \sigma(h_\alpha) &= h_{\sigma\alpha} \quad \text{și} \\ \sigma(x_\alpha) &= \mu(\alpha) \cdot x_{\sigma\alpha} \quad \text{cu } \mu(\alpha) \in \mathbb{C}^* \\ \mu(\alpha) &= \overline{\mu(-\alpha)} = \mu(-\alpha)^{-1} , \quad |\mu(\alpha)| = 1 . \end{aligned} \tag{6.4}$$

Intrucît $h_\alpha = [x_\alpha, x_{-\alpha}]$, $t \in T$ ca în enunț va trebui să satisfacă sistemul de condiții $(\sigma(gt)\sigma^{-1}) x_\alpha = (gt) x_\alpha$, $\forall \alpha \in \Phi$, care se poate reduce la generatorii de algebră Lie ai lui $\underline{g}$, dați de $\alpha \in \Delta \cup -\Delta$,

Δ fiind sistemul de rădăcini simple.

Egalitățile se rescriu ($\sigma = \sigma^{-1}$!) (cu 6.2,3,4))

$$\mu(\alpha)\cdot e^{\sigma\alpha x}\cdot \lambda(\sigma\alpha)\cdot \mu(w\sigma\alpha)\, x_{\sigma w\sigma\alpha} = e^{\alpha x}\cdot \lambda(\alpha)\cdot x_{w\alpha}\ .$$

Intrucît $\sigma g \sigma^{-1} \in gT$, rezultă $w \in W^{\sigma}$, deci $(\sigma w \sigma)\alpha = w\alpha$. Obținem, cu (6.2'), reformularea echivalentă:

$$\gamma_\alpha := \mu(\alpha)\,\mu(w\sigma\alpha)\cdot\lambda(\sigma\alpha)\cdot\lambda(-\alpha) = e^{(\alpha-\sigma\alpha)x}\ ,\ \alpha\in\Delta\cup -\Delta \qquad (6.5)$$

Deoarece $\mu(-\alpha) = \mu^{-1}(\alpha)$, $\lambda(-\alpha) = \lambda^{-1}(\alpha)$, dacă $\gamma_\alpha = e^{(\alpha-\sigma\alpha)x}$ pentru un α, atunci:

$$\gamma_{-\alpha} = \mu(-\alpha)\cdot\mu(w\sigma(-\alpha))\cdot\lambda(\sigma(-\alpha))\cdot\lambda(\alpha) = e^{(-\alpha+\sigma\alpha)x}$$

. In consecință $x \in \underline{t}$ va trebui să satisfacă egalitățile (6.5) pentru $\alpha\in\Delta$.

Dacă $\alpha\in\Delta$ a.î. $\sigma\alpha = \alpha$, obținem $\mu(\alpha)\cdot\mu(w\alpha) = \mu(w\alpha) = 1$, $w\alpha$ fiind și el punct fix al automorfismului $\sigma\in \mathrm{Aut}\,\phi$ $(\sigma(w\alpha) = w\sigma\alpha = w\alpha)$.

6.6. AFIRMATIE. Dacă σ are o rădăcină simplă drept punct fix, atunci:

$$\mu(\beta) = 1 \quad \forall\beta\in\phi \ \text{ cu } \sigma(\beta)=\beta\ .$$

Evident, cu această afirmație, egalitatea de mai sus este îndeplinită. Lăsăm justificarea acesteia la sfîrșitul demonstrației propoziției.

Așadar, rămîn de satisfăcut condițiile (6.5) pentru rădăcinile simple α , cu $\sigma\alpha \neq \alpha$. Dar $\sigma^2 = 1$, deci va exista o partiție a acestei mulțimi de rădăcini în 2-cicli $\alpha,\beta\in\Delta$, $\alpha\neq\beta$ cu $\sigma(\alpha)=\beta$ și $\sigma(\beta) = \alpha$. Totodată $x_\alpha = \sigma^2 x_\alpha = \mu(\alpha)\cdot\mu(\sigma\alpha)\cdot x_\alpha$ deci:

$\mu(\alpha) = \mu^{-1}(\beta)$ și din egalitatea (6.5) pentru α

rezultă şi egalitatea pentru $\beta = \sigma(\alpha)$.

Se obţine sistemul de condiţii suficiente $\gamma_\alpha = e^{(\alpha-\beta)x}$ pentru $\alpha \in \mathcal{R}$, sistem de reprezentanţi ai partiţiei în 2-cicli, şi deoarece $|\mu(\beta)| = |\lambda(\beta)| = 1$ pentru $\forall \beta \in \phi$, rezultă $\gamma_\alpha = e^{\mathfrak{I} r_\alpha}$, $r_\alpha \in \mathbb{R}$, şi avem de rezolvat $(\alpha-\beta)x = \mathfrak{I} r_\alpha$, unde $x = \mathfrak{I} y \in \mathbb{R}\text{-sp}\{\mathfrak{I} h_i\}$

Deoarece $\{\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ este o bază în $(\mathbb{R}\text{-sp}\{h_i\})^*$, $\{\alpha-\beta \mid \alpha \in \mathcal{R}\}$ va fi un sistem liniar independent în $(\mathbb{R}\text{-sp}\{h_i\})^*$, deci există soluţii $x \in \underline{t}$ şi deci $t \in T$ care să satisfacă condiţia din enunţul propoziţiei.

In continuare vom justifica afirmaţia 6.6. Pentru început, să explicităm acţiunea automorfismului $\sigma \in \mathrm{Aut}\, \underline{g}$. Dacă $\alpha \in \Delta$, avem:

$$\sigma(X_\alpha) = X_{\sigma\alpha}$$

$$\sigma(X_{-\alpha}) = X_{-\sigma\alpha}$$

iar dacă $\beta \in \phi_+$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$, $\beta_i \in \Delta$, cu sumele parţiale în ϕ_+,

$$X_\beta = c_\beta [X_{\beta_k} [X_{\beta_{k-1}} \ldots [X_{\beta_2}, X_{\beta_1}]] \ldots]], \quad c_\beta \in \mathbb{C}^* \qquad \text{avem:}$$

$$\sigma(X_\beta) = c_\beta [X_{\sigma\beta_k} [X_{\sigma\beta_{k-1}} \ldots [X_{\sigma\beta_2}, X_{\sigma\beta_1}] \ldots]]$$

Pentru $\beta \in \phi_-$: $\sigma(X_\beta) = c_\beta [X_{-\sigma\beta_k} [\ \ldots [X_{-\sigma\beta_2}, X_{-\sigma\beta_1}] \ldots]$, unde

$$-\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$$

Dacă $\sigma(\beta) = \beta$, demonstrarea faptului că $\mu(\beta) = 1$ revine la

$$[X_{\beta_k} [X_{\beta_{k-1}} \ldots [X_{\beta_2}, X_{\beta_1}] \ldots] = [X_{\sigma\beta_k} [X_{\sigma\beta_{k-1}} \ldots [X_{\sigma\beta_2}, X_{\sigma\beta_1}] \ldots] \quad (6.7)$$

pentru $\beta \in \phi_+$ şi

$$[X_{-\beta_k}[X_{-\beta_{k-1}}\ldots[X_{-\beta_2},X_{-\beta_1}]\ldots]=[X_{-\sigma\beta_k}[X_{-\sigma\beta_{k-1}}\ldots[X_{-\sigma\beta_2},X_{-\sigma\beta_1}]\ldots] \quad (6.7')$$

pentru $\beta\in\phi_-$.

Pentru demonstrarea celor două egalităţi, ne vom folosi de următoarea

6.8. AFIRMATIE. Dacă $\sigma\beta=\beta$, $\beta\in\phi_+$, $\beta=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_k$, $\beta_i\in\Delta$, atunci există o permutare τ a indicilor $\{1,\ldots,k\}$ a.î. sumele parţiale:

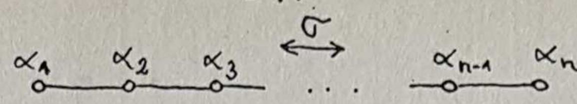
$$\beta_{\tau(1)}+\beta_{\tau(2)}+\ldots+\beta_{\tau(i)}\in\phi_+$$

şi mulţimea $\{\tau(1),\ldots,\tau(k)\}$ se partiţionează în raport cu acţiunea naturală a lui σ în 1-cicli (puncte fixe) şi 2-cicli, a.î. 2-ciclii apar doar alăturaţi: $\sigma\beta_{\tau(s)}=\beta_{\tau(s+1)}$, $\sigma\beta_{\tau(s+1)}=\beta_{\tau(s)}$ şi $\beta_{\tau(s)}+\beta_{\tau(s+1)}\notin\phi$. Mai mult, dacă $k\leq 2$, atunci $\sigma(\beta_i)=\beta_i$ $\forall i$ (nu există 2-cicli).

<u>Demonstraţie.</u> Parcurgînd lista 4.2, se observă că singurele automorfisme $\sigma\in D$ de ordin 2 cu rădăcini simple drept puncte fixe apar în cazul A_n, n impar, D_n şi E_6. Vom analiza fiecare caz în parte, folosindu-ne de forma explicită a sistemului de rădăcini din [Bourbaki, cap.VI, liste]. Datorită 4.7 (i) vom putea alege σ convenabil (alegere efectivă doar în cazul D_4, în celelalte cazuri $D\cong\mathbb{Z}_2$).

<u>Cazul A_n</u>, <u>n-impar</u>

$$E=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\mid\sum\varepsilon_i=0\}$$
$$\phi_+=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j\mid 1\leq i<j\leq n+1\}$$
$$\Delta=\{\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}\mid 1\leq i\leq n\}$$

diagrama Dynkin  , $D \cong \mathbb{Z}_2$

și $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{n+1-i}$.

Dacă $\beta \in \Phi_+$, $\sigma(\beta) = \beta$, atunci $\beta = \alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{n+1-k}$

și avem o rescriere ca în enunț:

$$\beta = \alpha_{\frac{n+1}{2}} + \alpha_{\frac{n+1}{2}-1} + \alpha_{\frac{n+1}{2}+1} + \dots + \alpha_k + \alpha_{n+1-k}$$

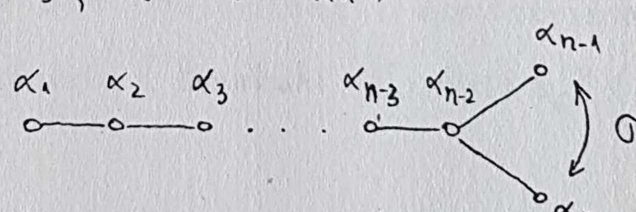
Sumele parțiale sînt în Φ_+, deoarece mulțimea termenilor din aceste sume formează mulțimi conexe în diagrama Dynkin [Bourbaki, VI, § 1, consec. 3 la afirm. 19] . Aceeași consecință ne asigură că $\alpha_{\frac{n+1}{2}-i} + \alpha_{\frac{n+1}{2}+i} \notin \Phi_+$ deoarece $\{\alpha_{\frac{n+1}{2}-i}, \alpha_{\frac{n+1}{2}+i}\}$ nu e o mulțime conexă în diagrama Dynkin (cele 2 verificări se pot face și direct, prin calcul).

Cazul D_n, $n \geq 4$

$E = \mathbb{R}^n$

$\Phi_+ = \{\varepsilon_i + \varepsilon_j , \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$

$\Delta = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$ și $\alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$

diagrama Dynkin 

Alegem $\sigma \in D$ cu $\sigma(\alpha_{n-1}) = \alpha_n$, $\sigma(\alpha_n) = \alpha_{n-1}$ și $\sigma(\alpha_i) = \alpha_i$ pentru $i \leq n-2$.

$\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ cu $j \leq n-1$ este punct fix pentru σ și $\beta = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1}$, $\sigma(\alpha_s) = \alpha_s$ (apar doar 1-cicli).

$\beta = \varepsilon_i \pm \varepsilon_n$ nu sînt fixe în raport cu σ.

$\beta = \varepsilon_i + \varepsilon_j$, $1 \leq i < j \leq n-1$ este fix și avem:

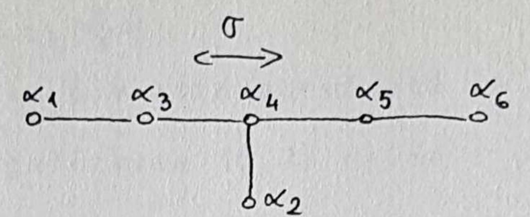
$\beta = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n + \alpha_{n-2} + \dots + \alpha_j$

(în cazul $j = n-1$ suma $\alpha_{n-2} + \dots + \alpha_j$ nu apare), sumele parțiale sînt:

$\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_i - \varepsilon_{i+2}, \dots, \varepsilon_i - \varepsilon_n, \varepsilon_i + \varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_i + \varepsilon_j \in \phi_+$,

$\alpha_{n-1} + \alpha_n = 2\varepsilon_{n-1} \notin \phi$ și, deoarece $i<j\leq n-1$, apar cel puțin 3 termeni în sumă.

Cazul E_6

Diagrama Dynkin 

$D \cong \mathbb{Z}_2$

Fie $\beta \in \phi_+$, $\sigma(\beta) = \beta$

Dacă coeficienții din scrierea lui β în baza Δ sînt ≤ 1, atunci [Bourbaki, VI, § 1, consec.3 la afirm. 19], avem cazurile:

$\beta = \alpha_2$, $\beta = \alpha_4$, $\beta = \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_5$, $\beta = \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_1 + \alpha_6$, $\beta = \alpha_4 + \alpha_2$

$\beta = \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5$, $\beta = \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_1 + \alpha_6$

și același argument de conexiune ne asigură că sînt satisfăcute cerințele din enunț.

Dacă cel puțin unul din coeficienții din scrierea lui β in baza Δ este ≥ 2, avem cazurile [Bourbaki, VI, lista E_6] (coeficienții corespund diagramei Dynkin):

$\begin{matrix} 0\,1\,2\,1\,0 \\ 1 \end{matrix}$ $\beta = \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_4$

$\begin{matrix} 1\,1\,2\,1\,1 \\ 1 \end{matrix}$ $\beta = \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_1 + \alpha_6 + \alpha_4$

$\begin{matrix} 1\,2\,2\,2\,1 \\ 1 \end{matrix}$ $\beta = \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_1 + \alpha_6 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_5$ (*)

$\begin{matrix} 1\,2\,3\,2\,1 \\ 1 \end{matrix}$ $\beta = \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_1 + \alpha_6 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_4$

$\begin{matrix} 1\,2\,3\,2\,1 \\ 2 \end{matrix}$ $\beta = \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_1 + \alpha_6 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_2$

Cu excepția cazului (*) cu suma parțială $\alpha_4+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5+\alpha_1+\alpha_6+\alpha_4+\alpha_3$ celelalte sume parțiale sînt în Φ_+, fapt ce rezultă prin inducție folosind și prima listă. Insă $\alpha_4+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5+\alpha_1+\alpha_6+\alpha_4+\alpha_3 = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ & & 1 & & \end{smallmatrix} \in \Phi_+$ [Bourbaki, VI, lista E_6]. Totodată $\alpha_3+\alpha_5$, $\alpha_1+\alpha_6 \notin \Phi$.

Deci afirmația 6.8 este adevărată în toate cazurile.

Revenim la egalitatea (6.7) pe care o vom demonstra prin inducție după lungimea scrierii k, presupunînd $\beta=\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_k$ în forma din 6.8 .

Dacă k=1 sau 2, am arătat că singura posibilitate este $\sigma(\beta_i)=\beta_i$, nerămînînd nimic de justificat.

Presupunem $k\geq 3$.

Dacă $\sigma(\beta_k)=\beta_k$, rezultă $\sigma(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{k-1})=\beta_1+\dots+\beta_{k-1}$. Din ipoteza de inducție, (6.7) este adevărată pentru $\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{k-1}$, deci și pentru β.

Dacă (β_{k-1},β_k) este un 2-ciclu relativ la σ, atunci:
$\sigma(\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{k-2})=\beta_1+\dots+\beta_{k-2}$ și pentru $\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_{k-2}$ egalitatea (6.7) este adevărată. Să notăm cu z cei doi membri ai egalității. Va trebui să arătăm c

$$[X_{\beta_k}[X_{\beta_{k-1}},z]]=[X_{\beta_{k-1}}[X_{\beta_k},z]]$$

Facem următoarea observație simplă, dar foarte utilă:

dacă $x,y,z\in L$, L algebră Lie și $[x,y]=0$, atunci

$$[x[y,z]]=[[x,y],z]+[y[x,z]]=[y[x,z]] \qquad \text{(x și y "comută")}$$

Această observație și faptul că $\beta_{k-1}+\beta_k\notin\Phi$ deci $[X_{\beta_{k-1}},X_{\beta_k}]=0$ termină demonstrația egalității (6.7).

Egalitatea (6.7') pentru $\beta\in\Phi_-$ rezultă, ca și cea precedentă, folosind reordonarea pentru rădăcina $-\beta\in\Phi_+$ ca în 6.8 și același raționament inductiv.

7. COMENTARII (pseudo A7)

Lecția de față (și în definitiv aproape tot conținutul celor precedente) se leagă de numele, ideile și rezultatele lui Elie Cartan. E imposibil de rezistat tentației de a expune, în linii mari și din punctul actual de vedere, cum problema precedentă a clasificării algebrelor semisimple reale (rezolvată pentru prima oară în [Cartan 1914]) a fost-în mod profund și complet-dovedită a fi echivalentă cu cea a clasificării spațiilor Riemann simetrice (introduse în Cartan [1926-7] și studiate într-o serie întreagă de lucrări, din care e de menționat [Cartan 1929] pentru sinteza cu [Cartan 1914]). O expunere detaliată a lumii spațiilor Riemann simetrice o constituie monografia [Helgason] (inclusiv listele și formele concrete ce rezultă din clasificarea - dar mai puțin clasificarea însăși). O frumoasă și rapidă panoramare se găsește în [Kobayashi - Normizu 1963, Note 7]; liniile mari ale clasificării spațiilor simetrice le vom expune urmînd pe [Kobayashi-Nomizu 1969] (Ch.XI, în mod special §§5-8).

Cartan a investigat structura spațiilor Riemann local simetrice, i.e. cele pentru care derivata covariantă a tensorului de curbură e nulă, care generalizează în mod natural spațiile cu curbură constantă. El a descoperit că aceste spații M sînt caracterizate de proprietatea ca, pentru orice $x \in M$, să existe o izometrie locală involutivă care să-l aibă pe x ca punct fix izolat (condițiile $s_x(x)=x$, $s'_x=-1$ determină unic simetria - locală - s_x). Dacă $\pi_1 M=0$ și M este completă, Cartan a arătat că această proprietate este echivalentă cu existența unei simetrii globale s_x, pentru orice x, ajungînd astfel la noțiunea de spațiu Riemann simetric (care rezultă cu ușurință a fi complet).

Legătura cu involuțiile grupurilor Lie: Orice spațiu simetric conex este de forma $M=G_o/K$, unde G_o e un grup Lie conex înzestrat cu un automorfism involutiv a, iar K e un subgrup compact ce stă între $(G_o^a)_e$ și G_o^a; metrica lui M e G_o-invariantă și este indusă de o metrică Ad K-invariantă pe algebra Lie $\underline{g}_o$=Lie G_o. (Alegînd o origine $o \in M$ și, din completitudine, o geodezică ce unește o cu un $x \in M$ arbitrar, se poate considera simetria în raport cu mijlocul geodezicei pentru a vedea că grupul izometriilor Isom (M) e tranzitiv pe M, și deci se poate lua G_o=Isom $(M)_e$, compacitatea subgrupului K rezultînd din faptul că el este un grup de izotropie într-un grup de izometrii; luînd a=int s_o, incluziunea $K \subset G_o^a$ se verifică observînd că izometriile ks_ok^{-1} și s_o fixează pe și au aceeași derivată în o, deci coincid, pentru orice $k \in K$, iar incluziunea $(G_o^a)_e \subset K$ rezultă remarcînd că orbita lui o printr-o familie cu un parametru de izometrii ce comută cu s_σ va fi o familie cu un parametru de puncte fixe ale lui s_σ în vecinătatea lui σ, deci se va reduce la σ; reciproc, date G_o, a, K, se constată că difeomorfismul involutiv indus de a pe G_o/K - notat s_o - ce îl are pe o drept punct fix izolat este o izometrie, considerînd descompunerea AdK - invariantă indusă de involuția liniară a', $\underline{g}_o=\underline{k} \oplus \underline{m}$, unde $\underline{k}$=Lie $K=\underline{g}_o^+(a')$, iar $\underline{m}=\underline{g}_o^-(a')$, și alegînd o metrică Ad K- invariantă pe $\underline{g}_o$ în raport cu care descompunerea de mai sus e ortogonală; conjugatele lui s_o prin translațiile lui M cu elemente din G_o dau structura de spațiu simetric al lui $M=G_o/K$).

Legătura cu involuțiile algebrelor Lie. Trecînd la algebre Lie, se degajă noțiunea infinitezimală de algebră Lie ortogonală simetrică: o pereche $(\underline{g}_o, c)$, unde $\underline{g}_o$ e o algebră Lie reală și $c \in \mathrm{Aut}\, \underline{g}_o$ e o involuție (ce dă naștere, ca mai sus, descompunerii $\underline{g}_o=\underline{k} \oplus \underline{m}$) cu proprietatea că grupul liniar conex generat de ad $\underline{k}$ în $GL(\underline{g}_o)$ e compact; noțiunea de izomorfism e cea evidentă: conjugarea involuțiilor prin automorfisme Lie. E. Cartan a stabilit și următorul fapt: clasificarea izometrică locală (sau, în condiții de 1-conexiune, globală) a spațiilor simetrice se reduce la clasificarea algebrelor Lie simetrice. In această schemă corespondența geometrie - algebră e foarte precisă: spre exemplu, operatorul de curbură în $\sigma \in G_o/M=M$, asociat vectorilor tangenți $X, Y \in \underline{m}=T_oM$ e dat de $R(X,Y)=-\mathrm{ad}_{\underline{m}}[X,Y]$ (cu precizarea că a' e un automorfism Lie, și prin urmare $\underline{k}=\underline{g}_o^+(a')$ e o subalgebră, $\underline{m}=\underline{g}_o^-(a')$ e un subspațiu ad $\underline{k}$-invariant și $[\underline{m},\underline{m}] \subset \underline{k}$).

Reducerea la cazul semisimplu. Esențialmente orice algebră simetrică ortogonală e suma directă (compatibilă cu involuțiile) a două algebre simetrice ortogonale, în care primul factor are drept suport o algebră semisimplă, iar al doilea are proprietatea că $[\underline{m},\underline{m}]=0$ ([Kobayashi - Nomizu 1969], Ch.XI, Th.7.2 - demonstrație bazată pe egalitatea generală între radicalul unei algebre și subspațiul ortogonal pe subalgebra derivată, via forma Killing). Deoarece condiția $[\underline{m},\underline{m}]=0$ are drept consecință faptul că spațiul simetric corespunzător e plat, deci acoperirea lui universală este un spațiu numeric euclidian, rezultă de aici că se poate presupune în continuare că $\underline{g}_o$ e semisimplă, un alt pas remarcabil.

Descompunerea în componente ireductibile. Fie $(\underline{g}_o,c)$ o algebră simetrică ortogonală, cu $\underline{g}_o$ semisimplă. Automorfismul Lie involutiv c induce o permutare involutivă a componentelor simple. Descompunerii în unu - și doi - cicli a acestei permutări îi corespunde o descompunere (compatibilă cu involuțiile) a lui $(\underline{g}_o,c)$ în sumanzi în care fie că suportul este o algebră simplă, fie că sînt de tipul $(\underline{k}\oplus\underline{k},c_o)$, unde $\underline{k}$ este o algebră simplă compactă, iar involuția c_o permută (X,Y) în (Y,X) (compacitatea lui $\underline{k}$ rezultă din compacitatea lui ad $\underline{k}$). Ce se mai poate spune în primul caz? Dacă $\underline{g}_o=\underline{g}_{\mathbb{R}}$, unde $\underline{g}$ este o algebră complexă simplă, atunci există esențialmente o singură involuție ortogonală pe $\underline{g}_o$, i.e. $(\underline{g}_o,c)\sim((\underline{k}\otimes\mathbb{C})_{\mathbb{R}},c_o)$, unde $\underline{k}$ este forma reală compactă a lui $\underline{g}$, iar involuția c_o e dată de conjugarea complexă ([Kobayashi - Nomizu 1969] Ch. XI, Th.8.3). In afara acestor ultime două cazuri (parametrizate de clasificarea algebrelor simple reale compacte, deci de clasificarea algebrelor simple complexe, vezi Lecția X), ceea ce rămîne coincide cu clasificarea algebrelor Lie simetrice ortogonale $(\underline{g}_o,c)$, unde $\underline{g}_o$ parcurge formele reale ale unei algebre simple complexe fixate $\underline{g}$ (a se revedea Propoziția 1.1!).

Tipul compact și tipul necompact. Discuția se face după signatura restricției la $\underline{m}$ a formei Killing a lui $\underline{g}_o$. In general, dacă $\underline{g}_o=\underline{k}\oplus\underline{m}$ este descompunerea canonică asociată unei algebre Lie simetrice ortogonale arbitrare $(\underline{g}_o,c)$, rezultă imediat din faptul că B este c-invariantă că descompunerea de mai sus este ortogonală în raport cu B. Dacă $\underline{g}_o$ este semisimplă, argumentul folosit deja în Lecția X arată că $B<0$ pe $\underline{k}$. Dacă $\underline{g}_o$ este simplă, se arată ([Kobayashi - Nomizu 1969], Ch.XI, Prop.7.4) că $B|_{\underline{m}}$ este fie negativ, fie pozitiv definită. Vom vorbi în mod corespunzător despre algebre simetrice de tip compact și de tip necompact. In mod evident, $(\underline{g}_o, c)$ este de tip compact dacă și numai dacă $\underline{g}_o$ este compactă (și aceasta echivalează cu compacitatea spațiului simetric corespunzător).

Dualitate. Acest ultim concept fundamental extinde dualitatea tradițională "geometrie sferică" $\longleftrightarrow$ " geometrie hiperbolică". Dacă $\underline{g}$ este o algebră simplă complexă și $\underline{g}_o \subset \underline{g}$ este o formă reală, atunci oricărei algebre ortogonale simetrice $(\underline{g}_o, c)$ i se asociază duala ei, notată $(\underline{g}_o^*, c^*)$, în modul următor: scriind $\underline{g}_o = \underline{k} \oplus \underline{m}$, definim forma reală $\underline{g}_o^*$ a lui $\underline{g}$ prin $\underline{g}_o^* = \underline{k} \oplus J\underline{m}$, care reprezintă descompunerea canonică a lui $\underline{g}_o^*$ în raport cu involuția c^* definită prin $c^*|\underline{k} = +1$ și $c^*|J\underline{m} = -1$, și obținem astfel o nouă algebră simetrică ortogonală, avînd drept suport o nouă formă reală a lui $\underline{g}$. Se construiește astfel o corespondență involutivă (și compatibilă cu clasificarea) între algebrele simetrice ortogonale care au pe $\underline{g}$ drept complexificare a suportului, prin care tipurile compacte și necompacte se corespund. Prin urmare, clasificarea spațiilor simetrice este redusă în final la calculul spațiului - cît 2-tors Aut $\underline{k}$ mod Aut $\underline{k}$-conjugare (unde $\underline{k} \subset \underline{g}$ este forma reală compactă), la care se reduce și clasificarea algebrelor simple reale (2.13).

Este de remarcat rolul decisiv pe care îl joacă ideea de compacitate, cît și punctul de vedere global asupra grupurilor Lie și a spațiilor simetrice (ambele idei prezente în memoriile de pionierat [Weyl]). Cît despre sinteza ulterioară a lui Elie Cartan a acestor puncte de vedere cu clasificările sale inițiale locale , se cuvine amintită părerea lui Hermann Weyl: "dl. Elie Cartan cunoștea toate grupurile Lie, personal".

Revenind la Lecția XII propriu-zisă, ar fi de făcut următoarele comentarii:

In chestiunea clasificării algebrelor Lie, existența unor liste complete și discrete este un apanaj al cazului semi-simplu). De exemplu, în cazul nilpotent apar parametri nediscreți, iar o clasificare satisfăcătoare nu există încă.

Felurite patologii apar în caracteristica pozitivă ([Humphreys 1972]), exerciții). In mod remarcabil, pe de altă parte, clasificarea grupurilor liniare algebrice semisimple și 1-conexe peste un corp algebric închis de caracteristică arbitrară conduce în final la aceleași liste ca în clasificarea algebrelor Lie semisimple complexe [Humphreys 1975].

Metoda generală de a ataca problema clasificării peste un corp k arbitrar este de a trece prin clasificarea peste închiderea algebrică $\bar{k}$. Un formalism bine adecvat studiului formelor k-raționale ale unui obiect algebric fixat este, după cum am mai amintit, cel al coomologiei galoisiene [Serre 1965].

O altă metodă algebrică în chestiunea clasificării algebrelor Lie simple finit-dimensionale peste un corp arbitrar k de caracteristică zero (legată de teoria algebrelor asociative) se găsește expusă în [Jacobson, Ch.X], cu exemplificarea cazului $k=\mathbb{R}$.

Liste și metode de listare a algebrelor simple reale pot fi găsite în [Hausner - Schwartz] (calcule mai mult sau mai puțin ad-hoc ce exploatează formele concrete ale algebrelor simple complexe), și în [Goto-Grosshans] (unde este utilizată sistematic descompunerea Cartan.

Legat de paralela între algebre Lie reductive complexe și grupuri Lie compacte conexe (§3) , există încă două direcții dezvoltate în [Adams] și [Bröcker - tom Dieck] și anume structura grupurilor Lie compacte și conexe și structura reprezentărilor lor. In ambele cazuri, în afara invariantului decisiv (infinitezimal) dat de sistemul de rădăcini $\Phi_{lin} \subset \underline{t}$ mai intervine și un al doilea invariant (global) legat de poziția, relativ la Φ_{lin}, a <u>laticii întregi</u> $\exp^{-1}(1) \subset \underline{t}$.

In fine, menționăm și o altă direcție conexă importantă de investigare în cazul global, și anume descrierea proprietăților topologice ale grupurilor Lie conexe și ale spațiilor lor omogene în termeni infinitezimali. Spre exemplu, calculul coomologiei reale a spațiilor omogene G/K (G și K compacte și conexe) - o problemă pusă de Elie Cartan, a cărei istorie plină de miez e rememorată în [de Rham] - se poate face în funcție numai de perechea algebrelor lor Lie ($\underline{k} \subset \underline{g}$), vezi [Verona].

APPENDIX A: CONCEPTE DE BAZA

Toma ALBU

CUPRINS

1. CITEVA CLASE DE K-ALGEBRE

In cele ce urmează K va desemna un inel comutativ cu element unitate 1, $1 \neq 0$. O noțiune importantă este cea de K-algebră asociativă care se obține prin combinarea conceptului de inel cu cel de $\mathbb{K}$-modul în prezenta unor conditii de compatibilitate între cele două structuri. Mai precis, avem următoarea

DEFINITIE. Se numeşte $\mathbb{K}$-algebră asociativă un quadruplu $(A,+,\cdot,*)$ format dintr-o multime nevidă A şi trei operatii algebrice pe A, primele două, "+" şi "$\cdot$", fiind operatii algebrice interne pe A iar "*" o operatie algebrică externă pe A cu domeniul de operatori inelul $\mathbb{K}$, astfel încît să fie satisfăcut următorul set de conditii:

(1) $(A,+)$ este grup abelian;

(2) Operatia "$\cdot$" este asociativă;

(3) $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ şi $(y+z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$, $\forall\, x,y,z \in A$;

(4) $(A,+,*)$ este $\mathbb{K}$-modul unitar;

(5) $\lambda * (x \cdot y) = (\lambda *) \cdot y = x \cdot (\lambda * y)$, $\forall\, x,y \in A$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$.

Dacă în plus multimea A admite element neutru fată de "$\cdot$", atunci $\mathbb{K}$-algebra asociativă A se zice că este unitară.

Condițiile (1), (2) şi (3) la un loc nu spun altceva decît că $(A,+,\cdot)$ este un inel. De obicei, pentru ambele operatii "$\cdot$" şi "$*$" dintr-o $\mathbb{K}$-algebră A se foloseşte aceeaşi scriere prescurtată $x \cdot y = xy$ şi $\lambda * x = \lambda x$, $\forall x,y \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Dacă se elimină definitia anterioară conditia (2), adică conditia de asociativitate a operatiei de înmultire "$\cdot$" din A atunci se obtine definitia notiunii mai generale de $\mathbb{K}$-algebră. Pentru a deosebi această notiune generală de cea particulară de $\mathbb{K}$-algebră asociativă pentru care în mod uzual se foloseşte denumirea prescurtată de $\mathbb{K}$-algebră, uneori se adaugă cuvîntul "neasociativ", care trebuie înteles astfel: o $\mathbb{K}$-algebră neasociativă este o $\mathbb{K}$-algebră care nu este neapărat asociativă.

In algebră sînt studiate următoarele clase importante de $\mathbb{K}$-algebre:

- Asociativă;
- Alternative;
- Lie;
- Jordan.

Algebrele Lie, Jordan şi alternative sînt algebre neasociative, dar într-un anumit fel ele sînt strîns legate de algebrele asociative.

Astfel, modificînd convenabil operatia de înmultire dintr-o K-algebră asociativă arbitrară A se poate obtine o $\mathbb{K}$-algebră Lie A^- şi o $\mathbb{K}$-algebră Jordan A^+. Pe de altă parte, algebrele alternative sînt algebre în care operatia de înmultire satisface două conditii, fiecare mai slabă decît conditia de asociativitate.

Prezentăm în continuare pe scurt aceste tipuri de algebre.

Algebre asociative apar frecvent în algebră. Exemplul standard de $\mathbb{K}$-algebră asociativă este furnizat de multimea $End_{\mathbb{K}}(V)$ a tuturor $\mathbb{K}$-endomorfismelor unui spatiu vectorial finit dimensional V peste un corp comutativ $\mathbb{K}$, înzestrată cu operatiile uzuale de adunare, compunere şi înmultire cu scalari a endomorfismelor; mai general, se poate considera un inel comutativ arbitrar $\mathbb{K}$ şi un $\mathbb{K}$-modul arbitrar E, obtinîndu-se $\mathbb{K}$-algebra asociativă unitară $End_{\mathbb{K}}(E)$ a tuturor endomorfismelor $\mathbb{K}$-modulului E. Algebrele asociative de tipul $End_{\mathbb{K}}(E)$ joacă un rol similar cu cel jucat de grupurile simetrice $\mathfrak{S}_M$ în teoria grupurilor: orice $\mathbb{K}$-algebră asociativă A ($\mathbb{K}$ inel comutativ unitar) este izomorfă cu o $\mathbb{K}$-subalgebră a algebrei $End_{\mathbb{K}}(A)$ via monomorfismul de $\mathbb{K}$-algebre unitare

$$A \rightarrowtail End_{\mathbb{K}}(A),$$

$$a \longmapsto a_L$$

unde $a_L(b) = ab$, $\forall\, b \in A$.

Algebrele alternative au la bază descoperirea de către J.J. Graves şi A. Cayley a algebrei **O** a octonionilor, o algebră peste **R** de dimensiune 8, incluzînd algebra **H** a cuaternionilor lui Hamilton. Această algebră **O** are multe din proprietătile lui **H**; de exemplu **O** este o algebră cu diviziune, dar, spre deosebire de **H** ea nu este asociativă. In schimb, în algebre O operația de înmulțire "·" posedă următoarele două proprietăți:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} x \cdot (x \cdot y) &= (x \cdot x) \cdot y \\ y \cdot (x \cdot x) &= (y \cdot x) \cdot x \end{aligned}$$

pentru orice $x, y \in O$, cu alte cuvinte operatia "·" de înmulțire din O satisface două condiții, fiecare mai slabă decît conditia de asociativitate.

Octonionii se utilizează pentru a coordonatiza anumite plane proiective non-Desarguesiene.

Luînd conditiile (A) ca definitie se obtine conceptul de algebră alternativă. Mai precis, se numește K-algebră alternativă orice K-algebră (neasociativă) în care operatia de înmulțire satisface conditiile (A) de mai sus.

Algebrele Lie poartă numele matematicianului norvegian SOPHUS LIE (1842-1899). Ele sînt obiecte fundamentale în studiul teoriei Lie a grupurilor continue; astfel, după cum a demonstrat S. Lie, studiul proprietăților locale ale grupurilor continue se reduce la studiul algebrelor Lie asociate acestora.

Dacă A este o K-algebră asociativă, să considerăm produsul Lie sau comutatorul

$$[x.y] := x \cdot y - y \cdot x$$

definit pentru orice $x, y \in A$. Se obtine în acest mod o operație algebrică internă pe A

$$A \times A \to A, \ (x,y) \mapsto [x,y]$$

despre care se poate arăta că are următoarele două proprietăți:

(L1) $[x, x] = 0 \quad \forall x \in A$

(L2) $[x, [y,z]] + [y, [z,x]] + [z, [x,y]] = 0$

ultima fiind cunoscută sub numele de identitatea lui Jacobi.

K-modulul subiacent K-algebrei asociative A, înzestrat cu noua operatie $[\ ,\ ]$ dă naștere unui obiect notat A^- și numit K-algebra Lie asociativă algebrei asociative A. Mai general, prin K-algebră Lie se întelege orice K-algebră în care operatia de înmulțire, notată traditional $[x,y]$ în loc de $x \cdot y$, satisface conditiile (L1) și (L2) de mai sus.

Algebrele Jordan sînt, spre deosebire de algebrele prezentate anterior, de creatie mult mai recentă. Ele au fost introduse în anul 1931 de către fizicianul P. JORDAN cu scopul de a le aplica în mecanica cuantică. Aceste algebre au luat naştere căutîndu-se proprietăţile pe care le satisface produsul Jordan sau anticomutatorul

$$x * y = \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x)$$

dintr-o $\mathbb{K}$-algebră asociativă A peste un corp $\mathbb{K}$ de caracteristică diferită de 2. Se arată uşor că produsul Jordan "*" are următoarele două proprietăţi:

(J1) $x * y = y * x$

(J2) $(x^2 * y) * x = x^2 * (y * x)$, unde $x^2 = x * x$, $\forall\, x, y \in A$.

Luînd acum ca definitie conditiile (J1) şi (J2) se obţine conceptul de algebră Jordan. Mai precis, se numeşte <u>$\mathbb{K}$-algebră Jordan</u> (unde de obicei $\mathbb{K}$ este presupus corp comutativ de caracteristică diferită de **2**) orice $\mathbb{K}$-algebră J în care operaţia de înmultire, notată "*" satisface conditiile (J1) şi (J2) de mai sus.

Algebrele Jordan au aplicatii în analiză, geometrie şi în teoria grupurilor Lie.

2. GENERALITATI DESPRE K-ALGEBRE

Fie $\mathbb{K}$ un inel comutativ cu element unitate. Am văzut în paragraful precedent că prin $\mathbb{K}$-algebră nu neapărat asociativă, sau mai scurt, prin $\mathbb{K}$-algebră se întelege orice $\mathbb{K}$-modul unitar A înzestrat cu o aplicatie $\mathbb{K}$-biliniară

$$A \times A \longrightarrow A, \ (x,y) \longmapsto x \cdot y,$$

adică cu o operatie algebrică internă pe A, notată multiplicativ, satisfăcînd următoarele conditii:

$$(x_1 + x_2) \cdot y = (x_1 \cdot y) + (x_2 \cdot y)$$

$$x \cdot (y_1 + y_2) = (x \cdot y_1) + (x \cdot y_2)$$

$$(\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y) = x \cdot (\lambda y),$$

pentru orice $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in A$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$.

Să notăm că darea unei aplicatii $\mathbb{K}$-biliniare pe un $\mathbb{K}$-modul A echivalează cu darea unui morfism de $\mathbb{K}$-modul $A \otimes_{\mathbb{K}} A \longrightarrow A$.

Dacă A este o $\mathbb{K}$-algebră atunci se poate considera $\mathbb{K}$-algebra opusă A^{op} avînd drept $\mathbb{K}$-module subiacent chiar pe A şi operatia de înmultire "$*$" definită astfel: $x * y = y \bullet x$, $\forall\, x,y \in A$.

O serie de notiuni, constructii şi rezultate de bază din teoria algebrelor asociative se extind imediat în mod natural la algebrele neasociative.

Astfel prin subalgebră a $\mathbb{K}$-algebrei A se întelege orice $\mathbb{K}$-submodul A' al lui A, care în plus verifică următoarea condiție: $x \bullet y \in A'$ pentru orice $x,y \in A'$.

Un ideal stîng (resp. drept) al $\mathbb{K}$-algebrei A este un $\mathbb{K}$-submodul I al lui A pentru care $a \cdot x \in I$ (resp. $x \cdot a \in I$), $\forall\, a \in A$ şi $\forall\, x \in I$. Un ideal stîng care este în acelaşi timp şi ideal drept se numeşte ideal bilateral. In cazul în care I este un ideal stîng (resp. drept, resp. bilateral) vom consemna aceasta prin următoarea notatie: $I \leq_A A$ (resp. $I \leq A_A$, resp. $I \triangleleft A$).

Dacă I este un ideal bilateral al $\mathbb{K}$-algebrei A, atunci pe $\mathbb{K}$-modulul factor A/I se poate considera asocierea:

$A/I \times A/I \longrightarrow A/I, \quad (\hat{x},\hat{y}) \longmapsto \widehat{xy}$.

Deoarece I este un ideal bilateral în A această asociere este o functie, care este şi $\mathbb{K}$-biliniară după cum se constată imediat, deci ea defineşte pe $\mathbb{K}$-modulul factor A/I o structură de $\mathbb{K}$-algebră, numită <u>$\mathbb{K}$-algebra factor</u> a algebrei A modulo idealul bilateral I.

Fie A şi B două $\mathbb{K}$-algebre; se numeşte <u>morfism</u> al algebrei A în algebra B orice functie $\varphi : A \longrightarrow B$ care este un morfism de $\mathbb{K}$-module şi în plus îndeplineşte conditia: $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $\forall\ x,y \in A$.

Clasa tuturor $\mathbb{K}$-algebrelor formează o categorie <u>$\mathbb{K}$-ALG</u>, în care pentru orice două obiecte A şi B din această categorie, multimea $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbb{K}\text{-ALG}}}(A,B)$ este exact multimea tuturor morfismelor de $\mathbb{K}$-algebre de la A la B. Este clar că în această categorie izomorfismele coincid cu morfismele bijective şi că subobiectele unui obiect A din <u>$\mathbb{K}$-ALG</u> corespund subalgebrelor lui A. Produsele directe în categoria <u>$\mathbb{K}$-ALG</u> au o descriere explicită; ele se obtin înzestrînd produsul cartezian al unei familii date de $\mathbb{K}$-algebre cu operatii care se definesc pe componente.

Dacă $\varphi : A \longrightarrow B$ este un morfism de $\mathbb{K}$-algebre, atunci <u>nucleul</u> $\ker\varphi = \{x \in A \,/\, \varphi(x) = 0\}$ al lui φ este un ideal bilateral al lui A. Aşadar orice morfism de algebre de sursă A defineşte un ideal bilateral al lui A, şi anume $\ker\varphi$. Reciproc, orice ideal bilateral I al lui A produce un morfism de algebre de sursă A avînd nucleul chiar I, şi anume, morfismul canonic surjectiv $p : A \longrightarrow A/I$, $p(x) = \hat{x}$. Este clar că dacă $\varphi : A \longrightarrow B$ este un morfism de $\mathbb{K}$-algebre, atunci <u>imaginea</u> $\mathrm{Im}\,\varphi = \{\varphi(x) / x \in A\}$ a lui φ este o subalgebră a lui B.

Teoremele de izomorfism pentru inele, sau mai general, pentru algebre asociative functionează în mod evident şi pentru algebre nu neapărat asociative. Pentru uşurinta cititorului, le vom enunta explicit mai jos.

2.1. Teoremele de izomorfism pentru K-algebre

TEOREMA I-a DE IZOMORFISM. Fie $\varphi : A \to B$ un morfism de $\mathbb{K}$-algebre. Atunci asocierea $\hat{x} \mapsto \varphi(x)$ defineşte un izomorfism de algebre $\overline{\varphi} : A/\ker\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi$.

TEOREMA A II-a DE IZOMORFISM. Fie A o K-algebră A' o subalgebră a lui A şi I un ideal bilateral al lui A. Atunci $A' + I$ este o subalgebră a lui A, $I \triangleleft A' + I$, $A' \cap I \triangleleft A'$ şi incluziunea canonică $A' \hookrightarrow A' + I$ induce un izomorfism de algebre:

$$A'/A' \cap I \simeq A' + I/I$$

TEOREMA A III-a DE IZOMORFISM. Fie A o $\mathbb{K}$-algebră şi $I \triangleleft A$. Există o corespondentă bijectivă între idealele stîngi (resp. drepte, resp. bilaterale) ale lui A/I şi idealele stîngi (resp. drepte, resp. bilaterale) ale lui A care includ pe I, dată de bijectia $I' \mapsto p^{-1}(I')$, unde $p : A \to A/I$ este morfismul canonic surjectiv, $p(x) = \hat{x}$, bijectia inversă fiind $J \mapsto J/I$. In plus, pentru orice $J \triangleleft A$ cu $I \subset J$, există un izomorfism canonic

$$(A/I)/(J/I) \simeq A/J \,.$$

In cazul cînd o $\mathbb{K}$-algebră A are $\mathbb{K}$-modulul subiacent modul liber, situaţie care apare ori de cîte ori K este un corp, atunci operatia "$\bullet$" din A este perfect determinată de aşa numitele <u>constante de structură</u>. Pentru simplificare vom presupune că baza $\mathbb{K}$-modulului liber subiacent algebrei A este finită $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Pentru fiecare $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, există o familie $(\gamma_{ij}^k)_{1 \leq k \leq n}$ de elemente din $\mathbb{K}$ astfel încît

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k$$

Fie acum $x,y \in A$ şi $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$ coordonatele lui x respectiv y în baza considerată $(e_1,\ldots,e_n)$ adică $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Atunci, tinînd cont de biliniaritatea operatiei "$\cdot$" din $\mathbb{K}$-algebra A, deducem că

$$x \cdot y = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{1\leq i,j\leq n} (x_i y_j)(e_i e_j) = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j \gamma_{ij}^{k}) e_k .$$

Reciproc, dat fiind un $\mathbb{K}$-modul liber A avînd baza finită $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ precum şi o familie triplă $(\gamma_{ij}^{k})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n\\ 1\leq k\leq n}}$ de elemente din $\mathbb{K}$ atunci se deduce imediat că operatia pe A, definită ca mai jos:

$$x \cdot y := \sum_{k=1}^{n} (\sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j \gamma_{ij}^{k}) e_k ,$$

unde $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, şi $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, înzestrează $\mathbb{K}$-modulul A cu o structură de $\mathbb{K}$-algebră, care este unică cu proprietatea că

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} e_k .$$

Elementele $\gamma_{ij}^{k} \in \mathbb{K}$ se numesc <u>constantele de structură</u> ale $\mathbb{K}$-algebrei A. Diverse conditii impuse operatiei de înmultire a algebrei A (e.g. comutativitate, asociativitate, existenta unui element unitate, etc.) se pot exprima evident impunînd conditii adecvate constantelor de structuri. Astfel $\mathbb{K}$-algebra A este comutativă (resp. asociativă) $\gamma_{ij}^{k} = \gamma_{ji}^{k}$ pentru orice $i,j,k \in \{1,2,..,n\}$ (resp. $\sum_{p=1}^{n} \gamma_{ij}^{p} \gamma_{pq}^{r} = \sum_{p=1}^{n} \gamma_{ip}^{r} \gamma_{jq}^{p}$ pentru orice $i,j,q,r \in \{1,2,\dots,n\}$).

Fie A o $\mathbb{K}$-algebră. Se numeşte <u>derivare</u> a lui A orice functie $D : A \longrightarrow A$ care este $\mathbb{K}$-liniară (i.e. $D(x+y) = Dx + Dy$ şi $D(\lambda x) = \lambda Dx$ $\forall$ $x,y \in A$ şi $\forall \lambda \in \mathbb{K}$) şi în plus îndeplineşte conditia următoare:

$$D(x \cdot y) = (Dx) \cdot y + x \cdot (Dy), \quad \forall\ x,y \in A.$$

Dacă notăm cu $Der_{\mathbb{K}}(A)$, sau mai scurt, cu $Der(A)$ multimea tuturor derivărilor $\mathbb{K}$-algebrei A atunci se constată imediat că $Der(A)$ este un $\mathbb{K}$-submodul al $\mathbb{K}$-modulului $Hom_{\mathbb{K}}(A,A)$ al tuturor endomorfismelor $\mathbb{K}$-modulului A. De asemenea, dacă $D \in Der(A)$, atunci $Ker\, D$ este o $\mathbb{K}$-subalgebră a lui A. De exemplu, functia

$$D : K[X] \longrightarrow K[X],$$

$$D(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$$

este o derivare a K-algebrei asociative $K[X]$, numită <u>derivarea formală</u> în $K[X]$.

Avem

$$2 = (D \circ D)(X \circ X) \neq (D \circ D)(X) \cdot X + X \cdot (D \circ D)(X) = 0$$

ori de cîte ori inelul K are caracteristica diferită de 2. Aşadar, compunerea a două derivări ale aceleeaşi K-algebre A nu mai este neapărat o derivare a lui A. Totuşi, dacă $D_1, D_2 \in Der(A)$, atunci croşetul

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

este de asemenea o derivare a lui A, după cum se constată printr-o verificare directă.

Fie $\varphi : K \to L$ un morfism unitar de inele comutative. Atunci morfismul produce doi functori

$$\varphi_* : \underline{L\text{-ALG}} \to \underline{K\text{-ALG}}$$

$$\varphi^* : \underline{K\text{-ALG}} \to \underline{L\text{-ALG}}$$

numiţi <u>functorul de restricţie a scalarilor</u> şi respectiv <u>functorul de extindere a scalarilor</u>. Aceşti functori se definesc pe obiecte astfel:

Dacă $N \in \underline{L\text{-ALG}}$, atunci $\varphi_*(N)$ este K-algebra avînd ca operaţie externă de înmulţire cu scalari din K operaţia

$$\lambda \cdot x := \varphi(\lambda) x \quad (x \in N, \lambda \in K)$$

celelalte două operaţii interne fiind chiar cele din L-algebra N.

Dacă acum $M \in \underline{K\text{-ALG}}$, atunci $\varphi^*(M) = L \otimes_k M$ are o structură de L-modul definită de operaţia externă $\mu_1(\mu_2 \otimes x) = (\mu_1 \mu_2) \otimes x$ iar operaţia de înmulţire din $L \otimes_k M$ este dată de:

$$(\mu_1 \otimes x_1) \cdot (\mu_2 \otimes x_2) = \mu_1 \mu_2 \otimes x_1 x_2,$$

unde $\mu_1, \mu_2 \in L$ şi $x, x_1, x_2 \in M$.

3. ALGEBRE LIE. DEFINITII SI EXEMPLE

Pe parcursul acestui paragraf $\mathbb{K}$ va desemna un inel comutativ ca element unitate 1, $1 \neq 0$.

DEFINITIE. Se numeşte $\mathbb{K}$-algebră Lie o $\mathbb{K}$-algebră $\underline{g}$, al cărui produs $x \cdot y$, notat traditional prin $[x,y]$ sau $[xy]$ satisface în plus următoarele două conditii

(1) $[x,x] = 0$

(2) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0, \quad \forall\, x,y,z \in \underline{g}$.

Elementul $[x,y]$ se numeşte croşetul sau comutatorul elementelor x şi y. Conditia (1) exprimă faptul că apliatia $\mathbb{K}$-biliniară $\underline{g} \times \underline{g} \to \underline{g}$, $(x,y) \longmapsto [x,y]$ este alternată, iar conditia (2) este cunoscută sub numele de identitatea lui Jacobi.

Orice $\mathbb{K}$-algebră $\underline{g}$ care satisface doar conditia (1) de mai sus satisface şi conditia

(1)' $[x,y] = -[y,x], \quad \forall\, x,y \in \underline{g}$

care se exprimă spunînd că croşetul este o operatie antisimetrică. Intr-adevăr, avem

$$0 = [x+y,\ x+y] = [x,x+y] + [y,x+y] = [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] = [x,y] + [y,x]$$

de unde (1)'.

O $\mathbb{K}$-algebră care satisface doar conditia (1) din definitia de mai sus se numeşte anticomutativă.

Să notăm că, în general, din (1)' nu rezultă neapărat (1). Intr-adevăr, făcînd în (1)' $x = y$ obtinem $[x,x] + [x,x] = 0$, de unde nu putem trage concluzia că $[x,x] = 0$. Totuşi, dacă $1 + 1 = 2$ este un element inversabil în inelul $\mathbb{K}$, în particular dacă $\mathbb{K}$ este un corp de caracteristică diferită de 2, atunci orice $\mathbb{K}$-algebră $\underline{g}$ satisfăcînd conditia (1)' satisface şi conditia (1), deci este anticomutativă.

Notiunile şi constructiile generale prezentate în paragraful precedent pentru $\mathbb{K}$-algebre oarecare au sens şi se pot executa şi în categoria $\mathbb{K}$-LIE, a tuturor $\mathbb{K}$-algebrelor Lie, care este o subcategorie plină a categoriei $\mathbb{K}$-ALG a tuturor $\mathbb{K}$-algebrelor.

Pentru uşurinta cititorului transcriem în notatia traditională a croşetului definiția notiunii de morfism de $\mathbb{K}$-algebre Lie şi de derivare a unei $\mathbb{K}$-algebre Lie. O aplicatie $\mathbb{K}$-liniară $\varphi : \underline{g} \to \underline{g}'$ între $\mathbb{K}$-algebrele Lie $\underline{g}$ şi $\underline{g}'$ se zice că este un morfism de algebre Lie dacă φ comută cu croşetele, adică

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad \forall\, x,y \in \underline{g}.$$

Prin derivare a $\mathbb{K}$-algebrei Lie $\underline{g}$ se înțelege orice aplicatie $\mathbb{K}$-liniară $D : \underline{g} \to \underline{g}$ care satisface conditia următoare:

$$D([x,y]) = [Dx,y] + [x,Dy], \quad \forall\, x,y \in \underline{g}$$

Dacă $\underline{g} \in \underline{K\text{-}LIE}$, atunci şi $\underline{g}^{op} \in \underline{K\text{-}LIE}$, iar aplicatia $x \mapsto -x$ este un izomorfism de algebre Lie al lui $\underline{g}$ pe $\underline{g}^{op}$.

Dacă $\underline{g}$ este o $\mathbb{K}$-algebră Lie, atunci este clar că orice subalgebră şi algebră factor a lui $\underline{g}$ este tot o algebră Lie. De asemenea, produsul direct al oricărei familii de $\mathbb{K}$-algebra Lie este o $\mathbb{K}$-algebră Lie.

Să notăm că o $\mathbb{K}$-algebră Lie $\underline{g}$ are element unitate e dacă şi numai dacă $\underline{g}$ este algebra Lie nulă. Intr-adevăr, în acest caz, avem $[e, e] = 0 = e$, de unde rezultă că $x = [x, e] = [x, 0] = 0$ pentru orice $x \in \underline{g}$, deci $\underline{g} = \{0\}$.

DEFINITIE. Spunem că două elemente x,y ale unei $\mathbb{K}$-algebre Lie $\underline{g}$ sînt <u>permutabile</u> dacă $[x,y] = 0$. Algebra Lie $\underline{g}$ se zice <u>comutativă</u> dacă orice două elemente ale sale sînt permutabile.

Evident, orice $\mathbb{K}$-modul E se poate înzestra în mod unic cu o structură de $\mathbb{K}$-algebră Lie comutativă, punînd $[x,y] = 0$ pentru orice $x,y \in E$. De asemenea, dacă $\underline{g}$ este o $\mathbb{K}$-algebră Lie, şi $x \in \underline{g}$, atunci $\mathbb{K}x$ este o subalgebră comutativă a lui $\underline{g}$.

3.1. Exemple de algebre Lie

1) Fie A o $\mathbb{K}$-algebră asociativă (nu neapărat unitară). Pe $\mathbb{K}$-modulul subiacent al algebrei A definim operatia algebrică $[x,y] = x \cdot y - y \cdot x$, unde "$\cdot$" desemnează

operatia de înmultire dată din K-algebra A. Se verifică imediat că fată de această operație algebrică K-modulul A devine o K-algebră Lie, pe care o vom nota în continuare prin A^-. Este clar că algebra asociativă A este comutativă dacă şi numai dacă algebra Lie A^- este comutativă.

2) Fie E un K-modul arbitrar şi $A = End_k(E)$ K-algebra (asociativă) a tuturor K-endomorfismelor lui E. Algebra Lie A^- asociată K-algebrei asociative se notează cu $\underline{gl}_k(E)$, sau mai simplu, cu $\underline{gl}(E)$ şi se numeşte algebra generală liniară asociată K-modulului E. In cazul în care E este un K-modul liber de rang n, în particular dacă $E = K^n$, atunci K-algebra $End_k(E)$ este (necanonic) izomorfă cu K-algebra $M_n(K)$ a tuturor matricilor pătratice de ordin n cu intrări în inelul K; K-algebra Lie $M_n(K)^-$ asociată K-algebrei asociative $M_n(K)$ se notează cu $\underline{gl}(n,K)$.

3) Orice subalgebră a unei algebre Lie de forma $\underline{gl}_k(E)$ sau $\underline{gl}(n,K)$ este evident o algebră Lie, numită algebră Lie liniară. In particular obtinem următoarele exemple de algebre Lie:

i) Pentru orice K-algebră A, $Der_k(A)$ este o subalgebră a lui $\underline{gl}_k(A)$ (vezi § 2), deci $Der_k(A)$ este o K-algebră Lie, numită algebra Lie a derivărilor algebrei A.

ii) Dacă E este un K-modul liber de rang finit, atunci multimea

$$\{u \mid u \in End_k(E),\ Tr(u) = 0\}$$

a tuturor K-endomorfismelor lui E de urmă nulă, este o subalgebră a lui $\underline{gl}_k(E)$ după cum se constată imediat (căci $Tr(u \circ v) = Tr(v \circ u)$ pentru orice $u, v \in End_k(E)$), deci este o K-algebră Lie, numită algebra specială liniară asociată K-modulului E şi notată $\underline{sl}_k(E)$ sau mai scurt, $\underline{sl}(E)$.

Varianta matricială a lui $\underline{sl}_k(E)$ este subalgebra Lie

$$\underline{sl}(n,k) = \{U \in \underline{gl}(n,k) / Tr(U) = 0\}$$

a algebrei Lie $\underline{gl}(n,K)$.

iii) Să considerăm K-algebra Lie $\underline{gl}(n,K)$ unde n este un număr natural ≥ 2. Reamintim că o matrice $U = (a_{ij}) \in M_n(K)$ se zice superior triangulară (respectiv strict superior triangulară) dacă $a_{ij} = 0$ pentru orice $i > j$ (respectiv $a_{ij} = 0$ pentru orice $i \geq j$).

Notăm

$$\underline{t}(n,K) = \left\{ U \in M_n(K) / U \text{ este superior triangulară} \right\}$$

$$\underline{n}(n,K) = \left\{ U \in M_n(K) / U \text{ este strict superior triangulară} \right\}$$

$$\underline{\delta}(n,K) = \left\{ U \in M_n(K) / U \text{ este diagonală} \right\}$$

Este clar că $\underline{t}(n,K)$, $\underline{n}(n,K)$ şi $\underline{\delta}(n,K)$ sînt subalgebre ale lui $\underline{gl}(n,K)$, deci ele sînt algebre Lie.

4) Fie K un corp comutativ. Ne propunem să determinăm toate K-algebrele de dimensiune ≤ 2, care sînt şi anticomutative. Reamintim că o K-algebră A se zice anticomutativă dacă $[x,x] = 0$ pentru orice $x \in A$, unde prin $[x,y]$ am notat produsul a două elemente din A.

Dacă $\dim_k A = 1$, atunci există $e \in A$, $e \neq 0$, astfel încît $A = Ke$. Deci, dacă $x,y \in A$, atunci $x = ae$, $y = be$ cu $a,b \in K$, de unde $[x,y] = [ae,be] = ab\,[e,e] = 0$. Rezultă că A este o algebră Lie comutativă.

Dacă $\dim_k A = 2$, fie $\{e_1,e_2\}$ o K-bază a lui A. Fie $x,y \in A$; atunci $x = a_1e_1 + a_2e_2$ şi $y = b_1e_1 + b_2e_2$ cu $a_1,a_2,b_1,b_2 \in K$, deci

$$(*) \quad [x,y] = [a_1e_1+a_2e_2,\ b_1e_1+b_2e_2] = (a_1b_2 - a_2b_1)\,[e_1,e_2] .$$

Există două posibilităţi: (i) $[e_1,e_2] = 0$, în care caz avem $[x,y] = 0$ pentru orice $x,y \in A$, deci A este chiar o algebră Lie comutativă; sau (ii) $[e_1,e_2] \neq 0$.

Dacă $[e_1,e_2] \neq 0$, notăm $f_1 = [e_1,e_2]$ şi alegem un vector $f_2 \in A \setminus Kf_1$. Cum $\dim_K A = 2$ rezultă că $\{f_1,f_2\}$ este o K-bază a lui A. Din relatia $(*)$ deducem că pentru orice $x,y \in A$, $\exists \lambda \in K$ astfel încît $[x,y] = \lambda f_1$. In particular există $\lambda_0 \in K$ cu $[f_1,f_2] = \lambda_0 f_1$. Inlocuind acum pe f_2 cu $\lambda_0^{-1} f_2$, ($\lambda_0 \neq 0$ căci astfel $[f_1,f_2] = 0$, deci $[e_1,e_2] = 0$, absurd), deducem că algebra anticomutativă A admite o bază $\{g_1,g_2\}$ astfel încît

$$[g_1,g_2] = g_1, \quad [g_1,g_1] = 0, \quad [g_2,g_2] = 0, \quad [g_2,g_1] = -g_1$$

Rezultă că pentru orice $x = a_1 g_1 + a_2 g_2$, $y = b_1 g_1 + b_2 g_2$ din A, cu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{K}$, produsul $[x,y]$ este definit prin

$$(**) \qquad [x,y] = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, g_1 \,.$$

Se verifică imediat identitatea lui Jacobi în A. Deci $\mathbb{K}$-algebra anticomutativă A este în fond o algebră Lie (necomutativă).

Aşadar pe orice $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial V de dimensiune 2 există exact două structuri de algebră Lie: una comutativă şi cealaltă necomutativă, croşetul în acest ultim caz fiind dat de relaţia $(**)$, unde $\{g_1, g_2\}$ este o bază în V.

4. DERIVARI INTERIOARE SI IDEALE CARACTERISTICE

Fie A o $\mathbb{K}$-algebră asociativă şi $a \in A$. Aplicatia $a_L : A \to A$, $a_L(x) = ax$, numită omotetia la stînga a lui A definită de a este un element al lui $End_k(A)$, care joacă un rol important în studiul proprietătilor lui A. Astfel, asocierea $a \mapsto a_L$ defineşte un morfism injectiv de $\mathbb{K}$-algebre **unitare**

$$A \longrightarrow End_k(A)$$

ceea ce arată că orice $\mathbb{K}$-algebră asociativă A este izomorfă cu o subalgebră a algebrei $End_k(A)$, rezultat simplu care este corespondentul teoremei lui Cayley din teoria grupurilor: orice grup G este izomorf cu un subgrup al grupului permutărilor $\mathfrak{S}_G$ al multimii G. Mentionăm că un rezultat similar funcționează şi pentru algebrele Lie: orice algebră Lie peste un corp $\mathbb{K}$, de dimensiune finită peste $\mathbb{K}$ este izomorfă cu o subalgebră a unei algebre Lie generale liniare $\underline{gl}_k(E)$, adică cu o anumită algebră Lie liniară. Acest rezultat este datorat lui ADO (în cazul corpurilor $\mathbb{K}$ de caracteristică nulă) şi lui IWASAWA (în cazul corpurilor de caracteristică nenulă). Spre deosebire de cazul grupurilor sau al algebrelor asociative, demonstratia teoremei ADO-IWASAWA este destul de laborioasă.

Revenind acum la $\mathbb{K}$-algebra asociativă A, şi considerăm şi omotetia la dreapta definită de un element fixat $a \in A$,

$$a_R : A \longrightarrow A, \quad a_R(x) = xa$$

Este clar că $a_R \in End_K(A)$, deci $D_a = a_L - a_R \in End_K(A)$. Cum $D_a(x) = ax - xa$, $\forall x \in A$, din egalitatea

$$axy - xya = (ax - xa)y + x(ay - ya)$$

deducem că D_a este o derivare a $\mathbb{K}$-algebrei asociative A, numită derivare interioară a lui A definită de elementul a.

Prin analogie, luînd în considerare modul prin care unei algebre asociative A i se asociază algebra Lie A^-, vom defini notiunea de derivare interioară a unei algebre Lie arbitrare.

Fie deci $\underline{g}$ o K-algebră Lie şi x un element fixat din $\underline{g}$; functia

$$\underline{g} \longrightarrow \underline{g},$$

definită prin $y \longmapsto [x,y]$ se notează cu $ad_{\underline{g}} x$ sau, atunci cînd nu este nici un pericol de confuzie, prescurtat prin adx şi se numeşte aplicatia liniară adjunctă lui x sau derivarea interioară a lui $\underline{g}$ definită de elementul x. Functia adx este într-adevăr o derivare a lui $\underline{g}$ conform propozitiei care urmează:

4.1. PROPOZITIE. Fie $\underline{g}$ o K-algebră Lie. Atunci au loc următoarele afirmatii:

i) Pentru orice $x \in \underline{g}$, adx este o derivare a algebrei $\underline{g}$.

ii) Aplicatia $x \longmapsto adx$ este un morfism de algebre Lie

$$ad : \underline{g} \longrightarrow \underline{gl}_K(\underline{g})$$

iii) Pentru orice $x \in \underline{g}$ are loc egalitatea $[D,adx] = ad(Dx)$ unde croşetul $[D,adx]$ se efectuează în algebra Lie $Der_K(\underline{g})$ a derivărilor lui $\underline{g}$.

DEMONSTRATIE. (i) Avem de probat că

$$(adx)[y,z] = [(adx)(y),z] + [y,(adx)(z)]$$

adică

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$$

pentru orice $y,z \in \underline{g}$.

Dar

$$[[x,y],z] = -[z,[x,y]], \quad [y,[x,z]] = -[y,[z,x]]$$

şi

$$[x,[y,z]] = -[y,[z,x]] - [z,[x,y]]$$

conform identitătii lui Jacobi; de unde (i).

(iii) Conform definitiei croşetului în algebra $Der_K(\underline{g})$, avem $[D,adx] = D \circ adx - adx \circ D$, deci dacă $z \in \underline{g}$, atunci

$$[D,\mathrm{ad}x](z) = (D \circ \mathrm{ad}x - \mathrm{ad}x \circ D)(z) = D((\mathrm{ad}x)(z)) - (\mathrm{ad}x)(Dz) =$$

$$= D([x,z]) - [x,Dz] = [Dx,z] + [x,Dz] - [x,Dz] = [Dx,z] = (\mathrm{ad}(Dx))(z).$$

Rezultă că $[D,\mathrm{ad}x] = \mathrm{ad}(Dx)$.

(ii) Evident, $\mathrm{ad} : \underline{g} \to \underline{gl}_k(\underline{g})$ este o aplicatie liniară. Pentru a fi morfism de algebre Lie trebuie probat că

$$\mathrm{ad}\,[y,x] = [\mathrm{ad}y,\mathrm{ad}x]$$

pentru orice $x,y \in \underline{g}$.

Este suficient ca în (iii) să punem $D = \mathrm{ad}y$; obținem

$$[\mathrm{ad}y,\mathrm{ad}x] = [D,\mathrm{ad}x] = \mathrm{ad}(Dx) = \mathrm{ad}((\mathrm{ad}y)(x)) = \mathrm{ad}([y,x]).$$

Aplicația $\mathrm{ad}_{\underline{g}} : \underline{g} \to \underline{gl}_K(\underline{g})$ se numeşte reprezentarea adjunctă a algebrei Lie $\underline{g}$. Din 4.1. i) rezultă că imaginea $\mathrm{ad}_{\underline{g}}(\underline{g})$ a morfismului $\mathrm{ad}_{\underline{g}}$ este o subalgebră notată $\mathrm{Int}(\underline{g})$ a algebrei Lie $\mathrm{Der}_K(\underline{g})$ a derivărilor lui $\underline{g}$. Din 4.1 iii) deducem că de fapt $\mathrm{Int}(\underline{g})$ este chiar un ideal al algebrei $\mathrm{Der}_K(\underline{g})$.

Nucleul $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_{\underline{g}})$ al morfismului $\mathrm{ad}_{\underline{g}}$ este un ideal al algebrei $\underline{g}$. El se notează cu $Z(\underline{g})$ şi se numeşte centrul algebrei $\underline{g}$. Avem

$$Z(\underline{g}) = \{ x \in \underline{g} \,/\, \mathrm{ad}_{\underline{g}} x = 0 \} = \{ x \in \underline{g} \,/\, [x,y] = 0 \ \forall\, y \in \underline{g} \}$$

Evident $\underline{g}$ este o algebră Lie comutativă $\Leftrightarrow \underline{g} = Z(\underline{g})$. Reprezentarea adjunctă:

$$\mathrm{ad}_{\underline{g}} : \underline{g} \longrightarrow \underline{gl}_k(\underline{g})$$

este o reprezentare liniară a K-algebrei Lie $\underline{g}$, prin reprezentare liniară a K-algebrei Lie $\underline{g}$ înțelegîndu-se orice morfism de algebre Lie

$$\varrho : \underline{g} \to \underline{gl}_k(E),$$

unde E este un K-modul arbitrar. K-modulul E se numeşte modulul reprezentării iar în cazul în care K este un corp, reprezentarea ϱ se numeşte de grad finit dacă E este un spatiu vectorial finit dimensional.

Fie $\underline{g}$ o K-algebră Lie. Deoarece $[x,y] = -[y,x]$ pentru orice $x,y \in \underline{g}$ rezultă că nu există nici o deosebire între idealele stîngi, drepte și bilaterale ale lui $\underline{g}$; ele vor fi numite <u>ideale</u>. Așadar un <u>ideal</u> al algebrei $\underline{g}$ este un K-submodul $\underline{a}$ al lui $\underline{g}$ pentru care $[x,a] \in \underline{a}$ pentru orice $x \in \underline{g}$ și $a \in \underline{a}$; dar $[x,a] = (ad_{\underline{g}}x)(a)$, deci condiția $[x,a] \in \underline{a}$ pentru $x \in \underline{g}$ și orice $a \in \underline{a}$ se poate retranscrie astfel: $(ad_{\underline{g}}x)(\underline{a}) \subset \underline{a}$ pentru orice $x \in \underline{g}$. Rezultă că idealele lui $\underline{g}$ sînt exact K-submodulele lui $\underline{g}$ invariante la orice derivare interioară a lui $\underline{g}$. Dacă $\underline{a}$ este un ideal al lui $\underline{g}$ vom consemna aceasta prin notația $\underline{a} \triangleleft \underline{g}$.

Prin analogie cu noțiunea de subgrup caracteristic al unui grup se poate introduce noțiunea de ideal caracteristic al unei algebre Lie. Reamintim că un <u>subgrup caracteristic</u> al unui grup G este un subgrup H invariant la orice automorfism al lui G, i.e. $f(H) \subset H$ pentru orice $f \in Aut(G)$. Evident, orice subgrup caracteristic al unui grup G este un subgrup normal al lui G, căci $f(H) = aHa^{-1} \subset H$ pentru orice automorfism interior f_a al lui G ($f_a(x) = axa^{-1}$, $\forall\, x \in G$).

Trecînd acum de la grupuri la algebre Lie și făcînd înlocuirile:

automorfism interior $\longrightarrow$ derivare interioară

automorfism $\longrightarrow$ derivare

obținem noțiunea de ideal caracteristic al unei algebre Lie. Mai precis, avem următoarea

DEFINIȚIE. Fie $\underline{a}$ o submulțime a unei K-algebra Lie $\underline{g}$. $\underline{a}$ se numește <u>ideal caracteristic</u> al lui $\underline{g}$ dacă $\underline{a}$ este K-submodul al lui $\underline{g}$ și $D(\underline{a}) \subset \underline{a}$ pentru orice $D \in Der_K(\underline{g})$. In acest caz vom folosi notația $\underline{a} \triangleleft_c \underline{g}$.

Evident, orice ideal caracteristic al lui $\underline{g}$ este ideal al lui $\underline{g}$ (căci $Int(\underline{g}) \subset Der_k(\underline{g})$) dar nu și reciproc, după cum arată următorul exemplu:

Fie $L = \mathbb{Q}[X]$ $\mathbb{Q}$-algebra asociativă a polinoamelor peste Q în nedeterminata X, și $\underline{g} = L^-$ algebra Lie asociată . Considerăm idealul principal $(X) = \{Xf \mid f \in L\}$ al lui L generat de X. Cum $\underline{g}$ este o algebră Lie comutativă, rezultă că (X) nu este un ideal caracteristic al lui $\underline{g}$ căci dacă D este derivarea uzuală în Q-algebra asociativă L, $D(a_nX^n + \dots + a_1X + a_0) = na_nX^{n-1} + \dots + a_1$, atunci este clar că D este și o derivare în

$\underline{g}$. Cum $DX = 1 \notin (X)$, deducem că (X) este un ideal al lui $\underline{g}$ care nu este ideal caracteristic.

Anumite proprietăti ale subgrupurilor caracteristice au loc şi pentru idealele caracteristice.

4.2. PROPOZITIE. Fie $\underline{g}$ o algebră Lie, $\underline{a}$ un ideal (resp. ideal caracteristic) al lui $\underline{g}$ şi $\underline{b}$ un ideal caracteristic al algebrei Lie $\underline{a}$. Atunci $\underline{b}$ este un ideal (resp. ideal caracteristic) al algebrei $\underline{g}$. Mai concentrat, au loc implicatiile

$$\underline{b} \triangleleft_c \underline{a} \triangleleft \underline{g} \Rightarrow \underline{b} \triangleleft \underline{g}$$

$$\underline{b} \triangleleft_c \underline{a} \triangleleft_c \underline{g} \Rightarrow \underline{b} \triangleleft_c \underline{g}$$

DEMONSTRATIE. Fie $D \in \mathrm{Int}(\underline{g})$ (resp. $D \in \mathrm{Der}(\underline{g})$). Atunci $D(\underline{a}) \subset \underline{a}$, deci restrictia $D/\underline{a}$ a lui D la $\underline{a}$ este o K-derivare (care nu este neapărat interioară!) a algebrei $\underline{a}$. Cum $\underline{b} \triangleleft_c \underline{a}$, rezultă că $(D/\underline{a})(\underline{b}) = D(\underline{b}) \subset \underline{b}$, deci $\underline{b} \triangleleft \underline{g}$ (resp. $\underline{b} \triangleleft_c \underline{g}$).

Rezultă că proprietatea unui K-submodul al unei K-algebre Lie $\underline{g}$ de a fi ideal caracteristic, spre deosebire de cea de a fi numai ideal, este o proprietate tranzitivă.

Cititorul poate verifica imediat că dacă $\underline{a}$ şi $\underline{b}$ sînt două ideale (resp. ideal caracteristice) în algebra Lie $\underline{g}$, atunci $\underline{a} + \underline{b}$ şi $\underline{a} \cap \underline{b}$ sînt şi ele ideale (resp. ideale caracteristice) în $\underline{g}$.

Fie acum $\underline{a}$ şi $\underline{b}$ două K-submodule ale K-algebrei Lie $\underline{g}$. Vom nota prin $[\underline{a},\underline{b}]$ K-submodulul lui $\underline{g}$ generat de toate elementele lui $\underline{g}$ de forma $[x,y]$, cu $x \in \underline{a}$ şi $y \in \underline{b}$. Tinînd cont de cum arată elementele submodulului generat de o submultime şi de proprietătile croşetului, obtinem:

$$[\underline{a},\underline{b}] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i] \,/\, n \in N^*,\ x_i \in \underline{a},\ y_i \in \underline{b},\ \forall\, i,\ 1 \le i \le n \right\}$$

$$[\underline{a},\underline{b}] = [\underline{b},\underline{a}]$$

4.3. PROPOZITIE. Fie $\underline{a}$ şi $\underline{b}$ ideale (resp. ideale caracteristice) ale algebrei Lie $\underline{g}$. Atunci $[\underline{a},\underline{b}]$ este un ideal (resp. ideal caracteristic) al lui $\underline{g}$.

DEMONSTRATIE. Fie $D \in Int(\underline{g})$ (resp. $D \in Der(\underline{g})$). Dacă $x \in \underline{a}$ şi $y \in \underline{b}$, atunci

$$D([x,y]) = [Dx,y] + [x,Dy] \in [\underline{a},\underline{b}],$$

de unde concluzia.

Fie $\underline{g}$ o algebră Lie şi M, N două submulţimi nevide ale lui $\underline{g}$. Definim <u>cîtul</u> (M : N) al lui M prin N astfel:

$$(M : N) = \{x \in \underline{g} \,/\, [x,y] \in M, \forall\, y \in N\}.$$

4.4. PROPOZITIE. Fie $\underline{a}$ şi $\underline{b}$ ideale (resp. ideale caracteristice) ale algebrei Lie $\underline{g}$. Atunci $(\underline{a} : \underline{b})$ este un ideal (resp. ideal caracteristici) al lui $\underline{g}$.

DEMONSTRATIE. Fie $D \in Int(\underline{g})$ (resp. $D \in Der(\underline{g})$) şi $x \in (\underline{a} : \underline{b})$. Pentru orice $y \in \underline{b}$ avem

$$[Dx,y] = D([x,y]) - [x,Dy] \in \underline{a}$$

căci $[x,y] \in \underline{a}$ deci $D([x,y]) \in \underline{a}$ şi $Dy \in \underline{b}$ deci $[x,Dy] \in \underline{a}$. Rezultă că $Dx \in (\underline{a};\underline{b})$, deci $(\underline{a};\underline{b}) \triangleleft \underline{g}$ (resp. $(\underline{a};\underline{b}) \triangleleft_c \underline{g}$).

Luînd în particular pe postul lui $\underline{a}$ idealul nul 0 al lui $\underline{g}$ obtinem că pentru orice ideal (resp. ideal caracteristic) $\underline{b}$ al lui $\underline{g}$, $(0;\underline{b})$ este un ideal (resp. ideal caracteristic) al lui $\underline{g}$. Acest ideal se numeşte <u>centralizatorul</u> idealului $\underline{b}$ în $\underline{g}$ şi se notează uneori şi cu $C_{\underline{g}}(\underline{b})$. Dacă $\underline{b} = \underline{g}$, atunci $C_{\underline{g}}(\underline{g})$ este exact centrul $Z(\underline{g})$ al lui $\underline{g}$, şi aceasta este un ideal caracteristic al lui $\underline{g}$ căci $0 \triangleleft_c \underline{g}$ şi $\underline{g} \triangleleft_c \underline{g}$.

Mai general, dacă N este o submultime nevidă arbitrară a lui $\underline{g}$ atunci multimea:

$$(0 : N) = \{x \in \underline{g} \,/\, [x,y] = 0, \ \forall\, y \in N\}$$

se numeşte <u>centralizatorul</u> lui N în $\underline{g}$. Este uşor de văzut că (0 : N) este o subalgebră a lui $\underline{g}$.

Dacă acum M este un $\mathbb{K}$-submodul al lui $\underline{g}$, atunci se verifică uşor folosind identitatea lui Jacobi că mulţimea (M : M) este o subalgebră a lui $\underline{g}$ numită <u>normalizatorul</u> lui M în $\underline{g}$. Această subalgebră se mai notează cu $N_{\underline{g}}(M)$. Dacă M este o subalgebră a lui $\underline{g}$ atunci se observă imediat că $M \subset (M : M)$ şi M este un ideal al lui $(M : M)$. De fapt, normalizatorul $(M : M)$ al subalgebrei M este cea mai mare subalgebră a lui $\underline{g}$ care include pe M ca ideal.

5. SERII DE IDEALE INTR-O ALGEBRA LIE

Fie $\underline{g}$ o K-algebră Lie. Idealul caracteristic $[\underline{g},\underline{g}]$ al lui $\underline{g}$ se notează cu $\mathcal{D}\underline{g}$ sau cu $\underline{g}^{(1)}$ şi se numeşte idealul derivat (sau idealul comutator al) algebrei $\underline{g}$; el este corespondentul noţiunii de subgrup comutator din teoria grupurilor.

Este clar că dacă $\underline{a}$ este un K-submodul al lui $\underline{g}$ şi $\mathcal{D}\underline{g} \subset \underline{a}$, atunci $\underline{a}$ este un ideal al lui $\underline{g}$, căci $[\underline{a},\underline{g}] \subset [\underline{g},\underline{g}] \subset \underline{a}$.

Cum $\underline{g}$ este evident un ideal caracteristic al lui $\underline{g}$, din 4.3 deducem că $\mathcal{D}\underline{g} \lhd_c \underline{g}$; apoi $\mathcal{D}(\mathcal{D}\underline{g}) \lhd_c \mathcal{D}\underline{g}$, deci utilizînd 4.2, obţinem că $\mathcal{D}(\mathcal{D}\underline{g}) \lhd_c \underline{g}$. Idealul caracteristic $\mathcal{D}(\mathcal{D}\underline{g})$ al lui $\underline{g}$ se notează cu $\mathcal{D}^2\underline{g}$. Putem continua această operaţie, definind $\mathcal{D}^3\underline{g} = \mathcal{D}(\mathcal{D}^2\underline{g})$ care este de asemenea un ideal caracteristic al lui $\underline{g}$, s.a.m.d. Am obţinut în acest fel aşa numita serie derivată a algebrei $\underline{g}$. Mai precis:

DEFINITIE. Seria derivată a algebrei Lie $\underline{g}$ este lanţul descendent de ideale caracteristice ale lui $\underline{g}$:

$$\mathcal{D}^0\underline{g} \supset \mathcal{D}^1\underline{g} \supset \mathcal{D}^2\underline{g} \supset \ldots \supset \mathcal{D}^n\underline{g} \supset \mathcal{D}^{n+1}\underline{g} \supset \ldots$$

definit recurent în modul următor:

$$\mathcal{D}^0\underline{g} = \underline{g} \quad \text{şi} \quad \mathcal{D}^{n+1}\underline{g} = [\mathcal{D}^n\underline{g}, \mathcal{D}^n\underline{g}] = \mathcal{D}(\mathcal{D}^n\underline{g}), \quad n \in \mathbb{N}$$

Idealul $\mathcal{D}^n\underline{g}$ al lui $\underline{g}$ se numeşte idealul derivat de ordin n al lui $\underline{g}$.

Uneori, în loc de notaţia $\mathcal{D}^n\underline{g}$ se foloseşte notaţia $\underline{g}^{(n)}$.

In mod analog se poate defini o altă serie de ideale caracteristice ale algebrei $\underline{g}$:

DEFINITIE. Seria centrală descendentă (sau inferioară) a algebrei Lie $\underline{g}$ este lanţul descendent de ideale caracteristice ale lui $\underline{g}$:

$$\mathcal{C}^0\underline{g} \supset \mathcal{C}^1\underline{g} \supset \mathcal{C}^2\underline{g} \supset \ldots \supset \mathcal{C}^n\underline{g} \supset \mathcal{C}^{n+1}\underline{g} \supset \ldots$$

definit recurent în modul următor:

$$\mathcal{C}^0\underline{g} = \underline{g} \quad \text{şi} \quad \mathcal{C}^{n+1}\underline{g} = [\underline{g}, \mathcal{C}^n\underline{g}], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uneori, în loc de notatia $\mathscr{C}^n \underline{g}$ se foloseşte notatia $\underline{g}^n$.

Faptul că $\mathscr{C}^n \underline{g} \triangleleft_c \underline{g}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ rezultă ca şi mai sus utilizînd 4.2 şi 4.3.

Este clar că $\mathscr{D}^n \underline{g} \subset \mathscr{C}^n \underline{g}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Folosind cele două serii descrise mai sus se pot defini conceptele foarte importante de algebră Lie rezolubilă şi algebră Lie nilpotentă.

DEFINITIE. O $\mathbb{K}$-algebră Lie $\underline{g}$ se numeşte <u>rezolubilă</u> (resp. <u>nilpotentă</u>) dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $\mathscr{D}^n \underline{g} = 0$ (resp. $\mathscr{C}^n \underline{g} = 0$).

Evident, cum $\mathscr{D}^m \underline{g} \subset \mathscr{C}^m \underline{g}$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$, rezultă că orice algebră Lie nilpotentă este şi rezolubilă. Proprietătile generale ale algebrelor Lie rezolubile şi nilpotente vor fi date în Capitolul 1.

Definitia notiunii de rezolubilitate pentru algebre Lie imită notiunea corespunzătoare din teoria grupurilor, datorată lui Abel şi Galois. In contrast cu aceasta, notiunea de grup nilpotent este mult mai recentă decît cea de grup rezolubil şi este inspirată de notiunea corespunzătoare de algebră Lie nilpotentă.

După cum se va vedea în continuare în paragraful de fată ca şi în Capitolul 1, există o analogie frapantă între proprietătile generale ale algebrelor Lie rezolubile (resp. nilpotente) şi proprietătile corespondente ale grupurilor rezolubile (resp. nilpotente).

In teoria grupurilor este definită notiunea de serie centrală ascendentă a unui grup, inspirată de notiunea de serie centrală ascendentă a unei algebre Lie pe care o vom prezenta în continuare. Pentru aceasta avem nevoie de următoarea

5.1. LEMA. Fie $\underline{g}$ o $\mathbb{K}$-algebră Lie, $\underline{b} \triangleleft_c \underline{g}$, $\underline{g}' = \underline{g}/\underline{b}$ şi $p : \underline{g} \to \underline{g}'$ epimorfismul canonic $p(x) = \hat{x}$, $\forall\, x \in \underline{g}$. Atunci, pentru orice $\underline{a}' \triangleleft_c \underline{g}'$, avem $p^{-1}(\underline{a}') \triangleleft_c \underline{g}$.

DEMONSTRATIE. Notăm $\underline{a} = p^{-1}(\underline{a}')$. Este clar că $\underline{a}$ este un $\mathbb{K}$-submodul al lui $\underline{g}$. Pentru a arăta că $\underline{a} \triangleleft_c \underline{g}$ vom proba că pentru orice $D \in \mathrm{Der}(\underline{g})$, avem $D(\underline{a}) \subset \underline{a}$. Fie $D \in \mathrm{Der}(\underline{g})$. Cum $D(\underline{b}) \subset \underline{b}$ căci $\underline{b} \triangleleft_c g$ endomorfismul D al $\mathbb{K}$-modulului $\underline{g}$ induce un endomorfism D' al $\mathbb{K}$-modulului $\underline{g}' = \underline{g}/\underline{b}$

$$D' : \underline{g}' \to \underline{g}', \quad D'\hat{x} = \widehat{Dx}, \quad \forall\, x \in \underline{g}.$$

Dar $D' \in \mathrm{Der}(\underline{g}')$, căci pentru orice $x,y \in \underline{g}$ avem

$$D'([\hat{x},\hat{y}]) = D'(\widehat{[x,y]}) = \widehat{D([x,y])} = \widehat{[Dx,y]} + \widehat{[x,Dy]} =$$

$$= [\widehat{Dx},\hat{y}] + [\hat{x},\widehat{Dy}] = [D'\hat{x},\hat{y}] + [\hat{x},D'\hat{y}].$$

Arătăm acum că $Dx \in \underline{a}$ pentru orice $x \in \underline{a}$; cum $x \in \underline{a}$, rezultă că $p(x) = \hat{x} \in \underline{a}'$, deci $D'\hat{x} \in \underline{a}'$ căci $D' \in \mathrm{Der}(\underline{g}')$ și $\underline{a}' \triangleleft_c \underline{g}'$. Deducem că $\widehat{Dx} \in \underline{a}'$, adică $p(Dx) \in \underline{a}'$, cu alte cuvinte $Dx \in p^{-1}(\underline{a}') = \underline{a}$. Așadar $\underline{a} \triangleleft_c \underline{g}$.

Sîntem acum în măsură să dăm următoarea

DEFINITIE. Seria centrală ascendentă (sau superioară) a algebrei Lie $\underline{g}$ este lanțul ascendent de ideale caracteristice ale lui g:

$$\mathscr{C}_0\underline{g} \subset \mathscr{C}_1\underline{g} \subset \mathscr{C}_2\underline{g} \subset \dots \subset \mathscr{C}_n\underline{g} \subset \mathscr{C}_{n+1}\underline{g} \subset \dots$$

definit în mod necuvenit astfel:

$\mathscr{C}_0\underline{g} = \{0\}$ și $\mathscr{C}_{n+1}\underline{g}$ este imaginea inversă a centrului algebrei cît $\underline{g}/\mathscr{C}_n\underline{g}$ prin epimorfismul canonic $\underline{g} \to \underline{g}/\mathscr{C}_n\underline{g}$.

Faptul că $\mathscr{C}_n\underline{g} \triangleleft_c g$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ rezultă prin inducție, utilizînd 5.1 și 4.2.

Să notăm că $\mathscr{C}_1\underline{g}$ este tocmai centrul $Z(\underline{g})$ al algebrei $\underline{g}$.

Analog cu ceea ce se întîmplă la grupuri, se va arăta în Capitolul 1 că algebra Lie $\underline{g}$ este nilpotentă dacă și numai dacă există $m \in \mathbb{N}$ astfel încît $\mathscr{C}_m\underline{g} = \underline{g}$.

5.2. PROPOZITIE. Fie $\underline{g}$ și $\underline{h}$ două $\mathbb{K}$-algebre Lie și $f : \underline{g} \to \underline{h}$ un morfism surjectiv de algebre. Atunci $f(\mathscr{D}^n\underline{g}) = \mathscr{D}^n\underline{h}$ și $f(\mathscr{C}^n\underline{g}) = \mathscr{C}^n\underline{h}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRATIE. Afirmatiile din enunt rezultă prin inductie după n folosind faptul că $f([\underline{a},\underline{b}]) = [f(\underline{a}),f(\underline{b})]$ pentru orice $\mathbb{K}$-submodule $\underline{a}$ și $\underline{b}$ ale lui $\underline{g}$.

5.3. COROLAR. Fie $\underline{g}$ o algebră Lie și $\underline{a}$ un ideal al lui $\underline{g}$. Atunci, algebra Lie $\underline{g}/\underline{a}$

este comutativă dacă şi numai dacă $\mathcal{D}\underline{g} \subset \underline{a}$.

DEMONSTRATIE. Fie $p : \underline{g} \to \underline{g}/\underline{a}$ epimorfismul canonic. Avem: $\underline{g}/\underline{a}$ este o algebră Lie comutativă $\Longleftrightarrow$ $[\underline{g}/\underline{a}, \underline{g}/\underline{a}] = \mathcal{D}(\underline{g}/\underline{a}) = 0$. Dar $\mathcal{D}(\underline{g}/\underline{a}) = p(\mathcal{D}\underline{g})$ conform lui 5.1, deci $\mathcal{D}(\underline{g}/\underline{a}) = 0 \Longleftrightarrow p(\mathcal{D}\underline{g}) = 0 \Longleftrightarrow D\underline{g} \subset \underline{a}$.

După cum se constată imediat, corolarul precedent corespunde următorului rezultat binecunoscut din teoria grupurilor: dacă H este un subgrup normal al unui grup G, atunci grupul factor G/H este abelian dacă şi numai dacă subgrupul comutator $[G,G]$ al lui G este inclus în H.

In general, o algebră Lie nu este asociativă. Algebrele Lie care sînt şi asociative sînt complet caracterizate de rezultatul care urmează

5.4. PROPOZITIE. O K-algebră Lie $\underline{g}$ este asociativă dacă şi numai dacă $\mathcal{D}\underline{g} \subset Z(\underline{g})$.

DEMONSTRATIE. Algebra Lie $\underline{g}$ este asociativă dacă şi numai dacă, pentru orice $x,y,z \in \underline{g}$ are loc egalitatea

$$[x, [y,z]] = [[x,y], z]$$

Dar, conform identităţii lui Jacobi,

$$[x, [y,z]] + [y, [z,x]] + [z, [x,y]] = 0$$

Deci, algebra $\underline{g}$ este asociativă dacă şi numai dacă

$$[[x,y],z] = [[z,x],y] + [[x,y],z]$$

pentru orice $x,y,z \in \underline{g}$, adică

$$[[z,x],y] = 0$$

pentru orice $x,y,z \in \underline{g}$. Ori această ultimă condiţie este exact conditia $\mathcal{D}\underline{g} \subset Z(g)$.

In teoria grupurilor incluziunea $\mathcal{D}\underline{g} \subset Z(\underline{g})$ are drept corespondent incluziunea $[G,G] \subset Z(G)$ şi care este de fapt definitia grupurilor metabeliene. Acestea din urmă sînt exact grupurile nilpotente de clasă de nilpotență cel mult 2.

5.5. EXEMPLE. (1) Să considerăm un corp $\mathbb{K}$ și $\mathbb{K}$-algebra Lie necomutativă de dimensiune 2 descrisă în 3.1 (4). Notăm această algebră Lie cu $\underline{g}$ și o bază a sa cu $\{e,f\}$, unde $[e,f]=e$. Avem

$$\mathcal{D}\underline{g} = [\underline{g},\underline{g}] = \mathbb{K}e \neq 0$$

$$\mathcal{D}^2\underline{g} = [\mathcal{D}\underline{g},\mathcal{D}\underline{g}] = [\mathbb{K}e,\mathbb{K}e] = 0$$

Deci $\underline{g}$ este o algebră Lie rezolubilă. Ea nu este însă nilpotentă deoarece

$$\mathcal{C}^1\underline{g} = \mathcal{D}^1\underline{g} = \mathcal{D}\underline{g} = \mathbb{K}e$$

$$\mathcal{C}^2\underline{g} = [\underline{g},\mathbb{K}e] = \mathbb{K}e$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{C}^n\underline{g} = [\underline{g},\mathbb{K}e] = \mathbb{K}e \neq 0 \text{ pentru orice } n \geq 2.$$

(2) Fie $\mathbb{K}$ un corp comutativ. Să considerăm $\mathbb{K}$-algebra Lie $\underline{gl}(n,\mathbb{K})$. Este bine știut că această algebră Lie are dimensiunea n^2, o bază canonică a sa fiind formată din matricile E_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$, unde E_{ij} este matricea din $\underline{gl}(n,\mathbb{K})$ avînd 1 în poziția (i,j) și 0 în rest. Deoarece $E_{ij}\cdot E_{pq} = \delta_{jp}E_{iq}$, deducem că

$$[E_{ij},E_{pq}] = E_{ij}E_{pq} - E_{pq}E_{ij} = \delta_{jp}E_{iq} - \delta_{qi}E_{pj}$$

Avem așadar următoarele relatii

$$(*)\quad \begin{aligned} &[E_{ij},E_{pq}] = 0 && \text{pentru } j \neq p \text{ și } i \neq q\\ &[E_{ij},E_{jq}] = E_{iq} && \text{pentru } i \neq q\\ &[E_{ij},E_{pi}] = -E_{pj} && \text{pentru } j \neq p\\ &[E_{ij},E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}. \end{aligned}$$

Reamintim că prin $\underline{sl}(n,\mathbb{K})$ am notat subalgebra Lie a lui $\underline{gl}(n,k)$ formată din toate matricile de urmă nulă și numită <u>algebra specială liniară</u>:

$$\underline{sl}(n,\mathbb{K}) = \{U \in \underline{gl}(n,\mathbb{K}) \,/\, Tr(U) = 0\}.$$

Este clar că $\underline{sl}(n,K) \subsetneq \underline{gl}(n,K)$, deci $\dim_K \underline{sl}(n,k) < n^2$. Pe de altă parte, se verifică imediat că mulțimea

$$B = \{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} \cup \{E_{11} - E_{22}, E_{22} - E_{33}, \ldots, E_{n-1,n-1} - E_{nn}\}$$

este o submulțime liniar independentă din $\underline{sl}(n,K)$ avînd exact $(n^2 - n) + (n - 1) = n^2 - 1$ elemente. Cum $\dim_k \underline{sl}(n,K) \leq n^2 - 1$, deducem că $\dim_k \underline{sl}(n,k) = n^2 - 1$ și că B este o bază în $\underline{sl}(n,k)$.

Avem

$$\mathcal{D}\,\underline{gl}(n,k) = [\underline{gl}(n,k), \underline{gl}(n,k)] = \underline{sl}(n,k)$$

Intr-adevăr, pentru orice $U,V \in \underline{gl}(n,k)$,

$$\mathrm{Tr}([U,V]) = \mathrm{Tr}(U \cdot V - V \cdot U) = \mathrm{Tr}(U \cdot V) - \mathrm{Tr}(V \cdot U) = 0$$ deci $\mathcal{D}\,\underline{gl}(n,k) \subset \underline{sl}(n,k)$. Pentru incluziunea inversă se aplică formulele $(*)$ de mai sus de unde rezultă că $B \subset \mathcal{D}\,\underline{gl}(n,k)$, deci $\underline{sl}(n,k) \subset \mathcal{D}\,\underline{gl}(n,k)$.

Așadar, algebra derivată a algebrei Lie $\underline{gl}(n,k)$ este algebra $\underline{sl}(n,k)$.

(3) Am definit la 3.1 3) iii) subalgebrele $\underline{t}(n,k)$, $\underline{n}(n,k)$ și $\underline{\delta}(n,k)$ ale lui $\underline{gl}(n,k)$. Se observă imediat că

$$\underline{t}(n,k) = \underline{n}(n,k) \oplus \underline{\delta}(n,k)$$

(sumă directă internă de subspații). Pe de altă parte, avem

$$[\underline{\delta}(n,k), \underline{n}(n,k)] = \underline{n}(n,k).$$

Intr-adevăr, incluziunea "$\subset$" se verifică imediat, iar pentru incluziunea inversă se folosește egalitatea $E_{iq} = [E_{ii}, E_{iq}]$ pentru orice $i \neq q$ și faptul că mulțimea $\{E_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ este o bază a lui $\underline{n}(n,k)$. Cum

$$[\underline{\delta}(n,k), \underline{\delta}(n,k)] = 0$$

rezultă că

$$[\underline{t}(n,k), \underline{t}(n,k)] = [\underline{\delta}(n,k) + \underline{n}(n,k), \underline{\delta}(n,k) + \underline{n}(n,k)] =$$
$$= [\underline{\delta}(n,k), \underline{n}(n,k)] + [\underline{n}(n,k), \underline{n}(n,k)] = \underline{n}(n,k).$$

Aşadar,

$$\mathcal{D}\,\underline{t}(n,k) = \underline{n}(n,k).$$

(4) Ne propunem în continuare să găsim seria derivată şi seria centrală descendentă a algebrei Lie $\underline{t}(n,k)$. Este clar că o bază a lui $\underline{t}(n,k)$ este

$$\left\{E_{ij} \quad 1 \leq i \leq j \leq n\right\},$$

deci $\dim_k \underline{t}(n,k) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Avem $\mathcal{D}^1\underline{t}(n,k) = \mathcal{C}^1\underline{t}(n,k) = \mathcal{D}\underline{t}(n,k) = \underline{n}(n,k)$.

Vom lucra în continuare în algebra Lie $\underline{n}(n,k)$. Fie $1 \leq i < j \leq n$; numim <u>nivel</u> al lui E_{ij} numărul natural nenul $j - i$.

Dacă $i < j$, $p < q$ şi $q \neq i$, atunci

$$[E_{ij}, E_{pq}] = \begin{cases} E_{iq} & \text{dacă } j = p \\ 0 & \text{dacă } j \neq p \end{cases}$$

iar dacă $q = i$, atunci

$$[E_{ij}, E_{pi}] = -E_{pj}$$

deoarece $p \neq j$ (altfel am avea $i < j$ şi $j < i$).

Deducem că fiecare E_{iq} cu $i < q$ şi $q - i \geq 2$ este comutatorul a două matrici din $\underline{n}(n,k)$ ale căror nivele prin adunare dau nivelul lui E_{iq}.

Aşadar, $\mathcal{D}^2\underline{t}(n,k) = \mathcal{D}(\underline{n},k)$ este generat de matricile E_{ij} de nivel ≥ 2, $\mathcal{D}^3\underline{t}(n,k) = \mathcal{D}^2\underline{n}(n,k)$ este generat de matricile E_{ij} de nivel $\geq 2^2$, ş.a.m.d., $\mathcal{D}^k\underline{t}(n,k)$ este generat de matricile E_{ij} de nivel $\geq 2^{k-1}$. Deducem că $\mathcal{D}^k\underline{t}(n,k) = 0$ pentru orice k astfel încît $2^{k-1} > n - 1$, deci $\underline{t}(n,k)$ este o algebră Lie rezolubilă. Mai mult, seria derivată

$$\mathcal{D}^0\underline{t}(n,k) \supset \mathcal{D}^1\underline{t}(n,k) \supset \mathcal{D}^2\underline{t}(n,k) \supset \dots$$

a lui $\underline{t}(n,k)$ beneficiază de descrierea efectivă dată mai sus: $\mathcal{D}^k\underline{t}(n,k)$ este subspaţiul lui $\underline{t}(n,k)$ generat de toate matricile E_{ij} cu $j - i \geq 2^{k-1}$.

Să calculăm acum seria centrală descendentă a algebrei $\underline{t}(n,k)$. Avem

$$\mathscr{C}^1\underline{t}(n,k) = \mathscr{D}^1\underline{t}(n,k) = \underline{n}(n,k)$$

$$\mathscr{C}^2\underline{t}(n,k) = \left[\underline{t}(n,k), \mathscr{C}^1\underline{t}(n,k)\right] = \left[\underline{n}(n,k) + \underline{\delta}(n,k), \underline{n}(n,k)\right] =$$

$$= \left[\underline{n}(n,k), \underline{n}(n,k)\right] + \left[\underline{\delta}(n,k), \underline{n}(n,k)\right] = \underline{n}(n,k)$$

şi aşa mai departe,

$$\mathscr{C}^k\underline{t}(n,k) = \underline{n}(n,k) \quad \forall\, k \in N^*$$

Deci $\underline{t}(n,k)$ nu este o algebră Lie nilpotentă, căci $\mathscr{C}^k\underline{t}(n,k) = \underline{n}(n,k) \neq 0 \ \forall\, k \in N^* \setminus \{1\}$

In schimb, $\underline{n}(n,k)$ este o algebră Lie nilpotentă, căci, ca şi mai sus, obtinem

$\mathscr{C}^1\underline{n}(n,k) = \left[\underline{n}(n,k), \underline{n}(n,k)\right]$ este K-subspatiul lui

$\underline{n}(n,k)$ generat de toate E_{ij} de nivel ≥ 2.

$\mathscr{C}^2\underline{n}(n,k) = \left[\underline{n}(n,k), \mathscr{C}^1\underline{n}(n,k)\right]$ este K-subspatiul lui

$\underline{n}(n,k)$ generat de toti E_{ij} de nivel ≥ 3

$\mathscr{C}^k\underline{n}(n,k)$ este K-subspatiul lui $\underline{n}(n,k)$ generat de toti E_{ij} de nivel $\geq k+1$.

Aşadar $\mathscr{C}^{n-1}\underline{n}(n,k) = 0$, deci $\underline{n}(n,k)$ este o algebră Lie nilpotentă.

Legătura între algebrele $\underline{n}(n,k)$ şi $\underline{t}(n,k)$ pe de o parte şi respectiv algebrele Lie nilpotente şi rezolubile pe de altă parte este furnizată de teoremele lui Engel şi Lie pe care le enuntăm mai jos şi care sînt demonstrate în Lectia I (par. 2 şi respectiv par. 3).

TEOREMA LUI ENGEL. Fie V un K-spatiu vectorial de dimensiune finită n (K-corp comutativ) şi $\underline{g}$ o subalgebră a algebrei Lie $\underline{gl}_K(V)$.

Dacă $\forall\, x \in \underline{g}$, x este un endomorfism nilpotent, atunci există o bază B a lui V astfel încît matricile asociate oricărui element din $\underline{g}$ în această bază B să fie în $\underline{n}(n,K)$.

TEOREMA LUI LIE. Fie K un corp comutativ algebric închis de caracteristică nulă, V un K spatiu vectorial de dimensiune finită $n > 0$ şi $\underline{g}$ o subalgebră a algebrei Lie $\underline{gl}_k(V)$. Dacă $\underline{g}$ este o algebră Lie rezolubilă, atunci există o bază B a lui V astsfel încît matricile asociate oricărui element din $\underline{g}$ în această bază B să fie în $\underline{t}(n,k)$.

APPENDIX B. DESCOMPUNEREA PRIMARA

Mirecea Martin

Fie V un spatiu vectorial finit dimensional peste un corp comutativ $\mathbb{K}$ de caracteristică zero şi algebric închis. Prin End(V) notăm algebra endomorfismelor spaţiului V, iar prin $\underline{gl}(V)$ algebra Lie asociată.

1. Date $a \in End(V)$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$ considerăm subspaţiul a-invariant V_a^{λ} definit prin

(1) $$V_a^{\lambda} = \bigcup_{n \geq 1} \ker(a - \lambda)^n.$$

Evident $V_a^{\lambda} \neq 0$ dacă şi numai dacă λ este valoare proprie a endomorfismulu a. Mai mult, dacă notăm prin $\sigma(a)$ spectrul endomorfismului a format din toate valorile proprii ale lui a, avem descopunerea în sumă directă

(2) $$V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(a)} V_a^{\lambda}$$

Subspaţiile V_a^{λ} ($\lambda \in \sigma(a)$) se numesc subspatiile proprii generalizate ale lui a. Dacă endomorfismul a este nilpotent, adică există $n \geq 1$ cu $a^n = 0$, atunci descompunerea (2) se reduce la $V = V_a^0$.

2. Fie $\underline{g}$ o algebră Lie peste $\mathbb{K}$, V un spatiu vectorial, iar $\rho : \underline{g} \to \underline{gl}(V)$ o reprezentare a lui $\underline{g}$ pe spaţiul V. Pentru $x \in \underline{g}$, $v \in V$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$ notăm $\rho(x)(v) = x \cdot v$ şi $V_{\rho(x)}^{\lambda} = V_x^{\lambda}$.

Conform celor spuse anterior putem scrie

(3) $$V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\rho(x))} V_x^{\lambda} \quad (x \in \underline{g}),$$

unde $V_x^{\lambda} = \{ v \in V \ : \text{există } n \geq 1 \text{ cu } (x - \lambda)^n \cdot v = 0 \}$.

In particular să considerăm reprezentarea adjunctă $ad : \underline{g} \to \underline{gl}(\underline{g})$; obţinem descompunerea în sumă directă

(4)
$$\underline{g} = \bigoplus_{\mu \in \sigma(\mathrm{ad}\,x)} \underline{g}_x^{\mu} \qquad (x \in \underline{g}).$$

Să obsevăm că $g_x^0 \neq 0$ pentru orice $x \in \underline{g}$: într-adevăr, dacă $x = 0$ atunci $\underline{g}_x^0 = \underline{g}$ iar dacă $x \neq 0$ atunci $x \in \underline{g}_x^0$.

3. **LEMA.** Cu notatiile introduse, are loc relația

(5)
$$\underline{g}_x^{\mu} \cdot V_x^{\lambda} \subset V_x^{\lambda+\mu} \; (x \in \underline{g},\ \lambda, \mu \in \mathbb{K})$$

Demonstrație. Fixăm x, λ și μ. Pentru orice $y \in \underline{g}$ și $v \in V$ avem

$$(x - (\lambda + \mu)) \cdot y \cdot v = (\mathrm{ad}\,x - \mu)y \cdot v + y \cdot (x - \lambda) \cdot v$$

Prin inducție după $k \geq 1$ deducem

$$(x - (\lambda + \mu))^k \cdot y \cdot v = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (\mathrm{ad}\,x - \mu)^{k-i} y \cdot (x - \lambda)^i \cdot v.$$

Dacă $y \in \underline{g}_x^{\mu}$ și $v \in V_x^{\lambda}$ atunci există $n \geq 1$ cu $(\mathrm{ad}\,x - \mu)^n y = 0$ și $(x - \lambda)^n \cdot v = 0$. Rezultă $(x - (\lambda + \mu))^{2n} \cdot y \cdot v = 0$, deci $y \cdot v \in V_x^{\lambda+\mu}$. Lema este demonstrată.

Ca un caz particular să notăm următorul

4. **COROLAR.** Pentru orice $x \in \underline{g}$ și $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ avem

(6)
$$[\underline{g}_x^{\lambda}, \underline{g}_x^{\mu}] \subset \underline{g}_x^{\lambda+\mu}.$$

In plus, $\underline{g}_x^0$ este subalgebră în $\underline{g}$ și conține pe x.

5. Fie $\underline{g}$ și V ca mai sus iar $\alpha : \underline{g} \to \mathbb{K}$ o funcție oarecare. Definim subspațiul V^{α} al spațiului V prin

(7)
$$V^{\alpha} = \bigcap_{x \in \underline{g}} V_x^{\alpha(x)}.$$

In general despre spațiul V^{α} nu se poate spune prea mult. Există totuși o situație interesantă cînd V^{α} este $\underline{g}$-invariant, pentru orice funcție α, anume dacă $\underline{g}$ este algebră nilpotentă.

Intr-adevăr, să presupunem $\underline{g}$ nilpotentă. Atunci $\mathrm{ad}\,x$ este endomorfism nilpotent al lui $\underline{g}$, deci $\underline{g} = g_x^0$, pentru orice $x \in \underline{g}$. Utilizînd (5) deducem

$$\underline{g} \cdot V_x^{\alpha(x)} = \underline{g}_x^0 \cdot V_x^{\alpha(x)} \subset V_x^{\alpha(x)} \qquad (x \in \underline{g})$$

deci $\underline{g}\cdot V^{\alpha} \subset V^{\alpha}$.

6. DEFINITIE. O funţie $\alpha : \underline{g} \to \mathbb{K}$ se numeşte <u>pondere</u> a $\underline{g}$-modulului V dacă $V^{\alpha} \neq 0$. Subspatiul V^{α} asociat unei ponderi α se numeşte <u>subspatiu ponderal</u> sau <u>componentă primară</u> al lui V.

In acest moment putem enunţa teorema de descompunere primară.

7. TEOREMA. Fie $\underline{g}$ o algebră Lie nilpotentă şi V un $\underline{g}$-modul. Atunci:

i) există numai un număr finit de ponderi;

ii) subspatiile ponderale sînt $\underline{g}$-invariante iar V se descompune în suma lor directă;

iii) ponderile $\underline{g}$-modulului V sînt forme liniare pe $\underline{g}$ care se anulează pe $[\underline{g},\underline{g}]$.

Demonstratie. Demonstrăm întîi afirmaţiile i) şi ii).

1°. Dacă fiecare dintre endomorfismele $\rho(x)$, $x \in \underline{g}$, are o unică valoare proprie, i) şi ii) sînt evidente.

2°. Continuăm demonstratia prin inducţie după dimensiunea spaţiului V. Dacă dim V = 1, sîntem în situaţia 1°.

Presupunem dim V $\geq$ 2 şi în plus presupunem că există $x_0 \in \underline{g}$ pentru care $\rho(x_0)$ are cel puţin două valori proprii distincte. Cu un argument deja folosit rezultă că subspatiile proprii generalizate ale lui $\rho(x_0)$ sînt $\underline{g}$-invariante şi demonstratia afirmatiilor i) şi ii) se încheie aplicînd acestor subspatii ipoteza de inducţie.

Rămîne să demonstrăm afirmaţia iii). Algebra Lie $\underline{g}$ fiind nilpotentă este şi rezolubilă. Fie α o pondere cu subspaţiul ponderal V^{α}. Conform teoremei lui Lie (I.3.6) există $v \in V^{\alpha}$ nenul, vector propriu pentru toate endomorfismele $\rho(x)$, $x \in \underline{g}$, adică astfel încît

(8) $$x \cdot v = \alpha(x)v \qquad (x \in \underline{g}).$$

Atunci, pentru orice $x,y \in \underline{g}$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$ avem

$$\alpha(x+y)v = (x+y)\cdot v = x\cdot v + y\cdot v =$$

$$=(\alpha(x)+\alpha(y))v;$$

$$\alpha(\lambda x)v=(\lambda x)\cdot v=\lambda\alpha(x)v;$$

$$\alpha([x,y])v=[x,y]\cdot v=x\cdot y\cdot v-y\cdot x\cdot v=$$

$$=x\cdot(\alpha(y)v)-y\cdot(\alpha(x)v)=$$

$$=\alpha(y)\alpha(x)v-\alpha(x)\alpha(y)v=0.$$

Teorema este complet demonstrată.

In completarea teoremei să analizăm următoarea situație. Fie $\underline{g}$ o algebră Lie, V un $\underline{g}$-modul iar $\underline{h}\subset\underline{g}$ o subalgebră Lie nilpotentă. Considerăm $\underline{g}$ și V ca $\underline{h}$-module cu descompunerile în spații ponderale

(9) $$\underline{g}=\underline{g}^{\alpha}\oplus\underline{g}^{\beta}\oplus\cdots$$

(10) $$V=V^{\varphi}\oplus V^{\psi}\oplus\cdots$$

unde $\alpha,\beta,\ldots$ sînt ponderi ale $\underline{h}$-modulului $\underline{g}$ (numite și <u>rădăcini</u>) iar $\varphi,\psi,\ldots$ sînt ponderi ale $\underline{h}$-modulului V.

8. PROPOZITIE. Cu notațiile precedente avem

i) $\underline{g}^{\alpha}\cdot V^{\varphi}\subset V^{\alpha+\varphi}$ dacă $\alpha+\varphi$ este pondere pentru V;

ii) $\underline{g}^{\alpha}\cdot V^{\varphi}=0$ dacă $\alpha+\varphi$ nu este pondere pentru V.

Demonstrație. Fixăm $y\in\underline{g}^{\alpha}$ și $v\in V^{\varphi}$. Pentru $x\in\underline{h}$ avem $y\in\underline{g}_x^{\alpha(x)}$ și $v\in V_x^{\varphi(x)}$; conform Lemei 3 deducem

$$y\cdot v\in V_x^{\alpha(x)+\varphi(x)}=V_x^{(\alpha+\varphi)(x)},\text{ deci,}$$

x fiind arbitrar, $y\cdot v\in V^{\alpha+\varphi}$.

9. COROLAR. Cu aceleași notații avem

i) $[\underline{g}^{\alpha},\underline{g}^{\beta}]\subset\underline{g}^{\alpha+\beta}$ dacă $\alpha+\beta$ este rădăcină;

ii) $[\underline{g}^{\alpha},\underline{g}^{\beta}]=0$ dacă $\alpha+\beta$ nu este rădăcină.

In plus, $\underline{g}^{0}$ este subalgebră a lui $\underline{g}$ și include pe $\underline{h}$.

APPENDIC C. ELEMENTE SEMISIMPLE SI NILPOTENTE

Mircea Martin

1. Endomorfime semisimple şi nilpotente

Descompunerea Jordan

2. Elemente semisimple şi nilpotente în algebre Lie semisimple

In primul paragraf reamintim cîteva noţiuni şi rezultate de algebră liniară. Sînt caracterizate endomorfismele semisimple şi nilpotente şi este complet demonstrată descompunerea Jordan a endomorfismelor. Al doilea paragraf prezintă descompunerea Jordan abstractă, posibilă în orice algebră Lie semisimplă.

Toate spaţiile vectoriale şi algebrele Lie care intervin în continuare sînt considerate peste un corp $\mathbb{K}$ de caracteristică zero, comutativ, algebric închis şi sînt presupuse de dimensiune finită.

1. Endomorfisme semisimple şi nilpotente. Descompunerea Jordan

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$. Vom nota nota prin End(V), respectiv gl(V), algebra asociativă a endomorfismelor lui V, respectiv algebra Lie asociată. Prin $\mathbb{K}[T]$ este notată algebra polinoamelor peste $\mathbb{K}$ într-o variabilă T.

1.1. Date $a \in \mathrm{End}(V)$ şi $\varphi \in \mathbb{K}[T]$ cu

$$\varphi = \alpha_m T^m + \ldots + \alpha_1 T + \alpha_0$$

construim $\varphi(a) \in \mathrm{End}(V)$ prin

$$\varphi(a) = \alpha_m a^m + \ldots + \alpha_1 a + \alpha_0 1_V$$

unde 1_V este unitatea algebrei End(V).

Presupunem $a \in \mathrm{End}(V)$ fixat şi considerăm idealul $I_a = \{\varphi \in \mathbb{K}[T] : \varphi(a) = 0\}$ al algebrei $\mathbb{K}[T]$. Deoarece idealele în $\mathbb{K}[T]$ sînt toate principale, există un unic polinom monic (i.e. coeficientul dominant este 1) $\mu_a \in I_a$, astfel încît orice polinom din idealul I_a se divide prin μ_a; acest polinom se numește polinomul minimal al endomorfismului a.

1.2. LEMA. Fie $a \in End(V)$ cu polinomul minimal μ_a. Dacă $\mu_a = \varphi_1\varphi_2$ unde φ_1, φ_2 sînt polinoame prime între ele, atunci există V_1 și V_2 subspații ale lui V astfel încît

i) V_1 și V_2 sînt a-invariante;

ii) $V = V_1 \oplus V_2$;

iii) $\mu_a|_{V_1} = \varphi_1$ și $\mu_a|_{V_2} = \varphi_2$.

Demonstrație. Definim $V_1 = Ker\varphi_1(a)$ și $V_2 = Ker\varphi_2(a)$.

i) Deoarece a comută cu $\varphi(a)$ pentru orice $\varphi \in \mathbb{K}[T]$ subspațiile V_1 și V_2 sînt a-invariante.

ii) Există ψ_1 și $\psi_2 \in \mathbb{K}[T]$ astfel încît $\psi_1\varphi_1 + \psi_2\varphi_2 = 1$. Pentru orice $v \in V$ considerăm $v_1 = \psi_2(a)\varphi_2(a)v$ și $v_2 = \psi_1(a)\varphi_1(a)v$. Să observăm întîi că avem $v = v_1 + v_2$.

Apoi $\varphi_1(a)v_1 = \psi_2(a)\mu_a(a)v = 0$ deci $v_1 \in V_1$, și analog $v_2 \in V_2$, încît $V = V_1 + V_2$. In sfîrșit, dacă $v \in V_1 \cap V_2$ atunci $v_1 = 0$ și $v_2 = 0$ deci $v = 0$, ceea ce încheie demonstrația afirmației ii).

iii) Fie μ_1 și μ_2 polinoamele minimale ale lui $a|V_1$ respectiv $a|V_2$. Din modul cum am definit V_1 și V_2 rezultă că μ_1 divide φ_1 iar μ_2 divide φ_2.

Să presupunem că $grad\,\mu_1 < grad\,\varphi_1$ și să considerăm endomorfismul $\mu_1(a)\varphi_2(a)$. Pentru orice $v \in V$, cu relațiile anterioare avem

$$\mu_1(a)\varphi_2(a)v = \varphi_2(a)\mu_1(a)v_1 + \mu_1(a)\varphi_2(a)v_2 =$$

$$= \varphi_2(a)0 + \mu_1(a)0 = 0$$

deci $\mu_1\varphi_2 \in I_a$, adică $\mu_1\varphi_2$ se divide prin $\mu_a = \varphi_1\varphi_2$, imposibil deoarece

$$grad\,\mu_a = grad\,\varphi_1 + grad\,\varphi_2 > grad\,\mu_1 + grad\,\varphi_2 =$$

$$= grad\,\mu_1\varphi_2.$$

Rezultă că $\mu_1 = \varphi_1$ şi analog $\mu_2 = \varphi_2$.

1.3. Fie din nou, $a \in End(V)$ un endomorfism. Polinomul caracteristic al endomorfismului a, notat prin χ_a se defineşte prin

$$\chi_a = \det(T \cdot 1_V - a).$$

Un rezultat bine cunoscut (teorema Hamilton-Cayley) afirmă că $\chi_a(a) = 0$, deci χ_a se divide prin polinomul minimal μ_a al endomorfismului a.

(1) $$\chi_a = (T - \lambda_1)^{n_1} \dots (T - \lambda_k)^{n_k}.$$

unde scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sînt distincti, deoarece corpul $\mathbb{K}$ este algebric închis.

Aceşti scalari sînt numiti valori proprii ale endomorfismului a şi împreună formează spectrul lui a, notat prin $\sigma(a)$.

Deoarece pentru orice $\lambda \in \sigma(a)$ există $v \in V$, $v \neq 0$ cu $av = \lambda v$, polinomul minimal se divide prin $T - \lambda$, deci μ_a este de forma

(2) $$\mu_a = (T - \lambda_1)^{m_1} \dots (T - \lambda_k)^{m_k}$$

cu $1 \leq m_i \leq n_i$ pentru orice $i = 1,2,\dots,k$..

Pentru fiecare $i = 1,2,\dots,k$ definim subspaţiul

(3) $$V_i = Ker(a - \lambda_i 1_V)^{m_i}.$$

Din Lema 1.2. deducem simplu

(4) $$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$$

(5) $$\mu_{a|V_i} = (T - \lambda_i)^{m_i} \quad (i = 1,2,\dots ă ,k).$$

In legătură cu valorile proprii ale unui endomorfism a să mai observăm că dat un subspatiu a-invariant W avem $\sigma(a|W) \subset \sigma(a)$, iar orice subspatiu propriu a-invariant W în care singurele subspaţii a-invariante sînt 0 şi W are în mod necesar dimensiunea 1.

1.4. PROPOZITIE. Fie $a \in End(V)$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

i) orice subspaţiu a-invarint W admite un complement a-invariant în V;

ii) a este diagonalizabil;

iii) polinomul minimal μ_a are doar rădăcini simple.

Demonstrație. i)$\Rightarrow$ii). Din observațiile anterioare cu un argument simplu de maximalitate deducem că i) implică existența unei descompuneri

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$$

în subspații a-invariante, fiecare de dimensiune 1.

Fixăm în fecare subspațiu W_i un vector nenul e_i. Există atunci $\lambda_i \in \mathbb{K}$ astfel încît $ae_i = \lambda_i e_i$ încît în raport cu baza $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a spațiului V endomorfismul a se reprezintă printr-o matrice diagonală.

ii)$\Rightarrow$i). Alegem o bază $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a lui V care diagonalizează pe a. Fie W un subspațiu a invariant, $W \neq 0, V$.

Fie $\ell \geq 1$ cel mai mare întreg pentru care există $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n$ astfel încît $W \cap (\mathbb{K}e_{i_1} + \mathbb{K}e_{i_2} + \dots + \mathbb{K}e_{i_\ell}) = 0$. Alegem $W' = \mathbb{K}e_{i_1} + \mathbb{K}e_{i_2} + \dots + \mathbb{K}e_{i_\ell}$ și demosntrăm că $V = W \oplus W'$. In primul rînd avem $W \cap W' = 0$ și evident $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_\ell} \in W \oplus W'$. Fie $i \neq i_1, i_2, \dots, i_\ell$.

Din modul în care am ales numărul ℓ rezultă că $W \cap (W' + \mathbb{K}e_i) \neq 0$. Alegem un vector nenul w în această intersecție, $w = w' + \lambda e_i$ cu $w' \in W'$ și $\lambda \in \mathbb{K}$. Atunci $\lambda \neq 0$, deci $e_i = \lambda^{-1}(w - w') \in W + W'$, ceea ce arată că $V = W \oplus W'$. Rămîne să observăm că W' este a-invariant.

ii)$\Leftrightarrow$iii) un exercițiu simplu lăsat cititorului.

1.5. DEFINITIE. Un endomorfism a care satisface condițiile din Propoziția 1.4 se numește <u>semisimplu</u>..

Propoziția următoare grupează cîteva proprietăți ale endomorfismelor semisimple.

1.6. PROPOZITIE. Fie $a \in End(V)$ un endomorfism semisimplu.

i) Dacă W este subspațiu a-invariant atunci $a|W$ este semisimplu.

ii) Dacă $b \in End(V)$ este semisimplu și $ab = ba$ atunci $a + b$, $a - b$, ab sînt semisimple.

iii) Pentru orice $\varphi \in \mathbb{K}[T]$ endomorfismul $\varphi(a)$ este semisimplu.

Demostrație. i) Este suficient să observăm că polinomul minimal $\mu_{a|W}$ divide polinomul minimal μ_a. Cum μ_a are doar rădăcini simple rezultă că $\mu_{a|W}$ are de asemenea toate rădăcinile simple.

ii) Afirmația rezultă din faptul că două endomorfisme semisimple care comută pot fi diagonalizate simultan.

iii) Fixăm o bază în raport cu care a se reprezintă printr-o matrice diagonală $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Relativ la aceeași bază $\varphi(a)$ corespunde matricii diagonale $\mathrm{diag}(\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \ldots, \varphi(\lambda_n))$.

Demonstrația propoziției este încheiată.

Introducem în continuare o altă clasă de endomorfisme.

1.7. DEFINIȚIE. Un endomorfism a se numește <u>nilpotent</u> dacă există $k \geq 1$ astfel încît $a^k = 0$.

1.8. Următoarele proprietăți ale endomorfismului nilpotente sînt consecințe directe ale definiției:

i) dacă $a \in \mathrm{End}(V)$ este nilpotent atunci $a|W$ este nilpotent pentru orice subspațiu a-invariant W.

ii) Dacă $a, b \in \mathrm{End}(V)$ sînt nilpotente și $ab = ba$ atunci $a + b$, $a - b$ și ab sînt nilpotente

iii) Un endomorfism a este nilpotent dacă și numai dacă există $k \geq 1$ cu $\mu_a = T^k$.

1.9. COROLAR. Fie $a \in \mathrm{End}(V)$. Dacă a este semisimplu și nilpotent atunci $a = 0$.

Demonstrație. Deoarece a este nilpotent avem $\mu_a = T^k$ unde $k \geq 1$. Cum a este și semisimplu, μ_a are doar rădăcini simple, deci $k = 1$; rezultă că $a = \mu_a(a) = 0$.

1.10. Fie $ad = ad_{\underline{gl}(V)}$ reprezentarea adjunctă a algebrei Lie $\underline{gl}(V)$.

LEMA. Dacă $a \in End(V)$ este semisimplu, respectiv nilpotent, atunci $ad\,a$ este endomorfism semisimplu, respectiv nilpotent, al lui $\underline{gl}(V)$.

Demostrație. i) Presupunem a semisimplu și fixăm o bază $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a lui V în raport cu care a se reprezintă printr-o matrice diagonală $diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Fie $\{e_{ij} : 1 \leq i,j \leq n\}$ baza standard a lui $\underline{gl}(V)$ relativ la $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ defintă prin $e_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i$. Dintr-un calcul direct obținem $ad\,a(e_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j) e_{ij}$ deci $ad\,a$ este endomorfism diagonalizabil.

ii) Prin inducție după $m \geq 1$ se arată că

$$(ad\,a)^m(x) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i a^i x a^{m-i}$$

In particular, dacă $a^k = 0$ atunci $(ad\,a)^{2k} = 0$.

1.11. Sîntem în situația să putem enunța și demonstra rezultatul cunoscut sub denumirea de <u>descompunerea Jordan.</u>

TEOREMA. Fie $a \in End(V)$. Există atunci a_s, $a_n \in End(V)$ unice care satisfac condițiile

i) $a = a_s + a_n$;

ii) a_s este semisimplu, a_n este nilpotent

iii) $a_s a_n = a_n a_s$.

In plus există polinoamele $\sigma, \nu \in K[T]$ fără termen liber astfel încît $a_s = \sigma(a)$ și $a_n = \nu(a)$. In particular a_s și a_n comută cu orice endomorfism care comută cu a.

Demonstrație. Conform celor spuse la 1.3., dacă $\mu_a = (T - \lambda_1)^{m_1} \dots (T - \lambda_k)^{m_k}$ este polinomul minimal al lui a atunci V se descompune:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k \text{ , } V_i = \ker(a - \lambda_i \cdot 1_V)^{m_i},$$

iar $\mu_{a|V_i} = (T - \lambda_i)^{m_i}$, $1 \leq i \leq k$.

Aplicînd teorema chineză a resturilor în $\mathbb{K}[T]$, există un polinom σ astfel încît

$$\sigma \equiv \lambda_i (\mathrm{mod}(T - \lambda_i)^{m_i}), \ 1 \leq i \leq k$$

$$\sigma \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ T),$$

ultima congruență superfluă dacă $0 \in \sigma(a)$. Fie $\nu = T - \sigma$. Evident σ şi ν nu au termen liber.

Definim $a_s = \sigma(a)$ şi $a_n = \nu(a)$. Din $\sigma + \nu = T$ avem $a_s + a_n = a$. Este de asemenea clar că a_s şi a_n comută; în plus a_s şi a_n lasă invariante subspatiile V_i. Dar $(a_s - \lambda_i 1_V)|V_i = 0$ pentru orice $1 \leq i \leq k$, deci a_s actionează diagonal pe V_i, cu valoarea proprie λ_i. Deducem astfel că a_s este endomorfism semisimplu. Deoarece $a_n = a - a_s$, obtinem $(a_n|V_i)^{m_i} = 0$ încît $(a_n)^m = 0$ unde $m = \max(m_1, m_2, \ldots, m_k)$.

Rămîne să demonstrăm unicitatea descompunerii. Fie $a = a' + a''$ o altă descompunere cu a' semisimplu, a'' nilpotent $a'a'' = a''a'$. Avem $-a_s + a' = a_n - a''$,. Deoarece a' şi a'' comută cu a, rezultă că a' comută cu a_s iar a'' comută cu a_n. Dar atunci $a_s - a'$ este semisimplu iar $a_n - a''$ este nilpotent. Din Corolarul 1.9. obținem $a_s - a' = 0 = a_n - a''$; teorema este demonstrată.

1.12. COROLAR. Fie $a \in \mathrm{End}(V)$ cu descompunerea Jordan $a = a_s + a_n$. Atunci $\mathrm{ad}\, a = \mathrm{ad}\, a_s + \mathrm{ad}\, a_n$ este descompunerea Jordan a lui $\mathrm{ad}\, x$ în $\mathrm{End}(\underline{gl}(V))$.

Demonstrație. Din Lema 1.10 ştim că $\mathrm{ad}\, a_s$ şi $\mathrm{ad}\, a_n$ sînt semisimplu şi respectiv nilpotent. Din $[\mathrm{ad}\, a_s, \mathrm{ad}\, a_n] = \mathrm{ad}[a_s, a_n] = 0$ rezultă că $\mathrm{ad}\, a_s$ şi $\mathrm{ad}\, a_n$ comută. Rămîne să utilizăm unicitatea descompunerii Jordan.

2. Elemente semisimple şi nilpotente în algebre Lie semisimple

Presupunem în continuare dată o algebră Lie L semisimplă şi fie $\mathrm{ad} = \mathrm{ad}_L : L \to \underline{gl}(L)$ reprezentarea adjunctă. Reamintim (vezi I.4) că reprezentarea adjunctă este injectivă.

DEFINITIE. Un element $a \in L$ se numeşte <u>ad-semisimplu</u>, respectiv <u>ad-nilpotent</u>, dacă $\mathrm{ad}\, a$ este semisimplu, respectiv nilpotent, ca endomorfism al lui L.

2.2. TEOREMA (descompunerea Jordan abstractă). Fie $a \in L$. Există şi sînt unice $s,n \in L$ astfel încît
i) $a = s + n$;
ii) s este ad-semisimplu iar n este ad-nilpotent;
iii) $[s,n] = 0$.

Demonstraţie. Notăm $\operatorname{ad} a = \delta$. Conform celor demonstrate în Appendix B, spaţiul L se descompune în subspaţii proprii generalizate

(6) $$L = \bigoplus_{\lambda \in K} L_a^{\lambda}; \quad L_a^{\lambda} = \bigcup_{k \geq 1} \operatorname{Ker}(\delta - \lambda)^k.$$

iar $[L_a^{\lambda}, L_a^{\mu}] \subset L_a^{\lambda+\mu}$ pentru orice $\lambda, \mu \in K$.

Fie $\delta = \sigma + \nu$, cu $\sigma\nu = \nu\sigma$, σ semisimplu şi ν nilpotent descompunerea Jordan a lui δ în End(L). Partea semisimplă σ a lui δ acţionează pe L_a^{λ} prin înmulţirea cu λ.

Endomorfismul δ este o derivare a algebrei Lie L. Arătăm că σ şi ν sînt de asemenea derivări. Suficient să demonstrăm acest lucru pentru σ, adică să arătăm că

(7) $$\sigma([x,y]) = [\sigma(x),y] + [x,\sigma(y)]$$

pentru orice $x,y \in L$. Datorită descompunerii (6) ne putem restrînge la cazul $x \in L_a^{\lambda}$ şi $y \in L_a^{\mu}$. Insă atunci $[x,y] \in L_a^{\lambda+\mu}$ şi (7) capătă forma evidentă

$$(\lambda + \mu)[x,y] = [\lambda x, y] + [x, \mu y],$$

deci într-adevăr σ şi ν sînt derivări.

Dar orice derivare a unei algebre Lie semisimple este interioară, conform I.4.7., încît există $s,n \in L$ unice cu $\sigma = \operatorname{ad} s$ şi $\nu = \operatorname{ad} n$. Pentru aceste s şi n condiţiile i) şi ii) sînt verificate.

Deoarece $\operatorname{ad}[s,n] = [\sigma, \nu] = 0$ avem şi $[s,n] = 0$. Unicitatea este o consecinţă a unicităţii descompunerii Jordan a endomorfismelor şi a faptului că ad este injectivă.

2.3. Presupunem, doar în cadrul acestui punct, că algebra semisimplă L este o subalgebră în $\underline{gl}(V)$ pentru un anumit spațiu vectorial V.

TEOREMA. Fie $a \in L$ și $a_s, a_n \in \underline{gl}(V)$ părțile semisimplă și nilpotentă din descompunerea Jordan $a = a_s + a_n$ în End(V). Atunci $a_s, a_n \in L$. In particular $a = a_s + a_n$ este descompunerea Jordan abstractă a lui a.

Demonstrație. Afirmația a doua este o consecință a primei afirmații și a unicității descompunerilor Jordan.

Intr-adevăr, presupunînd că $a_s, a_n \in L$, avem $ad_L a_s = ad_{\underline{gl}(V)} a_s|L$ și $ad_L a_n = ad_{\underline{gl}(V)} a_n|L$. Cum $ad_{\underline{gl}(V)} a_s$ și $ad_{\underline{gl}(V)} a_n$ sînt endomorfisme semisimplu și respectiv nilpotent, conform Lemei 1.10, care invariază pe L, rezultă că $ad_L a_s$ și $ad_L a_n$ sînt, respectiv, semisimplu și nilpotent, deci, a_s este ad-semisimplu iar a_n este ad-nilpotent.

Rămîne deci să arătăm că $a_s, a_n \in L$. Deoarece $ad_{\underline{gl}(V)} a$ invariază L, iar $ad_{\underline{gl}(V)} a = ad_{\underline{gl}(V)} a_s + ad_{\underline{gl}(V)} a_n$ este descompunerea Jordan uzuală, rezultă că $ad_{\underline{gl}(V)} a_s$ și $ad_{\underline{gl}(V)} a_n$ invariază L, adică $[a_s, L] \subset L$ și $[a_n, L] \subset L$, deci $a_s, a_n \in N$ unde cu N notăm normalizatorul lui L în $\underline{gl}(V)$, subalgeră Lie în $\underline{gl}(V)$ carecontine pe L ca ideal.

Dacă am avea $N = L$ demonstrația ar fi terminată, dar, în general această egalitate nu are loc. De aceea trebuie căutată o altă subalgebră, mai mică decît N, care să conțină pe a_s și a_n și care în final să dovedim că este exact L.

Pentru aceasta, să notăm cu Lat L multimea L-submodulelor lui V, și pentru fiecare $W \in \text{Lat}\,L$ să considerăm subalgebra L_W a lui $\underline{gl}(V)$ definită prin

$$L_W = \left\{ x \in \underline{gl}(V) : \ x(W) \subset W \text{ și } \mathrm{Tr}(x|W) = 0 \right\}.$$

Deoarece $L = [L, L]$ (vezi I.4.12) avem $L \subset L_W$ pentru orice $W \in \text{Lat}\,L$. Mai mult, deoarece a_s și a_n sînt polinoame în a fără termen liber, dat $W \in \text{Lat}\,L$ avem $a_s(W) \subset W$ și $a_n(W) \subset W$. Cum $a_n|W$ este nilpotent, rezultă $\mathrm{Tr}(a_n|W) = 0$ și deoarece $a_s|W = a|W - a_n|W$ avem $\mathrm{Tr}(a_s|W) = 0$, deci $a_s, a_n \in L_W$.

Să notăm $\widetilde{L} = N \cap (\bigcap_{W \in \text{Lat}\,L} L_W)$. Conform celor spuse anterior $a_s, a_n \in \widetilde{L}$ iar $\widetilde{L}$ conține pe L ca un ideal.

Arătăm că $\tilde{L} = L$, ceea ce va încheia demonstrația.

Conform teoremei lui Weyl T.4.14., $\tilde{L}$ fiind un L-modul există M un L-submodul a lui L încît $\tilde{L} = L \oplus M$. Cum $\tilde{L} \subset N$ avem $[L,\tilde{L}] \subset L$, deci acțiunea lui L pe M este trivială. Fie W un L-submodul ireductibil al lui V. Dacă $x \in M$ atunci $[L,x] = 0$ şi din lema lui Schur rezultă că x acționează pe W ca un scalar. Dar $Tr\, x|W = 0$, deoarece $x \in L_W$, deci $x|W = 0$. Cum V se scrie ca sumă directă de L-submodule ireductibile (din nou intervine teorema lui Weyl), obținem $x = 0$, deci $M = 0$, adică $\tilde{L} = L$.

Teorema este demonstrată.

2.4. Ultimul rezultat pe care ne propunem să îl demonstrăm arată o proprietate esențială a descompunerii Jordan abstracte.

PROPOZITIE. Fie L algebră Lie semisimplă, $a \in L$ cu descompunerea Jordan abstractă $a = s + n$ şi $\rho : L \to \underline{gl}(V)$ o reprezentare a lui L. Atunci $\rho(a) = \rho(s) + \rho(n)$ este descompunerea Jordan uzuală în End(V).

DEMONSTRATIE. Conform teoremei 2.4. este suficient să arătăm că $\rho(a) = \rho(s) + \rho(n)$ este descompunerea Jordan abstractă în algebra Lie semisimplă(!) $\rho(L)$.

Deoarece L este generată (ca spațiu vectorial) de vectorii proprii ai lui $ad_L s$, rezultă că $\rho(L)$ este generată de vectorii proprii ai lui $ad_{\rho(L)}\rho(s)$ deci $\rho(s)$ este ad-semisimplu. Analog deducem că $\rho(n)$ este ad-nilpotent. In final mai observăm că $[\rho(s), \rho(n)] = \rho([s,n]) = 0$

Incheiem cu o precizare. Datorită celor demonstrate, în cazul algebrelor Lie semisimple putem denumi elementele ad-semisimple sau ad-nilpotente, pe scurt, semisimple, respectiv nilpotente.

APENDIXUL D'. O lemă de geometrie algebrică

1. Fie $\mathbb{K}$ un corp algebric închis de caracteristică zero.

Spațiul $\mathbb{K}^n$ se identifică, prin lema lui Hilbert a zerourilor, cu spectrul maximal al inelului de polinoame $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$. Topologia Zariski pe $\mathbb{K}^n$ este generată de deschișii

$$D(p)=\{z\in\mathbb{K}^n : p(z)\neq 0\}, \qquad p\in\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n],$$

numiți deschiși principali.

Datorită noetherianității inelului $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ orice mulțime închisă în topologia Zariski a lui $\mathbb{K}^n$ este de forma:

$$V(I)=\{z\in\mathbb{K}^n : p(z)=0,\ p\in I\},$$

unde I este un ideal (în mod necesar finit generat) al algebrei $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$.

Dacă I și J sînt ideale proprii ale lui $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ atunci $I.J$ este tot ideal propriu (consecință a integrității inelului de polinoame). In particular

$$V(I)\cup V(J) = V(I.J)$$

este un închis propriu al lui $\mathbb{K}^n$. Trecînd la complementare am demonstrat în definitiv că intersecția a doi deschiși Zariski nevizi este un deschis nevid.

2. O aplicaţie cu componente polinomiale

$$P : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

induce un morfism de algebre

$$P^*: \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_m] \longrightarrow \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n], \quad P^*(q) = q \circ P.$$

In consecinţă aplicaţia P este continuă relativ la topologiile Zariski.

3. Să presupunem că diferenţiala $d_o P : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ este surjectivă. Atunci P^* este un monomorfism de inele.

Intr-adevăr, dacă ar exista un element $q \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_m]$ cu $P^* q = 0$ şi $q \neq 0$, am obţine derivînd prin părţi:

$$0 = \frac{\partial (P^*_q)}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^{m} (P^* \frac{\partial q}{\partial Y_j}) \frac{\partial P_j}{\partial X_i}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Dacă rangul matricii Jacobi $(\frac{\partial P_j}{\partial X_i})$ este maxim, aşa încît ar rezulta $P^*(\partial q / \partial Y_j) = 0$ pentru orice $j = 1, \dots, m$. Continuînd în acelaşi mod am obţine $P^* 1 = 0$, evident o contradicţie.

4. <u>Lemă</u>. Fie $P : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ o aplicaţie polinomială cu $d_o P$ surjectivă. Pentru orice polinom $p \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, $p \neq 0$, există un polinom nenul $q \in \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_m]$, astfel încît $P(D_p) \subset D_q$.

Demonstraţie: Cu observaţia precedentă,

$$B = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$$

este o algebră finit generată peste

$$A = \mathbb{K}[Y_1, \ldots, Y_m],$$

via aplicația $P^*: A \to B$. Atunci putem scrie $B = A[u_1, \ldots, u_r]$, cu elementele u_k aparținînd unei extinderi L a corpului $\mathbb{K}$, care conține în același timp pe A.

Deoarece există o bijecție între mulțimea $\mathbb{K}^n$ a idealelor maximale ale algebrei B și morfismele de $\mathbb{K}$-algebre $B \to \mathbb{K}$, avem de demonstrat următoarea afirmație:

Fiind dat un element nenul $p \in B$, există $q \in A$, $q \neq 0$, cu proprietatea că orice $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(A, \mathbb{K})$, $\varphi(q) \neq 0$ se extinde la un $\varphi' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(B, \mathbb{K})$, astfel încît $\varphi'(p) \neq 0$:

$$\begin{tikzcd}
q \in A \arrow[d, "p^*"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
p \in B \arrow[r, dashed, "\varphi'"'] & \mathbb{K}
\end{tikzcd} \qquad \varphi(q) \neq 0, \quad \varphi'(p) \neq 0.$$

Este clar că putem reduce demonstrația printr-o simplă recurență la cazul $r=1$. Așadar $B = A[u]$.

Dacă $u \in L$ este un element transcendent peste corpul de fracții al algebrei A, atunci putem lua $q = p_t$, unde

$$p = p_0 + p_1 u + \ldots + p_t u^t, \qquad p_k \in A,\ p_t \neq 0.$$

Fie $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}\text{-alg}}(A, \mathbb{K})$ dat, așa încît $\varphi(q) = \varphi(p_t) \neq 0$. Atunci polinomul $h(U) = \varphi(p_0) + \varphi(p_1)U + \ldots + \varphi(p_t)U^t$, cu U o nouă necunoscută, este nenul. In particular există $\lambda \in \mathbb{K}$, astfel încît $h(\lambda) \neq 0$.

Definind $\varphi': B \to \mathbb{K}$ prin

$$\varphi'\Big(\sum_j a_j u^j\Big) = \sum_j \varphi(a_j)\lambda^j$$

obținem extensia căutată.

Mai rămîne de analizat cazul în care $u \in B$ este un element algebric peste A.

Fie U o nouă necunoscută și $r, s \in A[U]$ polinoame de grad minim așa încît $r(u)=0$ și $s(p)=0$. Dacă a_1 este coeficientul termenului de grad maxim al lui r și $a_2=s(0)$, atunci $q=a_1 a_2$ este elementul căutat.

Intr-adevăr, fie $\varphi : A \to \mathbb{K}$ un morfism de $\mathbb{K}$-algebre cu proprietatea $\varphi(q)=\varphi(a_1)\varphi(a_2) \neq 0$. Dacă φ' este o extensie a lui φ la algebra $B=A[U]$, atunci $\varphi'(p)=0$ implică $\varphi(a_2)=\varphi'(s(p))=0$ și deci $\varphi'(p) \neq 0$, deoarece $\varphi(a_2) \neq 0$.

Mai rămîne de arătat că morfismul $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{K}$ admite o extensie $\varphi' : B \longrightarrow \mathbb{K}$.

Fie λ o rădăcină a ecuației $\varphi(r)(U)=0$. Definim $\psi : A[U] \longrightarrow \mathbb{K}$ prin $\psi(a)=\varphi(a)$, $a \in A$ și $\psi(U)=\lambda$.

Atunci orice element $h \in A[U]$, $h(u)=0$, se divide în $L[U]$ la $r \in A[U]$ (din minimalitatea gradului lui r), așa încît există un întreg pozitiv k, astfel încît $a_1^k h$ se divide la r chiar în $A[U]$. Prin urmare

$$\varphi(a_1)^k \varphi(h)(\lambda) = 0,$$

cu alte cuvinte $\psi(h)=\varphi(h)(\lambda)=0$, deoarece $\varphi(a_1) \neq 0$.

Dar $B \cong A[U]/J$, unde J este idealul elementelor $h \in A[U]$ cu $h(u)=0$. Din cele demonstrate mai sus rezultă $\psi(J)=0$, astfel că ψ induce morfismul de extensie $\varphi' : B \longrightarrow \mathbb{K}$ și demonstrația Lemei 4 este încheiată.

5. Lema precedentă poate fi interpretată ca un analog algebric al teoremei aplicației deschise din topologia diferențială.

<u>Note.</u> Cititorul poate consulta monografia lui Safarevici pentru detalii privind topologia Zariski. Demonstrația Lemei 4 este prezentată după [Jacobson].

APPENDIX E. Diagrame Dynkin în alte probleme de clasificare.

Andras NEMETHI

In mai multe ramuri ale matematicii, pentru descrierea ușoară și intuitivă a unor obiecte, pentru depistarea unor proprietăți aritmetice, combinatorice și geometrice se folosesc grafuri. In clasificarea unor obiecte "frumoase" această asociere reduce problema la clasificarea unor grafuri cu o anumită proprietate de "minimalitate". Este foarte misterior că noțiunile de "minimalitate" care provin din domenii foarte diferite ale matematicii, definite cu metode și pe baza unor principii foarte diferite, totuși, ne conduc la clase de grafuri identice sau aproape identice.

Apariția grafurilor de tip A-D-E în probleme foarte diferite ale matematicii a contribuit la apariția credinței într-o teorie care unifică toate aceste ramuri.

In acest capitol vom prezenta trei exemple în care clasificarea unor grafuri joacă un rol crucial, și teoremele de clasificare au o asemănare uluitoare.

1) grupuri Coxeter finite

2) algebre Lie semisimple

3) matrici cu coeficienți întregi cu normă operatorială < 2

In prima parte a expunerii vom prezenta pe rînd fiecare teorie pe scurt: definițiile și cîteva dintre rezultatele cele mai importante, iar în final vom prezenta o legătură existentă între aceste domenii.

2. Grupuri Coxeter

2.1. Fie grupul W generat de submulțimea $S \subset W$. Grupul W se numește <u>grup Coxeter</u> dacă avem următoarele condiții satisfăcute:

(C1) orice element din S are ordin doi;

(C2) pentru orice pereche s și s' din S, fie $m(s,s')$ ordinul produsului $s.s'$. Atunci relațiile $R=\{(s.s')^{m(s,s')}=1\}_{s,s'}$ sînt relațiile de definiție ale grupului W relativ la generatorii S (adică W dat ca grup cu generatori și relații) este

$$W=\left(S;\{(ss')^{m(s,s')}\}_{s,s'},\{s^2\}_s\right)$$

In acest caz perechea (W,S) se numește <u>sistem Coxeter.</u>

Deoarece scopul final este clasificarea grupurilor Coxeter finite, în continuare vom presupune că S este o mulțime finită (Dar chiar și cazurile importante în care W este grup infinit, S este presupusă o mulțime finită!).

Fie $S=\{s_1,\ldots,s_n\}$ și $m_{ij}=m(s_i s_j)$ ordinul produsului $s_i s_j$ în W. Atunci structura grupului Coxeter este determinată unic de matricea $M\in\mathcal{M}(n,n)$; $M=(m_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Evident coeficienții m_{ij} sînt numere întregi (sau simbolul ∞ în cazul în care ordinul produsului $s_i s_j$ este finit) cu:

$$m_{ii}=1\ ,\quad m_{ij}\geqslant 2\quad (i\neq j)$$

Vom vedea mai tîrziu că orice matrice simetrică $M\in\mathcal{M}(n,n;\mathbb{N}\cup\{\infty\})$ care verifică (1) este o matrice asociată unui grup Coxeter.

Matricea M poate fi reprezentată cu ajutorul unui graf neorientat, numit <u>graf Coxeter</u> (sau <u>Dynkin-Coxeter</u>), cu vîrfurile $v_1,\ldots,v_n$ în corespondență bijectivă cu generatorii $s_1,\ldots,s_n$, iar muchiile între v_i și v_j $(i\neq j)$ cu multiplicitățile $m_{ij}-2$ (deci dacă $m_{ij}=2$ atunci între v_i si v_j nu avem muchie).

Simetria matricii M ne asigură că graful <u>neorientat</u> este bine definită.

Să observăm că cunoașterea matricii M este echivalentă cu cunoașterea grafului Γ.

Reamintim că într-un graf (neorientat) vîrfurile v, u pot fi conectate, dacă există un șir de vîrfuri $v_0, \ldots, v_m$ a.î. $v_0 = v$, $v_m = u$ și v_{i-1}, v_i sînt unite cu o muchie (de multiplicitate ≥ 1) $(i=1,\ldots,m)$.

Graful se numește <u>conex</u> dacă vîrfurile sale pot fi conectate. Dacă v este un vîrf, atunci vîrfurile cu care poate fi conectat v la care adăugăm și muchiile, formează un subgraf conex maximal și se numește componentă conexă a vîrfului v.

Orice grup se scrie în mod unic ca reuniune a componentelor conexe.

2.2. Fie (W,S) un sistem Coxeter și fie Γ graful asociat. Descompunerea lui Γ în k $(k \geq 2)$ componente conexe ne dă o partiție $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$ $(S_i \cap S_j = \emptyset)$ a.i. subgrupurile W_i generate de S_i $(i=1,\ldots,k)$ în W formează k sisteme Coxeter (W_i, S_i) și avem o descompunere de produs direct a grupului $W = W_1 \times \ldots \times W_k$. Invers, pentru orice partiție a lui $S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$ și subgrupuri W_i generate de S_i a.i. $W = W_1 \times \ldots \times W_k$, subgrafurile $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ corespunzătoare vîrfurilor din $S_1, \ldots, S_k$ nu pot fi conectate.

2.3. <u>Definiție</u>. Sistemul Coxeter (W,S) se numește <u>ireductibil</u>, dacă graful Γ asociat este <u>conex</u>.

Conform 2.2 orice sistem Coxeter se poate scrie ca produs direct de sisteme Coxeter ireductibile. Deci clasificarea sistemelor Coxeter se reduce la clasificarea sistemelor ireductibile.

Metoda cea mai eficientă în studiul structurii sistemelor Coxeter este prezentarea elementelor $s \in S$ ca niste reflexii într-un spațiu vectorial real.

2.4. Fie (W,S) un sistem Coxeter cu $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$.

Fie V un spațiu vectorial real cu o bază $\{b_1,\dots,b_n\}$ fixată. Definim forma biliniară (simetrică) $B:V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$ prin

$$B(b_i,b_j)=-\cos\frac{\pi}{m_{ij}}\quad(\text{dacă } m_{ij}=\infty\text{, atunci }\frac{\pi}{m_{ij}}=0)$$

Definim transformările liniare $\sigma_i\in GL(V)$ prin

$$\sigma_i(x)=x-2B(b_i,x)b_i\qquad i=1,\dots,n.$$

2.5. Cîteva proprietăți a transformărilor σ_i

a) Fie $H_i=\{x\mid B(b_i,x)=0\}$. Atunci $\sigma_i\big|_{H_i}=id_{H_i}$ și $\sigma_i^2=1$.

b) ordinul produsului $\sigma_i\sigma_j$ (în $GL(V)$) este m_{ij}.

c) $B(\sigma_i(x),\sigma_i(y))=B(x,y)$ deci $\sigma_i\in O(B,\mathbb{Z})$ ortogonal (peste $\mathbb{Z}$) al formei biliniare B.

d) reprezentarea $\sigma:W\longrightarrow GL(V)$ $\sigma(s_i)=\sigma_i$ este fidelă ($\ker\sigma=0$) In particular $W=\{$grupul generat de $\sigma_i\}$

(Această construcție ne arată de ce există pentru orice matrice M cu $m_{ii}=1$, $m_{ij}\geqslant 2$ un grup Coxeter cu matricea asociată exact M).

Cum $\sigma(W)$ este un subgrup discret în $O(B;\mathbb{Z})$ finititudinea lui este asigurată de compacitatea grupului $O(B,\mathbb{R})$. Mai precis:

2.5. Fie (W,S) un sistem Coxeter cu formă biliniară B. Grupul W este finit atunci și numai atunci cînd B este pozitiv definită.

Deci clasificarea sistemelor Coxeter finite se reduce la clasificarea grafurilor Coxeter cu formă B pozitiv definită.

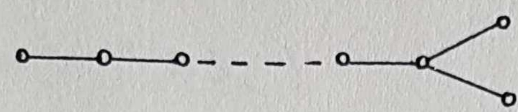
2.6. Teoremă de clasificare

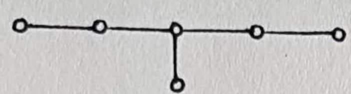
Grafurile sistemelor Coxeter ireductibile cu formă biliniară asociată pozitiv definită sînt date exact de lista următoare:

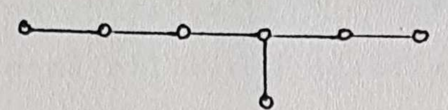
A_n  $(n\geq 1)$

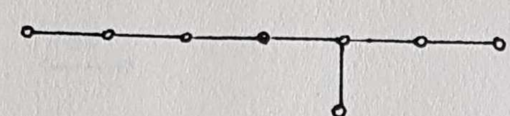
B_n 

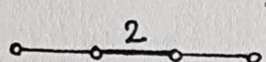
$(n\geq 2)$

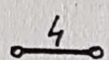
D_n  $(n\geq 4)$

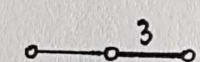
E_6 

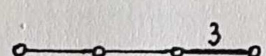
E_7 

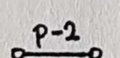
E_8  indexul inferior=nr.vîrfurilor

F_4 

G_2 

H_3 

H_4 

$I_2(p)$ 

$(p\geq 5;\ p\neq 6)$

(Ultima restricție este impusă ca să evităm coincidențele:
$I_2(3)=A_1$, $I_2(4)=B_2$, $I_2(6)=G_2$).

Cardinalele grupurilor Coxeter finite sînt listate în următorul tabel:

A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	H_3	H_4	$I_2(p)$
$(n+1)!$	$2^n\cdot n!$	$2^{n-1}\cdot n!$	$2^7\cdot 3^4\cdot 5$	$2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$	$2^{14}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$	1152	12	120	14400	$2p$

Grupul Coxeter asociat grafului A_n este chiar grupul simetric S_{n+1}, deoarece în S_{n+1} transpozițiile $t_i=(i,i+1)$ $i=1,\dots,n$ formează un sistem de generatori cu relațiile de definiție $t_i^2=(t_i t_{i+1})^3=1$ $i=1,2,\dots,n$ și $(t_i t_j)^2=1$ dacă $|i-j|>1$.
Graful Coxeter de tip B_n este un produs semidirect $(\mathbb{Z}_2)^n \rtimes S_n$ și se poate identifica cu subgrupul lui S_{2n} generat de elementele

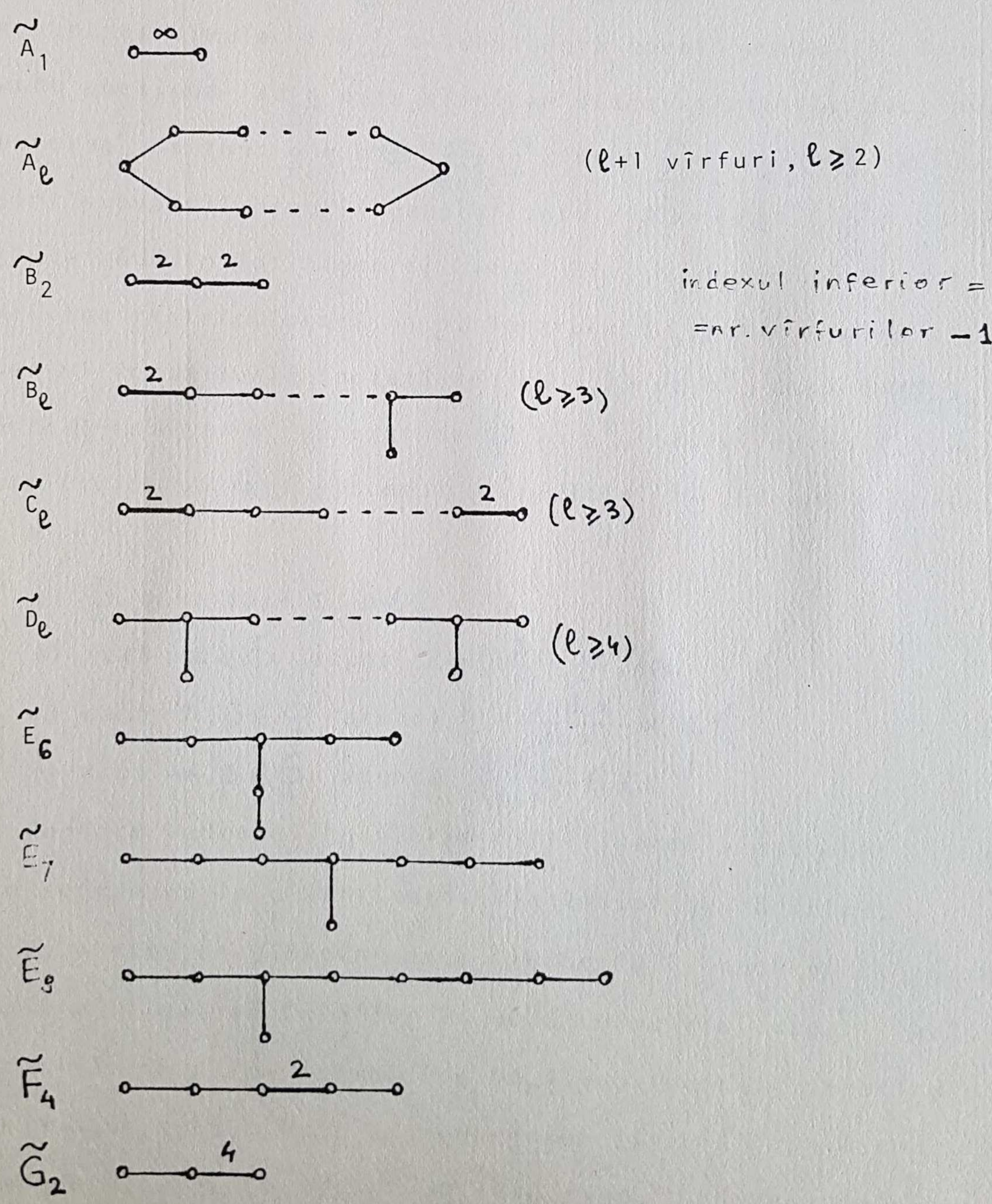
$s_i=(i,i+1)(n+i,n+i+1)$ $1\leq i<n$ şi $s_n=(n,2n)$. Subgrupul generat în S_{2n} de

$s_i=(i,i+1)(n+i,n+i+1)$ $1\leq i<n$ şi

$s_n=(n-1,2n)(n,2n-1)$ se identifică cu grupul Coxeter de tip D_n $\left(\approx (\mathbb{Z}_2)^{n-1}\rtimes S_n\right)$

Cazul $I_2(p)$ (G_2) se identifică cu grupul diedral $\mathcal{D}_p(\mathcal{D}_6)$.

2.7. Lista grafurilor asociate sistemelor Coxeter ireductibile cu formă biliniară pozitiv semi-definită este următoarea:



3. Algebre Lie semisimple

3.1. Fie $\underline{g}$ o algebră Lie (peste un corp $\mathbb{K}$ algebric închis de caracteristică zero). Unicul ideal maximal rezolubil Rad $\underline{g}$ se numește radicalul lui $\underline{g}$.

Algebra $\underline{g}$ se numește semisimplă dacă Rad$\underline{g}$ = 0 (simplă, dacă nu are ideale proprii).

O subalgebră în $\underline{g}$ se numește torală, dacă conține numai elemente semisimple. Fie $\underline{h}$ o subalgebră torală maximală. Deoarece $\underline{h}$ este abeliană $ad_{\underline{g}}\underline{h}$ este simultan diagonalizabilă, deci avem descompunerea Cartan: $\underline{g} = \underline{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Phi} \underline{g}^{\alpha})$ unde $\underline{g}^{\alpha} = \{x\in\underline{g} \mid [hx] = \alpha(h)x \ \forall\, h\in\underline{h}\}$ sînt subspații proprii generalizate și $\Phi = \left\{\alpha\in h^{*} \;\middle|\; \begin{matrix}\underline{g}^{\alpha}\neq 0\\ \alpha\neq 0\end{matrix}\right\}$ este mulțimea rădăcinilor algebrei Lie $\underline{g}$. Fie $(h_1,h_2)= Tr(adh_1 adh_2)$ forma Killing restricționată pe $\underline{h}$. Deoarece $(\ ,\ )$ este nedegenerată putem defini forma duală (notată tot cu (,)) pe h^*. Dacă $E=\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}E_{\mathbb{Q}}$ unde $E_{\mathbb{Q}}$ este $\mathbb{Q}$-subspațiul generat de Φ în h^*, atunci forma (,) pe E este pozitiv definită și sistemul de rădăcini (Φ, E) are proprietățile:

a) Φ generează E, $0\notin\Phi$

b) dacă $\alpha\in\Phi$ atunci $\mathbb{Z}\alpha\cap\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$

c) dacă $\alpha,\beta\in\Phi$ atunci $\beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in\Phi$

d) dacă $\alpha,\beta\in\Phi$ atunci $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbb{Z}$.

Conform teoremei lui Serre clasificarea algebrelor Lie semisimple se reduce la clasificarea sistemelor de rădăcini.

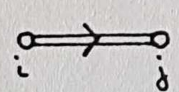
Un sistem de rădăcini este ireductibil, dacă nu se poate partiționa mulțimea rădăcinilor în două submulțimi proprii a.i. fiecare rădăcină din prima submulțime să fie ortogonală pe orice rădăcină din a doua submulțime. Descompunerea algebrelor Lie semisimple în sumă de algebre Lie simple $\underline{g} = \underline{g}_1\oplus\ldots\oplus\underline{g}_k$ corespunde exact la descompunerea sistemului de rădăcini ca reuniune de rădăcini ireductibile.

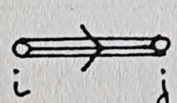
Deci în final ajungem la problema clasificării sistemelor de rădăcini ireductibile. Evident sistemul de rădăcini (Φ, E) este unic determinat de matricea Cartan $(\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle)$ unde $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ este o bază în Φ.

Să observăm că pe lîngă că matricea Cartan $(\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle)_{i,j=1}^{\ell}$ este pozitiv definită avem şi o proprietate de integralitate $\langle\alpha, \beta\rangle \in \mathbb{Z}$ pentru orice $\alpha, \beta \in \Phi$, ceea ce ne conduce la faptul că singurele unghiuri posibile între rădăcini pot fi $\{\pi/2, \pi/3, 2\pi/3, \pi/4, 3\pi/4, \pi/6, 5\pi/6\}$ adică $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$

Graful Coxeter asociat sistemului de rădăcini (Φ, E) este un graf neorientat care are ℓ vîrfuri $v_1, \dots, v_\ell$ şi v_i se uneşte cu v_j cu o muchie de multiplicitate $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$. Deoarece matricea Cartan nu este simetrică graful Coxeter nu determină unic matricea Cartan (în cazurile $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle \in \{2, 3\}$.

In diagrama Dynkin nu se pierde această informaţie. In cazul produselor $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle \in \{2, 3\}$ muchiile (i, j) cu multiplicitatea 2 sau 3 se marchează cu o orientare


dacă $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = 2 > \langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = 1$


dacă $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = 3 > \langle\alpha_j, \alpha_i\rangle = 1$

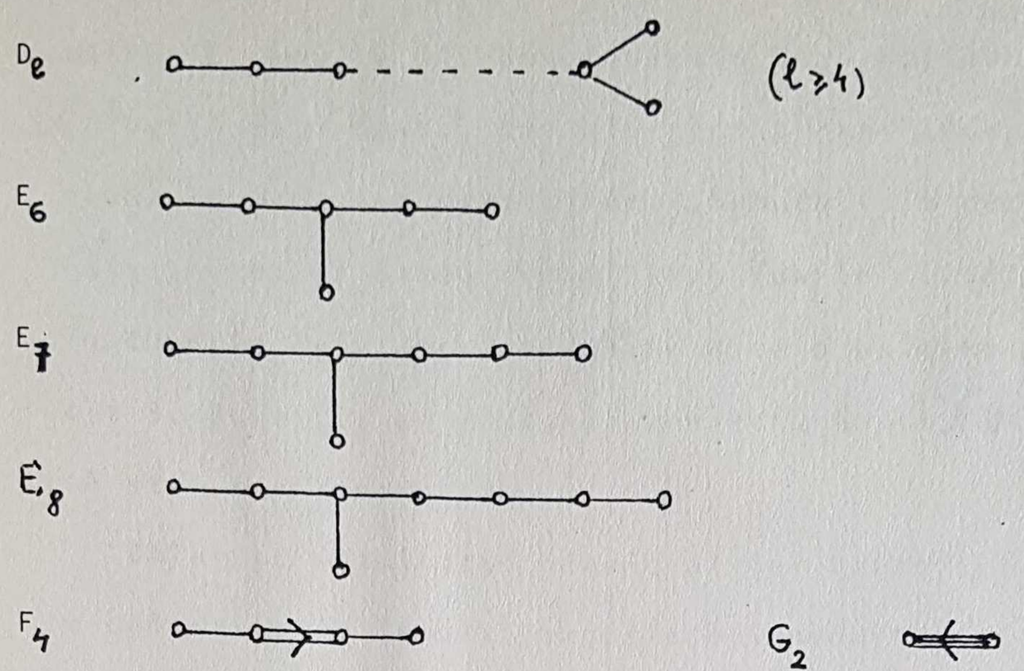
3.2. <u>Teorema de clasificare</u>

Lista diagramelor Dynkin ale sistemelor de rădăcini ireductibile este următoarea:

A_ℓ  $(\ell \geq 1)$

B_ℓ  $(\ell \geq 2)$

C_ℓ  $(\ell \geq 3)$



Considerăm grupul W generat de simetriile $\sigma_{\alpha_i}: E \longrightarrow E$, $\sigma_{\alpha_i}(x) = x - \langle x, \alpha_i \rangle \alpha_i$, atunci W este un grup Coxeter de tip indicat în tabelul următor:

g:	A_ℓ	B_ℓ	C_ℓ	D_ℓ	E_ℓ	F_4	G_2
W:	A_ℓ	B_ℓ	B_ℓ	D_ℓ	E_ℓ	F_4	G_2

Să observăm că W este determinat și de graful Coxeter asociat sistemului de rădăcini.

Grupurile Coxeter de tip H_3, H_4, $I_2(p)$ evident că nu apar, din cauza restricțiilor suplimentare asupra unghiurilor între planele de simetrie.

4. <u>Matrice cu coeficienții întregi pozitivi</u>

4.1. Introducem cîteva notații. Pentru o submulțime $S \subset \mathbb{R}$ și m, n numere naturale ≥ 1, notăm cu $M_{m,n}(S)$ mulțimea matricelor cu m linii și n coloane cu intrări din S. $M_m(S)$ este o prescurtare pentru $M_{m,m}(S)$ și $M_{fin}(S)$ este reuniunea tuturor matricelor de tip $M_{m,n}(S)$. Un element $X \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ se poate identifica cu o aplicație liniară (după ce am fixat o bază ortonormală în $\mathbb{R}^n$ pentru fiecare $n \geq 1$) $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. <u>Norma operatorială</u> (euclidiană) se definește ca

$$\|X\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|X\xi\|$$

Este o problemă foarte dificilă (și încă deschisă) determinarea mulțimii $\mathcal{N}(S)=\{t\in\mathbb{R}_+ \mid \exists Y\in M_{fin}(S)$ cu $\|Y\|=t\}$ chiar și pentru $S=$ $=\mathbb{N}$ sau $\mathbb{Z}$, sau $\{0,1\}$. Se bănuiește (A.J.Hoffman) de exemplu, că $\mathcal{N}(\{0,1\})$ este densă, dar nici acest fapt (numai informație calitativă) încă nu s-a demonstrat. G.Scandalis a demonstrat că $\mathcal{N}(\mathcal{N}(S))=$ $=\mathcal{N}(S)$, ceea ce arată comportarea foarte ciudată a mulțimii $\mathcal{N}$ în funcție de S, deoarece $\mathcal{N}(S)$ este o mulțime mult mai bogată decît S. De aici, am putea să conjecturăm că $\mathcal{N}(\mathbb{N})=\mathcal{N}(\mathbb{Z})$, dar fără să știm s-o demonstrăm.

Chiar și rezultatul clasic al lui Kronecker, arată că în spatele problemei stau (poate) proprietăți combinatoriale-aritmetice fine ale numerelor.

Teoremă (Kronecker). Fie X o matrice finită cu coeficienți din $\mathbb{Z}$. Dacă $\|X\|<2$, atunci $\|X\|=2\cos\frac{\pi}{q}$ cu q număr natural $\geqslant 2$.

Pentru orice $q\geqslant 3$ există o matrice $X\in M_{[q/2]}(\{0,1\})$ astfel încît $\|X\|=2\cos\frac{\pi}{q}$ (deci aceste valori $\{2\cos\frac{\pi}{q}\}_q$ se realizează).

O reformulare a teoremei lui Kronecker este egalitatea mulțimilor:

$$4.2\quad \mathcal{N}(\mathbb{Z})\cap[0,2]=\{0,1,2\}\cup\{2\cos\frac{\pi}{q}\}_{q=4,5,6,\dots}$$

Este imediat că $\mathcal{N}(\mathbb{N})\cap[0,2)=\mathcal{N}(\{0,1\})\cap[0,2)$ și $\mathcal{N}(\mathbb{N})\cap[0,2]=\mathcal{N}(\{0,1,2\})\cap[0,2]$.

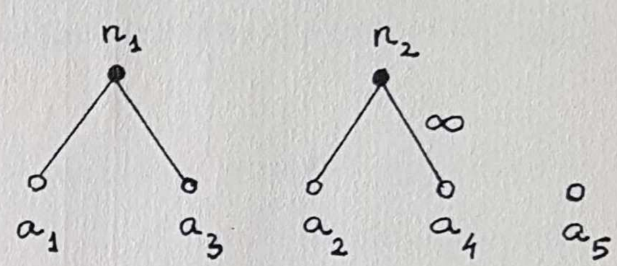
Deoarece scopul nostru este clasificarea matricilor (într-o anumită echivalență) $X\in M_{fin}(\mathbb{N})$ cu $\|X\|\leqslant 2$ putem presupune că $X\in M_{fin}(\{0,1,2\})$.

4.3. X se poate descrie complet de un graf bicolorat cu multiplicitățile muchiilor 1 sau ∞ (imitînd notațiile din teoria grupurilor Coxeter). Deci fie $X=(x_{ij})\in M_{m,n}(\{0,1,2\})$. Atunci graful bicolorat $\tilde{\Gamma}(X)$ are:

- m vîrfuri negre $n_1, \dots, n_m$
- n vîrfuri albe $a_1, \dots, a_n$
- nu avem muchie între vîrfuri negre și între vîrfuri albe.
- vîrful n_i se unește cu vîrful a_j atunci și numai atunci cînd $x_{i,j} \neq 0$ și în acest caz multiplicitatea muchiei este 1 dacă $x_{i,j}=1$ și este marcat cu ∞ dacă $x_{i,j}=2$.

Exemplu

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{\Gamma}(X):$$



4.4. O permutare α a mulțimii $\{1,2,\dots,m\}$ se identifică cu o matrice $\alpha \in M_m(\{0,1\})$ (a automorfismului liniar care permută elementele din bază: $e_i \longrightarrow e_{\alpha(i)}$). Similar pentru $\beta \in S_n$. Matricile X_1 și X_2 în $M_{m,n}(\mathbb{R})$ se numesc pseudoechivalente dacă există $\alpha \in S_m$ și $\beta \in S_n$ a.i. $X_2 = \alpha X_1 \beta$ (deci din X_1 putem să obținem pe X_2 prin permutarea coloanelor și liniilor).

O matrice se numește redusă dacă nu conține o coloană sau o linie formată numai din elementul zero. O matrice redusă $X \in M_{m,n}$ se numește indecompozabilă dacă nu există $X' \in M_{m',n'}$ și $X'' \in M_{m'',n''}$ cu $m'+m''=m$, $n'+n''=n$ a.î $\begin{pmatrix} X' & 0 \\ 0 & X'' \end{pmatrix}$ să fie pseudo-echivalentă cu X.

Avem echivalența următoarelor fapte:

a) i) X redusă

ii) $\tilde{\Gamma}(X)$ nu conține un vîrf izolat

b) i) X indecompozabil

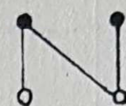
ii) $\tilde{\Gamma}(X)$ graf conex

c) i) X_1 este pseudoechivalent cu X_2

ii) $\tilde{\Gamma}(X_1)$ și $\tilde{\Gamma}(X_2)$ sînt izomorfe ca grafuri bicolorate.

4.5. Cîteva observații:

a) Trecerea de la matricea $X \in M_{m,n}$ la transpusa $X^t \in M_{m,n}$ se identifică cu schimbarea culorilor în graful bicolorat $\tilde{\Gamma}(X)$.

b) Fie matricea $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\tilde{\Gamma}(X) =$ 

X este pseudoechivalent cu $X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ceea ce este în corespondență cu faptul că grafurile ●—○—●—○ și ○—●—○—● sînt isomorfe ca grafuri bicolorate.

c) Matricile $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{1,2}$ și $X^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{2,1}$ nu sînt pseudo-echivalente ceea ce se vede și din neizomorfismul grafurilor <u>bicolorate</u>: ○—●—○ și ●—○—●

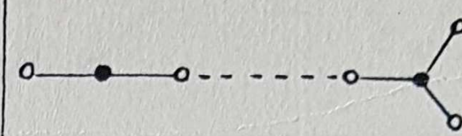
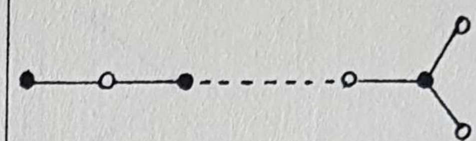
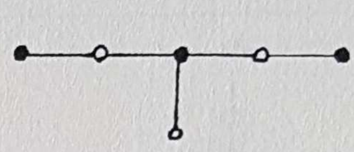
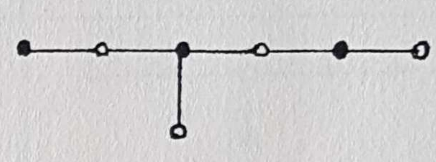
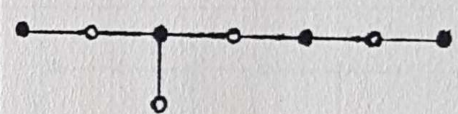
Deci bicolorarea grafurilor este esențial . Graful subiacent necolorat nu distinge între X și X^t. X și X^t sînt pseudo-echivalente atunci și numai atunci cînd graful necolorat are un singur tip de bicolorare.

d) In lista de clasificare următoare, dacă X și X^t nu sînt pseudo-echivalente, vom trece numai matricea X cu mențiunea că apare ca tip diferit și X^t.

4.6. <u>Teoremă de clasificare</u>

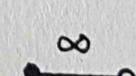
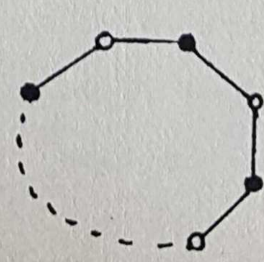
a) Matricile indecompozabile din $M_{fin}(N)$ cu normă < 2 (modulo o pseudo-echivalență) sînt clasificate de grafurile bicolorate date de următoarea listă:

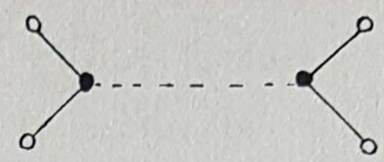
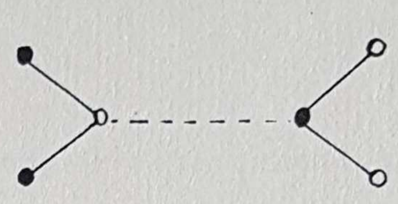
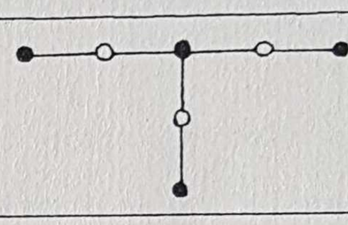
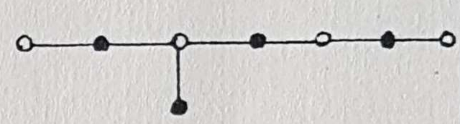
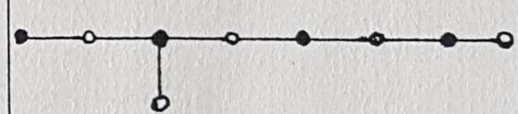
					X^t
A_ℓ	$\ell=2m$ $m \geq 1$	$M_{m,m}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\ 1 \end{pmatrix}$	○—●—○—●- - - - -○—●	<u>NU</u> apare
	$\ell=2m+1$ $m \geq 1$	$M_{m,m+1}$	$\begin{pmatrix} 1\ 1 & & & 0 \\ & 1\ 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 1\ 1 \end{pmatrix}$	○—●—○- - - - - - - -●—○	DA

D_ℓ	$\ell=2m$ $m\geq 2$	$M_{m-1,m+1}$	$\begin{pmatrix} 1&1&0&&& \\ 0&1&1&&O& \\ &&\ddots&\ddots&& \\ O&&&1&0&0 \\ &&&1&1&1 \end{pmatrix}$		DA
	$\ell=2m+1$ $m\geq 2$	$M_{m,m+1}$	$\begin{pmatrix} 1&0&&& \\ 1&1&&O& \\ &&\ddots&& \\ O&&1&0&0 \\ &&1&1&1 \end{pmatrix}$		DA
E_6	$\ell=6$	$M_{3,3}$	$\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 1&1&1 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$		DA
E_7	$\ell=7$	$M_{3,4}$	$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&1&0 \\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}$		DA
E_8	$\ell=8$	$M_{4,4}$	$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&1&0 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$		DA

In plus $\|X\| = 2\cos \pi/h_\Gamma$ unde h_Γ este (numărul Coxeter):
$h_{A_\ell}=\ell+1$, $h_{D_\ell}=2\ell-2$, $h_{E_6}=12$, $h_{E_7}=18$, $h_{E_8}=30$.

b) Matricile indecompozabile din $M_{fin}(\mathbb{N})$ cu norma egală cu 2 (modulo pseudo-echivalență) sînt clasificate de grafurile bicolorate dată de următoarea listă

$A_1^{(1)}$	$M_{1,1}$	(2)		NU
$A_\ell^{(1)}$ $\ell=2m+1$ $m\geq 3$	$M_{m+1,m+1}$	$\begin{pmatrix} 1&1&&& \\ &1&1&& \\ &&\ddots&\ddots& \\ 1&&&1&1 \\ &&&&1 \end{pmatrix}$		NU

$D_\ell^{(1)}$	$\ell=2m$, $m\geq 2$	$M_{m-1,m+2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & & 0 \\ & & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ 0 & & & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$		DA
	$\ell=2m+1$, $m\geq 2$	$M_{m+1,m+1}$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & & 0 & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$		NU
$E_6^{(1)}$		$M_{4,3}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		DA
$E_7^{(1)}$		$M_{3,5}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$		DA
$E_8^{(1)}$		$M_{4,5}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$		DA

4.7. Legătura cu algebre Lie semisimple și grupuri Coxeter

Fie $X\in M_{m,n}(\{0,1\})$ cu $\|X\|<2$ și să considerăm

$Y=\begin{pmatrix} 0 & X \\ X^t & 0 \end{pmatrix}\in M_{m+n}(\{0,1\})$. Atunci $2I_\ell-Y$ este o matrice reală ($\ell=m+n$) simetrică, invertibilă, deci se poate scrie $2I_\ell-Y=Z^2$ cu $Z\in M_\ell(\mathbb{R})$, Z simetrică cu valori proprii strict pozitive. Fie $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell$ coloanele lui Z. Deoarece Z este inversibilă, vectorii $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell$ sînt liniari independenți și produsele scalare $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$ sînt egale cu $(Z^2)_{i,j}=2\delta_{ij}-Y_{i,j}$, adică vectorii α_i au lungime $\sqrt{2}$ și unghiurile între acești vectori pot fi egale cu $\frac{\pi}{2}$ sau cu $\frac{2\pi}{3}$. Ei formează un sistem de rădăcini, care este ireductibil, atunci și numai atunci cînd X este indecompozabilă. Deoarece în acest caz apar vectorii de aceeași lungime, sistemul de rădăcini trebuie să fie de tip A,D sau E.

Prin considerarea grupurilor Weyl al unui sistem de rădăcini, avem legătura și cu grupurile Coxeter. Grafurile Coxeter asociate grafurilor Coxeter nu sînt altceva decît grafurile necolorate subiacente grafurilor $\widetilde{\Gamma}(X)$. Matricea $Y = \begin{pmatrix} 0 & X \\ X^t & 0 \end{pmatrix}$ este chiar matricea de adiacență a grafurilor Coxeter.

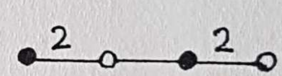
4.8. Cu aceste observații (poate) nu este surprinzătoare și posibilitatea obținerii grafurilor de tip B, F, G, H, I_2.

Fie $\mathbb{K} = \{0,1,2\} \cup \{2\cos\frac{\pi}{q}\}_{q=4,5,6,\dots}$ (vezi 4.2)

Fie $X \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Construim ca și în 4.3 graful bicolorat $\widetilde{\Gamma}(X)$ cu diferența că multiplicitatea muchiei între n_i și a_j este $q-2$ dacă $X_{i,j} = 2\cos\frac{\pi}{q}$ (această definiție este valabilă și în cazul $q=2,3,\infty$ cu observația că $\infty - 2 = \infty$.)

<u>Exemplu</u>:

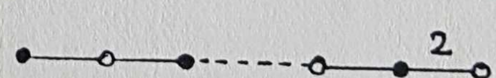
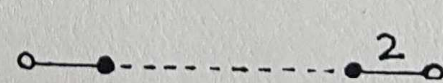
$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \widetilde{\Gamma}(X):$$

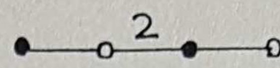
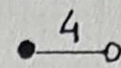
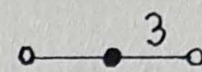
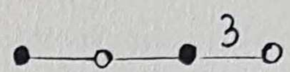
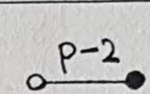


<u>Teoremă</u>

Matricile indecompozabile din $M_{fin}(\mathbb{K})$ cu norma < 2 sînt clasificate de grafurile bicolorate de tip A_ℓ $(\ell \geq 2)$ B_ℓ $(\ell \geq 2)$ D_ℓ $(\ell \geq 4)$ E_ℓ $(\ell = 6,7,8)$, F_4, G_2, H_3, H_4, $I_2(p)$ $(p \geq 5$ $p \neq 6)$.

Tabelul cazurilor B_ℓ $(\ell \geq 2)$, F_4, G_2, H_3, H_4, $I_2(p)$ este următorul:

B_ℓ	$\ell = 2m$ $m \geq 1$	$M_{m,m}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \ \sqrt{2} \end{pmatrix}$		DA
	$\ell = 2m+1$ $m \geq 1$	$M_{m,m+1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$		DA

F_4	$M_{2\times 2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$		NU
G_2	$M_{1\times 1}$	$(\sqrt{3})$		NU
H_3	$M_{1\times 2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2\cos\frac{\pi}{5} \end{pmatrix}$		DA
H_4	$M_{2\times 2}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\frac{\pi}{5} \end{pmatrix}$		DA
$I_2(p)$	$M_{1\times 1}$	$\left(2\cos\frac{\pi}{p}\right)$		NU

Norma matricilor se calculează cu formula $\|X\| = 2\cos \pi/h_{\Gamma}$ unde h_{Γ} este numărul Coxeter:

$h_{B_\ell}=2\ell$, $h(F_4)=12$, $h_{G_2}=6$, $h_{H_3}=10$, $h_{H_4}=30$, $h_{I_2(p)}=p$.

APPENDIX F Teorema Poincaré–Birkhoff–Witt.

In cele ce urmează vom prezenta teorema P.B.W. şi consecinţele sale care ne dau o imagine asupra structurii algebrei universale envelopante asociate lui L.

Fie V un spaţiu vectorial finit dimensional fixat peste un corp $\mathbb{K}$ de caracteristică zero şi $T^0V = \mathbb{K}$, $T^mV = V \otimes \dots \otimes V$ de m ori, $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^iV$ cu structura evidentă de produs dată de $(v_1 \otimes \dots \otimes v_h)(w_1 \otimes \dots \otimes w_m) = v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m \in T^{k+m}V$. $\mathcal{T}(V)$ se numeşte <u>algebra tensorială</u>, iar <u>algebra simetrică</u> $\mathcal{S}(V)$ se obţine factorizînd $\mathcal{T}(V)$ la idealul I generat de $x \otimes y - y \otimes x$; deci $\mathcal{S}(V) = \mathcal{T}(V)/I$; cu σ vom nota proiecţia canonică $\sigma : \mathcal{T}(V) \longrightarrow \mathcal{S}(V)$.

$\mathcal{S}(V)$ are o graduare naturală $\mathcal{S}(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^iV$ obţinută prin proiecţia σ din graduarea naturală de pe $\mathcal{T}(V)$.

Fie L o algebră Lie arbitrară.

<u>Definiţie</u> Se numeşte o <u>algebră universală envelopantă</u> pentru L o pereche $(\mathcal{U}, i)$ unde $\mathcal{U}$ este o algebră asociativă cu unitate 1, iar $i : L \longrightarrow \mathcal{U}$ o aplicaţie liniară cu $i([x,y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$, $x,y \in L$, astfel încît pentru orice altă algebră asociativă B cu unitate şi orice aplicaţie liniară $j : L \longrightarrow B$ cu $j([x,y]) = j(x)j(y) - j(y)j(x)$, $x,y \in L$, să existe un morfism de algebră $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow B$ ducînd unitatea în unitate astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ L \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "j"'] & B \end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Unicitatea lui ($\mathcal{U}$, i) rezultă printr-un procedeu standard. Pentru existenţă considerăm idealul $\mathcal{J}$ al lui $\mathcal{T}(L)$ generat de $x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$, $x,y \in L$ şi definim $\mathcal{U}(L) = \mathcal{T}(L)/\mathcal{J}$. Notînd cu π proiecţia canonică $\mathcal{T}(L) \longrightarrow \mathcal{U}(L)$ perechea ($\mathcal{U}(L)$,i) va fi o algebră universală envelopantă pentru L dacă i este restricţia lui π la L. In continuare vom nota $\mathcal{U} = \mathcal{U}(L)$.

Vom nota cu T^m, S^m componentele graduărilor canonice de pe $\mathcal{T} = \mathcal{T}(L)$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(L)$ şi definim o filtrare pe $\mathcal{T}$ prin $T_m = T^0 \oplus T^1 \oplus \ldots \oplus T^m$. Fie $U_m = \pi(T_m)$, $U_{-1}=0$ astfel relativ la înmulţirea din $\mathcal{U}$ avem $U_m U_p \subset U_{m+p}$ şi $U_m \subset U_{m+1}$. In plus notînd $G^m = U_m/U_{m-1}$ şi $\mathcal{G} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} G^m$, $\mathcal{G}$ capătă o aplicaţie biliniară $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ în raport cu care $\mathcal{G}$ devine o algebră asociativă cu unitate. Notînd cu Φ_m compunerea aplicaţiilor $T^m \to U_m \to G^m$ obţinem o surjecţie care se extinde la o surjecţie liniară $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{G}$ (ducînd pe 1 în 1). Avem mai precis

<u>Lemă</u> : $\Phi : \mathcal{T} \to \mathcal{G}$ este un homomorfism de algebre. Mai mult $\Phi(I) = 0$ astfel încît Φ induce un homomorfism de la $\mathcal{G}_{(L)} = \mathcal{T}/I$ în $\mathcal{G}$.

<u>Demonstraţie</u>. Faptul că Φ este un homomorfism rezultă din felul cum a fost definită structura de algebră pe $\mathcal{G}$. Deci pentru a demonstra că $\Phi(I) = 0$ este prin urmare suficient să arătăm că $\Phi(x \otimes y - y \otimes x) = 0$. Dar $\pi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_2$ şi din definiţia idealului J avem că $\pi(x \otimes y - y \otimes x) = \pi([x, y]) \in U_1$ deci $\Phi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_2/U_1 \simeq G^2$ deci $\Phi(x \otimes y - y \otimes x) = 0$

Putem formula acum teorema P.B.W.

Teoremă. Homomorfismul $w: \mathcal{S} \to \mathcal{G}$ este un izomorfism de algebre. Inainte de a da demonstraţia teoremei vom deduce cîteva corolarii.

Corolar 1. Fie $W \subset T^m$ un subspaţiu liniar astfel încît aplicaţia canonică $T^m \to S^m$ îl duce pe W izomorf şi surjectiv în S^m. Atunci $\pi(W)$ este un complement al lui U_{m-1} în U_m.

Demonstraţie Avem următoarea diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd} & U_m \arrow[dr, "p"] & \\ T^m \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & G^m \\ & S^m \arrow[ur, "w"'] & \end{tikzcd}$$

Deoarece w este izomorfism rezultă că aplicaţia compusă $p \circ \pi$ duce izomorf $W \subset T^m$ pe G^m care este chiar afirmaţia din enunţ.

Corolar 2. Fie $(x_1, x_2, \dots)$ o bază ordonată a lui L. Atunci elemente $x_{i(1)} \dots x_{i(m)} = \pi(x_{i(1)} \otimes x_{i(2)} \dots \otimes x_{i(m)})$ $m \in \mathbb{Z}^+$, $i(1) \leq i(2) \leq \dots \leq i(m)$ împreună cu 1 formează o bază în $\mathcal{U}(L)$

Demonstraţie Aplicăm corolarul precedent pentru W spaţiu liniar generat de $x_{i(1)} \otimes x_{i(2)} \dots \otimes x_{i(m)}$.

Corolar 3. Fie H o subalgebră a lui L. Atunci homomorfismul $\mathcal{U}(H) \longrightarrow \mathcal{U}(L)$ indus de injecţia $H \to L \to \mathcal{U}(L)$ este injectiv şi $\mathcal{U}(L)$ este un $\mathcal{U}(H)$-modul liber.

Demonstraţie. Aplicăm corolarul precedent prin extinderea unei baze a lui H la L.

Pentru a demonstra teorema P.B.W. fixăm o bază ordonată $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ a lui L şi pentru orice şir $\Sigma = (\lambda_1, \dots \lambda_m)$ în Ω luăm $x_\Sigma = x_{\lambda_1} \otimes x_{\lambda_2} \otimes \dots \otimes x_{\lambda_m} \in T^m$ iar z_Σ imaginea sa în S^m.

Spunem $\lambda \leq \Sigma$ dacă $\lambda \leq \mu$ pentru orice μ in Σ.

Următoarea lemă tehnică pentru a cărei demonstraţie trimitem la [H] va fi esenţială.

<u>Lemă</u>. Există o reprezentare $\rho : L \to \underline{gl}(\mathfrak{S})$ astfel încît

(a) $\rho(x_\lambda) z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma$ pentru $\lambda \leq \Sigma$

(b) $\rho(x_\lambda) z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma$ modulo S_m dacă Σ are lungime m.

Din această lemă deducem uşor următoarea lemă .

<u>Lemă</u>. Fie $t \in T_m \cap J$. Atunci componenta omogenă a lui t de grad m se găseşte în I.

<u>Demonstraţie</u>. Prin compunere homomorfismul din lema precedentă dă o aplicaţie liniară $\rho : \mathfrak{T} \to \mathrm{End}(T)$ al cărei nucleu îl conţine pe $\mathfrak{J}$ deci $\rho(t) = 0$. Insă conform lemei precedente $\rho(t).1$ este un polinom al cărei termen de grad maxim este chiar $\pi(t_m)$. Deci $t_m \in S_m$.

Demonstraţia teoremei P.B.W este acum o consecinţă imediată a lemei precedente.

<u>Demonstraţia P.B.W</u>. Fie $t \in T^m$ astfel încît $\pi(t) \in U_{m-1}$. Vrem să arătăm că atunci $t \in I$. Deoarece $\pi(t) \in U_{m-1}$ rezultă că există $t' \in T_{m-1}$ astfel încît $\pi(t) = \pi(t')$ i.e. $t - t' \in \mathfrak{J} \cap T_m$; In acest caz lema precedentă implică faptul că partea omogenă de ordin m din $t - t'$ este în I, însă aceasta este chiar t.

Bibliografie

ADAMS, J.F. : Lectures on Lie groups, Benjamin 1969.

BOURBAKI, N. : Groupes et algèbres de Lie, I, IV-VI, IX, Hermann, Paris 1971, 1968, 1982.

BOREL, A. - DE SIEBENTHAL, J : Les sous-groupes fermés connexes de rang maximum des groupes de Lie clos, Comment. Math. Helv. 23, 1949-50, 200-221

BRÖCKER, T. - TOM DIECK, T. : Representations of compact Lie groups, Springer 1985.

CARTAN, E. : Les groupes réels simples finis et continus, Ann.Sci.Ec.Norm.Sup. 31(1914), 263-355.

CARTAN, E. : Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, BUll.Soc.Math. France 54(1962), 214-264; 55(1927), 114-134.

CARTAN, E. : Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne, J. Math.Pures Appl. 8(1929), 1-33.

GOTO, M. - GROSSHANS, F. : Semisimple Lie algebras, Lect. Notes Pure Appl. Math.38, Marcel Dekker 1978.

HAUSNER, M. - SCHWARTZ, J.T. : Lie groups, Lie algebras, Gordon and Breach 1968.

HELGASON, S. : Differential geometry and symmetric spaces, 5th printing, Academic Press 1972.

HUMPHREYS, J.E. : Introduction to Lie algebras and representation theory, Grad. Texts in Math.9, Springer 1972.

HUMPHREYS, J.E. : Linear algebraic groups, Grad. Texts in Math. 21, Springer 1975.

HUNT, G.A. : A theorem of Élie Cartan, Proc. Amer. Math. Soc., 7, 307-308 (1956).

JACOBSON, N. : Lie Algebras, Wiley Interscience 1962.

KOBAYASHI, S. - NOMIZU, K. : Foundations of differential geometry, Wiley Interscience, Vol.I. 1963, Vol. II 1969.

DE RHAM, G. : L'oeuvre d'Élie Cartan et la topologie, în Hommage à Élie Cartan, Edit. Acad. 1975, 11-20.

SERRE, J.P. : Corps Locaux, Act.Sci.Int. no.1296, Paris 1962

SERRE, J.P. : Cohomologie galoisienne, Lect.Notes in Math. 5, Springer 1965.

SPIVAK, M. : A comprehensive introduction to differential geometry, vol.I, Publish or Perish 1970.

SAFAREVICI, I.R. : Bazele geometriei algebrice, Edit.Stiinţifică şi Enciclopedică , 1976.

VARADARAJAN, V.S. : Lie groups, Lie algebras and their representations, Prentice-Hall 1974.

VERONA, A. : Introducere în comologia algebrelor Lie, Edit. Acad. 1974.

WARNER, F.W. : Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott, Foresman and Company 1971

WEYL, H. : Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen, Math. Z. 23(1925), 271-309; 24(1926), 328-395, 789-791.