SEMINARUL DE ALGEBRA COMUTATIVA

Conducător ştiinţific: Prof.N.RADU

TEMA: OMOLOGIA INELELOR LOCALE NOETHERIENE

Expuneri: S. BARCANESCU
C. MATEESCU

Perioada: septembrie 1983 - ianuarie 1984

## INTRODUCERE

Ciclul de expuneri privind omologia inelelor locale noetheriene a fost ţinut în cadrul Seminarului de Algebră Comutativă (Facultatea de Matematică - INCREST), în perioada: septembrie 1984--ianuarie 1985, de către S. Bărcănescu şi Cristina Mateescu. Tema acestui ciclu de expuneri a fost propusă de Dorin Popescu, prezenta redactare fiind făcută după notele de seminar luate de Cristodor Ionescu.

Reuşita expunerilor a fost asigurată de îndrumarea competentă a:

prof. N. RADU (Fac.Matem.)
dr. Al. BREZULEANU

dr. D. POPESCU (INCREST)
dr. Al. BUIUM
dr. A. CONSTANTINESCU

La buna desfăşurare a lucrărilor seminarului, au contribuit:

1. S.Bărcănescu
2. I.Buruiană
3. G.Chiriacescu
4. M. Cipu
5. C.Ionescu
6. C.Mateescu
7. V. Nica
8. A. Niţă
9. D. Stefănescu
1o. R. Ursianu

Redactorii exprimă mulţumirile lor tuturor celorlalţi participanţi, care au contribuit în mod substanţial ca prezenta redactare să fie considerabil îmbunătăţită faţă de expunerile înseşi

iunie, 1985

S. BARCANESCU
C. MATEESCU

CUPRINS

pag.

# EXPUNEREA I

## COMPLEXE DE LANTURI PESTE POSETURI FINITE

In cursul acestei expuneri vom nota cu $(P, \leq)$ un poset finit. Prin $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$ notăm laticea booleană a părţilor lui P. Dacă P admite un element maxim (minim), acesta se va nota cu $\mathbb{1}$ (resp. $\mathbb{0}$).

### §1. COMPLEXUL COMBINATORIAL

1. Definitie.

O submulţime $I \subseteq P$ se numeşte "lanţ" dacă subposetul $(I, \leq)$ este total ordonat.

Mulţimea tuturor lanţurilor lui P o notăm cu $\Delta(P)$.

Convenim că $\Delta(P)$ conţine şi lanţul vid $\emptyset$.

1. Propoziţie.

$(\Delta(P), \subseteq)$ este ord-ideal al laticii booleene $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$.

Demonstraţie.

Orice submulţime a unui lanţ, rămîne lanţ //

Din această propoziţie urmează că $\Delta(P)$ este un complex simplicial. Ca ord-ideal în $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$, $\Delta(P)$ are următoarele proprietăţi.

2. Propoziţie

(i) Dacă $I, J \in \Delta(P)$ şi $I \subseteq J$, atunci intervalul $[I, J]$, considerat în $\Delta(P)$, coincide cu intervalul $[I, J]$ considerat în $\mathcal{P}(P)$

(ii) Posetul $(\Delta(P), \subseteq)$ are proprietatea Jordan-Dedekind.

(iii) Funcţia Möbius a lui $(\Delta(P), \subseteq)$ coincide cu restricţia funcţiei Möbius a lui $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$.

Demonstraţie

(i) Orice submulţime intermediară $K \in [I, J]_{\mathcal{P}(P)}$ rămîne lanţ, deoarece $J$ este lanţ.

(ii) rezultă din (i), deoarece laticea booleană $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$ are proprietatea Jordan-Dedekind.

(iii) rezultă din (i), împreună cu definiţia funcţiei Möbius.

Rezultă din Propoziţia 2, (ii), că $(\Delta(P),\subseteq)$ este poset graduat, moştenind de la $(\mathcal{P}(P),\subseteq)$ funcţia rang.

Rangul pe $(\mathcal{P}(P),\subseteq)$ este dat de <u>cardinalul</u> unei submulţimi, notat cu:

$$(\forall)\quad M\subseteq P\ ,\qquad |M| = \# M\ .$$

Restricţia la $\Delta(P)$ a acestei funcţii, suferă o translaţie de (-1), datorită necesităţii intuitive de a gradua lanţurile după "numărul de verigi".

Mai precis, vom numi "<u>lungime</u>" funcţia $l : \Delta(P) \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ , definită prin:

$$(\forall)\quad I\in\Delta(P)\ ,\qquad l(I) = |I| - 1\ .$$

<u>Observaţii</u>

(i) Cînd $\Delta(P)$ este privit drept complex simplicial, funcţia $l: \Delta(P)\longrightarrow \mathbb{Z}_+$ se numeşte "dimensiune".

(ii) Cînd posetul $(P,\leq)$ este el însuşi un lanţ finit, $\Delta(P)$ coincide cu laticea booleană $\mathcal{P}(P)$. In acest caz, graduarea naturală a lui $\Delta(P)$ este cea după cardinal, nu cea după lungime (vezi Exp.I)

Unicul simplex de lungime -1 este simplexul vid.

Vom nota cu $l(P) = \max\{\,l(I)\ /\ I\in\Delta(P)\}$ şi vom numi acest întreg "<u>lungimea posetului P</u>".

Dacă $(P,\leq)$ este de la bun început graduat (i.e. $(P,\leq)$ are proprietatea Jordan-Dedekind), atunci toate lanţurile maximale din $\Delta(P)$ au aceeaşi lungime $l(P)$. In acest caz spunem că $\Delta(P)$ este "<u>complex pur</u>".

Pentru $i\in\{-1,o,1,\ldots,l(P)\}$ , vom nota cu

$$\Delta_i(P) = \{I\in\Delta(P)\ /\ l(P) = i\},$$

<u>i-radicalul</u> ord-idealului $(\Delta(P),\subseteq)$.

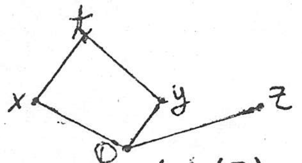
Aşadar, are loc partiţia:

$$\Delta(P) = \bigcup_{i=-1}^{l(P)} \Delta_i(P)\ ,$$

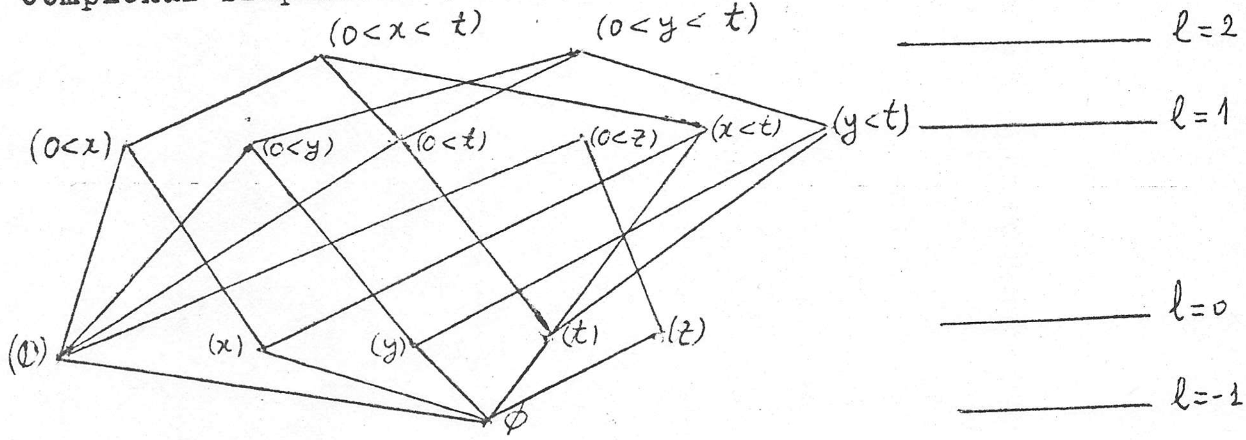
cu $\Delta_{-1}(P) = \{\emptyset\}$ , $\Delta_{o}(P) = \{ (x)/x \in P\}$ , $\Delta_{1}(P) = \{ x < y \mid x,y \in P\}$ , ..., $\Delta_{i}(P) = \{(x_o < x_1 < \dots < x_i)/\ x_k \in P\}$ ,..., $\Delta_{l(P)}(P)$ = lanţurile maximale din $\Delta(P)$.

EXEMPLU

Considerăm posetul $(P, \leq)$ dat de:




Complexul simplicial $(\Delta(P), \subseteq)$ este:




Tot din Propoziţia 2((iii)) rezultă că funcţia Möbius a ord-idealului $(\Delta(P), \subseteq)$ este:

$$(\forall)\ I,J \in \Delta(P),\ I \subseteq J\ ,\quad \mu_{\Delta}(I,J) = (-1)^{|J|-|I|}$$

deoarece aceasta este funcţia Möbius a laticii booleene $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$. Cu ajutorul acestei funcţii (care este un invariant omologic fundamental al posetului $(P, \leq)$), definim un important "invariant local" al complexului simplicial $(\Delta(P), \subseteq)$.

2. Definiţie.

Fie $I \in \Delta(P) - \{\emptyset\}$ un lanţ nevid. Se numeşte "signatură" pe I, funcţia: $\varepsilon_I : \hat{I} \longrightarrow \{-1, +1\}$ , unde $\hat{I} = \{ y \in P/\ (\exists)\ x \in I$ şi $x \leq y\}$ , definită prin:

$$(\forall)\ y\ \hat{I},\quad \varepsilon_I(y) = (-1)^{\nu_I(y)}\ ,\ \text{cu}\ \nu_I(y) = \#\{ x \in I/\ \ x \lneqq y\}$$

Observaţie.

Signatura locală $\varepsilon_I$, deşi definită direct (la Def.2), este de fapt dată de: $\varepsilon_I(y) = -\mu_\Delta(\phi, \hat{y}_I)$, cu $y \in \hat{I}$ şi $\hat{y}_I = \{x \in I / x \leq y\}$. Din motive de spaţiu, preferăm modalitatea de mai sus de introducere a acestui invariant.

Vom introduce în continuare, principalele noţiuni ce apar în studiul structurii locale a complexului simplicial $\Delta(P)$.

3. Definiţie

Fie $I \in \Delta(P)$ un lanţ.

(i) Se numeşte "frontiera lui I" mulţimea de lanţuri:

$$F(I) = \{J \in \Delta(P) \mid I \subsetneq J\}$$

(ii) Se numeşte "complexul local al lui I" mulţimea de lanţuri:

$$L(I) = \{J \in \Delta(P) \mid I \cap J = \phi \text{ şi } I \cup J \in \Delta(P)\}$$

(iii) Se numeşte "aderenţa lui I" mulţimea de lanţuri:

$$A(I) = F(I) \dot{\cup} L(I) \quad (\text{evident, } F(I) \cap L(I) = \phi).$$

3. Propoziţie.

Fie $I \in \Delta(P)$ un lanţ.

(i) $F(I)$ este un filtru al ord-idealului $\Delta(P)$

(ii) $L(I)$ este un ord-ideal al lui $\Delta(P)$ (deci $L(I)$ este subcomplex simplicial al lui $\Delta(P)$).

Demonstraţie.

(i) Dacă $J \in F(I)$, $J' \in \Delta(P)$ şi $J \subsetneq J'$, atunci $I \subsetneq J \subsetneq J'$, deci $J' \in F(I)$.

(ii) Dacă $J \in L(I)$, $J'' \in \Delta(P)$ şi $J'' \subsetneq J$, atunci $J'' \cap I = \phi$ (căci $J \cap I = \phi$) şi $J'' \cup I \subsetneq J \cup I \in (P)$, deci $J'' \cup I \in \Delta(P)$, adică $J'' \in L(I)$.//

Dacă $I = (x)$ $(x \in P)$ este un lanţ de lungime nulă, punem: $F(x)$, $L(x)$, $A(x)$ în loc de $F((x))$, $L((x))$, $A((x))$.

4. Propoziţie.

Pentru orice $x \in P$, $A(x)$ este un subcomplex simplicial al lui $\Delta(P)$.

Demonstraţie.

Observăm că $F(x) \cap L(x) = \emptyset$. Fie $J \in A(x)$ şi $J' \in \Delta(P)$, $J' \subseteq J$. Atunci $J'$ se poate afla în una şi numai una din situaţiile: a) $x \in J' \Rightarrow J' \in F(x) \subseteq A(x)$; b) $x \notin J' \Rightarrow J' \in L(x) \subseteq A(x)$.//

Pentru orice $i \in \{-1, 0, 1, \ldots, l(P)\}$, vom pune:

$F_i(x) = F(x) \cap \Delta_i(P)$; $L_i(x) = L(x) \cap \Delta_i(P)$; $A_i(x) = A(x) \dot{\cup} L_i(P)$

Aşadar: $A(x) = \bigcup_{i=-1}^{l(P)} A_i(x)$ şi $A_i(x) = F_i(x) \dot{\cup} L_i(x)$, pentru $i = -1, 0, 1, \ldots, l(P)$.

Să remarcăm că unele dintre mulţimile $F_i(x)$ (resp. $L_i(x)$, $A_i(x)$) pot fi vide. De exemplu: $F_{-1}(x) = \emptyset$, $L_{l(P)}(x) = \emptyset$.

Structura locală a lui $\Delta(P)$ este dată de subcomplexele simpliciale $\{A(x) / x \in P\}$.

Să remarcăm că, dacă $P$ are $\mathbb{O}$ (resp. $\mathbb{1}$), atunci:

$$A(\mathbb{O}) = \Delta(P) \quad (\text{resp. } A(\mathbb{1}) = \Delta(P)).$$

In particular, dacă $(P, \leq)$ este lanţ finit, atunci:

$$\Delta(P) = A(x), \quad (\forall)\ x \in P.$$

In continuare, fixăm un element oarecare $x \in P$.

4. Definiţie

(i) Se numeşte "contracţie cu x" funcţia $c_x : F(x) \longrightarrow L(x)$, definită prin: $(\forall)\ I \in F(x)$, $c_x(I) = I \setminus \{x\}$.

(ii) Se numeşte "dilatare cu x" funcţia $d^x : L(x) \longrightarrow F(x)$, definită prin: $(\forall)\ I \quad L(x)$, $d^x(I) = I \cup \{x\}$.

Pentru comoditate, vom nota: $c_x(I) = I_x$, cînd $I \in F(x)$ şi $d^x(I) = I^x$, cînd $I \in L(x)$.

5. Propoziţie

Funcţia $\omega : A(x) \longrightarrow A(x)$, definită prin:

$$\omega(I) = \begin{cases} I_x, & \text{dacă } I \in F(x) \\ I^x, & \text{dacă } I \in L(x) \end{cases}$$

este o bijecţie involutivă (adică $\omega \circ \omega = id_{A(x)}$).

Demonstraţie

Rezultă imediat din Def.4 că $\omega \circ \omega(I) = d^x\, c_x(I) = I_x^x = I$, cînd $I \in F(x)$ şi $\omega \circ \omega(I) = c_x d^x(I) = I_x^x = I$, cînd $I \in L(x)$.//

Signatura locală pe $\Delta(P)$ (cf.Def.2) se comportă prin localizare în modul următor.

6. Propoziţie.

Fie $I \in \Delta(P)$ un lanţ, $l(I) \geq 1$. Au loc relaţiile:

(1) $(\forall)\ x, y \in I$ şi $x < y$: $\varepsilon_I(x) \cdot \varepsilon_{I_x}(y) = -\varepsilon_I(y)\, \varepsilon_{I_y}(x)$

(2) dacă $I \in L(x)$ şi $y \in I$, atunci: $\varepsilon_I(x)\, \varepsilon_{I^x}(y) = -\varepsilon_I(y)\, \varepsilon_{I_y}(x)$

Demonstraţie

(1) Aplicăm Def.2 şi obţinem succesiv:

$$\varepsilon_I(x)\, \varepsilon_{I_x}(y) + \varepsilon_I(y)\, \varepsilon_{I_y}(x) = (-1)^{\nu_I(x)} \cdot (-1)^{\nu_{I_x}(y)} + (-1)^{\nu_I(y)} \cdot (-1)^{\nu_{I_y}(x)} =$$

$$= (-1)^{\nu_I(x) + \nu_{I_x}(y)} + (-1)^{\nu_I(y) + \nu_{I_y}(x)} = (\text{deoarece } x < y) =$$

$$= (-1)^{\nu_I(x) + \nu_I(y) - 1} + (-1)^{\nu_I(y) + \nu_I(x)} = 0\ .$$

(2) Deosebim două cazuri.

(a) $x < y$. Ca mai sus, obţinem succesiv:

$$\varepsilon_I(x)\ \varepsilon_{I^x}(y) + \varepsilon_I(y)\ \varepsilon_{I_y}(x) = (-1)^{\nu_I(x) + \nu_{I^x}(y)} + (-1)^{\nu_I(y) + \nu_{I_y}(x)} =$$

$$= (\text{deoarece } x < y) = (-1)^{\nu_I(x) + \nu_I(y) + 1} + (-1)^{\nu_I(y) + \nu_I(x)} = 0.$$

(b) $\underline{y < x}$ . Ca mai sus, obţinem succesiv:

$$\varepsilon_I(x)\,\varepsilon_{I^x}(y) + \varepsilon_I(y)\,\varepsilon_{I_y}(x) = (-1)^{\nu_I(x)+\nu_{I^x}(y)} + (-1)^{\nu_I(y)+\nu_{I_y}(x)} =$$

$$= (\text{deoarece } y < x) = (-1)^{\nu_I(x)+\nu_I(y)} + (-1)^{\nu_I(y)+\nu_I(x)-1} = 0.//$$

Incheiem aici scurta prezentare a complexului simplicial al lanţurilor posetului finit $(P, \leq)$. Dintre numeroasele proprietăţi ale complexului simplicial $(\Delta(P), \subseteq)$, le-am selectat numai pe cele de mai sus, întrucît acestea apar în mod semnificativ în continuare.

## §2. COMPLEXUL TOPOLOGIC

Fixăm posetul finit $(P, \leq)$ şi alegem un inel comutativ unitar A. Notăm cu $l = l(P)$ lungimea posetului P.
Bazîndu-ne pe complexul simplicial $(\Delta(P), \subseteq)$ (cf.§1), construim un complex finit de A-module libere, în modul următor.

5. Definiţie

Se numeşte "complexul topologic al lanţurilor lui P, cu coeficienţi din A" următorul şir de A-module libere şi de omomorfisme A-liniare:

$$\ldots \to 0 \to \Gamma_l(P,A) \xrightarrow{\partial_l} \Gamma_{l-1}(P,A) \xrightarrow{\partial_{l-1}} \ldots \to \Gamma_1(P,A) \xrightarrow{\partial_1} \Gamma_0(P,A)$$

unde, pentru $i \in \{0,1,\ldots,l\}$ , $\Gamma_i(P,A) = \bigoplus_{I \in \Delta_i(P)} A.I$ (= A-modulul liber de bază $\Delta_i(P)$) şi, pentru $i \in \{1,2,\ldots,l\}$ ,

$\partial_i : \Gamma_i(P,A) \to \Gamma_{i-1}(P,A)$ este omomorfismul A-liniar, definit pe baza lui $\Gamma_i(P,A)$ în modul următor:

$$(\forall)\quad I \in \Delta_i(P), \qquad \partial_i(I) = \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)\, I_x .$$

7. Propoziţie

Pentru $i \in \{1,2,\ldots,l-1\}$ : $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ .

Demonstraţie.

In adevăr, pentru orice vector al bazei $I \in \Delta_{i+1}(P)$, avem:

$$\partial_i \circ \partial_{i+1}(I) = \partial_i\Big(\sum_{x\in I} \varepsilon_I(x) I_x\Big) = \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)\, \partial_i(I_x) =$$

$$= \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x) \sum_{y\in I_x} \varepsilon_{I_x}(y) I_{xy} = \sum_{x,y\in I:\, x<y} (\varepsilon_I(x)\varepsilon_{I_x}(y) + \varepsilon_I(y)\varepsilon_{I_y}(x)) I_{xy}$$

$$= (\text{cf.}(1), \text{Prop.}6, \S 1) = \sum_{x,y\in I:\, x<y} 0.I_{xy} = 0 \;//$$

Urmează din această propoziţie că $(\Gamma_{\cdot}(P,A), \partial_{\cdot})$ este într-adevăr un complex (finit) de A-module libere (de rang finit).

Complexul astfel obţinut se augmentează cu:

$$\Gamma_o(P,A) \xrightarrow{\partial_o} \Gamma_{-1}(P,A), \quad \partial_o(x) = 1, \quad (\forall)\ x \in P,$$

unde $\Gamma_{-1}(P,A) = A$.

Omologia complexului augmentat $(\Gamma_{\cdot}(P,A), \partial_{\cdot}) \xrightarrow{\partial_o} \Gamma_{-1}(P,A)$ se numeşte "omologia redusă a lui P, cu coeficienţi din A" şi se notează cu $\widetilde{H}.(P,A) = (\widetilde{H}_i(P,A))_{i=o,1,\dots,l}$. Evident, $\widetilde{H}_{-1}(P,A) = (o))$.

Modulul $\widetilde{H}_o(P,A)$ are rangul cu 1 mai mic decît numărul componentelor conexe ale lui A. Deci P este poset conex $\Longleftrightarrow \widetilde{H}_o(P,A) = (o)$.

Punînd $c_i(P,A) = rg_A(\Gamma_i(P,A))$, $i = -1,o,1,\dots,l = l(P)$, putem defini "caracteristica euleriană" a lui P (peste A), prin:

$$\chi(P,A) = \sum_{i=-1}^{\ell} (-1)^{i+1}\, c_i(P,A)\,.$$

Este uşor de văzut că:

$$\chi(P,A) = \sum_{i=o}^{\ell} (-1)^{i+1}\, rg_A\, \widetilde{H}_i(P,A)\,.$$

OBSERVATIE

Un rezultat fundamental al teoriei poseturilor finite, este următorul (Ph.Hall): pentru orice poset finit $(P, \leq)$, are loc relaţia

$$\chi(P,A) = \mu(\hat{P}),$$

unde $\hat{P} = P \cup \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ şi unde $\mu(\hat{P})$ este funcţia Möbius totală a lui $\hat{P}$.//

Structura locală a complexului topologic $\Gamma.(P,A)$ este dată de aderenţele simpliciale ale elementelor lui P(Def.3, §1). Utilizînd notaţiile de la §1, vom pune, pentru un $x \in P$ şi $i = -1,0,1,\ldots,l=l(P)$

$$\mathcal{F}_i(x) = \bigoplus_{I \in F(x)} A.I \quad , \quad \mathcal{L}_i(x) = \bigoplus_{I \in L_i(x)} A.I \quad \text{şi}$$

(3)
$$\mathcal{A}_i(x) = \mathcal{F}_i(x) \oplus \mathcal{L}_i(x)$$

(cu convenţia că suma directă după mulţimea vidă este nulă).
Obţinem astfel familia de submodule ale lui $\Gamma.(P,A)$:
$(\mathcal{A}_i(x))_{i=-1,0,1,\ldots,l}$.

8. Propoziţie

Pentru orice $x \in P$, $(\mathcal{A}_i(x), \partial_i)_i$ este un subcomplex al complexului augmentat $(\Gamma.(P,A), \partial.)$.

Demonstraţie

Trebuie să arătăm doar că $\partial_i(\mathcal{A}_i(x)) \subseteq \mathcal{A}_{i-1}(x)$, pentru $i = 0,1,\ldots,l$.

Pentru $i = 0$, acest lucru este evident. Fie deci $i \in \{1,2,\ldots,l\}$ şi fie $I \in \mathcal{A}_i(x)$ un lanţ. Conform cu (3), sînt de considerat doar două cazuri:

(a) $I \in F_i(x)$. In acest caz $I_y \in F_{i-1}(x)$, pentru $y \in I \setminus \{x\}$ şi $I_x \in L_{i-1}(x)$, deci, din Def.5, urmează că:

$$\partial_i(I) = \Big(\sum_{y \in I, y \neq x} \varepsilon_I(y) I_y\Big) + \varepsilon_I(x) I_x \in \mathcal{F}_{i-1}(x) \oplus \mathcal{L}_{i-1}(x) =$$
$$= \mathcal{A}_{i-1}(x).$$

(b) $I \in L_i(x)$. In acest caz, $I_y \in L_{i-1}(x)$, pentru orice $y \in I$, deci, din Def.5: $\partial_i(I) = \sum_{y \in I} \varepsilon_I(y)\, I_y \in \mathcal{L}_{i-1}(x) \subseteq \mathcal{A}_{i-1}(x)$.

Subcomplexul local aderent $(\mathcal{A}_\cdot(x), \partial_\cdot)$ are o importanţă proprietate topologică, anume aceea de a fi contractibil. Mai precis, pentru orice $i \in \{-1, o, 1, \ldots, l-1\}$, definim aplicaţia A-liniară:

$$(4) \qquad \varphi_i : \mathcal{A}_i(x) \longrightarrow \mathcal{A}_{i+1}(x),$$

dată pe bază lui $\mathcal{A}_i(x)$ în modul următor:

$$(\forall)\ I \in A_i(x), \quad \varphi_i(I) = \begin{cases} \varepsilon_I(x)\, I^x, & \text{dacă } I \in L_i(x) \\ 0 & \text{, dacă } I \in F_i(x)\ . \end{cases}$$

9. Propoziţie

Pentru orice $i \in \{o, 1, \ldots, l-1\}$ are loc relaţia:

$$\varphi_{i-1} \circ \partial_i + \partial_{i+1} \circ \varphi_i = id_{\mathcal{A}_i(x)}$$

Demonstraţie

Vom verifica egalitatea din enunţ, pe orice vector I al bazei lui $\mathcal{A}_i(x)$. Conform cu (3), I se poate afla în una şi numai una din următoarele situaţii.

a) $I \in F_i(x)$ . In acest caz:

$(\varphi_{i-1} \circ \partial_i + \partial_{i+1} \circ \varphi_i)(I) = \varphi_{i-1}(\partial_i(I)) + \partial_{i+1}(\varphi_i(I)) =$ (cf.cu Def.5 şi cu (4)) $= \varphi_{i-1}\left(\sum_{y \in I, y \neq x} \varepsilon_I(y) I_y + \varepsilon_I(x) I_x\right) + \partial_{i+1}(0) =$

$= \sum_{y \neq x} \varepsilon_I(y)\, \varphi_{i-1}(I_y) + \varepsilon_I(x)\, \varphi_{i-1}(I_x) =$ (deoarece $I_y \in F_{i-1}(x)$, cînd $y \neq x$) $= \sum_{y \neq x} \varepsilon_I(y).0 + \varepsilon_I(x).\varepsilon_{I_x}(x).I_x^x =$ (deoarece $\varepsilon_{I_x}(x) =$

$= \varepsilon_I(x)$, cf.Def.2, §1) $= \varepsilon_I(x)^2.I = I.$

(b) $\underline{I \in L_i(x)}$ . In acest caz:

$$(\varphi_{i-1}\circ\partial_i + \partial_{i+1}\circ\varphi_i)(I) = \varphi_{i-1}\Big(\sum_{y\in I}\varepsilon_I(y)I_y\Big) + \partial_{i+1}(\varepsilon_I(x)I^x) =$$

$$= \sum_{y\in I}\varepsilon_I(y).\varepsilon_{I_y}(x).I_y^x + \sum_{y\in I^x,\, y\neq x}\varepsilon_I(x).\varepsilon_{I^x}(y).I_y^x + \varepsilon_I(x)\,\varepsilon_{I^x}(x)I_x^x =$$

$$= (\text{deoarece } \varepsilon_{I^x}(x) = \varepsilon_I(x)) = \sum_{y\in I}(\varepsilon_I(y)\varepsilon_{I_y}(x) + \varepsilon_I(x)\,\varepsilon_{I^x}(y)I_y^x + I =$$

$$= (\text{cf.}(2),\text{Prop.}6,\S1) = \sum_{y\in I} 0.I_y^x + I = I \;.//$$

<u>lo. Propoziţie</u>

<u>Pentru orice $x \in P$, complexul local (augmentat)</u> $(\mathcal{A}.(x), \partial .)$ <u>este aciclic.</u>

<u>Demonstraţie</u>

Trebuie să arătăm că omologia complexului local $(\mathcal{A}.(x), \partial .)$ este nulă în toate domeniile.

In dimensiune -1 acest lucru este evident.

Dacă $i \in \{0,1,\dots,l-1\}$ şi $z \in \mathcal{A}_i(x)$ este un i-ciclu, din Prop.9 rezultă:

$$z = (\varphi_{i-1}\circ\partial_i + \partial_{i+1}\circ\varphi_i)(z) = \varphi_{i-1}(\partial_i(z)) + \partial_{i+1}(\varphi_i(z)) =$$

$= (\text{deoarece } \partial_i(z) = 0) = \partial_{i+1}(\varphi_i(z))$. Aşadar z este bord, ceea ce înseamnă că $H_i(\mathcal{A}.(x)) = 0$.

Rămîne să arătăm aciclicitatea în dimensiunea maximă $l = l(P)$.

Fie $z \in \mathcal{A}_\ell(x)$ un ciclu, i.e. $\partial_\ell(z) = 0$.

Putem scrie: $z = \sum_{I\in A_\ell(x)} \alpha_I . I$ , cu $\alpha_I \in A$.

Atunci $0 = \partial_\ell(z) = \sum_{I\in A_\ell(x)} \alpha_I\,\partial_\ell(I) = (\text{cf. cu } (3)) =$

$$= \sum_{I\in F_\ell(x)} \alpha_I\,\partial_\ell(I) = \sum_{I\in F_\ell(x)} \alpha_I\Big(\sum_{y\in I,\, y\neq x}\varepsilon_I(y)\,I_y\Big) + \sum_{I\in F_\ell(x)}\alpha_I\,\varepsilon_I(x)\,I_x .$$

Dar $z' = \sum_{I\in F_\ell(x)} \alpha_I\Big(\sum_{y\in I,\, y\neq x}\varepsilon_I(y)\,I_y\Big) \in \mathcal{F}_{\ell-1}(x)$, $z'' = \sum_{I\in \mathcal{F}_\ell(x)} \alpha_I\,\varepsilon_I(x) \in \mathcal{L}_{\ell-1}(x)$.

Cum $\mathcal{A}_{\ell-1}(x) = \mathcal{F}_{\ell-1}(x) \oplus \mathcal{L}_{\ell-1}(x)$, rezultă din $\partial_\ell(z) = o$ că $z' = o$ şi $z'' = o$.

Aşadar $o = z'' = \sum_{I \in F_\ell(x)} \alpha_I \mathcal{E}_I(x) I_x$. Dar $\{I_x / I \in F_\ell(x)\}$ este A-liniar independentă, deoarece $I_x = I'_x \Rightarrow I = I'$, dacă $I, I' \in F_\ell(x)$. Astfel, rezultă $\alpha_I = o$, pentru orice $I \in F(x)$, adică $z = o$.//

OBSERVATIE

In demonstraţia de mai sus, pentru a avea siguranţa că $A_\ell(x)$ este $\neq (o)$, trebuie să presupunem că posetul $(P, \leq)$ este ~~graduat~~. Altfel, raţionamentul rămîne valabil, cu condiţia ca $l = l(P)$ să fie înlocuit prin $l(x) = \max\{i / \mathcal{A}_i(x) \neq (o)\}$.

Vom exprima rezultatul Propoziţiei lo, spunînd: "pentru orice poset (graduat) finit $(P, \leq)$, complexul topologic de lanţuri $(\Gamma.(P,A), \partial.)$ este local aciclic" (peste orice inel comutativ unitar de coeficienţi A).

In general, complexul $(\Gamma.(P,A), \partial.)$ nu este şi global aciclic. Acest lucru are loc, însă, în anumite cazuri particulare importante.

11. Corolar

Dacă posetul $(P, \leq)$ este lanţ finit, atunci complexul topologic de lanţuri $(\Gamma.(P,A), \partial.)$ este aciclic (peste orice inel de coeficienţi).

Demonstraţie

Afirmaţia rezultă din Prop.lo, împreună cu observaţia că $\Delta(P) = A(x)$, $(\forall)\, x \in P$, în cazul cînd $(P, \leq)$ este lanţ .//

Incheiem aici prezentarea proprietăţilor imediate ale complexului topologic al lanţurilor unui poset finit. Observăm că, în general, acest complex este util în studiul topologic (şi omologic) al posetului P, inelul coeficienţilor A jucînd un rol numai ajutător.

## §3. COMPLEXUL ALGEBRIC

Ca mai sus, fixăm un poset finit $(P, \leq)$ şi un inel comutativ unitar A.

6. Definiţie

Se numeşte "P-schemă peste A" o funcţie $a : [P] \longrightarrow A$. Cu ajutorul tripletului $(P,a,A)$ construim un complex (finit) de A-module libere de rang finit, în modul următor.

Pentru orice $i \in \{o,1,\ldots,l(P)+1\}$, punem:

$$K_i(a \mid A) = \bigoplus_{I \in \Delta_{i-1}(P)} A.I$$

(= A-modulul liber de bază $\Delta_{i-1}(P)$).

Pentru orice $i \in \{1,2,\ldots,l(P)+1\}$, definim aplicaţia A-liniară: $d_i : K_i(a \mid A) \longrightarrow K_{i-1}(a \mid A)$ prin:

$$(\forall)\ I \in \Delta_{i-1}(P)\ , \qquad d_i(I) = \sum_{x \in I} \varepsilon_I(x)\, a_x I_x \ ,$$

unde $a_x$ denotă valoarea în $x \in P$ a P-schemei date a.

OBSERVATIE

Modulo un shift de +1 în graduarea omologică, modulele $(K_i(a|A))_i$ coincid cu modulele complexului topologic de lanţuri $(\Gamma.(P,A), \partial.)$. Diferenţialele $(d_i)_i$ depind, însă, de P-schema aleasă $a:[P] \longrightarrow A$.

Diferenţialele complexului topologic $(\Gamma.(P,A), \partial.)$ sînt cazuri particulare ale diferenţialelor $(d_i)_i$ mai sus definite: anume, diferenţialele $(\partial_i)_i$ corespund P-schemei triviale : $a_x = 1$, $(\forall)\ x \in P$.//

Indexarea modulelor $(K_i(a \mid A))_i$ făcîndu-se nu după lungimea lanţurilor peste P, ci după cardinal, vom folosi următoarele notaţii mai comode:

punem $r(P) = l(P) + 1$ (cu $r(P) = r$, cînd nu este pericol de confuzie) şi, pentru $i \in \{o,1,\ldots, r(P)\}$, punem:

$$K_i(a \mid A) = \bigoplus_{|I| = i} A.I \quad (\text{unde } I \in \Delta(P)).$$

(Explicit: $K_i(a \mid A) = \bigoplus_{(x_o < x_1 \ldots < x_{i-1})} A.(x_o < \ldots < x_{i-1})$,

suma directă făcîndu-se după toate (i-1) lanţurile peste P).

Aşadar, obţinem şirul de A-module (libere) şi omomorfisme A-liniare:

$$(5) \quad \ldots 0 \longrightarrow K_n(a \mid A) \xrightarrow{d_n} K_{n-1}(a \mid A) \longrightarrow \ldots \longrightarrow K_1(a \mid A) \xrightarrow{d_1} K_o(a \ A) \longrightarrow 0 \ldots$$

12. Propoziţie

Pentru $i \in \{1,2,\ldots,r-1\}$: $d_i \circ d_{i+1} = 0$

Demonstraţie

Fie $I \in \Delta_i(P)$ un lanţ. Conform definiţiei diferenţialei d., avem succesiv:

$$d_i \circ d_{i+1}(I) = d_i\Big(\sum_{x \in I} \varepsilon_I(x) a_x I_x\Big) = \sum_{x \in I} \varepsilon_I(x) a_x \sum_{y \in I_x} \varepsilon_{I_x}(y) a_y I_{xy} =$$

$$= \sum_{x,y \in I : x < y} \big(\varepsilon_I(x)\varepsilon_{I_x}(y) + \varepsilon_I(y)\varepsilon_{I_y}(x)\big) a_x a_y I_{xy} = (\text{cf.}(1), \text{pro.}6, \S 1) = 0 \ //$$

Conform acestei propoziţii, rezultă că (5) este într-adevăr un complex de A-module libere (de rang finit).

7. Definiţie

Complexul (K.(a | A), d.) descris la (5), se numeşte "complexul algebric de lanţuri ale posetului P, definit de schema a: P$\longrightarrow$A". (sau "complexul-Koszul generalizat, asociat P-schemei a").

Adoptînd notaţiile din cazul topologic, vom introduce, pentru orice element $x \in P$, modulele:

$$(6) \quad \mathcal{F}_i(x) = \bigoplus_{I \in F_{i-1}(x)} A.I \ ; \quad \mathcal{L}_i(x) = \bigoplus_{I \in L_{i-1}(x)} A.I \ ,$$

$$\mathcal{A}_i(x) = \mathcal{F}_i(x) \oplus \mathcal{L}_i(x) \ ,$$

definite pentru i = o,1,...,r(P) (cu convenţia că suma directă după mulţimea vidă, este nulă).

13. Propoziţie

Pentru orice $x \in P$, $(\mathcal{A}.(x), d.)$ este un subcomplex al complexului algebric $(K.(a \mid A), d.)$.

Demonstraţie.

Avem de arătat că, pentru $i \in \{1, 2, \dots, r-1, r\}$ ; $d_i(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{A}_{i-1}$.

Or, dacă $I \in \mathcal{A}_i(x)$ este un vector din bază, el se poate afla în una şi numai una din situaţiile:

(a) $I \in F_{i-1}(x)$ . In acest caz, $I_y \in F_{i-2}(x)$, $(\forall)\ y \in I \setminus \{x\}$ şi $I_x \in L_{i-2}(x)$, deci $d_i(I) = \sum_{y \in I, y \neq x} a_y \varepsilon_I(y) I_y + a_x \varepsilon_I(x) I_x$ aparţine lui $\mathcal{F}_{i-1}(x) \oplus \mathcal{L}_{i-1}(x) = \mathcal{A}_{i-1}(x)$.

(b) $I \in L_{i-1}(x)$ . In acest caz, $I_y \in L_{i-2}(x)$, pentru orice $y \in I$, deci $d_i(I) = \sum_{y \in I} a_y \varepsilon_I(y) I_y \in \mathcal{L}_{i-1}(x) \subseteq \mathcal{A}_{i-1}(x)$ .//

Ca şi în cazul topologic, complexul local $(\mathcal{A}.(x), d.)$ are o importantă proprietate de "contractibilitate", în sensul următor.

Intîi, pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, r(P)-1\}$ , definim aplicaţia A-liniară $\varphi_i : \mathcal{A}_i(x) \longrightarrow \mathcal{A}_{i+1}(x)$, dată pe baza lui $\mathcal{A}_i(x)$ prin:

$$(7) \quad (\forall)\ I \in A_{i-1}(x) : \varphi_i(I) = \begin{cases} \varepsilon_I(x)\, I^x & \text{, dacă } I \quad L_{i-1}(x) \\ 0 & \text{, dacă } I \quad F_{i-1}(x)\ . \end{cases}$$

14. Propoziţie

Pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, r-1\}$, are loc relaţia:

$$\varphi_{i-1} \circ d_i + d_{i+1} \circ \varphi_i = a_x . id_{\mathcal{A}_i(x)}$$

Demonstraţie.

Vom verifica relaţia din enunţ pe orice vector din baza lui $\mathcal{A}_i(x)$. Deosebim două cazuri.

(a) $I \in F_{i-1}(x)$. In acest caz: $(\varphi_{i-1} \circ d_i + d_{i+1} \circ \varphi_i)(I) =$

$$= \varphi_{i-1}(d_i(I)) + d_{i+1}(\varphi_i(I)) = \varphi_{i-1}\Big(\sum_{y \in I, y \neq x} (y) a_y I_y + \varepsilon_I(x) a_x I_x\Big) =$$

$$= \sum_{y \in I, y \neq x} \varepsilon_I(y)\, a_y\, \varphi_{i-1}(I_y) + \varepsilon_I(x)\, \varepsilon_{I_x}(x) a_x I_x^x = \varepsilon_I(x)^2 a_x I =$$

$$= a_x \,.\, I.$$

(b) $I \in L_{i-1}(x)$. In acest caz: $(\varphi_{i-1} \circ d_i + d_{i+1} \circ \varphi_i)(I) =$

$$= \varphi_{i-1}\Big(\sum_{y \in I} \varepsilon_I(y) a_y I_y\Big) + \sum_{y \in I} \varepsilon_I(x)\, \varepsilon_{I^x}(y) a_y I_y^x + \varepsilon_I(x)\, \varepsilon_{I^x}(x) a_x I_x^x =$$

$$= \sum_{y \in I} \Big(\varepsilon_I(y)\, \varepsilon_{I_y}(x) + \varepsilon_I(x)\, \varepsilon_{I^x}(y)\Big) a_y I_y^x + I = \text{(din (2), Prop.6, §1)}$$

$$= I \,.$$

In continuare, presupunem că posetul $(P, \leq)$ este graduat.

15. Propoziţie

Pentru orice $x \in P$, idealul $\underline{a}_x = A.a_x$ anulează omologia complexului local $(\mathcal{A}.(x), d.)$.

Demonstraţie

Pentru $i = 0$, afirmaţia rezultă din $H_0(\mathcal{A}.(x)) = A/\underline{a}_x$ .

Pentru $i \in \{1,2,\ldots,r-1\}$ , fie $z \in \mathcal{A}_i(x)$ un ciclu.

Din Prop.14 urmează atunci:

$$a_x.z = (\varphi_{i-1} \circ d_i + d_{i+1} \circ \varphi_i)(z) = \varphi_{i-1}(d_i(z)) + d_{i+1}(\varphi_i(z)) =$$

$=$ (deoarece $z$ este ciclu) $= d_{i+1}(\varphi_i(z))$. Aşadar $a_x.z$ este bord, deci $\underline{a}_x.H_i(\mathcal{A}.(x)) = (0)$.

Rămîne să arătăm că $\underline{a}_x H_r(\mathcal{A}.(x)) = (0)$.

Fie $z = \sum_{I \in F_{r-1}(x)} \alpha_I . I$ un r-ciclu din $\mathcal{A}_r(x)$. Atunci:

$$0 = d_r(z) = \sum_{I \in F_{r-1}(x)} \alpha_I d_r(I) = \sum_{I \in F_{r-1}(x)} \alpha_I \Big(\sum_{y \in I, y \neq x} \varepsilon_I(y) a_y I_y\Big)$$

$$+ \sum_{I \in F_{r-1}(x)} \alpha_I \varepsilon_I(x)\, a_x I_x = z' + z''.$$

Cum $\mathcal{A}_{r-1}(x) = \mathcal{F}_{r-1}(x) \oplus \mathcal{L}_{r-1}(x)$ şi cum $z' \in \mathcal{F}_{r-1}(x)$, $z'' \in \mathcal{L}_{r-1}(x)$, obţinem $z' = o$, $z'' = o$.

Atunci $0 = z'' = \sum_{I \in F_{r-1}(x)} \alpha_I \varepsilon_I(x) a_x I_x$ implică $\alpha_I \varepsilon_I(x) a_x = o$ pentru orice $I \in F_{r-1}(x)$ (deoarece $I_x = I'_x \Rightarrow I = I'$), deci, cum $\varepsilon_I(x) \in \{-1, +1\}$, obţinem $a_x . \alpha_I = o$, $(\forall)\ I \in F_{r-1}(x)$.

Dar atunci $a_x . z = \sum_{I \in F_{r-1}(x)} a_x \alpha_I . I = 0$, deci $\underline{a}_x$ anulează şi $H_r(\mathcal{A}.(x))$.//

Vom exprima rezultatul Propoziţiei 15 în modul următor: "<u>pentru orice poset finit $(P, \leq)$ şi orice P-schemă $a: P \longrightarrow A$, idealul</u> $\underline{a}_P = \sum_{x \in P} A.a_x$ <u>anulează local omologia complexului algebric</u> $(K.(a \mid A), d.)$.

<u>OBSERVATIE</u>

Dacă $\underline{a}_P = A$, rezultă din cele de mai sus că $(K.(a \mid A), d.)$ este local aciclic. In particular, luînd schema $a: P \longrightarrow A$ trivială (i.e. $a_x = 1$, $(\forall)\ x \in P$), reobţinem aciclicitatea locală a complexului topologic de lanţuri peste $P$(cf.§2).//

In general, idealul $\underline{a}_P$ nu anulează <u>global</u> omologia complexului algebric $(K.(a \mid A), d.)$.

Totuşi, în anumite cazuri particulare importante, aceasta are loc.

<u>1.6. Corolar</u>

<u>Dacă postul finit $(P, \leq)$ este lanţ, atunci idealul</u> $\underline{a}_P$ <u>anulează omologia complexului algebric $(K.(a \mid A), d.)$</u>.

<u>Demonstraţie</u>.

Afirmaţia rezultă din Prop.15, împreună cu observaţia că $\Delta(P) = A(x)$, $(\forall)\ x \in P$, cînd $(P, \leq)$ este lanţ.//

Med 24842

# EXPUNEREA II

## COMPLEXUL KOSZUL : DEFINITIA

Fixăm un întreg $n > 0$ şi un inel comutativ unitar A. Prin $[n]$ vom nota lanţul standard: $(1 < 2 < \ldots < n)$, completînd această definiţie cu: $[0] = \emptyset$.
Pentru o submulţime $H \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, vom nota cu $[H]$ <u>lanţul</u> indus pe H de $[n]$.
O $[n]$-schemă (cf.Def.6;Exp.I) $a:[n] \longrightarrow A$ este pur şi simplu <u>un şir de n elemente din A</u>: $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ (ca atare, ordinea termenilor şirului este semnificativă; de asemenea, pot exista repetiţii printre elementele $a_1,a_2,\ldots,a_n$).

1. <u>Definiţie</u>

Se numeşte "<u>complexul Koszul asociat şirului $a : [n] \longrightarrow A$</u>" complexul algebric de lanţuri (cf.Exp.I,§3) definit de tripletul $([n], a, A)$. Acest complex se notează prin: $(K.(a \mid A),d.)$.
Pentru o bună ilustrare a acestei definiţii vom da cîteva realizări distinmcte (dar, evident,izomorfe) ale complexului astfel introdus. In această fază iniţială, vom indica doar proprietăţile imediate ce decurg din fiecare descriere în parte a complexului $(K.(a.|A),d.)$

## §1. COMPLEXUL ALGEBRIC AL LANTURILOR UNUI LANT FINIT

Remarcăm, întîi, că, pentru lanţul standard $[n]$, complexul simplicial $\Delta([n])$ (cf.Exp.I,§1) coincide cu algebra booleană. $\mathcal{P}([n])$ a tuturor părţilor mulţimii subiacente lui $[n]$.
Pentru $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, vom nota cu $\binom{[n]}{i}$ radicmalul de rang i al lui $\mathcal{P}([n])$, adică: $\binom{[n]}{i} = \{I \subseteq [n] \,/\, \#I = i\}$.
(Evident, $\#\binom{[n]}{i} = \binom{n}{i}$).

Pentru realizarea efectivă a complexului Koszul $(K_\bullet(a \mid A),d_\bullet)$ , vom considera algebra tensorială a modulului liber $A^n$, anume:

$$T(A^n) = \bigoplus_{i \geqslant 0} T_i(A^n) \ , \text{ cu } T_i(A^n) = (A^n)^{\otimes i}, \ (\forall) \ i \geqslant 0 \ .$$

Vom fixa o bază:

$$\mathcal{E} = ( E_1,\dots,E_n ) \text{ în } A^n \ ,$$

care determină pe fiecare componentă omogenă $T_i(A^n)$ baza

$$\mathcal{E}^{\otimes i} = \{ E_{x_1} \otimes E_{x_2} \otimes \ \dots \ \otimes E_{x_i} \ / \ x_k \in [n] \} \ , \ i \geqslant 1 \ .$$

$(T_o(A^n) = A$, cu baza $\mathcal{E}^{\otimes o} = \{1\}$ ) .

Astfel, pentru orice $i \geqslant o$, $T_i(A^n)$ este un A-modul liber, avînd rangul: $rg_A \ T_i(A^n) = n^i$.

Vom numi "<u>multilanţ</u>" peste $[n]$ , un "lanţ cu repetiţii" :

$$\lambda = (x_1 \leq x_2 \leq \ \dots \ \leq x_i) \ , \quad x_k \in [n] \ .$$

Monomul $E_\lambda = E_{x_1} \otimes \ \dots \ \otimes E_{x_i}$, definit de un multilanţ peste $[n]$ , se numeşte "<u>monomul canonic</u>" asociat lui $\lambda$ .

Dacă $\lambda$ este chiar un lanţ (i.e. nu are repetiţii), $\lambda = I =$ $= (x_1 < x_2 < \dots < x_i)$, $x_k \in [n]$ şi $i \leq n$ , monomul corespunzător $E_I = E_{x_1} \otimes E_{x_2} \otimes \ \dots \ \otimes E_{x_i}$ se numeşte "<u>standard</u>".

Asocierile $\lambda \longmapsto E_\lambda$ şi $I \longmapsto E_I$ sînt evident bijective.

Aşadar, pentru orice grad $i \geqslant o$, există exact $\binom{n+i-1}{n-1}$ monoame canonice de grad i în $T(A^n)$ şi, pentru $i \leq n$, există exact $\binom{n}{i}$ monoame standard de grad i în $T(A^n)$.

Identificarea unui lanţ $I \in \binom{[n]}{i}$ cu monomul standard $E_I$, permite definirea complexului Koszul $(K_\bullet(a \mid A),d_\bullet)$, în modul următor:

(1) $(\forall)\ i \in \{o,1,\dots,n\}$ , $K_i(a \mid A) = \bigoplus_{I \in \binom{[n]}{i}} A.E_I = \bigoplus_{|I| = i} A.E_I$ .

Aşadar, întrucît $\{E_I / I \in \binom{[n]}{i}\}$ face parte din baza lui $T_i(A^n)$, rezultă că putem defini $K_i(a|A)$ drept A-submodulul liber al lui $T_i(A^n)$, generat de monoamele standard de gradul i peste baza $\mathcal{E} = \{E_1,\dots,E_n\}$ a lui $A^n$, $i = o,1,\dots,n$ .

Diferenţiala complexului $K.(a \mid A)$ o definim prim :

(2) $(\forall)\ i \in \{1,2,\dots,n\}$ , $I \in \binom{[n]}{i}$, $d_i(E_I) = \sum_{x \in I} \mathcal{E}_I(x) a_x E_{I_x}$ ,

unde $a : [n] \longrightarrow A$ este $[n]$ - schema dată.

Această definiţie a modulelor şi diferenţialelor complexului $(K.(a \mid A), d.)$, depinde de baza $\mathcal{E}$ selectată în modulul liber $A^n$. Această dependenţă nu afectează proprietăţile complexului Koszul, după cum rezultă din următoarea

1. Propoziţie

Fie $\mathcal{E} = \{E_1,\dots,E_n\}$ şi $\mathcal{F} = \{F_1,\dots,F_n\}$ două baze ale modulului liber $A^n$ şi fie $h: A^n \xrightarrow{\sim} A^n$ automorfismul liniar de trecere între $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{F}$.

Pentru orice $i \in \{o,1,\dots,n\}$ , fie $h^{(i)}: K_i(a \mid A) \longrightarrow K_i(a \mid A)$ omomorfismul dat de:

$$(\forall)\ I \in \binom{[n]}{i} \quad , \quad h^{(i)}(E_I) = F_I \ .$$

Atunci $(h^{(i)})_{i=o,1,\dots,n}$ este un izomorfism al complexului Koszul $(K^{\mathcal{E}}.(a \mid A),d.)$, construit pe baza $\mathcal{E}$ , pe complexul Koszul $(K^{\mathcal{F}}.(a \mid A),d.)$ , construit pe baza $\mathcal{F}$ .

Demonstraţie

$h^{(i)}$ este restricţia la $\bigoplus_{|I|=i} AE_I$ a puterii tensoriale $h^{\otimes i}$ . $h^{(i)}$ este bine definită, deoarece $h^{\otimes i}$ duce monoame standard peste $\mathcal{E}$ în monoame standard peste $\mathcal{F}$. Aşadar, $h^{(i)}$ este izomorfism de A-module.

Pentru orice lanţ $I \in \binom{[n]}{i}$, avem:

$$h^{(i-1)} \circ d_i(E_I) - d_i \circ h^{(i)}(E_I) = h^{(i-1)}\Big(\sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)a_x E_{I_x}\Big) -$$

$$- d_i(F_I) = \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)a_x h^{(i-1)}(E_{I_x}) - \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)a_x F_{I_x} .$$

Cum $h^{(i-1)}(E_{I_x}) = F_{I_x}$ pentru orice $x \in I$, obţinem:

$$h^{(i-1)} \circ d_i(E_I) = d_i \circ h^{(i)}(E_I).$$

Aşadar $(h^{(i)})_i$ comută cu diferenţiala Koszul, deci este un izomorfism de complexe.//

Conform acestei propoziţii, rezultă că pentru studiul complexului Koszul $(K.(a \mid A), d.)$, putem considera o bază arbitrară $\mathcal{E} = (E_1,\ldots,E_n)$ în $A^n$, utilizînd definiţia (1) a modulelor $K_i(a|A)$, $i = 0,1,\ldots,n$.

Putem atunci <u>identifica</u> orice lanţ $I \in \binom{[n]}{i}$ cu monomul standard corespunzător $E_I$, încît vom scrie un element $w$ din $K_i(a \mid A)$ sub forma: $w = \sum_{|I| = i} \alpha_I . I$ , $\alpha_I \in A$ $(i = 0,1,\ldots,n)$.

Laticea booleană $\mathcal{P}([n])$, ale cărei elemente indexează baza modulului $\bigoplus_{i=0}^{n} K_i(a \mid A)$, are proprietatea importantă de a fi complementabilă, i.e. $\mathcal{P}([n])$ posedă un operator involutiv de complementar $^{-} : \mathcal{P}([n]) \longrightarrow \mathcal{P}([n])$, dat de:

$$(\forall)\ I \in \mathcal{P}([n]),\ \bar{I} = [n] \setminus I .$$

Acest operator acţionează pe radicali astfel:

$$(\forall)\ i \in \{0,1,\ldots,n\},\quad ^{-} : \binom{[n]}{i} \xrightarrow{\sim} \binom{[n]}{n-i} .$$

Structura autoduală, introdusă pe $\mathcal{P}([n])$ de operatorul de complementare, are consecințe importante pentru structura complexului Koszul construit pe $([n], a, A)$.

Pentru descrierea acestor consecințe, reamintim că, pentru un A-modul M, se numește "<u>dual al lui M</u>", A-modulul: $M^o = \mathrm{Hom}_A(M,A)$. Pentru un omomorfism A-liniar $f: M \longrightarrow N$, se numește "<u>dual al lui f</u>" omomorfismului A-liniar $f^o : N^o \longrightarrow M^o$, dat de : $(\forall)\ \alpha \in N^o$, $f^o(\alpha) = \alpha \circ f$. Asocierile $M \mapsto M^o$, $f \mapsto f^o$ constituie un endofunctor contravariant pseudo-involutiv, al categoriei $\mathbb{M}\mathrm{od}\,(A)$.

Dacă $M = A^n$ este un modul liber, atunci $M^o = (A^n)^o$ rămîne liber, de același rang. Unei baze $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_n)$ a lui $A^n$, îi corespunde "<u>baza duală</u>" $\mathcal{E}^o = (E_1^o, \ldots, E_n^o)$, dată de: $E_i^o(E_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i,j \leq n$.

In acest caz, omomorfismul $\gamma : A^n \longrightarrow (A^n)^o$, dat de:

$$\gamma(E_i) = E_i^o \quad , \ i = 1,2,\ldots,n \quad ,$$

este un izomorfism de A-module, denumite "<u>izomorfismul canonic de dualizare</u>" al A-modulului liber $A^n$ (existența acestui izomorfism se mai exprimă spunînd că "modulele libere de rang finit peste A sînt autoduale").

Considerăm acum complexul Koszul $(K_\bullet(a \mid A), d_\bullet)$, asociat tripletului $([n], a, A)$. Dualizarea modulelor și diferențialelor acestui complex, conduce la <u>complexul co-omologic</u> $(K^o_\bullet(a|A), d^o_\bullet)$:

$$(3) \quad K_0^o(a\ A) \xrightarrow{d_1^o} K_1^o(a\ A) \xrightarrow{d_2^o} \ldots \longrightarrow K_{n-1}(a\ A) \xrightarrow{d_n^o} K_n^o(a\ \ A).$$

Vom indexa acest complex după regula:

(4) $(\forall)\ i \in \{o,1,\ldots,n\}$, $K_i^o\,(a \mid A) := K^{n-i}(a|A)$ și

$d_i^o = d^{n-i+1}$, încît (3) se poate scrie sub forma:

$$(3)' \quad K^n(a|A) \xrightarrow{d^n} K^{n-1}(a|A) \longrightarrow \ldots \longrightarrow K^1(a|A) \xrightarrow{d^1} K^o(a\ \ A).$$

De asemenea, vom nota cu $\gamma_i : K_i(a|A) \xrightarrow{\sim} K^{n-i}(a|A)$ izomorfismul canonic de dualizare, $i = o,1,\dots,n$ .

Operatorul de complementare al laticii booleene $\mathcal{P}([n])$, definește familia de izomorfisme A-liniare:

$i=o,1,\dots,n \quad \rho_i : K_i(a|A) \xrightarrow{\sim} K_{n-i}(a|A), \quad \rho_i(E_I) = E_{\bar{I}}$ ,

$(\forall)\ I \in \binom{[n]}{i}$.

Putem acum formula următorul rezultat.

2. Propoziţie

Familia de izomorfisme de A-module: $(t_i)_{i=o,1,\dots,n}$ , cu $t_i = \gamma_{n-i} \circ \rho_i \quad : K_i(a|A) \xrightarrow{\sim} K^i(a|A)$, pentru $i = o,1,\dots,n$ , constituie un izomorfism de complexe.

Demonstraţie

Trebuie să arătăm doar că $(t_i)_i$ comută cu diferenţialele, adică:

$(\forall)\ i \in \{1,2,\dots,n\}$ , $I \in \binom{[n]}{i}$ : $(d^i \circ t_i - t_{i-1} \circ d_i)(I) = 0$.

Or, $(d^i \circ t_i - t_{i-1} \circ d_i)(I) = d^i(t_i(I)) - t_{i-1}(d_i(I)) =$

$= d^i(\bar{I}^o) - t_{i-1}(\sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)a_x I_x) = d^i(\bar{I}^o) - \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)a_x(\overline{I_x})^o =$

$= \bar{I}^o \circ d_{n-i+1} - \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)a_x(I_x)^o$.

Pentru orice vector J al bazei modulului $K_{n-i+1}$ , avem:

$(\bar{I}^o \circ d_{n-i+1} - \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)a_x(\overline{I_x})^o)(J) = \bar{I}^o(d_{n-i+1}(J)) -$

$- \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)a_x (\overline{I_x})^o(J) = \sum_{y\in J} \varepsilon_J(y)a_y\ \bar{I}^o(J_y) - \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)a_x(I_x)^o(J)$

$=$ (conform definiţiei bazei duale) $= \sum_{y\in J:\ J_y=\bar{I}} \varepsilon_J(y)a_y -$

$- \sum_{y\in J:\ \bar{I}^y=J} \varepsilon_J(x)a_x = \sum_{y\in J:\ \bar{I}^y=J} \varepsilon_J(y)a_y - \sum_{x\in I:\ (\overline{I_x})=J} \varepsilon_I(x)a_x =$

$=$ (deoarece $(\overline{I_x}) = \bar{I}^x$) $=$

$$= \sum_{y\in J:\bar{I}^y=J} \varepsilon_J(y)a_y - \sum_{x\in I:\bar{I}^x=J} \varepsilon_I(x)a_x = (\text{deoarece } \bar{I}^y = \bar{I}^x \Rightarrow x=y) =$$

$$= \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)a_x - \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x)a_x = 0.$$

Aşadar $(d^i \circ t_i - t_{i-1} \circ d_i)(I)$ se anulează pe orice vector al bazei lui $K_{n-i+1}$, deci $(d^i \circ t_i - t_{i-1} \circ d_i)(I) = 0$, pentru orice $I \in \binom{[n]}{i}$. Aceasta înseamnă că $d^i \circ t_i - t_{i-1} \circ d_i = 0$, ceea ce încheie demonstraţia propoziţiei.//

3. Corolar

Pentru orice $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ are loc izomorfismul de A-module:

$$H_i(a|A) \cong H^i(a|A) \ ,$$

unde $H_i(a|A) = H(K_i(a|A))$ şi $H^i(a|A) = H(K^i(a|A)) =$ $= H(K^0_{1-i}(a|A))$.

Acest corolar arată că proprietăţile omologice ale complexului Koszul $(K.(a|A),d.)$, coincid cu proprietăţile sale co-omologice, fapt pe care îl exprimăm spunînd: "$(K.(a|A),d.)$ este (omologic) auto-dual".

OBSERVATIE

Vom vedea la Exp.III că auto-dualitatea complexului Koszul $(K.(a|A),d.)$ urmează din proprietăţile structurii multiplicative canonice a acestui complex.

Vom trece, în continuare, la a doua descriere a complexului Koszul asociat unui triplet $([n], a, A)$. Deşi această nouă descriere evidenţiază structura multiplicativă a complexului Koszul, ne vom limita aici doar la deducerea unor consecinţe directe privind structura liniară a acestui complex, urmînd să ne ocupăm mai îndeaproape de structura sa multiplicativă la Exp.III.

## §2. COMPLEXUL ALGEBREI EXTERIOARE

Construcţia complexului $(K.(a|A),d.)$, dată la §1, s-a bazat pe selecţia acelor monoame tensoriale din $T.(A^n)$, care sînt standard peste o bază fixată $\mathcal{E} = (E_1,\ldots,E_n)$ din $A^n$.

Trecerea de la monoamele canonice peste $\mathcal{E}$, la monoamele standard peste $\mathcal{E}$, revine la eliminarea repetiţiilor în multilanţuri.

Această eliminare se poate face "global", factorizînd algebra tensorială $T.(A^n)$ prin idealul bilateral $\mathcal{J}$, generat de mulţimea $\{w\otimes w / w\in T.(A^n)\}$ a tuturor pătratelor tensoriale. Algebra-cît $\Lambda.(A^n) = T.(A^n)/_{\mathcal{J}}$ este, după cum se ştie, algebra exterioară peste modulul liber $A^n$.

$\Lambda.(A^n)$ este o algebră unitară, asociativă, anti-comutativă.

Ea este chiar o A-algebră graduată, anume:

(4) $\Lambda.(A^n) = \bigoplus_{i=o}^{n} \Lambda_i(A^n)$, cu $\Lambda_i(A^n) = \bigoplus_{|I|=i} A.E_I$, unde,

pentru o bază fixată $\mathcal{E} = (E_1,\ldots,E_n)$ a lui $A^n$, pentru $i\in\{o,1,\ldots,n\}$ şi $I = (x_1 < x_2 < \ldots < x_i)\in\binom{[n]}{i}$, $E_I$ denotă monomul exterior: $E_I = E_{x_1}\wedge E_{x_2}\wedge \ldots \wedge E_{x_i}$.

Astfel, $\Lambda_i(A^n)$ este liber şi $rg_A\ \Lambda_i(A^n) = \binom{n}{i}$, $i = o,1,\ldots,n$.

Cu ajutorul $[n]$ - schemei fixate $a : [n]\longrightarrow A$, definim pe $\Lambda.(A^n)$ familia de omomorfisme A-liniare:

(5) $(\forall)\ i\in\{1,2,\ldots,n\}$, $d_i: \Lambda_i(A^n)\rightarrow\Lambda_{i-1}(A^n)$, cu

$$d_i(E_I) = \sum_{x\in I} \mathcal{E}_I(x) a_x E_{I_x} \quad \left(\text{pentru } I\in\binom{[n]}{i}\right).$$

OBSERVATIE

$[n]$-schema $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ determină pe $A^n$ forma liniară $L_a : A^n\longrightarrow A$, dată pe baza $\mathcal{E} = (E_1,\ldots,E_n)$ prin:

$L_a(E_i) = a_i$; $i = 1,2,\ldots,n$. Atunci familia de aplicaţii A-liniare

$(d_i)_i$, definită la (4), coincide cu familia componentelor omogene ale aplicației liniare $\delta_{L_a} : \Lambda.(A^n) \longrightarrow \Lambda.(A^n)$, dată de:

$(\forall)\ w \in \Lambda.(A^n)$, $\delta_{L_a}(w) = w \llcorner L_a$, unde "$\llcorner$" denotă produsul interior stîng pe algebra exterioară a lui $A^n$. (cf.Bourbaki, Algèbre, ch.lo, §9).//

Se verifică numaidecît că definițiile (4) și (5) sînt independente (pînă la un izomorfism) de alegerea bazei $\mathcal{E}$ a lui $A^n$. Mai mult, familia de omomorfisme liniare $(d_i)_i$, dată la (5), verifică: $d_i \circ d_{i+1} = o$, $i = 1,2,\ldots,n-1$, i.e.$(\Lambda.(A^n),d.)$ constituie un complex (finit) de A-module libere de rang finit.

Are loc următorul rezultat, demonstrația căruia este omisă.

4. Propoziție

Fie $a: [n] \longrightarrow A$ o $n$-schemă, definind complexul Koszul $(K.(a|A),d.)$ (cf.§1) și complexul algebrei exterioare $(\Lambda.(A^n),d.)$ (cf.(4),(5)). Familia de aplicații liniare $(\psi_i)i=o,1,\ldots,n$, date de:

$(\forall)\ i \in \{o,1,\ldots,n\}$, $I \in \binom{[n]}{i}$, $I = (x_1 < \ldots < x_n)$ :

$$\psi_i\,(E_{x_1} \otimes E_{x_2} \otimes \ldots \otimes E_{x_n}) = E_{x_1} \wedge E_{x_2} \wedge \ldots \wedge E_{x_n}$$

constituie un izomorfism al complexului $(K.(a|A),d.)$ pe complexul $(\Lambda.(A^n),d.)$.

Conform acestui rezultat, vom identifica, în continuare, complexul Koszul construit pe tripletul $([n], a, A)$, cu complexul algebrei exterioare $(\Lambda.(A^n),d.)$, definit de diferențiala (5), asociată schemei $a: [n] \longrightarrow A$. Anti-comutativitatea algebrei exterioare $\Lambda.(A^n)$, are o consecință importantă pentru structura complexului Koszul construit pe $([n], a, A)$, anume invarianța la permutări a proprietăților omologice ale acestui complex.

Pentru formularea şi demonstrarea acestei proprietăţi, vom considera grupul simetric $S(n)$ al permutărilor mulţimii $\{1,2,\dots,n\}$ (subiacentă lanţului $[n]$).

Selecţia bazei $\mathcal{E} = (E_1,\dots,E_n)$ în $A^n$, determină pe $A^n$ structura tautologică de $S(n)$-modul $A$-liniar, definită prin identificarea elementelor lui $S(n)$ cu matricile de permutare în baza $\mathcal{E}$. Mai precis, orice $s \in S(n)$ acţionează pe $A^n$ prin extensia $A$-liniară a acţiunii:

$(\forall)\ i \in \{1,2,\dots,n\}$, $(s, E_i) = E_{s(i)}$.

Această structură de $S(n)$-modul pe $A^n$, se extinde canonic la puterile exterioare $\Lambda_i(A^n)$, în modul următor:

(6) $(\forall)\ i \in \{1,2,\dots,n\}$, $I = (x_1 < \dots < x_i) \in \binom{[n]}{i}$, $s \in S(n)$ :

$$(s,E_I) = (s,E_{x_1}\wedge \dots \wedge E_{x_i}) = E_{s(s_1)}\wedge \dots \wedge E_{s(x_i)} = \mathcal{E}_I(s)E_{[sI]},$$

unde $\mathcal{E}_I(s) = (-1)^{\#\{x<y/x,y\in I \text{ şi } s(x)>s(y)\}}$, iar $[sI]$ denotă lanţul construit pe mulţimea $sI = \{s(x_1),\dots,s(x_i)\}$.

Pentru $i = 0$, acţiunea lui $S(n)$ pe $\Lambda_0(A^n) = A$ este cea identică (trivială).

<u>OBSERVATIE</u>

Schimbarea bazei în $A^n$ induce la o structură de $S(n)$-modul similară (izomorfă) cu cea de mai sus, deci, prin extindere la algebra exterioară, conduce la o structură de $S(n)$-modul pe $\Lambda.(A^n)$, similară cu (6).//

Aşadar, orice permutare $s \in S(n)$, defineşte pe algebra exterioară $\Lambda.(A^n)$, un automorfism $A$-liniar: $(\forall)\ i \in \{0,1,\dots,n\}$, $I \in \binom{[n]}{i}$:

(6)' $\tilde{s}_i: \Lambda_i(A^n) \xrightarrow{\sim} \Lambda_i(A^n)$, $\tilde{s}_i(E_I) = \mathcal{E}_I(s)\ E_{[sI]}$, cu $\mathcal{E}_I(s)$, $[sI]$ definite la (6).

Aplicînd permutarea $s$ valorilor $[n]$-schemei $a: [n] \longrightarrow A$, obţinem o nouă $[n]$-schemă :

(7) $\quad sa : [n] \longrightarrow A$, cu $(sa)(x) = a_{s(x)}$, $(\forall)\ x \in [n]$.

Aşadar, cele $n!$ permutări din $S(n)$ determină $\leq n!$ diferenţiale Koszul pe $\Lambda.(A^n)$, asociate permutărilor $\{sa / s \in S(n)\}$ ale schemei iniţiale $a : [n] \longrightarrow A$.

Pentru a urmări dependenţa de schema aleasă, vom nota diferenţiala Koszul pe $\Lambda.(A^n)$, asociată unei scheme $a: [n] \to A$ prin: $d.(a \mid A)$.

Sîntem acum în măsură să formulăm următorul rezultat.

<u>5. Propoziţie</u>

<u>Pentru orice permutare $s \in S(n)$, familia de aplicaţii A-liniare $(\tilde{s}_i)_{i=0,1,\ldots,n}$, cu $\tilde{s}_i : \Lambda_i(A^n) \longrightarrow \Lambda_i(A^n)$ dat de (7), constituie un izomorfism al complexului $(\Lambda.(A^n), d.(a \mid A))$ pe complexul $(\Lambda.(A^n), d.(s^{-1}a \mid A))$.</u>

<u>Demonstraţie</u>

Trebuie să arătăm doar că $\tilde{s}.$ comută cu diferenţialele Koszul, adică: $(\forall)\ i \in \{1,2,\ldots,n\}$ :

$$\tilde{s}_{i-1} \circ d_i(a\ A) = d_i(s^{-1}a \mid A) \circ \tilde{s}_i$$

Verificăm această egalitate pe fiecare vector al bazei lui $\Lambda_i(A^n)$. Aşadar, considerăm un lanţ $I \in \binom{[n]}{i}$ şi calculăm:

$$(\tilde{s}_{i-1} \circ d_i(a|A) - d_i(s^{-1}a \mid A) \circ \tilde{s}_i)(E_I) = \tilde{s}_{i-1}(d_i(a \mid A)(E_I)) -$$
$$- d_i(s^{-1}a \mid A)(\tilde{s}_i(E_I)) = \tilde{s}_{i-1}\Big(\sum_{x \in I} \varepsilon_I(x) a_x E_{I_x}\Big) -$$
$$- d_i(s^{-1}a|A)(\varepsilon_I(s) \cdot E_{[sI]}) = \sum_{x \in I} \varepsilon_I(x) a_x\, \tilde{s}(E_{I_x}) -$$
$$- \varepsilon_I(s) \sum_{y \in [sI]} \varepsilon_{[sI]}(y)\, a_{s^{-1}(y)}\, E_{[sI]\, y} = (\text{punînd } y = sx, x\ \ I) =$$

$$= \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x) a_x \cdot \varepsilon_{I_x}(s)\, E_{[sI]_x} - \sum_{x\in I} \varepsilon_I(s)\varepsilon_{[sI]}(sx)\, a_{s^{-1}s(x)}\, E_{[sI]_{sx}} =$$

$$= (\text{deoarece } [sI_x] = [sI]_{sx}) = \sum_{x\in I} \left(\varepsilon_I(x)\,\varepsilon_{I_x}(s) - \varepsilon_I(s)\,\varepsilon_{[sI]}(sx)\right) a_x E_{[sI_x]}$$

Vom arăta că fiecare coeficient în ultima sumă, este egal cu zero.

Avem (conform def.2,Exp.I şi (6) de mai sus):

$$\varepsilon_I(x)\,\varepsilon_{I_x}(s) - \varepsilon_I(s)\,\varepsilon_{[sI]}(sx) = (-1)^{\nu_I(x)}(-1)^{\mu_{I_x}(s)} - (-1)^{\mu_I(s)}(-1)^{\nu_{[sI]}(sx)}$$

unde: $\nu_I(x) = \#\{y\in I / y<x\}$ , $\nu_{[sI]}(sx) = \#\{w\in I \mid sw < sx\}$

$\mu_I(s) = \#\{t<u / t, u\in I \text{ şi } st>su\}$, $\nu_{[sI]}(sx) = \#\{w\in I / sw < sx\}$

Anularea coeficientului lui $a_x E_{[sI_x]}$ în ultima sumă, revine

aşadar la următoarea congruenţă:

$$(*) \qquad \nu_I(x) + \mu_{I_x}(s) \equiv \mu_I(s) + \nu_{[sI]}(sx) \qquad (\text{mod } 2),$$

pentru orice $x\in I$.

Să remarcăm, întîi, că, pentru $x\in I$ fixat:

$\mu_I(s) = \#\{y<z / y,z\in I \text{ şi } sy>sz\} = \#\{y<z/y,z\in I_x \text{ şi } sy>sz\} + \#\{y<x \mid y\in I \text{ şi } sy>sx\} + \#\{x<z/z\in I \text{ şi } sz<sx\} =$

$$= \mu_{I_x}(s) + \Theta_I^+(s,x) + \Theta_I^-(s,x),$$

unde: $\Theta_I^+(s,x) = \#\{y<x / y\in I \text{ şi } sy>sx\}$, $\Theta_I^-(s,x) = \{x<z / z\in I$ şi $sz<sx\}$.

Pe de altă parte:

$\nu_{[sI]}(sx) = \#\{w\in I/sw<sx\} = \#\{u<x / u\in I \text{ şi } su<sx\} +$

$+ \#\{v>x / v\in I \text{ şi } sv<sx\} = \#\{u<x/u\in I \text{ şi } su<sx\} +$

$+ \Theta_I^-(s,x)$.

Astfel:

$\mu_I(s) + \nu_{[sI]}(sx) = \mu_{I_x}(s) + \Theta_I^+(s,x) + \Theta_I^-(s,x) + \#\{u<x/u\in I$ şi $su<sx\} + \Theta_I^-(s,x) \equiv \mu_{I_x}(s) + \Theta_I^+(s,x) + \#\{u<x/u\in I \text{ şi } su<sx\}$

(mod 2).

Inlocuind în membrul drept din (x) şi efectuînd apoi reducerile, rămîne să arătăm că:

$$\nu_I(x) = \# \{ y < x / y \in I \quad \text{şi } sy > sx \} + \# \{ u < x / u \in I \quad \text{şi } su < sx \} \pmod 2 .$$

Cum s este o permutare pe $[n]$, definiţia lui $\nu_I(x)$ arată că această ultimă congruenţă este valabilă.//

6. Corolar

Fie $a: [n] \longrightarrow A$ o $[n]$-schemă şi $s \in S(n)$ p permutare. Pentru orice $i \in \{o,1,\dots,n\}$ are loc izomorfismul de A-module:

$$H_i(K.(a \mid A)) = H_i(K.(sa \mid A))$$

Demonstraţie

Afirmaţia rezultă din Prop.5, Prop.4 şi observaţia că $s^{-1}$ parcurge grupul $S(n)$ odată cu $s \in S(n)$.//

Corolarul 6 arată că proprietăţile omologiei complexului Koszul $(K.(a|A),d.) = (\Lambda.(A^n),d.(a|A))$ depind de imaginea $[n]$-schemei $a: [n] \longrightarrow A$, adică de multisetul $\{a_1,\dots,a_n\}$ şi nu de şirul $(a_1,\dots,a_n)$.

In particular, dacă shema $a: [n] \longrightarrow A$ este injectivă, $H.(K.(a|A))$ depinde de mulţimea $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ (şi nu de şirul $(a_1,\dots,a_n)$), deci de idealul $\underline{a}.$, generat de elementele imaginii lui a.

In cele ce urmează, vom considera dependenţa omologiei complexului Koszul $(K.(a\ A),d.)$ de idealul $\underline{a}. \subseteq A$. De aceea, $[n]$-schema (şirul) care dă structura diferenţială pe $K.(a|A)$, va fi în mod tacit presupusă injectivă.

## §3. COMPLEXUL MINORILOR UNEI MATRICI GENERICE

Vom da o nouă descriere complexului Koszul asociat unui triplet $([n], a, A)$, bazîndu-ne pe observaţia că, într-un sistem de coordonate pe $A^n$, baza modulului liber $\bigwedge_i(A^n)$ este indexată de toţi minorii maximali ai unei anumite ixn-matrici generice peste A, cu $i = o,1,\dots,n$.

Pentru aceasta, considerăm inelul de polinoame

$$R = A\left[X_j^{(i)}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

avînd ca variabile intrările nxn-matricii generice $X = (X_j^{(i)})_{1\ i\ n}$

$[n]$ -schema fixată $a: [n]\longrightarrow A$ pune în evidenţă vectorul din $A^n$:

$$(X_1^{(o)},\dots, X_n^{(o)}) = (a_1,\dots,a_n) \quad (\text{i.e. } X_j^{(o)} = a_j, j = 1,\dots,n\ ).$$

Pentru $k\in\{1,2,\dots,n\}$, considerăm kxn-matricea generică:

$$X(k) = (X_j^{(i)})_{1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant n},$$

ai cărei minori maximali (indexaţi de toate lanţurile $I\in \binom{[n]}{k}$) îi notăm cu:

$$\Delta(I) = \det(X_j^{(i)})_{1\leqslant i\leqslant k, j\in I},\ (\forall)\ I\in \binom{[n]}{k}.$$

Convenim că determinantul matricii vide este $1\in A$.

Pentru $k\in\{o,1,\dots,n\}$, definim atunci:

(8) $\quad M_k(a\mid A) = \bigoplus_{|I|=k} A.\Delta(I) \qquad (\text{cu } \Delta(1) = 1).$

Astfel, $M_k(a|A)$ este A-submodulul liber din inelul R, avînd ca bază toţi minorii maximali ai matricii generice $X(k)$. Aceşti minori sînt polinoame omogene de grad k, ireductibile în R.

Pe familia de module $(M_k(a|A))_{k=o,1,\dots,n}$, definim aplicaţiile A-liniare:

(9) $(\forall)\ k\in\{1,2,\dots,n\}$, $d_k(a\mid A): M_k(a|A)\longrightarrow M_{k-1}(a|A)$, unde, pentru orice $I\in\binom{[n]}{k}$:

$$d_k(a|A)\ (\Delta(I)) = \det(X_j^{(i-1)})_{1\leqslant i\leqslant k,\ j\in I}$$

OBSERVATIE

Acţiunea lui $d_k(a|A)$ comportă paşi distincţi:

(a) coborîrea cu 1 a indicelui superior din orice minor $\Delta(I)$

(b) dezvoltarea determinantului astfel obţinut după minorii primei linii, pe baza definiţiei: $X_j^{(o)} = a_j$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Explicit, pentru orice lanţ $I = (j_1 < j_2 < \ldots < j_k) \in \binom{[n]}{k}$,

$$d_k(a|A)(\Delta(I)) = d_k(a|A)\left(\det\begin{bmatrix} X_{j_1}^{(1)} & \ldots & X_{j_k}^{(1)} \\ \vdots & & \\ X_{j_1}^{(k)} & \ldots & X_{j_k}^{(k)} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{bmatrix} X_{j_1}^{(0)} & \ldots & X_{j_k}^{(0)} \\ X_{j_1}^{(1)} & \ldots & X_{j_k}^{(1)} \\ \vdots & & \\ X_{j_1}^{(k-1)} & \ldots & X_{j_k}^{(k-1)} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{j_1} & \ldots & a_{j_k} \\ X_{j_1}^{(1)} & \ldots & X_{j_k}^{(1)} \\ \vdots & & \\ X_{j_1}^{(k-1)} & \ldots & X_{j_k}^{(k-1)} \end{bmatrix} = \sum_{x \in I} \varepsilon_I(x)\, a_x\, \Delta(I_x) //$$

Cu notaţiile de mai sus, putem formula următoarea

7. Propoziţie

Familia de A-module (libere, de rang finit) şi aplicaţii A-liniare $(M_\cdot(a|A), d_\cdot(a|A))$ constituie un complex peste A.

Demonstraţie

Trebuie să arătăm că $(d_\cdot(a|A))$ este o diferenţială, adică:

$d_k(a|A) \circ d_{k+1}(a|A) = 0$, $(\forall)$ $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$.

Pentru orice lanţ $I \in \binom{[n]}{k+1}$, $I = (j_1 < \ldots < j_k)$, avem:

$$d_k(a|A) \circ d_{k+1}(a|A) = d_k(a|A)\left(\det (X_j^{(i-1)})_{1 \le i\ k,\, j \in I}\right) =$$

$$= d_k(a|A)\left(\det\begin{bmatrix} a_{j_1} & \ldots & a_{j_k} \\ X_{j_1}^{(1)} & \ldots & X_{j_k}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{j_1}^{(k-1)} & \ldots & X_{j_k}^{(k-1)} \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} a_{j_1} & \ldots & a_{j_k} \\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_k} \\ X_{j_1}^{(1)} & \ldots & X_{j_k}^{(1)} \\ \vdots & & \\ X_{j_k}^{(k-2)} & \ldots & X_{j_k}^{(k-2)} \end{bmatrix} = 0$$

(deoarece primele două linii ale acestui ultim determinant sînt egale).//

8. Propoziţie

Complexul de A-module libere $(M.(a|A), d.(a|A))$ este canonic izomorf complexului Koszul $(K.(a|A), d.)$, asociat tripletului $([n], a, A)$ (cf.§1).

Demonstraţie

In adevăr, modulele pe care sînt construite cele două complexe sînt izomorfe, deoarece, pentru orice $i \in \{o,1,\dots,n\}$ :

$$K_i(a|A) = \bigoplus_{|I| = i} A.E_I \quad , \quad M_i(a|A) = \bigoplus_{I = i} A.\Delta(I) .$$

Astfel, pentru orice $i \in \{o,1,\dots,n\}$ , avem izomorfismul A-liniar:

$$h_i : K_i(a|A) \xrightarrow{\sim} M_i(a|A), \text{ dat de:}$$

$$(\forall) \quad I \in \binom{[n]}{i} \quad , \quad h_i(E_I) = \Delta(I) .$$

$(h_i)_{i \in \{o,1,\dots,n\}}$ este chiar izomorfism de complexe, deoarece diferenţiala $d.(a|A)$ a complexului $(M.(a|A), d.(a|A))$ acţionează prin dezvoltarea după minorii primei linii ai unei matrici pătratice (cf.(9)), regulă care coincide cu cea după care acţionează diferenţiala Koszul (cf.§1).//

Această propoziţie arată că (8) şi (9) de mai sus ne pun în prezenţa unui nou model al complexului Koszul asociat unui triplet $([n], a, A)$.

Cu ajutorul acestui model, putem demonstra rapid anumite proprietăţi ale complexelor Koszul.

Ne limităm aici la indicarea legăturilor naturale între mai multe disferenţiale Koszul pe un acelaşi modul subiacent.

Pentru aceasta, fixăm modulul $M. = \bigoplus_{k=o}^{n} M_k(.|A)$ (remarcînd că definiţia (8) a acestui modul nu depinde de $[n]$-schema aleasă) şi, pentru orice întreg $m \geq 1$, fixăm m scheme:

$$a^{(\ell)} : [n] \longrightarrow A, \quad l = 1,2,\dots,m .$$

Fiecare asemenea schemă introduce pe M. diferenţiala Koszul:

$$d_{\bullet}^{(\ell)} = d_{\bullet}(a^{(\ell)} \mid A).$$

Aşadar, obţinem m complexe cu acelaşi modul subiacent:

$$(M_{\bullet}, d_{\bullet}^{(\ell)})_{l=1,2,\dots,m}$$

9. Propoziţie

Pentru orice $l,p \in \{1,2,\dots,m\}$ au loc relaţiile:

(i) $d_{\bullet}^{(\ell)} \circ d_{\bullet}^{(\ell)} = 0$

(ii) $d_{\bullet}^{(\ell)} \circ d_{\bullet}^{(p)} + d_{\bullet}^{(p)} \circ d_{\bullet}^{(\ell)} = 0$

Demonstraţie

(i) spune doar că $d_{\bullet}^{(\ell)}$ este o diferenţială pe M., fapt arătat deja la Prop.7.

Pentru a demonstra (ii), considerăm un întreg $k \in \{1,2,\dots,n\}$, un lanţ $I = (j_1 < \dots < j_k) \in \binom{[n]}{k}$ şi verificăm relaţia pe vectorul $\Delta(I)$ al bazei lui $M_k$.

Avem (cf.(9)) :

$$d_{k-1}^{(\ell)} \circ d_k^{(p)} (\Delta(I)) = \det \begin{bmatrix} a_{j_1}^{(\ell)} & \dots & a_{j_k}^{(\ell)} \\ a_{j_1}^{(p)} & \dots & a_{j_k}^{(p)} \\ X_{j_1}^{(1)} & \dots & X_{j_k}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{j_1}^{(k-2)} & \dots & X_{j_k}^{(k-2)} \end{bmatrix}, \text{ respectiv:}$$

$$d_{k-1}^{(p)} \circ d_k^{(\ell)} (\Delta(I)) = \det \begin{bmatrix} a_{j_1}^{(p)} & \dots & a_{j_k}^{(p)} \\ a_{j_1}^{(\ell)} & \dots & a_{j_k}^{(\ell)} \\ X_{j_1}^{(1)} & \dots & X_{j_k}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{j_1}^{(k-2)} & \dots & X_{j_k}^{(k-2)} \end{bmatrix}$$

Aceşti determinanţi diferă doar prin permutarea între ele a primelor două linii, deci (ii) rezultă.//

Considerăm acum cazul $m \leq n$.

Cele m scheme $a^{(\ell)} : [n] \longrightarrow A$, $l = 1,2,\ldots,m$, definesc mxn - matricea peste A :

$$\mathcal{A} = (a_i^{(\ell)})_{1 \leq l \leq m,\ 1 \leq i \leq n}$$

Pentru orice $k \leq m$ şi orice lanţuri $I \in \binom{[n]}{k}$, $J \in \binom{[m]}{k}$ vom nota cu $\Delta_{\mathcal{A}}(J|I)$ kxk-minorul lui $\mathcal{A}$, avînd liniile indexate de J şi coloanele de I. Astfel:

$$\Delta_{\mathcal{A}}(J\,|\,I) = \det\,(a_i^{(\ell)})_{l \in J,\ i \in I}$$

De asemenea, dacă $I = (i_1 < \ldots < i_k)$, reamintim că $\Delta(I)$ este kxk-minorul maximal al matricii generice $\mathbb{X}(k) = (X_j^{(i)})_{1 \leq j \leq k,\, i \in I}$.

Dacă $J = (j_1 < \ldots < j_k)$, vom nota compunerea diferenţialelor Koszul $(d^{(j_k)})_k$ prin: $d^{(J)} = d^{(j_k)} \circ d^{(j_{k-1})} \circ \ldots \circ d^{(j_1)}$.

Cu aceste notaţii, formulăm următorul rezultat

<u>lo. Propoziţie</u>

<u>Pentru orice $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ şi orice lanţuri $I \in \binom{[n]}{k}$, $J \in \binom{[m]}{k}$ :</u>

$$\underline{d^{(J)}\ (\Delta(I)) = \Delta_{\mathcal{A}}(J\,|\,I).}$$

<u>Demonstraţie</u>

Avem succesiv:

$$d^{(J)}(\Delta(I)) = d^{(j_k)} \circ d^{(j_{k-1})} \circ \ldots \circ d^{(j_2)} \circ d^{(j_1)} \det \begin{bmatrix} X_{i_1}^{(1)} & \ldots & X_{i_k}^{(1)} \\ \vdots & & \\ X_{i_1}^{(k)} & \ldots & X_{i_k}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$= d^{(j_k)} \circ d^{(j_{k-1})} \circ \dots \circ d^{(j_2)} \left( \det \begin{bmatrix} a_{i_1}^{(j_1)} & \dots & a_{i_k}^{(j_1)} \\ X_{i_1}^{(1)} & \dots & X_{i_k}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{i_1}^{(k-1)} & \dots & X_{i_k}^{(k-1)} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= d^{(j_k)} \circ d^{(j_{k-1})} \circ \dots \circ d^{(j_3)} \left( \det \begin{bmatrix} a_{i_1}^{(j_1)} & \dots & a_{i_k}^{(j_1)} \\ a_{i_1}^{(j_2)} & \dots & a_{i_k}^{(j_2)} \\ X_{i_1}^{(1)} & \dots & X_{i_k}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{i_1}^{(k-2)} & \dots & X_{i_k}^{(k-2)} \end{bmatrix} \right)$$ şi se continuă inductiv //

## §4. PRODUSUL TENSORIAL AL COMPLEXELOR SIMPLE

Aşa cum am văzut la §1, indexarea bazei modulului subiacent complexului Koszul asociat cu ( $[n]$ , a , A), se face după radicalii algebrei booleene ( $\mathcal{P}([n]), \subseteq$ ).

Teorema de structură a algebrelor booleene finite arată că ( $\mathcal{P}([n]), \subseteq$ ) este produsul direct de n copii ale lanţului simplu (i.e. cu o singură verigă) : ( $0<1$ ).

Profitînd de acest fapt, vom da o nouă descriere complexului Koszul asociat unui triplet ( $[n]$ , a, A).

In acest scop, introducem următoarea terminologie.

Pentru un element oarecare $\xi \in A$, vom nota prin $(S.(\xi \mid A), \mu_\xi)$ şi vom numi "complexul simplu definit de $\xi$ ", următorul complex de A-module libere:

(1o) $\quad \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow A.\bar{e} \xrightarrow{\mu_\xi} A \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$ ,

unde : $\mu_\xi(\bar{e}) = \xi$ (i.e. $\mu_\xi(\alpha.\bar{e}) = \xi\alpha$ , $(\forall)\ \alpha \in A$).

Aşadar $S.(\xi \mid A) = \bigoplus_i S_i(\xi \mid A)$, unde $S_i(\xi \mid A) = (0)$ dacă $i<0$ sau $i>1$ şi: $S_1(\xi \mid A)$ = A-modulul liber de rang 1: A.e ;

$S_o(\xi \mid A)$ = A-modulul liber de rang 1: A.1.

Diferenţiala $\mu_\xi$ a acestui complex simplu acţionează (liniar) prin multiplicare cu elementul fixat .

Să considerăm acum o $[n]$ -schemă $a = (a_1,\dots,a_n)$.

Cu ajutorul ei, construim complexele simple:

$$(S.(a_i \mid A), \mu_{a_i}) \quad , i = 1,2,\dots, n \quad ,$$

unde $S_1(a_i \mid A) = A.\bar{e}_i$ .

Efectuînd produsul tensorial (în categoria complexelor de A-module), obţinem un nou complex:

$$(11) \qquad (\mathcal{K}.(a \mid A), d.) = \bigotimes_{i=1}^{n} (S.(a_i \mid A), \mu_{a_i})$$

11.Propoziţie

Complexul $(\mathcal{K}.(a \mid A), d.)$ definit la (11), este canonic izomorf complexului Koszul $(K.(a \mid A), d.)$, asociat tripletului $([n], a, A)$.

Demonstraţia. acestei propoziţii este omisă, fiind o simplă aplicaţie a noţiunii de produs tensorial de complexe.//

Importanţa acestui model al complexului Koszul $(K.(a \mid A), d.)$ constă în faptul că permite studiul omologiei sale prin intermediul unor tehnici standard de topologie algebrică.

In expunerile de faţă nu vom utiliza asemenea tehnici, trimiţînd cititorul interesat la: J.P.Serre, Algebre locale Multiplicités (Lect.Notes, 1956).

Avînd la îndemînă, acum, cele patru descrieri de mai sus ale complexului Koszul asociat unui triplet ( $[n]$ , a , A), vom utiliza, în ceea ce urmează, pe oricare dintre ele, după cum va fi mai comod, în demonstrarea unor proprietăţi ale acestui complex.

# EXPUNEREA III

## COMPLEXUL KOSZUL : STRUCTURA MULTIPLICATIVA

Vom fixa, în cele ce urmează, întregul $n > 0$, inelul comutativ unitar $A$ şi schema $a: [n] \longrightarrow A$ , $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Studiul structurii multiplicative canonice a complexului Koszul asociat tripletului ($[n]$ , a, A) se face pe modelul algebrei exterioare subiacente acestui complex (cf.§2, Exp.II).
In utilizarea acestui model, vom folosi în mod constant identificarea unui lanţ $I \in \binom{[n]}{i}$ cu monomul exterior standard $E_I = \bigwedge_{x \in I} E_x$, construit pe o bază fixată $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_n)$ a modulului liber $A^n$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

### §1. MULTIPLICAREA EXTERIOARA (CONCATENAREA LANTURILOR)

Operaţia de multiplicare a algebrei exterioare $\bigwedge.(A^n)$, poate fi descrisă în modul următor.
Pentru orice două lanţuri I,J peste $[n]$ , vom nota cu $I * J$ şi vom numi "concatenarea lui I cu J", lanţul:

$$I * J = \begin{cases} [I \cup J] & , \text{ dacă } I \cap J = \emptyset \quad ([K] = \underline{\text{lanţul pe } K}, (\forall)\ K \subseteq [n]) \\ \emptyset & , \text{ dacă } I \cap J \neq \emptyset . \end{cases}$$

Analogul în $\bigwedge.(A^n)$ al acestei operaţii constă în multiplicarea exterioară a monoamelor corespunzătoare, ţinînd cont de semnul ce rezultă prin aducerea la forma standard a unui monom exterior.
Pentru explicitarea semnului, introducem pe algebra booleană a lanţurilor peste n , următoarea signatură, ce generalizează signatura simplă definită la Exp.I, §1, Def.2.

1. Definiţie

Pentru orice lanţ $I \in \mathcal{P}([n])$, numim "I-signatură" funcţia $\varepsilon_I : \mathcal{P}([n]) \longrightarrow \{\pm 1\}$ , definită prin:

$$(\forall)\ J \in \mathcal{P}([n]),\quad \mathcal{E}_I(J) = \prod_{x\in J} \mathcal{E}_I(x),$$

unde $\mathcal{E}_I(x) = (-1)^{\nu_I(x)}$ , cu $\nu_I(x) = \#\{\,y\ I\ /\ y<x\}$.

Signatura astfel definită pe $\mathcal{P}([n])$ are următoarele proprietăţi.

1. Propoziţie

(i) Dacă $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ , atunci pentru orice lanţ $K \in \mathcal{P}([n])$ :

$$\mathcal{E}_K(I_1 * I_2) = \mathcal{E}_K(I_1)\,\mathcal{E}_K(I_2)$$

(ii) Dacă $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ , atunci, pentru orice lanţ $K \in \mathcal{P}([n])$:

$$\mathcal{E}_{I_1 * I_2}(K) = \mathcal{E}_{I_1}(K)\,.\,\mathcal{E}_{I_2}(K)$$

(iii) Dacă $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ , atunci :

$$\mathcal{E}_{I_1}(I_2)\,.\,\mathcal{E}_{I_2}(I_1) = (-1)^{|I_1|\,.\,|I_2|}$$

Demonstraţie

(i) $\mathcal{E}_K(I_1 * I_2) = \prod_{x\in I_1 * I_2} \mathcal{E}_K(x) =$ (deoarece $I_1 \cap I_2 = \emptyset$) $=$

$= \prod_{x\in I_1} \mathcal{E}_K(x)\,.\,\prod_{y\in I_2} \mathcal{E}_K(y) = \mathcal{E}_K(I_1)\,\mathcal{E}_K(I_2)$.

(ii) $\mathcal{E}_{I_1 * I_2}(K) = \prod_{x\in K} \mathcal{E}_{I_1 * I_2}(x) = \prod_{x\in K} (-1)^{\nu_{I_1 * I_2}(x)} =$ ( deoarece $I_1 \cap I_2 = \emptyset$) $=$

$= \prod_{x\in K} (-1)^{\nu_{I_1}(x) + \nu_{I_2}(x)} = \prod_{x\in K} (-1)^{\nu_{I_1}(x)}\,.\,(-1)^{\nu_{I_2}(x)} = \prod_{x\in K} (-1)^{\nu_{I_1}(x)}\,.\,\prod_{x\in K} (-1)^{\nu_{I_2}(x)} =$

$= \mathcal{E}_{I_1}(K)\,\mathcal{E}_{I_2}(K)$.

(iii) Fie $I_1 = (i_1 < \ldots < i_p)$, concatenarea $I_1 * I_2$ conduce la:

$$I_1 * I_2 = I_2^{(1)} < i_1 < I_2^{(2)} < \ldots < I_2^{(p)} < i_p < I_2^{(p+1)}$$

unde $I_2 = \dot{\bigcup}_{\alpha=1}^{p+1} I_2$, fiecare $I_2^{(\alpha)}$ fiind un sublanţ din $I_2$.

Notăm cu $h_\alpha = \# I_2^{(\alpha)}$ , $\alpha = 1,2,\ldots,p+1$, încît: $|I_2| = h_1+h_2+\ldots$
$\ldots+h_{p+1}$ .

Avem:

$$\varepsilon_{I_1}(I_2) = \prod_{x\in I_2} \varepsilon_{I_1}(x) = \prod_{x\in I_2} (-1)^{\nu_{I_1}(x)} = \prod_{x\in I_2^{(1)}} (-1)^{\nu_{I_1}(x)} \cdot \prod_{x\in I_2^{(2)}} (-1)^{\nu_{I_2}(x)} \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \prod_{x\in I_2^{(p+1)}} (-1)^{\nu_{I_1}(x)} = \prod_{x\in I_2^{(1)}} (-1)^0 \cdot \prod_{x\in I_2^{(2)}} (-1)^1 \cdot \ldots \cdot \prod_{x\in I_2^{(p+1)}} (-1)^p =$$

$$= (-1)^{0\cdot h_1 + 1\cdot h_2 + \ldots + p\cdot h_{p+1}}$$

Pe de altă parte:

$$\varepsilon_{I_2}(I_1) = \varepsilon_{I_2^{(1)} * I_2^{(2)} * \ldots * I_2^{(p+1)}}(I_1) = (cf\ (ii)) = \varepsilon_{I_2^{(1)}}(I_1) \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{I_2^{(p+1)}}(I_1) =$$

$$= \prod_{y\in I_1} (-1)^{\nu_{I_2^{(1)}}(y)} \cdot \prod_{y\in I_1} (-1)^{\nu_{I_2^{(2)}}(y)} \cdot \ldots \cdot \prod_{y\in I_1} (-1)^{\nu_{I_2^{(p+1)}}(y)} =$$

$$= \prod_{y\in I_1} (-1)^{h_1} \cdot \prod_{y\in I_1\setminus\{i_1\}} (-1)^{h_2} \cdot \prod_{y\in I_1\setminus\{i_1, i_2\}} (-1)^{h_3} \cdot \ldots \cdot \prod_{y\in I_1\setminus\{i_1,\ldots,i_{p-1}\}} (-1)^{h_p} \cdot \prod_{\emptyset} (-1)^{h_{p+1}} =$$

$$= (-1)^{h_1|I_1| + h_2(|I_1|-1) + h_3(|I_1|-2) + \ldots + h_{p+1}(|I_1|-p)} =$$

$$= (-1)^{(h_1+h_2+\ldots+h_{p+1})|I_1| - (0\cdot h_1 + 1\cdot h_2 + \ldots + p\, h_{p+1})} =$$

$$= (-1)^{|I_1|\cdot|I_2| - \sum_{\alpha=1}^{p+1}(\alpha-1)h_\alpha}$$

Inmulţind, obţinem:

$$\varepsilon_{I_1}(I_2)\cdot\varepsilon_{I_2}(I_1) = (-1)^{\sum_{\alpha=1}^{p+1}(\alpha-1)h_\alpha} \cdot (-1)^{|I_1||I_2| - \sum_{\alpha=1}^{p+1}(\alpha-1)h_\alpha} =$$

$$= (-1)^{|I_1||I_2|} \quad //$$

Putem acum defini pe $\Lambda.(A^n)$ analogul concatenării lanţurilor, anume:

$$(1)\quad (\forall)\ I,J \in \mathcal{P}([n]) : E_I \wedge E_J = \begin{cases} \varepsilon_J(I).E_{I*J} & ,\ \text{dacă } I\cap J = \emptyset \\ 0 & ,\ \text{dacă } I\cap J \neq \emptyset \end{cases} .$$

Multiplicarea astfel definită pe $\Lambda.(A^n)$ este, evident, cea exterioară obişnuită. Ea are proprietăţile:

$$(2)\qquad E_I\wedge E_I = 0 \quad \text{şi} \quad E_I\wedge E_J = (-1)^{|I|\,|J|}\,.\,E_J\wedge E_I\ ,$$

pentru orice lanţuri $I, J \in \mathcal{P}([n])$ , (după cum se vede din (1), împreună cu (iii), Prop.1).

Multiplicarea (1) pe $\Lambda.(A^n)$ este evident asociativă şi unitară (cu unitatea $1 = E_{\emptyset} \in A$), încît obţinem A-algebra anti-comutativă $(\Lambda.(A^n), \wedge)$.

Relaţiile (1) constituie tabla înmulţirii acestei algebre.

Algebra exterioară $\Lambda.(A^n)$ este chiar <u>graduată</u>, în sensul că graduarea ei canonică este compatibilă cu multiplicarea.

Mai precis, pentru $i,j \in \{0,1,\ldots,n\}$:

$$\Lambda_i(A^n) \wedge \Lambda_j(A^n) \subseteq \Lambda_{i+j}(A^n) ,$$

unde $\Lambda_k(A^n) = (0)$ pentru $k < 0$ sau $k > n$.

Graduarea algebrei exterioare $\Lambda.(A^n)$ este chiar <u>standard</u>, adică:

$(\forall)\ i \in \{2,3,\ldots,n\}$ , $\Lambda_i(A^n) = \Lambda_1(A^n) \wedge \ldots \wedge \Lambda_1(A^n)$

(i factori).

Acest lucru rezultă numaidecît din observaţia că orice lanţ $I = (X_1 < \ldots < X_i) \in \binom{[n]}{i}$ este concatenarea elementelor sale, i.e.:

$$I = [X_1] * [X_2] * \ldots * [X_i] .$$

Aşadar, $\Lambda.(A^n)$ este generată (ca algebră peste A) de componenta sa omogenă de gradul 1, adică:

(3) $\qquad \Lambda.(A^n) = A\langle\Lambda_1(A^n)\rangle$

<u>2. Propoziţie</u>

<u>Fie $w \in \Lambda_i(A^n)$ un element omogen din algebra exterioară.</u>

<u>Dacă $i = \deg w$ este impar, atunci:</u>

$$\underline{w \wedge w = 0}$$

<u>Demonstraţie</u>

Avem: $w = \sum_{|I|=i} \alpha_I . E_I$ , cu $\alpha_I \in A$ . Atunci:

$$w\wedge w=\Big(\sum_{|I|=i}\alpha_I E_I\Big)\wedge\Big(\sum_{|I|=i}\alpha_I E_I\Big)=\sum_{|I|=|J|=i}(\alpha_I\alpha_J\, E_I\wedge E_J+$$

$$+\alpha_J\alpha_I\, E_J\wedge E_I)=(cf.\ (2))=\sum_{I\trianglelefteq J}(\alpha_I\alpha_J+(-1)^{|I||J|}\alpha_J\alpha_I)E_I\wedge E_J=$$

$$=\sum_{I\trianglelefteq J}(\alpha_I\alpha_J+(-1)^{i^2}\alpha_J\alpha_I)\,E_I\wedge E_J=0\ ,\ \text{când}\ \ i\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

(unde " $\trianglelefteq$ " denotă ordinea lexicografică pe lanţurile peste $[n]$ ).//

Pentru formularea următoarei proprietăţi a algebrei exterioare $\Lambda.(A^n)$, reamintim că o A-algebră graduată (finită) anti-comutativă:

$$C. = \bigoplus_{i=0}^{r} C_i\ ,\ C_0 = A\ \text{ şi }\ C_iC_j\subseteq C_{i+j}$$

se numeşte "algebră Poincaré" dacă forma biliniară dată de multiplicarea algebrei $C.$ , este nedegenerată. Aceasta înseamnă că, pentru orice $i\in\{0,1,\dots,r\}$ , aplicaţia biliniară:

$$\mu: C_i\times C_{r-i}\longrightarrow C_r\ ,\quad \mu(x,y)\longmapsto x.y$$

este nedegenerată, adică determină izomorfismele liniare:

$$C_i \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_A(C_{r-i}, C_r),\ \text{prin}\quad x\longmapsto\mu_x\ ,\ \text{cu}\quad \mu_x(y)=xy\ ,$$

$(\forall)\ x\in C_i\ ,\ \ y\in C_{r-i}$.

Are loc următorul rezultat.

3. Propoziţie

Pentru orice $n>0$, algebra exterioară $\Lambda.(A^n)$ este o algebră Poincaré.

Demonstraţie

Fie $i\in\{0,1,\dots,n\}$. Trebuie să arătăm două lucruri:

(a) Pentru orice $w\in\Lambda_i(A^n)$, asocierea $w\longmapsto\mu_w$ este injectivă, unde $\mu_w:\Lambda.(A^n)\longrightarrow\Lambda.(A^n)$ este multiplicarea exterioară cu $w$ (i.e. $\mu_w(u)=w\wedge u$, $(\forall)\ u\in\Lambda.(A^n)$).

Ori, dacă $\mu_w=\mu_{w'}$ , cu $w=\sum_{|I|=i}\alpha_I\cdot E_I$ , $w'=\sum_{|I|=i}\beta_I\cdot E_I$

atunci $w \wedge z = w' \wedge z$ pentru orice $z \in \Lambda.(A^n)$.

In particular, dacă $I \in \binom{[n]}{i}$ este un lanţ oarecare, luînd

$z_I = E_{\bar{I}}$ ($\bar{I}$ = lanţul complementar), obţinem:

$w \wedge z_I = w' \wedge z_I \Longleftrightarrow$ ( din (2)) $\Longleftrightarrow \alpha_I E_I \wedge E_{\bar{I}} = \beta_I E_I \wedge E_{\bar{I}}$.

Cum $E_I \wedge E_{\bar{I}}$ este vectorul unic al bazei lui $\Lambda_n(A^n) \cong A$, rezultă

de aici: $\alpha_I = \beta_I$, $(\forall)\ I \in \binom{[n]}{i}$, deci $w = w'$.

Aşadar, asocierea $w \longmapsto \mu_w$ este injectivă.

(b) <u>Orice formă A-liniară $f: \Lambda_{n-i}(A^n) \longrightarrow \Lambda_n(A^n) \cong A$ este</u>

de tipul $\mu_w$, pentru un anumit vector $w = w(f) \in \Lambda_i(A^n)$.

Aplicaţia f este unic determinată de acţiunea sa pe baza lui $\Lambda_{n-i}(A^n)$, i.e. de familia de elemente $(\alpha_I)_{|I|=n-i}$, dată de:

$(\forall)\ I \in \binom{[n]}{n-i}$, $f(E_I) = \alpha_I \cdot E_n$, $\alpha_I \in A$.

Considerăm elementul:

$$w = w(f) = \sum_{|I|=n-i} \varepsilon_{\bar{I}}(I)\, \alpha_I \cdot E_{\bar{I}} \in \Lambda_i(A^n),$$ unde "$\bar{\ }$"

denotă operatorul de complementare pe $\mathcal{P}([n])$.

Avem, pentru orice lanţ $J \in \binom{[n]}{n-i}$:

$$w \wedge E_J = \Big(\sum_{|I|=n-i} \varepsilon_{\bar{I}}(I)\alpha_I E_{\bar{I}}\Big) \wedge E_J = (\text{ cf. } (1), (2)) =$$

$$= \sum_{|I|=n-i} \varepsilon_{\bar{I}}(I)\, \alpha_I\, (E_{\bar{I}} \wedge E_J) = \varepsilon_{\bar{J}}(J)\, \alpha_J\, E_{\bar{J}} \wedge E_J =$$

$$= \alpha_J \cdot \varepsilon_{\bar{J}}(J)\, \varepsilon_{\bar{J}}(J)\, E_{[n]} = \alpha_J E_{[n]}.$$

Aşadar, $\mu_w$ şi f acţionează identic pe baza lui $\Lambda_{n-i}(A^n)$, deci sînt egale.//

<u>4. Corolar</u>

<u>Pentru orice $i \in \{0,1,\dots,n\}$, $\Lambda_i(A^n) \cong \Lambda_{n-i}(A^n)^0$</u>

<u>Demonstraţie.</u>

Afirmaţia rezultă din Prop.3, împreună cu observaţia că $\Lambda_n(A^n) \cong A$.//

OBSERVATIE

Corolarul 4 arată că algebra exterioară $\Lambda_{\bullet}(A^n)$ este autoduală. Această auto-dualitate este compatibilă cu structurile diferenţiale Koszul ce pot fi introduse pe $\Lambda_{\bullet}(A^n)$, după cum am văzut la Prop.2, §1, Exp.II .

Fie $\mathfrak{J} = \bigoplus_{i=o}^{n} \mathfrak{J}_i$ un ideal omogen al algebrei exterioare $\Lambda_{\bullet}(A^n)$, unde $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J} \cap \Lambda_i(A^n)$; $i = o,1,\ldots,n$.

5. Propoziţie

Dacă idealul omogen $\mathfrak{J}$ este nenul, atunci $\mathfrak{J}_n \neq (o)$ şi reciproc.

Demonstraţie

$\mathfrak{J}_n \neq (o) \Rightarrow \mathfrak{J} \neq (o)$, deoarece $\mathfrak{J}_n \subseteq \mathfrak{J}$.

Reciproc, fie $\mathfrak{J} \neq (o)$. Atunci există $i \in \{o,1,\ldots,n\}$ şi există $u \in \mathfrak{J}_i$, încît $u \neq o$. Fie $u = \sum_{|I|} \alpha_I E_I$ . Cum $u \neq o$, există $I \in \binom{[n]}{i}$ şi $\alpha_I \neq o$. Dar atunci $u \wedge E_{\bar{I}} = \alpha_I E_I \wedge E_{\bar{I}} = \pm \alpha_I E_{[n]} \neq o$ şi $u \wedge E_{\bar{I}} \in \mathfrak{J}_n$ . Deci $\mathfrak{J}_n \neq (o)$.//

Vom nota cu $\Lambda_{+}(A^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda_i(A^n)$ idealul omogen "irelevant", al algebrei exterioare $\Lambda_{\bullet}(A^n)$.

Anulatorul acestui ideal se numeşte "soclu" al algebrei $\Lambda_{\bullet}(A^n)$ şi se notează cu $\mathrm{Soc}(\Lambda_{\bullet})$. Astfel:

$$\mathrm{Soc}\,(\Lambda_{\bullet}) = \{ w \in \Lambda_{\bullet}(A^n) \,/\, w \circ u = o, \quad (\forall)\ u \in \Lambda_{+}(A^n) \} .$$

Este uşor de văzut că $\mathrm{Soc}(\Lambda_{\bullet})$ este un ideal omogen al algebrei exterioare $\Lambda_{\bullet}(A^n)$.

Are loc următoarea proprietate, ce reflectă în structura multiplicativă canonică autodualitatea algebrei exterioare (Cor.4 de mai sus).

6. Propoziţie

(i) $\mathrm{Soc}\,(\Lambda_{\bullet}) = \Lambda_n\,(A^n)$

(ii) Orice ideal omogen nenul $\mathfrak{J} \subseteq \Lambda.(A^n)$, are proprietatea:

$$\mathfrak{J} \cap \mathrm{Soc}(\Lambda.) \neq (o).$$

Demonstrație

(ii) rezultă din (i) şi Prop.5 de mai sus. Aşadar, vom demonstra (i). Este limpede că $\Lambda_n(A^n) \subseteq \mathrm{Soc}(\Lambda.)$, deci rămîne de arătat incluziunea inversă.

Fie $w = \sum_{i=o}^{n} w_i \in \mathrm{Soc}(\Lambda.)$. Arătăm că $w_i = o$, pentru $i = o,1,\dots,n-1$. Cum $\mathrm{Soc}(\Lambda.)$ este omogen, aceasta revine la a arăta că orice element omogen $w \in \mathrm{Soc}_i(\Lambda.)$ este nul, de îndată ce $i \neq n$.

Fie $w = \sum_{|I|=i} \alpha_I \cdot E_I$, cu $i \neq n$. Dacă $w \neq o$, atunci există $I \in \binom{[n]}{i}$ şi $\alpha_I \neq o$. Cum $i \neq n$, complementul $\bar{I} \in \binom{[n]}{n-i}$ verifică: $|\bar{I}| \neq o$. Din $w \in \mathrm{Soc}(\Lambda.)$, rezultă:

$$O = w \wedge E_{\bar{I}} = \alpha_I \cdot E_I \wedge E_{\bar{I}} = \pm \alpha_I E_{[n]},$$ ceea ce implică $\alpha_I = 0$, contradicţie.//

OBSERVATIE

Rezultă din Prop.5 şi 6 că un ideal omogen $\mathfrak{J} \subseteq \Lambda.(A^n)$ este nenul dacă şi numai dacă $\mathfrak{J} \cap \mathrm{Soc}(\Lambda.) \neq \emptyset$.//

Studiul multiplicării algebrei exterioare $\Lambda.(A^n)$ ridică în mod natural problema caracterizării non-divizorilor lui zero din $\Lambda.(A^n)$. Aici, ne limităm la indicarea unor importanţi non-divizori omogeni ai lui zero, în algebra exterioară.

Reamintim că un element $w \in \Lambda_i(A^n)$ $(i = o,1,\dots,n)$ se numeşte "non-divizor al lui zero" dacă:

$$(\forall)\ u \in \Lambda.(A^n) \text{ şi } w \wedge u = o \Rightarrow \begin{cases} u=o, & \text{cînd } i = \deg(w) \text{ este par} \\ u \in \Lambda.(A^n), & \text{cînd } i = \deg(w) \text{ este impar} \end{cases}$$

Evident, orice non-divizor al lui zero din $A = \bigwedge_o(A^n)$, rămîne non-divizor al lui zero şi în algebra exterioară.

7. Propoziţie

Monoamele exterioare de gradul 1: $\{E_x / x \in [n]\}$ sînt non-divizori ai lui zero în $\bigwedge.(A^n)$.

In adevăr, fie $u \in \bigwedge_i(A^n)$ un element omogen ($i \in \{o,1,\dots,n\}$) încît $u \wedge E_x = o$, pentru $x \in [n]$ fixat.

Putem scrie: $u = \sum_{|I|=i;\, I \ni x} \alpha_I E_I + \sum_{|I|=i;\, I \not\ni x} \alpha_I E_I$.

Atunci : $0 = u \wedge E_x = \sum_{|I|=i;\, I \not\ni x} \alpha_I \cdot E_I \wedge E_x$. Cum $\{E_I \wedge E_x \mid I \not\ni x\}$ este în baza liberă a lui $\bigwedge_{i+1}(A^n)$, obţinem de aici: $\alpha_I = o$, $(\forall)$ $I$ cu $|I| = i$ şi $I \not\ni x$. Rezultă: $u = \sum_{|I|=i;\, I \ni x} \alpha_I E_I =$

$= \sum_{|I|=i;\, I \ni x} \pm \alpha_I E_{I_x} \wedge E_x \in \bigwedge.(A^n) \cap E_x$ //

OBSERVATIE

Pentru monoame exterioare de grad $\gneq 2$, rezultatul de mai sus nu rămîne valabil.//

## §2. STRUCTURI DIFERENTIALE PE ALGEBRA EXTERIOARA

Fie $a: [n] \longrightarrow A$ o schemă şi fie $d. = d.(a|A): \bigwedge.(A^n) \longrightarrow \bigwedge.(A^n)$, diferenţiala Koszul introdusă de $a$ pe modulul liber $\bigwedge.(A^n)$. (cf.Exp.II, §2).

8. Propoziţie

$d.(a|A)$ este o derivare omologică a algebrei exterioare $\bigwedge.(A^n)$, adică: $(\forall)$ $u, w \in \bigwedge.(A^n)$ cu $u$ omogen $\Rightarrow d.(u \wedge w) = d.(u) \wedge w + (-1)^{\deg(u)} u \wedge d.(w)$.

Demonstraţie

Datorită biliniarităţii produsului exterior şi liniarităţii lui $d.$ , este suficient să considerăm cazul a două monoame exterioare standard: $u = E_I$ , $w = E_J$ , avînd de arătat că:

(*) $d.(E_I \wedge E_J) = d.(E_I) \wedge E_J + (-1)^{|I|} E_I \wedge d.(E_J)$.

Conform definiţiei (1) a tablei de înmulţire pe $\Lambda.(A^n)$, trebuie să considerăm separat două cazuri.

(a) $\underline{I \cap J = \emptyset}$

In acest caz $E_I \wedge E_J = \varepsilon_J(I)\, E_{I*J}$ , deci obţinem:

$$d.(E_I \wedge E_J) = \varepsilon_J(I)\, d.(E_{I*J}) = \varepsilon_J(I) \sum_{x \in I} \varepsilon_{I*J}(x)\, a_x\, E_{(I*J)_x} +$$

$$+ \varepsilon_J(I) \sum_{y \in J} \varepsilon_{I*J}(y)\, a_y\, E_{(I*J)_y} = (\text{cf. Prop. } 1, \S 1) =$$

$$= \varepsilon_J(I) \sum_{x \in I} \varepsilon_I(x)\, \varepsilon_J(x)\, a_x\, E_{(I*J)_x} + \varepsilon_J(I) \sum_{y \in J} \varepsilon_I(y)\, \varepsilon_J(y)\, a_y\, E_{(I*J)_y} =$$

= (din definiţia concatenării lanţurilor) =

$$= \varepsilon_J(I) \sum_{x \in I} \varepsilon_I(x)\, \varepsilon_J(x)\, a_x\, \varepsilon_J(I_x)\, E_{I_x} \wedge E_J + \varepsilon_J(I) \sum_{y \in J} \varepsilon_I(y)\, \varepsilon_J(y)\, a_y\, \varepsilon_{J_y}(I)\, E_I \wedge E_{J_y} =$$

$$= \Big[ \sum_{x \in I} \big( \varepsilon_J(I)\, \varepsilon_J(x)\, \varepsilon_J(I_x) \big)\, \varepsilon_I(x)\, a_x\, E_{I_x} \Big] \wedge E_J + (-1)^{|I|} E_I \wedge \Big[ \sum_{y \in J} \big( \varepsilon_J(I)\, \varepsilon_I(y)\, \varepsilon_{J_y}(I) (-1)^{|I|} \big)\, \varepsilon_J(y)\, a_y\, E_{J_y} \Big]$$

$$= \Big[ \sum_{x \in I} \alpha(x, I, J)\, \varepsilon_I(x)\, a_x\, E_{I_x} \Big] \wedge E_J + (-1)^{|I|} E_I \wedge \Big[ \sum_{y \in J} \beta(y, I, J)\, \varepsilon_J(y)\, a_y\, E_{J_y} \Big],$$

cu $\alpha(x, I, J) := \varepsilon_J(I)\, \varepsilon_J(x)\, \varepsilon_J(I_x)$ şi $\beta(y, I, J) := \varepsilon_J(I)\, \varepsilon_I(y)\, \varepsilon_{J_y}(I) \cdot (-1)^{|I|}$.

Din Definiţia diferenţială Koszul, vedem că (*) are loc dacă

$\underline{\alpha(x,I,J) = 1}$ şi $\underline{\beta(y,I,J) = 1}$, $(\forall)\ x \in I$ şi $y \in J$.

Dar, din Prop.1, §1, obţinem:

$$\alpha(x, I, J) = \varepsilon_J(I) \big[ \varepsilon_J(x)\, \varepsilon_J(I_x) \big] = \varepsilon_J(I) \cdot \varepsilon_J(I) = \big[ \varepsilon_J(I) \big]^2 = 1$$

(deoarece lanţurile $[x]$ şi $I_x$ sînt disjuncte şi $I = [x] * I_x$ ).

Analog, tot din Prop.1, §1, obţinem:

$$\beta(y, I, J) = \varepsilon_J(I)\, \varepsilon_I(y)\, \varepsilon_{I_y}(I) (-1)^{|I|} = \varepsilon_J(I) (-1)^{|[y]| \cdot |I|} \big[ \varepsilon_{[y]}(I) \cdot \varepsilon_{J_y}(I) \big] \cdot (-1)^{|I|} =$$

$$= (\text{deoarece } [y] \cap J_y = \emptyset \text{ şi } J = [y] * J_y) =$$

$$= \varepsilon_J(I) (-1)^{|I|}\, \varepsilon_J(I) (-1)^{|I|} = \big[ \varepsilon_J(I) (-1)^{|I|} \big]^2 = 1$$

Cu aceasta, (*) este verificată, în acest caz.

(b) $\underline{I \cap J \neq \emptyset}$

In acest caz $E_I \wedge E_J = 0$, deci membrul stîng din (*) este nul.

Calculăm şi membrul drept din (*), arătînd că este nul. Avem:

$$d.(E_I)\wedge E_J + (-1)^{|I|}E_I \wedge d.(E_J) = \sum_{x\in I} \varepsilon_I(x) a_x E_{I_x} \wedge E_J +$$

$$+(-1)^{|I|}\sum_{y\in J} \varepsilon_J(y) a_y E_I \wedge E_{J_y} = \text{(conform definiţiei înmulţirii exterioare)} =$$

$$= \sum_{x\in I:\, I_x\cap J=\emptyset} \varepsilon_I(x) a_x E_{I_x} \wedge E_J + (-1)^{|I|} \sum_{y\in J:\, I\cap J_y=\emptyset} \varepsilon_J(y) a_y E_I \wedge E_{J_y}.$$

Ipoteza (b) arată că $\{x \in I / I_x \cap J = \emptyset\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \#(I\cap J) = 1$,

i.e. $I \cap J = \{x\}$, pentru un element $x \in [n]$. In acest caz, avem de asemenea: $\{y \in J / I \cap J_y = \emptyset\} = \{x\}$, deci ambele sume de mai sus au un singur termen, încît ultima expresie se reduce la:

$$\varepsilon_I(x) a_x E_{I_x} \wedge E_J + (-1)^{|I|} \sum_{y\in J:\, I\cap J_y=\emptyset} \varepsilon_J(x) a_x E_I \wedge E_{J_x} \text{ cu } I \cap J = \{x\}$$

Dar atunci $I_x * J = I * J_x = [x] * I_x * J_x := K$, deci obţinem:

$$\varepsilon_I(x) a_x \varepsilon_J(I_x) E_K + (-1)^{|I|} \varepsilon_J(x) a_x \varepsilon_{J_x}(I) E_K =$$

$$= [\varepsilon_I(x)\varepsilon_J(I_x) + (-1)^{|I|}\varepsilon_J(x)\varepsilon_{J_x}(I)] a_x E_K.$$

Dar: $\varepsilon_I(x)\varepsilon_J(I_x) + (-1)^{|I|}\varepsilon_J(x)\varepsilon_{J_x}(I) = (\text{deoarece } \varepsilon_I(x) = \varepsilon_{I_x}(x)) =$

$$= \varepsilon_{I_x}(x)\varepsilon_J(I_x) + (-1)^{|I|}\varepsilon_{J_x}(x)\varepsilon_{J_x}(I) = (\text{cf. (iii), Prop. 1, §1}) =$$

$$= \varepsilon_{I_x}(x)\varepsilon_{I_x}(J)(-1)^{|I_x||J|} + (-1)^{|I|}\varepsilon_{J_x}(x)\varepsilon_{J_x}(x)\varepsilon_{J_x}(I_x) =$$

$$= [\varepsilon_{I_x}(x)\varepsilon_{I_x}(x)]\varepsilon_{I_x}(J_x)(-1)^{|I_x||J|} + (-1)^{|I|}[\varepsilon_{J_x}(x)\varepsilon_{J_x}(x)]\varepsilon_{J_x}(I_x) =$$

$$= (\text{pătratul unei signaturi fiind } 1) = (-1)^{|I_x||J_x|}\varepsilon_{J_x}(I_x) + (-1)^{|I|}\varepsilon_{J_x}(I_x) =$$

$$= (\text{cf. Prop. 1, §1}) = (-1)^{|I_x||J|}\cdot(-1)^{|I_x||J_x|}\varepsilon_{J_x}(I_x) + (-1)^{|I|}\varepsilon_{J_x}(I_x) =$$

$$= [(-1)^{|I_x|(|J|+|J_x|)} + (-1)^{|I|}]\varepsilon_{J_x}(I_x). \text{ Arătăm că paranteza } [\ldots] \text{ este nulă.}$$

Dar: $(-1)^{|I_x|(|J|+|J_x|)} + (-1)^{|I|} = (-1)^{|I_x|(2|I_x|+1)} + (-1)^{|I|} =$

$$= (-1)^{|I_x|} + (-1)^{|I|} = 0 //$$

Din această Propoziţie rezultă că orice $[n]$ -schemă $a: [n] \longrightarrow A$ determină pe $\wedge.(A^n)$ o structură de <u>algebră diferenţială graduată</u> (vezi Exp.V): $(\wedge.(A^n), d.(a \mid A))$. Complexul subiacent acestei algebre diferenţiale este complexul Koszul asociat tripletului $([n], a, A)$ (cf.Exp.III).

Altfel spus, concatenarea lanţurilor peste $[n].$ , introduce pe complexul Koszul $(K.(a \mid A), d.(a \mid A))$ o multiplicare (cf.(1)) compatibilă cu structura diferenţială a acestui complex (i.e.diferenţiala Koszul verifică proprietatea din Prop.8).

Algebra diferenţială graduată $(\wedge.(A^n), d.(a \mid A)) = (K.(a \mid A), d.(a \mid A))$ este o algebră Poincaré, cu graduarea standard (Prop.3 şi rel.(3), §1).

Pentru o diferenţială Koszul fixată $d.(a \mid A) := d. : \wedge.(A^n) \longrightarrow \wedge.(A^n)$, vom nota cu $Z.(a \mid A) = \ker d.(a \mid A)$ nucleul şi cu $B.(a \mid A) = \mathrm{Im}\, d.(a \mid A)$ imaginea lui $d.$ . Elementele lui $Z.(a \mid A)$ se numesc "<u>cicli</u>", iar cele ale lui $B.(a \mid A)$ se numesc "<u>borduri</u>" (sau "<u>frontiere</u>") ale algebrei diferenţiale graduate $(\wedge.(A^n), d.(a \mid A))$. Evident, $Z.(a \mid A)$ şi $B.(a \mid A)$ sînt submodule graduate ale modului $\wedge.(A^n)$, i.e. $Z.(a \mid A) = \bigoplus_{i=o}^{n} Z_i(a \mid A)$ şi $B.(a \mid A) = \bigoplus_{i=o}^{n} B_i(a \mid A)$, cu: $Z_i(a \mid A) = Z.(a \mid A) \cap \wedge_i(A^n)$, respectiv $B_i(a \mid A) = B.(a \mid A) \cap \wedge_i(A^n)$ , $i = o,1,\ldots,n$ .

<u>9. Propoziţie</u>

<u>$Z.(a \mid A)$ este o subalgebră a algebrei diferenţiale graduate $(\wedge.(A^n), d.(a \mid A))$, iar $B.(a \mid A) \subseteq Z.(a \mid A)$ este un ideal al</u> subalgebrei $Z.(a \mid A)$.

<u>Demonstraţie</u>

Fie $z_1, z_2 \in Z.(a \mid A)$ doi cicli omogeni. Trebuie să arătăm că produsul $z_1 \wedge z_2$ rămîne ciclu. Aplicînd Prop.8, rezultă:

$d.(z_1 \wedge z_2) = d(z_1) \wedge z_2 + (-1)^{\deg(z_1)} z_1 \wedge d(z_2) = 0 \wedge z_2 + (-1)^{\deg z_1} z_1 \wedge o =$

$= 0 + 0 = 0$, deci $z_1 \wedge z_2 \in Z.(a \mid A)$.

Astfel, $Z.(a \mid A)$ este subalgebră în $\wedge.(A^n)$. Această subalgebră este chiar diferențială, deoarece $d.(Z.(a \mid A)) = 0$(i.e. restricția la $Z.(a \quad A)$ a diferențialei Koszul $d.(a \mid A)$, are imaginea nulă, deci închisă în $Z.(a \mid A)$).

Dacă $b \in B.(a \mid A)$ este un bord, i.e. $b = d.(c)$, cu $c \in \wedge.(A^n)$, obținem $d.(b) = d.(d.(c)) = d^2.(c) = 0$. Așadar $b \in Z.(a \mid A)$.

Deci $B.(a \mid A) \subseteq Z.(a \mid A)$, i.e. $B.(a \mid A)$ este submodul al lui $Z.(a \mid A)$.

Fie $b \in B.(a \mid A)$ un bord și $z \in Z.(a \mid A)$ un ciclu omogen. Atunci $b = d.(c)$, cu $c \in \wedge.(A^n)$, deci

$b \wedge z = d.(c) \wedge z = d.(c \wedge z)$ (căci $d(z) = o$), adică

$b \wedge z = \pm z \wedge b \in B.(a \mid A)$.

Astfel, $B.(a \mid A)$ este ideal în $Z.(a \mid A)$.

2. Definiție

Algebra cît: $H.(a \mid A) = Z.(a \mid A)/B.(a \mid A)$ se numește "algebra de omologie" a algebrei diferențiale graduate $(\wedge.(A^n), d.(a \mid A))$.

$H.(a \mid A)$ este o algebră graduată: $H.(a \mid A) = \bigoplus_{i=o}^{n} H_i(a \mid A)$, cu $H_i(a \mid A) = Z_i(a \mid A)/B_i(a \mid A)$, $i = o,1,\ldots,n$ .

Diferențiala Koszul $d.(a \mid A)$ induce pe algebra de omologie aplicația (diferențiala) nulă. Astfel, $H.(a \mid A)$ are structură de algebră diferențială, cu diferențiala trivială.

Să remarcăm că, pentru un șir dat $a = (a_1,\ldots,a_n)$,

$$H_o(a \mid A) = A/\underline{a}$$

(cu $\underline{a} = \sum_{i=1}^{n} A.a_i$), după cum rezultă numaidecît din

Definiția 2.

Dacă $H_i(a \mid A) = (0)$ pentru $i = 1,2,\ldots,n$ , spunem că algebra diferențială $(\Lambda.(A^n),\ d.(a\ \ A))$ este aciclică.

In acest şir de expuneri, studiul algebrei de omologie $H.(a \mid A)$ ocupă un loc central. Incepînd cu Exp.IV, ne ocupăm de revelarea semnificației pe care o au algebrele de omologie ale anumitor complexe Koszul, construite peste inele locale noetheriene.

O primă proprietate importantă a acestei algebre este următoarea.

10. Propoziție

Fie $a: [n] \longrightarrow A$ o $[n]$-schemă, $\underline{a} = \sum_{x \in [n]} A.a_x$

Atunci : $\underline{a}.\ H.(a \mid A) = 0$ .

Demonstrație.

Afirmația rezultă din corolarul 16, §3, Exp.I .//

Această proprietate arată că idealul $\underline{a}$ anulează omologia complexului Koszul definit de schema $a: [n] \longrightarrow A$ pe algebra exterioară $\Lambda.(A^n)$. In particular:

11. Corolar

Dacă $\underline{a} = \sum_{x \in [n]} A.a_x = A$, atunci algebra diferențială $(\Lambda.(A^n),\ d.(a\ \ A))$ este aciclică.

In continuare, vom studia mai în amănunt legătura între structurile multiplicativă și diferențială pe algebra exterioară $\Lambda.(A^n)$.

Să considerăm următorul endomorfism A-liniar al algebrei exterioare $\Lambda.(A^n)$ : $(\forall)\ j \in \{1,2,\ldots,n\}$ ,

$$\mu_j : \Lambda.(A^n) \longrightarrow \Lambda.(A^n),\ \text{cu: } (\forall)\, w \in \Lambda.(A^n)\ ;\ \mu_j(w) = E_j \wedge w$$

unde $\mathcal{E} = \{E_1,\ldots,E_n\}$ este o bază fixată în $A^n$.

12. Propozitie

Pentru orice $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ :

(i) $\mu_j \circ \mu_j = 0$

(ii) $\mu_i \circ \mu_j + \mu_j \circ \mu_i = 0$

Demonstratie

(i) $(\forall)\ w \in \Lambda.(A^n)$, $\mu_j \circ \mu_j(w) = \mu_j(E_j \wedge w) = E_j \wedge (E_j \wedge w) =$

$= (E_j \wedge E_j) \wedge w =$ (deoarece $\deg(E_j) = 1$, cf.Prop.2, §1) $= 0 \wedge w = 0$.

(ii) $(\forall) w \in \Lambda.(A^n)$, $(\mu_i \circ \mu_j + \mu_j \circ \mu_i)(w) = E_i \wedge (E_j \wedge w) + E_j \wedge (E_i \wedge w) =$

$= (E_i \wedge E_j) \wedge w + (E_j \wedge E_i) \wedge w = [E_i \wedge E_j + E_j \wedge E_i] \wedge w = 0 \wedge w = 0$ //

Rezultă din definiţia omomorfismelor de multiplicare $\{\mu_j\}$ împreună cu Prop.12, (i), că, pentru orice $j \in \{1,2,\dots,n\}$, $\mu_j$ este o diferenţială co-omologică pe $\Lambda.(A^n)$ (aici "co-omologică" înseamnă că $\mu_j$ este omogenă în raport cu graduarea lui $\Lambda.(A^n)$, de grad +1).

Diferenţialele co-omologice $\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$ se leagă prin relaţiile de anti-comutare (ii), Prop.12.

OBSERVATIE

Rezultă din demonstraţia de mai sus că orice element omogen, de grad impar $w \in \Lambda.(A^n)$, defineşte diferenţiala co-omologică $\mu_w : \Lambda.(A^n) \longrightarrow \Lambda.(A^n)$ , $\mu_w(u) = w \wedge u$, $(\forall)\ u \in \Lambda.(A^n)$.

Această diferenţială este de grad egal cu $\deg(w)$. //

Diferenţialele co-omologice date de multiplicarea pe $\Lambda.(A^n)$ cu elementele $E_j \in \mathcal{E}$ , au următoarea proprietate:

13. Propozitie

Pentru orice $j \in \{1,2,\dots,n\}$: $\ker \mu_j = \operatorname{Im} \mu_j$ .

Demonstrație

Este evident (cf.(i), Prop.12) că $\mathrm{Im}\,\mu_j \subseteq \ker \mu_j$.

Reciproc, fie $w \in \ker \mu_j$. Cum $\ker \mu_j$ (resp. $\mathrm{Im}\,\mu_j$) sînt submodule graduate ale lui $\Lambda.(A^n)$ ($\mu_j$ fiind aplicație liniară omogenă), putem lua elementul $w$ omogen.

Dar atunci: $w \in \ker \mu_j \Longleftrightarrow w \wedge E_j = E_j \wedge w = 0$.

Cum $E_j$ este de grad impar și nu divide zero în $\Lambda.(A^n)$ (cf.Prop.7, §1), rezultă că $w \in \Lambda.(A^n) \wedge E_j = \mathrm{Im}\,\mu_j$.//

Această propoziție arată că fiecare din complexele $(\Lambda.(A^n), \mu_j)$ are co-omologia nulă, $j = 1,2,\ldots,n$.

Așadar, omotetiile definite pe $\Lambda.(A^n)$ de vectorii unei baze a lui $A^n$, induc structurii de complex co-omologic aciclic pe algebra exterioară.

Fie acum $a : [n] \longrightarrow A$ o schemă și fie $d.(a \mid A)$ diferențiala Koszul definită de $a$ pe $\Lambda.(A^n)$.

14. Propoziție

Pentru orice $j \in \{1,2,\ldots,n\}$:

$$d.(a \mid A) \circ \mu_j + \mu_j \circ d.(a \mid A) = \mu_{a_j},$$

unde $\mu_{a_j} : \Lambda.(A^n) \longrightarrow \Lambda.(A^n)$ este aplicația A-liniară de multiplicare cu elementul $a_j \in A$.

Demonstrație.

Fie $d. = d.(a \mid A)$. Fie $w \in \Lambda.(A^n)$ un element omogen. Avem:

$$(d.\circ \mu_j + \mu_j \circ d.)(w) = d.(\mu_j(w)) + \mu_j(d.(w)) = d.(E_j \wedge w) +$$
$$+ E_j \wedge d.(w) = d.(E_j) \wedge w + (-1)^{E_j} E_j \wedge d.w + E_j \wedge d.w = (\text{din } |E_j| = 1) =$$
$$= d.(E_j) \wedge w - E_j \wedge d.w + E_j \wedge d.w = d.(E_j) \wedge w =$$
$$= (\text{deoarece } d.(E_j) = a_j) = a_j \wedge w = a_j\, w = \mu_{a_j}(w)\ //$$

15. Corolar

Pentru orice $j \in \{1,2,\dots,n\}$, $\mu_j$ induce endomorfismul nul în algebra de omologie $H.(a \mid A)$.

Din Prop.14, rezultă că $\mu_j = \mu_{E_j}$ induce pe $H.(a \mid A)$ endomorfismul de multiplicare cu $a_j$, care este nul conform Prop.lo.

Rezultă din această propoziţie că generatorii $E_1,\dots,E_n$ ai algebrei diferenţiale Koszul $(\Lambda.(A^n), d.(a \mid A))$ "se trivializează în omologia $H.(a \mid A)$". Aşadar, proprietăţile algebrei $H.(a \mid A)$ diferă în mod esenţial de proprietăţile algebrei diferenţiale $(\Lambda.(A^n), d.(a \mid A))$.

In continuare, vom da o altă exprimare autodualităţii algebrei exterioare $\Lambda.(A^n)$ (cf.Cor.4,§1), în raport cu structurile diferenţiale Koszul ce pot fi definite pe $\Lambda.(A^n)$ (Prop.2,§1, Exp.II). Anume, fie: $a^{(1)}, a^{(2)},\dots, a^{(n)}$ n scheme peste A, strînse în matricea:

(4) $$\mathcal{A} = (a_j^{(i)})_{1\ i,j\ n} .$$

Liniile matricii $\mathcal{A}$ introduc pe algebra exterioară $\Lambda.(A^n)$ diferenţialele Koszul: $d.(a^{(1)} \mid A)$, $d.(a^{(2)} \mid A),\dots,d.(a^{(n)} \mid A)$, pe care, pentru uşurarea notaţiei, le notăm cu:

(5) $$d.^{(i)} := d.(a^{(i)} \mid A).$$

Considerăm acum duala algebrei exterioare $\Lambda.(A^n)$, anume:

$$\Lambda^{\cdot}(A^n) = \bigoplus_{i=o}^{n} \Lambda^{i}(A^n), \text{ cu } \Lambda^{i}(A^n) = \Lambda_{n-i}(A^n)^o .$$

Aşa cum am văzut mai sus, $\Lambda^{\cdot}(A^n)$ este liniar izomorfă cu algebra exterioară $\Lambda.(A^n)$ (Cor.4, §1).

$\Lambda^{\cdot}(A^n)$ posedă o structură multiplicativă canonică, ce poate fi descrisă prin tabla de înmulţire următoare (în raport cu o bază fixată $\mathcal{E} = (E_1,\dots,E_n)$ a lui $A^n$) :

(6) $\quad E_i^{\circ} \vee E_j^{\circ} = ( E_i \wedge E_j)^{\circ} \quad , (\forall)\ i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ .

Algebra $(\Lambda^{\bullet}(A^n), \vee)$ astfel obţinută este asociativă, unitară şi anti-comutativă. Asocierea $E_i \longmapsto E_i^{\circ}$, $i = 1,2,\dots,n$ stabileşte un izomorfism între algebrele $(\Lambda_{\bullet}(A^n), \wedge)$ şi $(\Lambda^{\bullet}(A^n), \vee)$.

Ca algebră graduată, $\Lambda^{\bullet}(A^n)$ este standard.

Fixarea n xn-matricii $\mathcal{A} = (a_j^{(i)})_{1\ i,j\ n}$ , determină în mod canonic o structură de $\Lambda^{\bullet}(A^n)$-modul pe $\Lambda_{\bullet}(A^n)$, în modul următor:

(7) $\quad (\forall)\ i,j \in \{1,2,\dots,n\} : E_i^{\circ} \cdot E_j = d_{\bullet}^{(i)}(E_j) = a_j^{(i)}$

(cu $d_{\bullet}^{(1)}, \dots, d_{\bullet}^{(n)}$ date de (5)).

Astfel, pentru orice lanţuri I,J, cu $|I| = |J|$, relaţiile (7) împreună cu Prop.10, §3, Exp.II, arată că:

(8) $\quad E_J^{\circ} \cdot E_I = \Delta(I \mid J)$ ,

unde $\Delta(I \mid J)$ este minorul matricii $\mathcal{A}$ , avînd liniile indexate de I şi coloanele de J.

<u>OBSERVATIE</u>

Cu notaţiile de mai sus, vedem că, scriind $\Lambda_{\bullet}(A^n) = A \langle E_1,\dots,E_n \rangle$, avem: $\Lambda^{\bullet}(A^n) \cong A \langle \mu_1,\dots,\mu_n \rangle$, unde $\mu_j = \mu_{E_j}$ este aplicaţie liniară de multiplicare (exterioară) cu $E_j$ pe $\Lambda_{\bullet}(A^n)$.

Fixarea matricii $\mathcal{A}$ determină, datorită Prop.9, §3, Exp.II, algebra: $A \langle d^{(1)},\dots,d^{(n)} \rangle$ (asociativă, unitară, anti-comutativă), în care tabla de înmulţire este dată de compunerea generatorilor $d^{(1)},\dots, d^{(n)}$ . Asocierea: $\varrho_{\mathcal{A}} : \mu_i \longmapsto d^{(i)}$ , $i = 1,2,\dots,n$, stabileşte un omomorfism al algebrei $A\langle \mu_1,\dots,\mu_n \rangle$ pe algebra $A \langle d^{(1)},\dots, d^{(n)} \rangle$ .

Dar $A \langle d^{(1)},\dots, d^{(n)} \rangle \subseteq \mathrm{End}_A(\Lambda_{\bullet}(A^n))$, încît structura de $\Lambda^{\bullet}(A^n)$-modul (7) pe $\Lambda_{\bullet}(A^n)$, provine din reprezentarea de algebre $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ de mai sus.

Definiţia (7) a structurii de $\bigwedge^{\cdot}(A^n)$ - modul pe $\bigwedge_{\cdot}(A^n)$ o putem exprima astfel:

$$(7)' \quad (E_1^o , E_2^o ,\ldots, E_n^o) \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix} = {}^{t}\mathcal{A} \quad ,$$

unde " $t$ " denotă operatorul de transpunere.

Dualizînd (7)', obţinem imediat o structură de $\bigwedge_{\cdot}(A^n)$-modul pe $\bigwedge^{\cdot}(A^n)$, dată de :

$$(9) \quad (E_1,\ldots, E_n) \cdot \begin{pmatrix} E_1^o \\ \vdots \\ E_n^o \end{pmatrix} = \mathcal{A} \quad .$$

Aşadar, fixarea matricii $\mathcal{A}$ determină, două <u>structuri liniare reciproce</u> : anume, structura (7)' de $\bigwedge^{\cdot}(A^n)$-modul pe $\bigwedge_{\cdot}(A^n)$ şi structura (9) de $\bigwedge_{\cdot}(A^n)$-modul pe $\bigwedge^{\cdot}(A^n)$. Aceste structuri reciproce exprimă autodualitatea canonică a algebrei exterioare $\bigwedge_{\cdot}(A^n)$.

# EXPUNEREA IV

## MODULE DIFERENTIALE KOSZUL

In această expunere definim categoria modulelor de tip Koszul peste o algebră diferenţială Koszul $(K.(a \mid A), d.(a \mid A))$, unde $a: [n] \longrightarrow A$ este o $[n]$ -schemă fixată. Structura multiplicativă pe $K.(a \mid A)$ este dată de concatenarea lanţurilor (înmulţirea exterioară, cf.Exp.III).

### §1. MODULE DIFERENTIALE KOSZUL

**1. Definiţie**

Fie M un A-modul: Complexul $(K.(a \mid M), d.(a \mid M)) = (K.(a \mid A), d.(a \mid A)) \otimes_A \widetilde{M}$ (unde $\widetilde{M}$ este complexul trivial definit de M) se numeşte "modulul Koszul, definit de schema a şi de A-modulul M".

Astfel, $K.(A \mid M) = \bigoplus_{i=o}^{n} K_i(a \mid M)$, unde $K_i(a|M) = K_i(a \mid A) \otimes_A M$ $(\cong \Lambda_i(A^n) \otimes_A M \cong \bigoplus_{|I|=i} E_I \otimes M \cong M^{\binom{n}{i}}$, unde $\{E_I / |I| = i\}$, $i \geq o$. este baza modulului liber $\Lambda_i(A^n))$. Modulo twist-ul canonic $E_I \otimes m \xrightarrow{\sim} m \otimes E_I$, $(\forall)$ $m \in M$, rezultă că un element din $K_i(a|M)$ se poate scrie: $w = \sum_{|I|=i} m_I E_I$ (unde am notat $m \otimes E_I$ prin $mE_I$, $(\forall)$ $m \in M$), cu : $m_I \in M$, $(\forall)$ $I \in \binom{[n]}{i}$ .

Diferenţiala $d_i(a \mid M) : K_i(a \mid M) \longrightarrow K_{i-1}(a \mid M)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ acţionează astfel:

$$(\forall)\ m \in M,\ I \in \binom{[n]}{i} \ :\ d_i(a \mid M)(m\,E_I) = m.d_i(a \mid A)(E_I) .$$

(Explicit :

$$d_i(a|M)(m\,E_I) = \sum_{x \in I} \varepsilon_I(x)\, a_x m.\, E_I \ ) .$$

Orice aplicaţie A-liniară $f: M \longrightarrow N$, determină în mod unic morfismul de complexe : $K.(a|f) : K.(a|M) \longrightarrow K.(a|N)$, dat prin $(\forall)$ $i \in \{o,1,\ldots,n\}$, $K_i(a|f)(m\,E_I) = f(m)\,E_I$, pentru orice $m \in M$, $I \in \binom{[n]}{i}$.

Evident, asocierile $M \longmapsto (K.(a \mid M),\ d.(a \mid M))$ şi $f \longmapsto K.(a \mid f)$, constituie un functor covariant de la categoria $\mathrm{Mod}(A)$ a A-modulelor, la categoria $\mathcal{C}(A)$ a complexelor de A-module.

Vom nota acest functor prin $K.(a| \ )$, omiţînd, pentru comoditate, manţionarea diferenţialei $d.(a| \ )$.

<u>1. Propoziţie</u>

<u>Functorul $K.(a| \ ) : \mathrm{Mod}\ (A) \longrightarrow \mathcal{C}(A)$ este exact.</u>

<u>Demonstraţie</u>

Fie $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ un şir exact de A-module.

Trebuie să arătăm că şirul de complexe:

$$0 \longrightarrow K.(a \quad M) \xrightarrow{K.(a|f)} K.(a \quad M) \xrightarrow{K.(a|g)} K.(a \quad M'') \longrightarrow 0$$

rămîne exact.

Acest lucru este imediat vizibil, dacă ţinem cont de faptul că $K.(a \mid M)$ este <u>sumă directă</u> de $\binom{n}{i}$ copii ale lui $M$, iar $K_i(a \mid f)$ este <u>sumă directă</u> de $\binom{n}{i}$ copiia ale lui $f$, pentru $i = 1,2,\ldots,n$ şi pentru orice modul $M$ şi orice aplicaţie A-liniară $f$.

Să mai remarcăm că, pentru orice A-modul $M$, $K.(a \mid M)$ este un $K.(a \mid A)$-modul (diferenţial). In adevăr, pentru orice $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, $I \in \binom{[n]}{i}$, $m_I = m \otimes E_I \in K.(a \mid M)$ şi $\alpha_J = \alpha\, E_J \in K.(a \mid A)$ ( cu $m \in M$, $\alpha \in A$), putem defini:

$$(\alpha_J\, , m_I) \longmapsto (\alpha m) \otimes E_{[J * I]} = (\alpha m)_{[J * I]} .$$

Exactitatea functorului $K.(a| \ )$ permite construirea (în mod canonic a unui <u>şir exact lung de omologie</u>, asociat oricărui şir exact scurt de A-module.

Intrucît vom utiliza acest şir exact lung, reamintim aici definiţia sa canonică.

Fie $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ un şir exact scurt de A-module. Atunci are loc următorul şir exact lung:

$$(1)\quad 0 \to H_n(a|M') \xrightarrow{f^*} H_n(a|M) \xrightarrow{g^*} H_n(a|M'') \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(a|M') \xrightarrow{f^*} H_{n-1}(A,M) \to$$
$$\ldots \to H_0(a|M') \xrightarrow{f^*}$$
$$\xrightarrow{g^*} H_{n-1}(a|M'') \xrightarrow{\Delta} \ldots \xrightarrow{\Delta} H_1(a|M') \xrightarrow{f^*} H_1(a|M) \xrightarrow{g^*} H_1(a|M'') \xrightarrow{\Delta} H_0(a|M') \xrightarrow{f^*}$$
$$\xrightarrow{f^*} H_0(A|M) \xrightarrow{g^*} H_0(A|M'') \to 0$$

Omomorfismele $f^*$, $g^*$, $\Delta$, care apar în (1), sînt definite în modul următor.

(a) $f^*$ și $g^*$ : pentru orice $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, Prop.1 arată că $f$ şi $g$ induc omomorfisme: $K_i(a|f) : K_i(a|M') \longrightarrow K_i(a|M)$, $K_i(a|g) : K_i(a|M) \longrightarrow K_i(a|M'')$. Aceste omomorfisme transportă cicli în cicli şi borduri în borduri (fiind componente omogene ale morfismelor de complexe $K.(a|f)$, $K.(a|g)$).

Atunci, prin trecere la cît, ele definesc omomorfismele de A-module: $f^* : H_i(a|M') \longrightarrow H_i(a|M)$, $g^* : H_i(a|M) \longrightarrow H_i(a|M'')$ şi Prop.1 arată numaidecît că şirurile:

$$H_i(a|M') \xrightarrow{f^*} H_i(a|M) \xrightarrow{g^*} H_i(a|M''),\ i = 0,1,\ldots,n$$

sînt exacte.

b) omomorfismele de conexiune $\Delta$ : pentru orice $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\Delta : H_i(a|M'') \longrightarrow H_{i-1}(a|M')$ se construieşte în modul următor.

Fie $\hat{z} \in H_i(a|M'')$ o clasă de omologie, cu $z \in Z_i(a|M'')$ un ciclu. Surjectivitatea lui $K_i(a|g)$ (Prop.1) arată că există $u \in Z_i(a|M)$, încît: $z = K_i(a|g)(u)$.

Cum $0 = d_i(a|M'')(z) = d_i(a|M'') \circ K_i(a|g)(u) =$

$= K_{i-1}(a|g) \circ d_i(a|M)(u) \Longrightarrow d_i(a|M)(u) \in \ker K_{i-1}(a|g) =$

$= \operatorname{Im} K_{i-1}(a|f)$ (cf.Prop.1) $\Longrightarrow (\exists) w \in K_{i-1}(a|M'')$ a.î. :

$$d_i(a|M)(u) = K_{i-1}(a|f)(w)$$

Fiind unic definit modulo bordurile, $w$ este chiar unic datorită injectivității lui $K_{i-1}(a \mid f)$.

Mai mult : $K_{i-2}(a \mid f) \circ d_{i-1}(a \mid M')(w) = d_{i-1}(a \mid M) \circ K_{i-1}(a \mid f)(w) = d_{i-1}(a \mid M) \circ d_i(a \mid M)(u) = 0$, deci $d_{i-1}(a \mid M')(w) = 0$ ($K_{i-2}(a \mid f)$ fiind injectiv). Aşadar $w$ este ciclu în $K_{i-1}(a \mid M')$, deci are sens $\hat{w} \in H_{i-1}(a\ M')$.

Vom pune, aşadar:

$$(\forall)\ z \in H_i(a \mid M''),\ \Delta(\hat{z}) = \hat{w} \text{ cu } \frac{K_{i-1}(a \mid f)(w) = d_i(a \mid M)(u) \text{ şi}}{z = K_i(a \mid g)(u)}$$

(unde "$\wedge$" denotă clasa de omologie a unui ciclu).

Pentru aplicațiile ulterioare ale teoriei modulelor diferențiale Koszul, vom explicita structura lor locală (cf.Exp.I, §3). Datorită tipului particular de poset utilizat aici (lanțul $[n]$), structura locală coincide cu cea globală în jurul oricărui $x \in [n]$. De aceea, este suficient să considerăm cazul particular $x = n$. Aceasta înseamnă să studiem legătura între complexele Koszul definite de $[n]$- schema $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ peste $A$ şi de restricția ei la $[n-1]$, i.e de $[n-1]$-schema $a' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$. Pentru claritate, vom nota complexele Koszul respective prin $K.(a_1, \ldots, a_n \mid M)$, respectiv $K.(a_1, \ldots, a_{n-1} \mid M)$, $(\forall)$ $M \in \mathbb{M}od(A)$.

<u>OBSERVAȚIE</u>

Datorită invarianței la permutări a complexului Koszul (Prop.5, §2, Exp.II), structura locală, în jurul lui $x = n$, a omologiei lui $K.(a_1, \ldots, a_n \mid M)$, coincide cu aceea în jurul lui $x = i$, $(\forall)$ $i \in [n]$.

Aşadar, concluziile pe care le tragem în consideraţiile următoare, rămîn valabile dacă în loc de $x = n$ luăm orice alt vîrf $x = i$ al lanţului $[n]$ .//

## §2. STRUCTURA LOCALA A MODULELOR KOSZUL

Datorită invarianţei la permutări a complexului Koszul (Exp.II, §2, Prop.5), precum şi structurii de lanţ a posetului de bază $[n]$ , studiul local al complexului Koszul revine de fapt la explicitarea legăturii inductive între complexul construit pe o $[n-1]$ -schemă $a : [n-1] \longrightarrow A$ şi complexul construit pe o prelungire a lui a la o $[n]$-schemă peste A(adică, este suficient să ne limităm la studiul în jurul lui $x = n \doteq \max [n]$).

Vom conveni, în cele ce urmează, să notăm prin $X_{\bullet}^{(d)}$ translaţia cu $d \in \mathbb{Z}$ a unui complex de A-module:

$X_{\bullet} = (X_n, d_n)_{n\in \mathbb{Z}}$ , i.e. $X_n^{(d)} = X_{n+d}$ , $(\forall)\ n \in \mathbb{Z}$ .

Fie acum $a: [n] \longrightarrow A$ o schemă şi M un A-modul.

Considerăm modulele diferenţiale Koszul:

$K_{\bullet}(a_1,\dots,a_{n-1} | M)$ , $K_{\bullet}(a_1,\dots,a_n | M)$, $K_{\bullet}^{(-1)}(a_1,\dots,a_{n-1} | M)$.

Aceste module sînt legate prin următoarele morfisme de complexe:

(2.i) $f_{\bullet} : K_{\bullet}(a_1,\dots,a_{n-1}|M) \longrightarrow K_{\bullet}(a_1,\dots,a_n | M)$,

$f_{\bullet} = (f_i)_{0\leq i\leq n}$, unde, pentru orice $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$ , oricare $m \in M$ şi orice $I \in \binom{[n-1]}{i}$ : $f_i(E_I \otimes m) = E_I \otimes m$($f_n$ fiind aplicaţia nulă, întrucît $K_n(a_1,\dots,a_{n-1} | M) = (0)$).

(2.ii) $g_{\bullet} : K_{\bullet}(a_1,\dots,a_n | M) \longrightarrow K_{\bullet}^{(-1)}(a_1,\dots,a_{n-1} | M)$,

$g_{\bullet} = (g_i)_{0\leq i\leq n}$ , unde, pentru $i \in \{0,1,\dots,n\}$, $m \in M$ şi $I \in \binom{[n]}{i}$,

$$g_i(E_I \otimes m) = \begin{cases} E_{I_n} \otimes m, & \text{dacă } n \in I \\ 0 & , \text{dacă } n \notin I \end{cases}$$

(unde $I_n = I \setminus \{n\}$ , cf.Exp.I, §1).

Faptul că f. şi g. sînt morfisme de complexe este lăsat pentru demonstraţie cititorului.

2. Propoziţie

Pentru orice schemă $a: [n] \longrightarrow A$ şi orice A-modul M, şirul de complexe:

$$(3) \quad 0 \longrightarrow K_{\bullet}(a_1,\dots,a_{n-1}|M) \xrightarrow{f.} K_{\bullet}(a_1,\dots,a_n|M) \xrightarrow{g.} K_{\bullet}^{(-1)}(a_1,\dots,a_{n-1}|M) \to 0$$

este exact.

Demonstraţie

Intrucît f. este injecţia canonică (cf.(2.2)), el este morfism surjectiv de complexe.

Intrucît orice i-lanţ $I \in \binom{[n-1]}{i}$ provine din (i+1)-lanţul $I^n = I \cup \{n\} \in \binom{[n]}{i+1}$ prin contracţia lui n ($i = 0,1,\dots,n-1$), rezultă că g. este morfism surjectiv de complexe.

Pe de altă parte, pentru orice $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$, $m \in M$, $I \in \binom{[n-1]}{i}$:

$$g_i \circ f_i \quad (E_I \otimes m) = g_i(E_I \otimes m) = 0, \text{ căci } n \notin I \quad (\text{cf.}(2.ii)).$$

Aşadar $\operatorname{Im} f. \subseteq \ker g.$

Dacă $z = \sum_{I = i} \alpha_I \cdot E_I \otimes m_I \in \ker g.$, rezultă din (2.ii) că

$$\sum_{|I|=i,\ n\in I} \alpha_I \cdot E_{I_n} \otimes m_I = 0.$$ Cum $K_{i-1}(a_1,\dots,a_{n-1} \mid M)$ este sumă directă de copii ale lui M, rezultă de aici $\alpha_I = 0$, pentru $|I| = i$ şi $n \in I$. Aşadar $z = \sum_{|I|=i,\ n\notin I} \alpha_I E_I \otimes m_I$, adică $z \in \operatorname{Im} f.$, cf.(2.i).

Aplicînd şirul exact lung de omologie, asociat unui şir exact scurt de complexe de A-module, obţinem:

3. Corolar

Pentru orice [n]-schemă $a: [n] \longrightarrow A$ şi pentru orice A-modul M, are loc şirul exact lung de omologie:

$$(4) \quad \ldots \xrightarrow{\Delta} H_i(a_1,\ldots,a_{n-1}|M) \xrightarrow{\bar{f}} H_i(a_1,\ldots,a_n|M) \xrightarrow{\bar{g}} H_{i-1}(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)$$
$$\xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(a_1,\ldots,a_{n-1}|M) \xrightarrow{\bar{f}} H_{i-1}(a_1,\ldots,a_n|M) \xrightarrow{\bar{g}} \ldots$$

$(i = n, n-1,\ldots,1)$.

Pentru $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, omomorfismul de conexiune

$$\Delta: H_i(a_1,\ldots,a_{n-1}|M) \longrightarrow H_i(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)$$

constă din multiplicarea cu $(-1)^i a_n$.

(i.e. $(\forall)$ $\hat{z} \in H_i(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)$, $\Delta(\hat{z}) = (-1)^i a_n \hat{z}$).

Demonstrație

Utilizăm explicitarea de la §1 a morfismului de conexiune $\Delta$. Anume, fie $z = \sum_{|I|=i} \alpha_I E_I \otimes m_I$ un ciclu din $Z_i(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)$, reprezentînd o clasă de omologie $\hat{z}$ din $H_i(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)$. Atunci :

$$\Delta(\hat{z}) = \hat{w}, \text{ unde } g.(u) = z \text{ și } d.(a|M)(u) = w$$

O g. - preimagine u a lui g este, evident, următoarea:

$$u = \sum_{|I|=i} \alpha_I E_{I^n} \otimes m_I$$

Dar atunci, aplicînd diferențiala Koszul, obținem:

$$w = d.(a|M)(u) = \sum_I \alpha_I d.(E_{I^n} \otimes m_I) =$$
$$= \sum_I \alpha_I \sum_{x \in I^n, x \neq n} \varepsilon_{I^n}(x) a_x E_{I^n_x} \otimes m_I +$$
$$+ \sum_I \alpha_I \varepsilon_{I^n}(n) a_n E_{I^n_n} \otimes m_I = (\text{conform definiției structurii de modul pe } K.(a|M)) = E_n d.(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)(z) +$$
$$+ a_n E_{I^n}(n) \sum_I \alpha_I E_I \otimes m_I = (\text{întrucît } z \text{ este ciclu și } E_n(n) = (-1)^{\# I} = (-1)^i, \text{ căci } I \in \binom{[n-1]}{i})) =$$
$$= (-1)^i a_n z.$$

Trecînd la clasele de omologie, obţinem:

$$\Delta(\hat{z}) = \hat{w} = (-1)^i a_n \cdot \hat{z} \quad //$$

Pentru a urmări mai îndeaproape structura locală a modulelor diferenţiale Koszul, vom da o nouă legătură inductivă între asemenea complexe.

Anume, considerăm următoarea modificare a schemei date $a:[n]\to A$

$$\tilde{a} : [n] \longrightarrow A, \text{ cu } \tilde{a}_x = \begin{cases} a_x \text{ , dacă } x \in [n-1] \\ 1 \text{ , dacă } x = n \end{cases} .$$

Complexele $K.(a \mid M) = K.(a_1,\ldots,a_{n-1},a_n \mid M)$ şi $K.(\tilde{a} \mid M) = K.(a_1,\ldots,a_{n-1},1 \mid M)$ se leagă prin morfismul de complexe:

(5) $\varphi. : K.(a \mid M) \longrightarrow K.(\tilde{a} \mid M)$, unde, pentru $i = 0,1,\ldots,n$ ,

$I \in \binom{[n]}{i}$ şi $m \in M$ : $\varphi_i(E_I \quad m) = \begin{cases} E_I \otimes m, \text{ dacă } n \neq \max I \\ a_n E_I \otimes m, \text{ dacă } n = \max I \end{cases} .$

OBSERVATIE

Este uşor de văzut că $\varphi.$ este un morfism de complexe. Demonstraţia este lăsată cititorului.//

4. Propoziţie

Următoarele afirmatii sînt echivalente:

(i) Elementul $a_n \in A$ nu divide zero pe $M$

(ii) Morfismul de complexe (5) este injectiv

In plus, dacă (i) are loc, atunci:

(6) $\operatorname{coker}(\varphi.) = K.^{(-1)}(a_1,\ldots,a_{n-1} \mid M/a_nM)$

Demonstraţie

Arătăm, întîi, echivalenţa (i)$\Longleftrightarrow$(ii).

Fie $z = \sum_{|I|=i} \alpha_I E_I \otimes m \in K_i(a_1,\ldots,a_n \mid M)$ . Scriem:

(*) $z = z' + z''$, cu $z' = \sum_{|I|=i \text{ şi } n\in I} \alpha_I E_I \otimes m_I$ , $z'' = \sum_{|I|=i, n\notin I} \alpha_I E_I \otimes m_I$

Definiţia (5) a lui $\varphi.$ arată că:

$$\varphi.(z) = \varphi.(z') + \varphi.(z'') = a_n z' + z''$$

Aşadar, dacă $\varphi.(z) = 0 \Longrightarrow a_n z' + z'' = 0 \Longrightarrow a_n z' = 0$ şi $z'' = 0$

(întrucît $\{I \in \binom{n}{i} / n \in I\} \cap \{I \in \binom{[n]}{i} / n \notin I\} = \emptyset$ şi

$\{I \in \binom{[n]}{i} / n \in I\}$ împreună cu $\{I \in \binom{[n]}{i} / n \notin I\}$ indexează factori

direcţi diferiţi ai lui $K_i(a_1, \dots, a_{n-1}, 1 \mid M)$).

Aşadar $z \in \ker \varphi. \Longleftrightarrow z = z'$ şi $a_n z' = 0$, ceea ce se mai scrie:

<u>$z \in \ker \varphi. \Longleftrightarrow a_n . z = 0$.</u> Conform definiţiei modulului

$K_i(a_1, \dots, a_{n-1}, 1 \mid M)$, aceasta constituie exact echivalenţa (i)$\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$(ii) din enunţ.

Să presupunem acum că $a_n$ nu divide zero pe $M$.

Conform primei părţi din enunţ, rezultă pentru orice i:

$$\operatorname{Coker} \varphi_{i+1} = K_i(a_1, \dots, a_{n-1}, 1 \mid M) / \operatorname{Im} \varphi_{i+1}$$

Considerăm aplicaţiile:

$$\sigma_i : K_i(a_1, \dots, a_{n-1}, 1 \mid M) \longrightarrow K_{i-1}(a_1, \dots, a_{n-1} \mid M/a_n M),$$

date de: $(\forall)\ I \in \binom{[n]}{i}$, $m \in M$ :

$$(**) \quad \sigma_i(E_I \otimes m) = \begin{cases} E_{I_n} \otimes \hat{m}, & \text{dacă } n \in I, \text{ cu } \hat{m} = m (\operatorname{mod} a_n M) \\ 0, & \text{dacă } n \notin I \end{cases}$$

Cum $m \longmapsto m(\operatorname{mod} a_n M)$ şi $E_I \longmapsto E_{I_n}$ (cînd $n \in I$) sînt aplicaţii

surjective, rezultă surjectivitatea lui $\sigma_i$, $(\forall)$ i.

Arătăm că $\operatorname{Im} \varphi. = \ker \sigma.$, ceea ce va demonstra (6).

Evident, utilizînd (*) de mai sus, vedem că :

$$\sigma.(\varphi.(E_I \otimes m)) = \begin{cases} \sigma.(E_I \otimes m) = 0, & \text{dacă } n \notin I \\ \sigma.(E_I \otimes a_n m) = E_I \quad a_n m = E_I \quad 0 = 0, & n \quad I \end{cases}$$

Aşadar $\sigma. \circ \varphi. = 0$, deci $\operatorname{Im} \varphi. \subseteq \ker \sigma.$ .

Fie $z \in \ker \sigma.$ . Din (*) rezultă că putem scrie:

$z = z' + z''$ (modulele $K_i(a_1, \dots, a_n \mid M)$ şi $K_i(a_1, \dots, a_{n-1}, 1 \mid M)$

coincid).

Scriem: $z = \sum_{|I|=i} \alpha_I E_I \otimes m_I$.

Atunci $\sigma_\cdot(z) = \sigma_\cdot(z') + \sigma_\cdot(z'') = \sigma_\cdot(z') + 0 = \sigma_\cdot(z') =$

$= \sum_{|I|=i, n\in I} \alpha_I\ E_I \otimes \hat{m}_I = 0$. Cum $K_{i-1}(a_1, \dots, a_n | M/a_n M)$ este sumă

directă de copii ale lui $M/a_n M$, rezultă:

$$z \in \ker \sigma_\cdot \Longleftrightarrow \alpha_I \cdot m_I = o \ (\mathrm{mod}\ a_n M),\ (\forall)\ I \in \binom{[n]}{i} \text{ cu } n \in I .$$

Aşadar: $z \in \ker \sigma_\cdot \Longleftrightarrow \alpha_I m_I = a_n p_I$, cu $p_I \in M$, pentru orice

$I \in \binom{[n]}{i}$, cu $n \in I$.

Aşadar $z = z' + z'' \in \ker \sigma_\cdot \Longleftrightarrow z' = a_n \sum_{|I|=i, n\in I} E_I \otimes p_I$ ,

ceea ce se scrie:

$$z = z' + z'' \in \ker \sigma_\cdot \Longleftrightarrow z = a_n \bar{z}' + z'',\ \bar{z}' \in K_i(a_1, \dots, a_n | M)$$

Utilizînd iarăşi (x), urmează de aici că :

$$z = z' + z'' \in \ker \sigma_\cdot \Longleftrightarrow z = \varphi_\cdot(\bar{z}' + z'') \Longleftrightarrow z \in \mathrm{Im}\, \varphi$$

Astfel, $\ker \sigma_\cdot = \mathrm{Im}\, \varphi_\cdot$, ceea ce termină demonstraţia lui (6). //

5. Corolar

Fie $a: [n] \longrightarrow A$ o schemă şi fie $M$ un $A$-modul. Dacă $a_n$ nu divide zero pe $M$, atunci are loc şirul exact de module diferenţiale Koszul:

$$(7)\quad 0 \longrightarrow K_\cdot(a_1, \dots, a_n | M) \xrightarrow{\varphi_\cdot} K_\cdot(a_1, \dots, a_{n-1}, 1 | M) \xrightarrow{\sigma_\cdot} K_\cdot(a_1, \dots, a_{n-1} | M/a_n M) \longrightarrow 0$$

Din (7), în condiţiile din enunţul corolarului 5, rezultă şirul exact lung de omologie:

$$(8)\quad \dots \xrightarrow{\bar{\sigma}_\cdot} H_i(a_1, \dots, a_{n-1} | M/a_n M) \xrightarrow{\Delta} H_i(a_1, \dots, a_n | M) \xrightarrow{\bar{\varphi}_\cdot} H_i(a_1, \dots, a_{n-1}, 1 | M) \xrightarrow{\bar{\sigma}_\cdot} H_{i-1}(a_1, \dots, a_{n-1} | M/a_n M) \xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(a_1, \dots, a_n | M) \xrightarrow{\bar{\varphi}_\cdot} \dots$$

Obţinem imediat următorul rezultat.

6. Propoziţie

Fie $a : [n] \longrightarrow A$ o schemă şi M un A-modul.

Dacă $a_n$ nu divide zero pe M, atunci au loc izomorfismele:

(9) $H_i(a_1,\dots,a_n|M) = H_i(a_1,\dots,a_{n-1}|M/a_nM)$, $(\forall)$ i

Demonstraţie

Considerăm schema modificată $\tilde{a} : [n] \longrightarrow A$, cu $\tilde{a}_x = a_x$ pentru $x \in [n-1]$ şi $\tilde{a}_n = 1$. Atunci idealul $\underline{\tilde{a}}$ coincide cu A, deci conform Cor.11, §2, Exp.III, $K.(a_1,\dots,a_{n-1},1|M)$ este aciclic. Aşadar $H_i(a_1,\dots,a_{n-1}, 1|M) = (0)$ pentru orice i, deci şirul exact lung (8) de mai sus arată că omomorfismele de conexiune $\Delta$ sînt izomorfisme.//

In continuare, utilizăm rezultatele de mai sus asupra structurii locale a modulelor diferenţiale Koszul (i.e. şirurile exacte lungi (4), Cor.3 şi (8), Cor.5.), pentru a deduce anumite rezultate utile privind modulele de omologie ale modulelor diferenţiale Koszul.

## §3. OMOLOGIA MODULELOR DIFERENTIALE KOSZUL

Fie $a : [n] \longrightarrow A$ un şir ($[n]$- schemă) şi M un A-modul. Considerăm modulul diferenţial $(K.(a|M), d.(a|M))$, al cărui modul de omologie îl notăm $H.(a|M) = (H_i(a|M))$.

2. Definiţie

Fie $a = (a_i)_{i\in I}$ o familie de elemente din A. a este complet secantă pentru M dacă $H_i(a|M) = 0$ pentru $i \geq 1$.

7. Propoziţie

(i) $H_o(a|M) \cong M/\underline{a}M$

(ii) $\underline{H_n(a \mid M) \cong \mathrm{Ann}_M(\underline{a}) = (0 : \underline{a})_M}$

(iii) $\underline{\underline{a} + \mathrm{Ann}_A(M) \subseteq \mathrm{Ann}_A(H.(a \mid M))}$

(în particular $\underline{a}$. $H(\underline{a})$ M) = 0).

<u>Demonstrație</u>

(i) $H_0(a|M) = K_0(a|M)/_{\mathrm{Im}\, d_1(a|M)} = A \otimes_A M / \sum_{x\in[n]} a_x A \otimes_A M \cong$
$\cong M/\sum_{x\in[n]} a_x M = M/aM.$

(ii) $H_n(a|M) = \mathrm{Ker}(d_n(a|M)) = \{E_{[n]} \otimes m \in K_n(a|M) /$
$/ d_n(E_{[n]} \otimes m) = 0$ în $K_{n-1}(a|M)\} = \{E_{[n]} \otimes m / \sum_{x\in[n]} E_{[n]_x} \otimes a_x m =$
$= 0\} =$ (deoarece $\{E_{[n]_x}\}_{x\in[n]}$ este bază în A-modulul liber $K_{n-1}(a|A)) = \{E_{[n]} \otimes m / a_x m = 0 \ \forall x \in [n]\} \cong$

$\cong \mathrm{Ann}_M(\underline{a})$.

(iii) $\mathrm{Ann}_A(M)$ anulează modulul diferențial K.(a | M), deci cu atît mai mult omologia acestui modul. Pe de altă parte, idealul $\underline{a}$ . anulează omologia complexului (K.(a | A), d.(a | A)) (cf.Prop.lo, §2, Exp.III). Relația din enunț rezultă atunci pe baza definiției complexului $K.(a \mid M) = K.(a \mid A) \otimes_A \widetilde{M}$.
($\widetilde{M}$ = complexul trivial construit pe M).

<u>OBSERVATIE 1</u>

Dacă $\underline{a}$ = A atunci H.(a|M) = o în particular a este familie complet secantă.

<u>OBSERVATIE 2</u>

Reamintim că, pentru un A-modul E și un ideal $\underline{q} \subseteq A$, $\mathrm{Ann}_E(\underline{q}) \neq (0) \Longleftrightarrow \underline{q} \subseteq \bigcup_{p\in \mathrm{Ass}\,E} p$. Cînd A este noetherian și E este de tip finit, lema de evitare a idealelor prime arată că:

$\mathrm{Ann}_E(\mathfrak{q}) \neq (o) \Longleftrightarrow (\exists)\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(E)$ şi $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.

De asemenea, reamintim că $\mathrm{Ass}(E) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A/(\exists)\ x \in E,$ $x \neq 0$ şi $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_A(x) \}$.

Astfel, relaţia: $\mathrm{Ann}_E(\mathfrak{q}) \neq (o)$ echivalează cu faptul că orice element din $\mathfrak{q}$ divide zero pe E (pentru A noetherian şi E de tip finit).

Utilizînd rezultatele din §2, privind structura locală a modulelor diferenţiale Koszul, obţinem următoarele proprietăţi de anulare.

8. Propoziţie

Fie M un A-modul noetherian.

(i) Dacă $a_n$ aparţine radicalului Jacobson al lui A, atunci: pentru orice $j \in \{o,1,\ldots,n-1\}$, $H_j(a_1,\ldots,a_n|M) = 0 \Longrightarrow H_j(a_1,\ldots,a_{n-1}|M) = (0)$

(ii) Dacă $a_n$ nu divide zero pe $H_{j-1}(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, atunci:

$$H_j(a_1,\ldots,a_n|M) \cong H_j(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)/a_n H_j(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)$$

Demonstraţie

(i) Considerăm şirul exact (4), Cor.3, §2. Avem, pentru indicele j, subşirul exact:

$$H_j(a_1,\ldots,a_{n-1}|M) \xrightarrow{\Delta} H_j(a_1,\ldots,a_{n-1}|M) \longrightarrow H_j(a_1,\ldots,a_n|M) = (0)$$

deci $\Delta$ este surjectiv. Cum $\Delta$ acţionează prin multiplicare cu $\pm a_n$, rezultă:

$$(*) \qquad H_j(a_1,\ldots,a_{n-1}|M) = a_n \cdot H_j(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)$$

Dar $H_j(a_1,\dots,a_{n-1}|M)$ este noetherian (fiind cît al unui submodul al lui M), deci (*) împreună cu lema lui Nakayama arată că $H_j(a_1,\dots,a_{n-1}|M) = (0)$.

(ii) Ca la (i), considerăm subşirul exact:

$$H_j(a_1,\dots,a_{n-1}|M) \xrightarrow{\Delta} H_j(a_1,\dots,a_{n-1}|M) \longrightarrow H_j(a_1,\dots,a_n\ M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{j-1}(a_n,\dots,a_{n-1}\ M) \xrightarrow{\Delta} H_{j-1}(a_1,\dots,a_{n-1}\ M)$$

Dacă $a_n$ nu divide zero pe $H_{j-1}(a_1,\dots,a_{n-1}|M)$, rezultă că

$\Delta$: $H_{j-1}(a_1,\dots,a_{n-1}|M) \longrightarrow H_{j-1}(a_1,\dots,a_{n-1}|M)$ este injectiv, deci rezultă şirul exact:

$$H_j(a_1,\dots,a_{n-1}|M) \xrightarrow{\Delta} H_j(a_1,\dots,a_{n-1}|M) \longrightarrow H_j(a_1,\dots,a_n\ |M) \longrightarrow 0,$$

care, împreună cu faptul că $\Delta$ acţionează prin multiplicare cu $\pm a_n$, conduce la concluzia din enunţ.

9. Corolar

Fie M un A-modul noetherian şi $a_n \in J(A)$ (radicalul Jacobson al lui A).

Atunci $K.(a_1,\dots,a_n|M)$ este aciclic $\Longleftrightarrow$ $K.(a_1,\dots,a_{n-1}|M)$ este aciclic.

Demonstraţie

„$\Longleftarrow$" rezultă din şirul exact (4), Cor.3, §2, iar „$\Longrightarrow$" din (i) Prop.8 de mai sus (împreună cu ipoteza $a_n \in J(A)$ şi cu Prop,7,(i),(ii)).//

1o. Corolar

Fie M un A-modul noetherian. Dacă $a_n$ nu divide zero pe $H.(a_1,\dots,a_{n-1}|M)$, atunci:

$$H_{\bullet}(a_1,\ldots,a_n|M) \cong H_{\bullet}(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)/a_nH_{\bullet}(a_1,\ldots,a_{n-1}|M)$$

Demonstrație

Afirmația rezultă din (i), Prop.7 și Prop.8 de mai sus.//

La rezultatele de mai sus adăugăm și (6), Prop.6, §2. Izomorfismul (6) va fi utilizat în cele ce urmează.

## §4. SIRURI REGULATE. CODIMENSIUNEA OMOLOGICA

Fie $a : [n] \to A$ un șir ($[n]$ -schemă) și M un A-modul.

### 2'. DEFINITIE

Sirul $a_{\bullet} = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ se numește "M-regulat" (sau simplu "M-șir") dacă $\underline{a}M \neq M$ și $a_j$ nu divide zero pe $M/(a_1,\ldots,a_{j-1})M$, $j = 1,2,\ldots,n$ (cu$(a_1,\ldots,a_{j-1})M = (0)$ cînd $j=1$).

### 2". DEFINITIE

Un șir $a_1,\ldots,a_n$ de elemente ale inelului A se numește A-șir sărac pe M dacă $a_i$ nu divide pe zero în $M/(a_1,\ldots,a_{i-1})M$ pentru orice i, $1 \leq i \leq n$. Așadar un M-șir este un A-șir sărac pe M astfel încît $M \neq (a_1,\ldots,a_n)M$.

Proprietatea de a fi șir sărac depinde de ordinea șirului; de exemplu (1,0) este întotdeauna șir sărac pe cînd (0,1) nu este decît dacă M este zero.

In schimb, ~~[illegible]~~ un șir ~~[illegible]~~ complet secant nu depinde de ordinea termenilor (vezi Prop.13 de unde rezultă că orice combinație liniară de elementele unei familii complet secante rămîne complet secantă).

### 11. Propoziție

Fie M un A-modul și $a_{\bullet} : [n] \longrightarrow A$ un șir, încît:

$$\underline{a} = \sum_{x \in [n]} a_x A \subseteq J(A)$$

Fie următoarele afirmații:

(i) $a_{\bullet} = (a_1,\ldots,a_n)$ este un șir M-regulat

(ii) $H_j(a_1,\ldots,a_n|M) = (0)$ , $j = 1,2,\ldots,n$ ( i.e.$(a_1,\ldots,a_n)$ este

(iii) $H_1(a_1,\dots,a_n|M) = (0)$

Atunci i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii). Dacă în plus M este $\underline{a}$-adic separat rezultă iii) $\Rightarrow$ i). (în particular dacă M este noetherian i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii)).

Demonstrație

Evident, ii) $\Rightarrow$ iii).

i) $\Rightarrow$ ii). Inducție după n. Pentru n = o $H.(.|M) = 0$.

Presupunem $n \geq 1$. Din propoziția 5 §2 și Prop.6 rezultă:

$H_1(a_1,\dots,a_n|M) \cong H_1(a_2,\dots,a_n,a_1|M) \cong H_1(a_2,\dots,a_n|M/a_1M) = 0$

din ipoteza de inducție.

iii) $\Rightarrow$ i) Sublemă. Fie M un A-modul $\underline{a}$-adic separat. Dacă $H_i(a_1,\dots,a_n|M) = o$ pentru $a_n \in J$ (A) atunci $H_i(a_1,\dots,a_{n-1}|M) = 0$ $i \geq o$.

Demonstrația sublemei.

In șirul exact lung

$$\dots \to H_i(a_1,\dots,a_{n-1}|M) \xrightarrow{\Delta} H_i(a_1,\dots,a_{n-1}|M) \longrightarrow H_i(a_1,\dots,a_n|M) \longrightarrow \dots$$

cu $\Delta(\hat{x}_i) = (-1)^i \; a_n\hat{x}_i$, avem $H_i(a_1,\dots,a_n|M) = 0$ implică $\Delta$ surjecție deci $H_i(a_1,\dots,a_{n-1}|M) = \operatorname{Im}\Delta = a_n H_i(a_1,\dots,a_{n-1}|M) =$

$= \bigcap_{k=1}^{\infty} a_n^k H_i(a_1,\dots,a_{n-1}|M) = 0$ deoarece M este $\underline{a}$-adic separat.//

Inducție după n.

Pentru n = 1 $H_1(a_1|M) = (0:a_1)_M$ și din iii) rezultă $a_1$ nondivizor al lui zero.

Pentru $n \geq 1$ rezultă în particular $H_1(a_1|M) = (o: a_1)_M = 0$ conform sublemei, deci $a_1$ nu divide zero în M. Atunci $H_1(a_2,\dots,a_n|M/a_1M) = 0$ deci $a_2$ nu divide zero în $M/a_1M$ etc.//

12. Corolar

Fie M un A-modul noetherian. Presupunem că a: $[n] \to A$ este un şir cu proprietatea: $\underline{a} \subseteq J(A)$.

Următoarele sînt echivalente:

(i) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este un şir M-regulat

(ii) $(a_{s(1)}, a_{s(2)}, \ldots, a_{s(n)})$ este un şir M-regulat, $(\forall)\ s \in S(n)$ .

Demonstraţie

(ii)$\Rightarrow$(i) este evidentă, iar (i)$\Rightarrow$(ii) rezultă din Prop.11 de mai sus şi din Cor.6, §2, Exp.II.//

In continuare, vom utiliza următorul rezultat ajutător.

13. Propoziţie

Fie $a. : [n] \to A$ un şir, M un A-modul. Fie $\mathcal{A} = [\alpha_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ o nxn-matrice inversabilă peste A şi fie $b. = \mathcal{A}a.$ (i.e. $b. = (b_1, \ldots, b_n)$, cu $b_x = \sum_{j=1}^{n} a_{xj}\, a_j$, $x \in [n]$).
Atunci $H.(b_1, \ldots, b_n | M) \cong H.(a_1, \ldots, a_n | M)$.

Demonstraţie

Matricea $\mathcal{A}$ induce izomorfismul de A-module libere $A^n \cong K_1(a_1, \ldots, a_n | A) \cong K_1(b_1, \ldots, b_n | A) \cong A^n$, care se extinde canonic la un izomorfism de algebre diferenţiale:

$$K.(a_1, \ldots, a_n | A) \cong K.(b_1, \ldots, b_n | A),$$

Acest ultim izomorfism de algebre induce pentru orice A-modul M un izomorfism de module diferenţiale:

$$K.(a_1, \ldots, a_n | M) \cong K.(b_1, \ldots, b_n | M),$$

de unde rezultă afirmaţia din enunţ.

14. Corolar

In condiţiile Prop.13 presupunînd în plus M A-modul $\underline{a}$-adic separat, $(a_1, \ldots, a_n)$ este şir M-regulat $\Leftrightarrow$ $(b_1, \ldots, b_n)$ este şir M-regulat.

OBSERVATIE

Rezultă din Prop.13 că omologia complexului $K.(a_1,\dots a_n|M)$ nu depinde decît de idealul $\underline{a} = \sum_{x\in[n]} Aa_x$, şi nu de vreun sistem minimal de generatori ai acestui ideal, în ipoteza că $\{a_1,\dots,a_n\}$ generează minimal idealul $\underline{a}$ .//

Un prim rezultat important în studiul omologiei modulelor diferenţiale Koszul, este următorul.

1. Teoremă

Fie A noetherian, $\underline{a} \subseteq J(A)$ un ideal şi fie M un A-modul noetherian.

Există un întreg $q \geqslant 0$, dependent doar de idealul $\underline{a}$ şi de modulul M, încît:

(I) orice şir M-regulat maximal, conţinut în $\underline{a}$, are lungime q sau, echivalent:

(II) pentru orice sistem de generatori $(a_1,\dots,a_n)$ ai idealului $\underline{a}$ :

$$H_{n-q}(a_1,\dots,a_n|M) \neq (0) \text{ şi } H_j(a_1,\dots,a_n|M) = (0) \text{ pentru } j > n-q .$$

Demonstraţie (Kirby)

Vom nota cu $\lambda_g(M)$ întregul:

$$\lambda_g(M) = \max\{j\in[n] \,/ H_j(a_1,\dots,a_n|M) \neq (0)\},$$

unde $g = \{a_1,\dots,a_n\}$ este un sistem de generatori ai idealului $\underline{a}$ . Acest întreg are proprietăţile următoare.

(i) $\lambda_g(M) = n \Longleftrightarrow \underline{a}$ constă numai din divizori ai lui 0 pe M.

In adevăr, $\lambda_g(M) = n \Longleftrightarrow H_n(a_1,\dots,a_n|M) \neq 0 \Longleftrightarrow$ (cf.(ii),Prop.7, §3) $\Longleftrightarrow \mathrm{Ann}_M(\underline{a}) \neq (0) \Longleftrightarrow \underline{a} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}M} \mathfrak{p}$ (din lema de evitare a idealelor prime) $\Longleftrightarrow (\exists)\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}M$ şi $\underline{a} \subset \mathfrak{p} \Longleftrightarrow$ orice element din $\underline{a}$ divide zero pe M.//

Sub o formă echivalentă, (i) se exprimă şi astfel:

(i)' $\lambda_g(M) < n \Longleftrightarrow \underline{a}$ conţine un non-divizor al lui zero pe M.

A doua proprietate importantă a lui $\lambda_g(M)$ este următoarea:

(ii) dacă $\lambda_g(M) < n$ şi $\xi \in \underline{a}$ este un non-divizor al lui zero pe M,

atunci: $$\lambda_g(M / \xi M) = \lambda_g(M) + 1$$

In adevăr, cînd $\xi$ ($\in \underline{a}$) nu divide zero pe M, avem şirul exact de module:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mu_\xi} M \xrightarrow{can} M/\xi M \longrightarrow 0 \quad (\text{cu } \mu_\xi(m) = \xi m),$$

care dă şirul exact de module diferenţiale Koszul:

$$0 \longrightarrow K.(a_1,\dots,a_n|M) \xrightarrow{\overline{\mu_\xi}} K.(a_1,\dots,a_n|M) \xrightarrow{\overline{can}} K.(a_1,\dots,a_n|M/\xi M) \longrightarrow 0,$$

deci şirul exact lung de omologie:

$$\dots \longrightarrow H_j(a_1,\dots,a_n|M) \xrightarrow{\overline{\mu_\xi}} H_j(a_1,\dots,a_n|M) \xrightarrow{\overline{can}} H_j(a_1,\dots,a_n|M/\xi M) \xrightarrow{\Delta} \dots$$
$$\xrightarrow{\Delta} H_{j-1}(a_1,\dots,a_n|M) \xrightarrow{\overline{\mu_\xi}} H_{j-1}(a_1,\dots,a_{n-1}|M) \xrightarrow{\overline{can}} H_{j-1}(a_1,\dots,a_n|M/\xi M) \xrightarrow{\Delta} \dots$$

Deoarece $g = \{a_1,\dots,a_n\}$ generează pe $\underline{a}$ şi întrucît $\underline{a}$ anulează omologia modulelor diferenţiale Koszul construite pe g(cf.(iii), Prop.7, §3), din $\xi \in \underline{a}$ deducem că omomorfismele în omologie (induse de multiplicarea cu $\xi$ ) sînt <u>nule</u>.

Aşadar, şirul exact lung de omologie de mai sus, dă pentru orice $j \in \{1,2,\dots,n\}$ şirul exact scurt:

$$(*)\quad 0 \longrightarrow H_j(a_1,\dots,a_n|M) \xrightarrow{\overline{can}} H_j(a_1,\dots,a_n|M/\xi M) \xrightarrow{\Delta} H_{j-1}(a_1,\dots,a_{n-1}) \longrightarrow 0$$

Dacă $j-1 > \lambda_g(M) \Longrightarrow H_j(a_1,\dots,a_n|M) = H_{j-1}(a_1,\dots,a_n|M) = (0)$ (cf.def. lui $\lambda_g(M)$), deci $H_j(a_1,\dots,a_n|M/\xi M) = (0)$, din (*)

Dacă $j-1 = \lambda_g(M) \Longrightarrow H_{j-1}(a_1,\dots,a_n|M) \neq 0$ dar $H_j(a_1,\dots,a_n|M) =$

deci (*) dă izomorfismul: $H_{\lambda_g(M)+1}(a_1,\dots,a_n|M/\xi M) \cong H_{\lambda_g(M)}(a_1,\dots,a_n|M) \neq ($

Conform definiţiei lui $\lambda_g(\ )$, rezultă de aici (ii).//

Din (ii) obţinem numaidecît prin inducţie:

(iii) dacă $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\} \subset \underline{a}$ este un şir M-regulat ($p \geq 1$), atunci, pentru orice sistem de generatori $g = \{a_1, \ldots, a_n\}$ al lui $\underline{a}$, are loc relaţia:

$$\lambda_g(M/(\xi_1, \ldots, \xi_p)M) = \lambda_g(M) + p$$

Următoarea proprietate importantă a întregului $\lambda_g(M)$ este:

(iv) pentru orice sistem generator $g = \{a_1, \ldots, a_n\}$ al lui $\underline{a}$, întregul: $n - \lambda_g(M)$ este independent de g.

In adevăr, fie $g' = \{b_1, \ldots, b_m\}$ alt sistem generator al lui $\underline{a}$.

Putem presupune $n \geq m$. Schiţăm argumentul.

Matricea de trecere între g şi g' conduce la şirul exact:

$$0 \longrightarrow \ker \longrightarrow K.(g \mid M) \longrightarrow K.(g' \mid M) \longrightarrow 0$$

care este splitat, deoarece putem trece şi de la g' la g.

Atunci $H.(g \mid M) \cong H.(g' \mid M) \oplus H.(\ker)$, de unde, comparînd lungimile complexelor care apar aici, găsim:

$$\#\{j \mid H_j(\ker) = H_j(g \mid M)\} = n - m .$$

Pe de altă parte, din şirul lung de omologie care apare, găsim:

$$\#\{j \mid H_j(\ker) \cong H_j(g \mid M) = \lambda_g(M) - \lambda_{g'}(M)$$

Rezultă atunci: $n - m = \lambda_g(M) - \lambda_{g'}(M) \Longrightarrow n - \lambda_g(M) = m - \lambda_{g'}(M)$.

Din (i), (iii) şi (iv) deducem:

($\forall$) $g = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un sistem generator pentru $\underline{a}$, $n - \lambda_g(M)$ = numărul de elemente dintr-un şir M-regulat maximal, conţinut în $\underline{a}$

Aceasta încheie demonstraţia teoremei.//

3. Definiţie

Fie A un inel noetherian, $\underline{a} \subseteq J(A)$ un ideal şi M un A-modul (de tip finit).

Se numeşte "a-profunzime" a lui M, şi se notează cu $\mathrm{prof}_{\underline{a}} M$ (sau $\mathrm{depth}_{\underline{a}} M$ sau $\mathrm{grade}_{\underline{a}} M$), întregul:

$\mathrm{prof}_{\underline{a}} M$ = lungimea unui şir M-regulat maximal, conţinut în $\underline{a}$.

Conform Teoremei 1, $\mathrm{prof}_{\underline{a}} M = n - \lambda_g(M)$, unde $g = \{a_1, \ldots, a_n\}$ este un sistem arbitrar de generatori ai idealului $\underline{a}$, iar $\lambda_g(M) = \max\ j / H_j(a_1, \ldots, a_n\ M) \neq 0$.

In cazul particular cînd $(A, \underline{m})$ este un inel local, $\underline{m}$-profunzimea unui A-modul M se notează simplu cu "prof(M)" (grade M, depth M) şi se numeşte "codimensiunea omologică" a lui M.

(uneori notată, de asemenea, cu: $\mathrm{codh}_A(M)$).

Pentru M = A, obţinem "codimensiunea omologică a lui A", sau "profundorul" lui A, anume:

$$\mathrm{codh}\ A = \mathrm{prof}\ A = \mathrm{prof}_{\underline{m}} A$$

De asemenea, în acest caz, un şir M-regulat maximal, conţinut în $\underline{m}$, se numeşte "M-şir".

Din însăşi Definiţia 2, vedem că regularitatea unui şir (relativă la un modul) este ereditară, i.e se păstrează pentru subşiruri.

Vom aplica cele de mai sus, pentru a deduce primele concluzii utile asupra omologiei inelelor locale noetheriene.

## §5 . APLICATII

Fie $(A, \underline{m}, k)$ un inel local noetherian. Reamintim definiţiile principalilor invarianţi numerici ai lui A.

(i) dim A = lungimea unui sistem de parametri pentru A =

$= \deg h_A(x)$ = ordinul polului (z=1) al seriei $H_A(z)$ =

$= \inf\{n \in \mathbb{N} / (\exists)\ \xi_1, \ldots, \xi_n \in \underline{m}$ şi $\mathrm{long}_A\, A/(\xi_1,\ldots,\xi_n)A < \infty\}$,

unde $h_A(x)$ este polinomul Hilbert-Samuel al lui A (dat prin $i \longmapsto \dim_k A/\underline{m}^i$, $i \geqslant 0$), iar $H_A(z) = \sum_{i\geqslant 0} (\dim_k \underline{m}^i/\underline{m}^{i+1}) z^i$

este seria Hilbert a graduatului lui A, faţă de filtrarea $\underline{m}$-adică.

(ii) edim A = lungimea unui sistem minimal de generatori pentru $\underline{m}$=

$= \dim_k(\underline{m}/\underline{m}^2)$.

(iii) e(A) = multiplicitatea lui A = coeficientul lui $X^d/d!$ (d=dim A) în polinomul $h_A(x)$ = caracteristica euleriană a (omologiei) complexului Koszul construit pe un sistem de parametri ai lui A = $p_A(1)$, unde $H_A(z) = p_A(z)/q_A(z)$ este forma raţională ireductibilă a seriei Hilbert a lui $gr_{\underline{m}}(A)$.

OBSERVATIE

Identificarea lui e(A) cu caracteristica euleriană a complexului Koszul construit pe un sistem de parametri ai lui A, va fi demonstrată la Exp.VI, §3.

Avem relaţia evidentă: dim (A) $\leq$ edim(A).

Inelul local A se numeşte "regulat" dacă dim(A) = edim(A).

Din Teorema 1, §4, vedem uşor că:

$$\mathrm{prof}\ (A) \leqslant \dim(A)$$

Inelul local A se numeşte "Cohen-Macaulay" dacă prof(A) = dim(A).

Se poate arăta că orice inel local regulat este Cohen-Macaulay (Serre, Multipl.)

Reamintim că, pentru un A-modul M, numim "dimensiune" a lui M, întregul:

$$\dim\ (M) = \dim(A/\mathrm{Ann}(M)).$$

Are loc relaţia: prof(M) $\leq$ dim(M), egalitatea definind clasa modulelor "Cohen-Macaulay".

După cum se ştie, orice M-şir poate fi prelungit la un sistem de parametri pentru modulul M (cf. N. Radu, Inele locale, vol. I); reciproc un (orice) sistem de parametri pentru M este un M-şir, dacă şi numai dacă M este Cohen-Macaulay.

OBSERVATIE

Se poate arăta uşor, utilizînd seria Hilbert a lui $gr_{\underline{m}}(A)$, că, pentru un inel local Cohen-Macaulay $(A,\underline{m})$, au loc relaţiile:

$$\text{prof } A = \dim A \leq \text{edim } A \leq \dim A + e(A) - 1$$

Un inel local Cohen-Macaulay se numeşte "extremal" dacă ultima inegalitate devine egalitate, adică: $\text{edim } A = \dim A + e(A) - 1$.

Asemenea inele locale au fost studiate de J. Sally şi P. Schenzel.//

Vom utiliza, în continuare, următoarea noţiune.

4. Definiţie

Fie $(A, \underline{m}, k)$ un inel local noetherian. Numim "complexul Koszul al lui A", algebra diferenţială Koszul $(K.(a \mid A), d.(a \mid A))$, construită peste un sistem minimal de generatori ai idealului $\underline{m}$. Lungimea complexului Koszul al lui A este aşadar edim(A). Acest complex este unic determinat (pînă la un izomorfism de algebre diferenţiale graduate) de către un sistem minimal arbitrar de generatori ai lui $\underline{m}$.

Pentru simplitate, vom nota uneori prin K.(A) complexul Koszul al inelului local $(A, \underline{m}, k)$.

Utilizînd rezultatele din §1-§4, obţinem următoarele informaţii despre inelele locale noetheriene.

15. Propoziţie

Fie $(A,\underline{m},k)$ un inel local noetherian.

Următoarele sînt echivalente:

(i) A este inel local regulat

(ii) Algebra de omologie a complexului Koszul $K.(A)$ este trivială

(i.e. $H.(K.(A)) = H_o(K.(A)) = A/_{\underline{m}} = k$).

Demonstrație

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Fie $n = \dim A = \text{edim } A$. Atunci orice sistem minimal de generatori pentru $\underline{m}$, este un sistem de parametri pentru A Mai mult, A fiind Cohen-Macaulay, orice sistem de parametri pentru A este un A-șir. Rezultă atunci:

$$\text{prof } A = \dim A = \text{edim } A$$

Din Teorema 1, §4, știm că: $\text{prof } A = \text{edim } A - \lambda(A)$, cu $\lambda(A) = \max\{ j/H_j(K.(A)) \neq (o)\}$, deci obținem din prof A = edim A că $\lambda(A) = o$, deci $H.(K.(A)) = H_o(K.(A)) = \widetilde{k}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Dacă $H.(K.(A)) = \widetilde{k}$, atunci $\lambda(A) = o$, deci, aplicînd iar Teorema 1, rezultă: $\dim A \geqslant \text{prof } A = \text{edim } A \geqslant \dim A$, deci $\dim A = \text{edim } A$ și A este regulat.//

16. Propoziție

Fie $(A,\underline{m},k)$ un inel noetherian

Următoarele sînt echivalente:

(i) A este Cohen-Macaulay

(ii) Algebra de omologie a complexului Koszul $K.(A)$, este trivială în dimensiunile $\delta+1, \delta+2, \ldots, \delta+\dim(A)$, unde $\delta = \text{edim } A - \dim A$.

Demonstrație

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Din Teorema 1 știm că $H_j(K.(A)) = (0)$ pentru $j = \text{edim } A - \text{prof } A + 1, \text{edim } A - \text{prof } A + 2, \ldots, \text{edim } A$.

Dacă A este Cohen-Macaulay, prof A = dim A, deci (ii) rezultă.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Din Teorema 1 știm că $\lambda(A) + \text{prof } A = \text{edim } A$, deci (ii), împreună cu definiția lui $\lambda(A)$, ar da:

$$\text{edim } A - \text{prof } A = \lambda(A) \leqslant \text{edim } A - \dim A \Longrightarrow \dim A \leqslant \text{prof } A.$$

Cum prof $A \leqslant \dim A$ întotdeauna, obţinem $\dim A = \text{prof } A$.//

<u>OBSERVATIE</u>

Din Propoziţiile 15 şi 16 rezultă în mod evident implicaţia: <u>"$(A,\underline{m})$ regulat $\Rightarrow$ $(A,\underline{m})$ Cohen-Macaulay"</u>. Nu putem pune această implicaţie sub formă de corolar, deoarece am utilizat-o la demonstraţia Prop.15, presupunînd-o cunoscută.//

In general, pentru un inel local noetherian $(A,\underline{m})$, întregul $\delta = \text{edim}(A) - \dim(A)$ (care apare în enunţul Propoziţiei 16) se numeşte "<u>prima deviaţie a lui A</u>" şi se notează cu $\varepsilon_1(A)$. (Există deviaţii de orice ordin ale lui A, ce apar în mod canonic, prin dezvoltarea în produs formal infinit a Seriei Poincaré a inelului A). Să mai remarcăm că, la Prop.15, condiţia (ii) de trivialitate a algebrei de omologie $H.(K.(A))$, echivalează cu:

$$H_1(K.(A)) = (o) \text{ , cf. Prop.11, §4}$$

In cele ce urmează, ne vom ocupa de caracterizările claselor de inele locale Cohen-Macaulay, ce pot fi deduse din structura algebrei de omologie a complexului Koszul respectiv. Pentru a fixa limbajul şi faptele de bază, expunerea următoare este dedicată prezentării teoriei lui Tate a algebrelor diferenţiale graduate peste un inel comutativ unitar.

# EXPUNEREA V

# ALGEBRE DIFERENTIALE GRADUATE

## §1. CATEGORIA ALGEBRELOR DIFERENTIALE GRADUATE PESTE UN INEL COMUTATIV UNITAR

Fixăm, pe tot cuprinsul acestui §, un inel comutativ unitar A.

### 1. Definiție

Se numeşte "algebră diferențială graduată peste A"(pe scurt "Algebră") un triplet $\mathcal{X} = (C_\bullet\ ,\ d_\bullet\ ,\mu\ )$, în care:

(I) $C_\bullet = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} C_i$ este un A-modul $\mathbb{N}$-graduat, verificînd: $C_i = o$, pentru $i< o$.

(II) $d_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ este un endomorfism A-liniar omogen de grad (-1) verificînd: $d_\bullet \circ d_\bullet = 0$.

(III) $\mu : C_\bullet \otimes_A C_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ este o multiplicare asociativă, unitară, verificînd:

(i) $\mu$ este omogenă de grad 0(i.e. $\mu(C_i\otimes C_j)\subseteq C_{i+j}$)

(ii) $\mu$ este anticomutativă (i.e.$(\forall)x\in C_i\ ,\ y\in C_j$: $\mu(x\otimes y) = (-1)^{ij}\ (y\otimes x)$ şi $\mu(x\otimes x) = 0$ dacă $i \equiv 1(\mathrm{mod}2)$

(iii) $d_\bullet$ este (anti-)derivare în raport cu $\mu$ (i.e.$(\forall)x\in C_i$, $y\in C_\bullet$ : $d_\bullet(x\otimes y) = d(x)\otimes y + (-1)^i\ x\otimes d(y))$.

(In particular, $\mathcal{X}_0$ este o algebră peste A, în sens uzual).

Multiplicarea unei A-algebre $\mathcal{X}$ , se notează simplu prin:

$$\mu(x\otimes y):= xy$$

Unitatea multiplicativă a unei A-algebre $\mathcal{X}$ , coincide cu aceea a lui $\mathcal{X}_0$ .

Uneori, vom nota cu $\mathcal{X}_i$ componenta omogenă de grad $i(C_i)$ a lui $\mathcal{X}$ , pentru $i\in\mathbb{N}$, renunțînd la specificarea de sine stătătoare a modulelor de lanțuri $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ .

De asemenea, diferenţiala $d_\bullet$ a unei A-algebre $\mathcal{X}$, se notează cu $d_\bullet^{\mathcal{X}} = (d_i^{\mathcal{X}})_{i\in\mathbb{N}}$, cînd apare necesitatea explicitării dependenţei lui $d_\bullet$ faţă de $\mathcal{X}$.

EXEMPLE

(i) Punem $\widetilde{A} = (C_\bullet\ , d_\bullet\ , \mu)$, cu $C_i = 0$ dacă $i \neq 0$ şi $C_0 = A$, $d_\bullet = 0$, $\mu$ = multiplicarea lui A. Algebra diferenţială graduată astfel obţinută se numeşte "trivială". (Analog pt. $C_0 = B =$ o algebră peste A, în sens uzual).

(ii) Fie $a: [n] \longrightarrow A$ o schemă, $n > 0$. Comparînd Definiţia 1 cu rezultatele din Exp.III, vedem numaidecît că algebra Koszul $(K_\bullet(a\,|\,A),\ d_\bullet(a\,|\,A))$ este o algebră diferenţială graduată peste A.//

Pentru două algebre diferenţiale graduate $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ peste A, numim "morfism de A-algebre" o aplicaţie A-liniară: $f: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, omogenă de grad zero în raport cu graduările (i.e. $f(\mathcal{X}_i) \subseteq \mathcal{Y}_i$, $(\forall)$ i), compatibilă cu structurile multiplicative (i.e. $f(1) = 1$ şi $f(xy) = f(x)f(y)$, $(\forall) x,y \in \mathcal{X}$) şi compatibilă cu diferenţialele celor două algebre (i.e. $f \circ d_\bullet^{\mathcal{X}} = d_\bullet^{\mathcal{Y}} \circ f$).

Cu aceste definiţii, obţinem categoria DG(A) a algebrelor diferenţiale graduate peste A.

In această categorie, punem în evidenţă următoarele obiecte.

(1) O A-algebră $\mathcal{X}$ se numeşte "liberă, de tip finit", dacă fiecare componentă omogenă $\mathcal{X}_i$ este un A-modul liber, de tip finit. In acest caz, $\mathcal{X}_0 = A$.

(2) O "subalgebră" $\mathcal{Y}$ a unei A-algebre $\mathcal{X}$, este o A-algebră cu proprietatea că: $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ şi incluziunea $\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$ este morfism de A-algebre.

(3) Un "ideal" al unei A-algebre $\mathcal{X}$, este un submodul diferenţial graduat $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{X}$ (i.e. $\mathcal{J}_i = \mathcal{J} \cap \mathcal{X}_i$ şi $d_\bullet(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}$), cu proprietatea $\mathcal{J}\mathcal{X} \subseteq \mathcal{J}$ (i.e. $\mathcal{J}_i\,\mathcal{X}_j \subseteq \mathcal{J}_{i+j}$, $(\forall)$ i,j).

(4) Dacă $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{X}$ este un ideal, atunci modulul-cît $\mathcal{Y} = \mathcal{X}/_{\mathcal{J}}$ devine în mod canonic o algebră diferențială graduată peste inelul factor $\mathcal{X}_0/_{\mathcal{J}_0} = A/_{\mathcal{L}}$ ($\mathcal{L} = \mathcal{J}_0$ fiind ideal al lui A). $A/_{\mathcal{L}}$ -algebra diferențială graduată $\mathcal{X}/_{\mathcal{J}}$ se numește "<u>A-algebra-cît</u>" a lui $\mathcal{X}$ prin $\mathcal{J}$.

(5) Dacă $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ sînt două A-algebre, numim "<u>produs tensorial al lui $\mathcal{X}$ cu $\mathcal{Y}$</u>" și notăm cu $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, A-algebra a cărei structură graduată este: $(\forall)$ i, $(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) = \bigoplus_{k+l=i} \mathcal{X}_k \otimes \mathcal{Y}_l$, avînd diferențiala: $d_{\bullet}^{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}} = d_{\bullet}^{\mathcal{X}} \otimes 1_{\mathcal{Y}} \oplus \mathcal{E}\, 1_{\mathcal{X}} \otimes d_{\bullet}^{\mathcal{Y}}$, unde $1_{\mathcal{X}}$, $1_{\mathcal{Y}}$ sînt aplicații identice pe $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, iar $\mathcal{E}$ este "semnul" unui element omogen.

Structura multiplicativă este dată de:

$(\forall)$ $x \in \mathcal{X}_i$, $x' \in \mathcal{X}_j$ ; $y \in \mathcal{Y}_k$, $y' \in \mathcal{Y}_l$ :

$$(x \otimes y).(x' \otimes y') = (-1)^{kj}.(xx' \otimes yy').$$

Lăsăm ca exercițiu verificarea faptului că $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ este într-adevăr o A-algebră.

(6) Fie $\mathcal{X}$ o A-algebră liberă de tip finit.

Seria formală $P_{\mathcal{X}}(z) = \sum_{i \geq 0} (rg_A x_i) z^i \in \mathbb{Z}[[z]]$ se numește "<u>seria Poincaré</u>" a lui $\mathcal{X}$.

In general, $P_{\mathcal{X}}(z)$ nu este rațională.

Seria Poincaré are proprietatea:

$$P_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}(z) = P_{\mathcal{X}}(z) \cdot P_{\mathcal{Y}}(z).$$

(7) Fie $\mathcal{X}$ o A-algebră. Atunci $Z(\mathcal{X}) = \ker(d_{\bullet}^{X})$ este o subalgebră a lui $\mathcal{X}$ (numită "<u>algebra ciclilor</u>"), iar $B(\mathcal{X}) = \operatorname{Im}(d_{\bullet}^{X})$ este un ideal al lui $Z(\mathcal{X})$ (numit "<u>idealul bordurilor</u>" lui $\mathcal{X}$). Verificarea este lăsată cititorului.

Algebra-cît $H(\mathcal{X}) = Z(\mathcal{X})/_{B(\mathcal{X})}$ este o $A/_{B_0(\mathcal{X})} = A/_{\operatorname{Im}(d_1^{\mathcal{X}})}$ -algebră diferențială graduată, numită "<u>algebra de omologie</u>" a lui $\mathcal{X}$.

Vom spune că "$\mathcal{X}$ este aciclică" dacă $H(\mathcal{X}) = H_o(\mathcal{X}) = A/\mathfrak{q}$ (i.e. $H_j(\mathcal{X}) = 0$, $(\forall)\ j > o$).

O algebră liberă de tip finit şi aciclică $\mathcal{X}$, se numeşte "rezoluţie" a inelului-factor $A/_{\mathrm{Im}(d_1^x)}$.

Dacă A este inel local noetherian de ideal maximal $\underline{m}$, o rezoluţie $\mathcal{X}$ a lui $A/\mathfrak{q}$ ( $\mathfrak{q} = \mathrm{Im}\ d_1^x$ ) se zice "minimală" dacă $\mathcal{X} \otimes_A k$ ($k = A/_{\underline{m}}$) este o k-algebră trivială. In acest caz, seria $P_{\mathcal{X}}(z)$ se numeşte "seria Poincaré" a lui $A/\mathfrak{q}$ " şi se notează cu $P_{A/\mathfrak{q}}(z)$. Coeficienţii lui $P_{A/\mathfrak{q}}(z)$ se numesc "numerele Betti" ale lui $A/\mathfrak{q}$.

Reîntorcîndu-ne la cazul general, dacă $f: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ este un morfism de A-algebre, atunci f determină în mod canonic un morfism al algebrelor de omologie:

$$H(f) : H(\mathcal{X}) \longrightarrow H(\mathcal{Y})$$

Acest morfism are caracter functorial, adică: $H(f \circ g) = H(f) \circ H(g)$, pentru orice două morfisme de A-algebre f şi g.

Principala proprietate liniară a functorului de omologie este următoarea:

(*) dacă $0 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \xrightarrow{g} \mathcal{Z} \longrightarrow 0$ este un şir exact de A-algebre (i.e. un şir exact de A-module diferenţiale graduate) atunci are loc şirul exact lung de omologie:

$$(\forall i) \quad \dots \xrightarrow{\Delta} H_i(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(f)} H_i(\mathcal{Y}) \xrightarrow{H(g)} H_i(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(f)} H_{i-1}(\mathcal{Y}) \to \dots$$

unde morfismele de conexiune $\Delta : H_i(\mathcal{Z}) \longrightarrow H_{i-1}(\mathcal{X})$ sînt definite canonic, ca la Exp.IV, §1.

Acest şir exact lung se pune deobicei sub forma următorului "triunghi exact de omologie" :

$$(\ast\ast)\qquad \begin{tikzcd} & H(\mathcal{Y}) \arrow[dr, "H(g)"] & \\ H(\mathcal{X}) \arrow[ur, "H(f)"] & & H(\mathcal{Z}) \arrow[ll, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

Să remarcăm că, pentru orice A-algebră $\mathcal{X}$, algebra de omologie $H(\mathcal{X})$ are structura diferenţială (canonică) <u>trivială</u>, adică $d^{\mathcal{X}}$ devine omomorfismul nul pe $H(\mathcal{X})$.

Aşadar, structura lui $H(\mathcal{X})$ este numai de "<u>algebră</u> (omologic) <u>graduată</u>" peste A.

Pentru două A-algebre $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, morfismele canonice $\mathcal{X} \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ $(x \mapsto x \otimes 1)$ şi $\mathcal{Y} \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ $(y \mapsto 1 \otimes y)$ determină morfismele în omologie: $H(\mathcal{X}) \longrightarrow H(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ şi $H(\mathcal{Y}) \longrightarrow H(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$, deci un morfism canonic $H(\mathcal{X}) \otimes H(\mathcal{Y}) \longrightarrow H(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$. Acest morfism este bijectiv <u>dacă A este corp</u>, în care caz aciclicitatea lui $\mathcal{X}$ (sau $\mathcal{Y}$) determină aciclicitatea lui $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.

(8) Fie $\mathcal{X}$ o A-algebră şi fie $x \in \mathcal{X}_i$ $(i \geq 0)$ un element <u>omogen</u>. x se numeşte "<u>non-divizor al lui zero</u>" pe $\mathcal{X}$, dacă

$(\forall)$ $y \in \mathcal{X}$ şi $xy = 0 \Longrightarrow$ (a) $y = 0$, cînd $i \equiv 0 \pmod 2$

sau (b) $y \equiv 0 (\mathrm{mod}\ x.\mathcal{X})$, cînd $i \equiv 1 \pmod 2$.

Din această definiţie vedem că lucrul cu non-divizori <u>omogeni</u> ai lui zero pe $\mathcal{X}$, impune considerarea separată a cazurilor gradului par şi gradului impar.

(9) Fie $\mathcal{X}$ o A-algebră şi $m \in \mathbb{Z}$ un întreg.

Vom numi "<u>translatatul cu m al lui $\mathcal{X}$</u>" modulul diferenţial graduat:

$$\mathcal{X}^{(m)} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{X}_i^{(m)}, \quad \text{cu } \mathcal{X}_i^{(m)} = \mathcal{X}_{i+m}, (\forall)\, i,$$

cu diferenţiala:

$$\mathcal{X}^{(m)} \quad d_{\cdot}^{\mathcal{X}^{(m)}} = \left(d_i^{\mathcal{X}^{(m)}}\right)_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \text{cu } d_i^{\mathcal{X}^{(m)}} = d_{i+m}^{\mathcal{X}}, (\forall)\, i.$$

$\mathcal{X}^{(m)}$ nu are structură de A-algebră, pentru $m \neq 0$.

Vom gîndi $\mathcal{X}^{(m)}$ drept " -modulul liber de rang 1, avînd ca bază un element T, graduat de

$$\deg(T) = m.$$

Astfel, vom scrie:

$$\mathcal{X}^{(m)} = \mathcal{X}\cdot T \quad , \deg T = m \ ,$$

unde $\mathcal{X}.T = \{xT \ / \ x \in \mathcal{X}\}$.

In general, vom numi " <u>$\mathcal{X}$-modulul liber de bază</u> $\{T_1,\dots,T_n\}$ " suma directă:

$$\mathcal{L} = \mathcal{X} T_1 \oplus \mathcal{X} T_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{X} T_n \ ,$$

unde $\deg T_j = m_j \geq 0$, $j = 1,2,\dots,m$ . Notăm: $n = rg_{\mathcal{X}}(\mathcal{L})$ .

Acest $\mathcal{X}$-modul liber este un A-modul diferențial graduat, cu graduarea:

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{X}_{i-m_1} T_1 \oplus \mathcal{X}_{i-m_2} T_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{X}_{i-m_n} T_n, \ (\forall)\ i,$$

și diferențiala:

$$d_i = d^{\mathcal{X}}_{i-m_1} \oplus d^{\mathcal{X}}_{i-m_2} \oplus \dots \oplus d^{\mathcal{X}}_{i-m_n} \quad , (\forall) \ i \ .$$

Ne oprim aici cu generalitățile privind algebrele diferențiale graduate peste un inel comutativ unitar.

Trecem la construcția tehnică fundamentală în aplicații, anume construcția algebrelor libere peste algebrele diferențiale graduate prin adjuncția variabilelor care anulează cicli omogeni.

Definițiile, notațiile și terminologia din acest §, rămîn valabile peste tot mai departe.

## §2. <u>ADJUNCTIA VARIABILELOR SI ANULAREA CICLILOR OMOGENI</u>

Fixăm, în cele ce urmează, un inel comutativ unitar A și o A-algebră diferențială graduată $\mathcal{X}$ , cu $\mathcal{X}_0 = A$.

In $\mathcal{X}$ fixăm un ciclu omogen $\zeta \in Z_{i-1}(\mathcal{X})$, de grad $i-1 \geq 0$.

Clasa de omologie a lui $\zeta$ o notăm cu $\hat{\zeta}$ .

Vom construi o nouă A-algebră diferențială graduată $\mathcal{Y}$ , notată cu:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \langle T \rangle \ , \ d(T) = \zeta$$

și denumită "<u>A-algebra obținută din $\mathcal{X}$ prin adjuncția variabilei T care anulează ciclul $\zeta$</u> " , încît să aibă loc următoarele proprietăți:

(A1) $\mathcal{X}$ este subalgebră a lui $\mathcal{Y}$

(A2) $\mathcal{Y}$ este $\mathcal{X}$ -algebră liberă

(A3) $H_k(\mathcal{Y}) = H_k(\mathcal{X})$, pentru $k \leq i-2$

(A4) $H_{i-1}(\mathcal{Y}) = H_{i-1}(\mathcal{X})/\hat{\zeta}.A$

In plus, dacă $\hat{\zeta}$ nu divide zero în $H(\mathcal{X})$, atunci:

(A5) $H(\mathcal{Y}) = H(\mathcal{X})/\hat{\zeta}\, H(\mathcal{X})$

Construcţia lui $\mathcal{Y}$ diferă după paritatea lui i.

2.1. CAZUL $i \equiv 1 (\text{mod } 2)$ (CICLU DE GRAD PAR)

2. Definiţie

In situaţia de mai sus, considerăm $\mathcal{X}$ -modulul liber:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}.T,$$

structurat ca algebră diferenţială graduată peste A, în modul următor:

(i) graduarea : $(\forall)\ m \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{Y}_m = \mathcal{X}_m \oplus \mathcal{X}_{m-i}\, T$ (i.e.deg $T = i$)

(ii) diferenţiala: $d_\bullet^{\mathcal{Y}}(x) = d_\bullet^{\mathcal{X}}(x)$, pentru $x \in \mathcal{X}$ şi $d_\bullet^{\mathcal{Y}}(T) = \zeta$

(aşadar, pentru orice element omogen $x + x'T \in \mathcal{Y}_m$,

$d_\bullet^{\mathcal{Y}}(x + x'T) = d_\bullet^{\mathcal{Y}}(x) + d_\bullet^{\mathcal{Y}}(x'.T) = d^{\mathcal{X}}(x) + d^{\mathcal{X}}(x')T + (-1)^{\deg x'}.x'\zeta =$

$= \left[d^{\mathcal{X}}_\bullet(x) + (-1)^{m-i}\, x'\zeta\right] + d^{\mathcal{X}}_\bullet(x')\, T$ ).

(iii) multiplicarea: este extensia multiplicării lui $\mathcal{X}$, prin:

$$T^2 = 0$$

(aşadar: dacă $x, x' \in \mathcal{X}$, atunci $x \underset{\mathcal{Y}}{.} x' = x \underset{\mathcal{X}}{.} x'$, apoi

$x.T = (-1)^{i \deg x}.T.x$ şi $T^2 = 0$).

Lăsăm ca exerciţiu verificarea faptului că $\mathcal{Y}$ de la Def.2 este într-adevăr o A-algebră diferenţială graduată.

OBSERVATIE

$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \langle T \rangle$ ; $dT = \zeta$, introdus la Def.2, este "extinderea infinitezimală" a algebrei $\mathcal{X}$, prin $\mathcal{X}$ -modulul liber de rang 1 $\mathcal{X}T$, cu deg $T = i$. Diferenţiala $d_\bullet^{\mathcal{Y}}$ este unica extensie a lui $d_\bullet^{\mathcal{X}}$ la o diferenţială compatibilă cu multiplicarea extinderii infinitezimale $\mathcal{Y}$ a lui $\mathcal{X}$. //

Faptul că endomorfismul liniar $d_{\cdot}^{\mathcal{Y}}$ este o diferențială (i.e. $d_{\cdot}^{\mathcal{Y}} \circ d_{\cdot}^{\mathcal{Y}} = o$) provine din faptul că $\zeta$ este ciclu.

Este evident, din Definiția 2, că A-algebra $\mathcal{Y}$ este liberă de tip finit simultan cu $\mathcal{X}$. In acest caz, rezultă imediat:

$$P_{\mathcal{Y}}(Z) = (1 + Z^{i})\, P_{\mathcal{X}}(Z) \tag{1o}$$

(în inelul $\mathbb{Z}[Z]$).

<u>1. Propoziție</u>

<u>Algebra diferențială graduată $\mathcal{Y} = \mathcal{X} < T >;\ dT = \zeta$, introdusă la Definiția 2, verifică proprietățile (A1) - (A4).</u>

<u>Demonstrație</u>

(A1) și (A2) sînt imediate, din Def.2.

Pentru (A3), să remarcăm că: $(\forall)\ k \leq i-1$,

$$\mathcal{Y}_k = \mathcal{X}_k \oplus \mathcal{X}_{k-i} \cdot T = (\text{deoarece } k-i < o) = \mathcal{X}_k .$$

In plus, $d_k^{\mathcal{Y}} = d_k^{\mathcal{X}}$, pentru acești k, deci:

$$Z_k(\mathcal{X}) = Z_k(\mathcal{Y}) \quad \text{și } B_k(\mathcal{X}) = B_k(\mathcal{Y}),\ k \leq i-2 ,$$

deci rezultă (A3).

In fine, $\mathcal{Y}_i = \mathcal{X}_i \oplus \mathcal{X}_o T = \mathcal{X}_i \oplus AT$ și $d_i^{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}_i \longrightarrow \mathcal{Y}_{i-1} = \mathcal{X}_{i-1}$ acționează astfel: $(\forall)\ x \in \mathcal{X}_i,\ \alpha \in A$ :

$$d_i^{\mathcal{Y}}(x + \alpha T) = d_i^{\mathcal{X}}(x) + \alpha\, d_i^{\mathcal{Y}}(T) = d_i^{\mathcal{X}}(x) + \alpha \zeta ,$$

deci $B_{i-1}(\mathcal{Y}) = B_{i-1}(\mathcal{X}) + A\zeta$ .

De aici rezultă:

$$\begin{aligned} H_{i-1}(\mathcal{Y}) &= Z_{i-1}(\mathcal{Y})/B_{i-1}(\mathcal{Y}) = Z_{i-1}(\mathcal{X})/_{B_{i-1}(\mathcal{X}) + A\zeta} = \\ &= [Z_{i-1}(\mathcal{X})/B_{i-1}(\mathcal{X})] \;/\; [B_{i-1}(\mathcal{X}) + A\zeta/B_{i-1}(\mathcal{X})] = \\ &= H_{i-1}(\mathcal{X}) \,/_{A\bar{\zeta}} \,. \end{aligned}$$

Cu aceasta, am demonstrat și (A4). //

Pentru demonstrarea proprietăţii (A4), considerăm şirul exact:

(11) $\quad 0 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \xrightarrow{g} \mathcal{X} \longrightarrow 0$

unde $f$ este incluziunea canonică şi $g(x + x'T) = x'$.

(aşadar, $f$ este omogen de grad zero, iar $g$ este omogen de grad $-i$).

Este uşor de văzut că (11) este în adevăr un şir exact de module diferenţiale graduate, deci obţinem triunghiul exact de omologie:

$$\begin{tikzcd} & H(\mathcal{Y}) \arrow[dr, "H(g)"] & \\ H(\mathcal{X}) \arrow[ur, "H(f)"] & & H(\mathcal{X}) \arrow[ll, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

care, scris desfăşurat, revine la următorul şir exact lung de omologie:

(12) $\quad \ldots \longrightarrow H_m(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(f)} H_m(\mathcal{Y}) \xrightarrow{H(g)} H_{m-i}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(f)} H_{m-1}(\mathcal{Y}) \longrightarrow \ldots$

Lemă

Pentru orice întreg $m \geqslant i$, omomorfismul de conexiune

$$\Delta : H_{m-i}(\mathcal{X}) \longrightarrow H_{m-1}(\mathcal{X})$$

acţionează prin: $(\forall)\ \hat{\xi} \in H_{m-i}(\ )$, $\Delta(\hat{\xi}) = (-1)^{m-i}\hat{\xi}\,\hat{\zeta}$

(i.e. $\Delta$ constă din "multiplicarea cu $\hat{\zeta}$" în omologie).

Demonstraţie.

Vom utiliza definiţia generală a lui $\Delta$. Considerăm diagrama cu linii exacte:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{X}_m \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d^{\mathcal{X}}"'] & \mathcal{Y}_m \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d^{\mathcal{Y}}"] & \mathcal{X}_{m-i} \arrow[r] \arrow[d, "d^{\mathcal{X}}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{X}_{m-1} \arrow[r, "f"] & \mathcal{Y}_{m-1} \arrow[r, "g"] & \mathcal{X}_{m-i-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Fie $\xi \in Z_{m-i}(\mathcal{X})$ un ciclu. O $g$-preimagine a sa este atunci elementul: $\eta = \xi . T \in \mathcal{Y}_m$. Avem:

$$d^{\mathcal{Y}}(\xi T) = d^{\mathcal{X}}(\xi)T + (-1)^{m-i}\ \xi d^{\mathcal{Y}}(T) = (\text{deoarece } \xi \text{ este ciclu}) =$$

$$= (-1)^{m-i}\ \xi\ d^{\mathcal{Y}}(T) = (\text{din def.2}) = (-1)^{m-i}\xi\cdot\zeta \in Z_{m-1}(\mathcal{X}).$$

Observăm că $(-1)^{m-1}\ \xi\cdot\zeta = f((-1)^{m-i}\ \xi\cdot\zeta)$, de unde rezultă:

$$\Delta(\hat{\xi}) = (-1)^{m-i}\xi\cdot\zeta\ (\text{mod } B_{m-1}(\mathcal{X})) = (-1)^{m-i}\ \hat{\xi}\cdot\hat{\zeta}\ .//$$

2. Propoziție

Dacă $\hat{\zeta} \in H(\mathcal{X})$ nu divide zero în $H(\mathcal{X})$, atunci algebra diferențială graduată $\mathcal{Y} = \mathcal{X}\langle T\rangle;\ d\,T = \zeta$ (introdusă la Def.2) verifică (A4).

Demonstrație

Cum $\deg \hat{\zeta} = i-1 \equiv 0 (\text{mod } 2)$ (cf.ipotezei inițiale asupra lui i), faptul că $\hat{\zeta}$ nu divide zero revine la injectivitatea omotetiei cu $\hat{\zeta}$ pe $H(\mathcal{X})$ (cf.(8), §1).

Conform Lemei anterioare, aceasta revine la: $\ker(\Delta) = \operatorname{Im} H(g) = 0$ în (12), deci triunghiul exact de omologie devine șirul exact:

$$0 \longrightarrow H(\mathcal{X}) \xrightarrow{\ \Delta\ } H(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(f)} H(\mathcal{Y}) \xrightarrow{H(g)} 0,$$

i.e. $H(\mathcal{Y}) = H(\mathcal{X})/_{\operatorname{Im}(\Delta)} = (\text{cf.Lemei}) = H(\mathcal{X})\ /\ \hat{\zeta}\ H(\mathcal{X})$ .//

Așadar, construcția efectuată la Definiția 2, verifică proprietățile cerute(A1) - (A5).

2.2. CAZUL $i \equiv 0 (\text{mod } 2)$ (CICLU DE GRAD IMPAR)

3. Definiție

In situația inițială, considerăm $\mathcal{X}$ -modulul liber de rang infinit:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}T^{(1)} \oplus \mathcal{X}T^{(2)} \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}T^{(k)} \oplus \ldots$$

structurat ca algebră diferențială graduată peste A, în modul următor:

(i) graduarea : $(\forall)\ m \in \mathbb{Z}$ : $\mathcal{Y}_m = \mathcal{X}_m \oplus \mathcal{X}_{m-i}T^{(1)} \oplus \mathcal{X}_{m-2i}T^{(2)} \oplus \ldots$

(i.e. $\deg T^{(k)} = ki$ , $(\forall)\ k \geq 1)$ .

(ii) diferenţiala: $d^{\mathcal{Y}}(x) = d^{\mathcal{X}}(x)$ pentru $x \in \mathcal{X}$ şi $d^{\mathcal{Y}}(T^{(k)}) = \zeta \cdot T^{(k-1)}$, $k \geq 1$ (cu $T^{(o)} = 1$).

(aşadar, pentru orice element $w = x_m + x_{m-i} T^{(1)} + x_{m-2i} T^{(2)} + \dots + x_{m-pi} T^{(p)} \in \mathcal{Y}_m$ ( unde $p = [\frac{m}{i}]$), avem:

$$d^{\mathcal{Y}}(w) = [d^{\mathcal{X}}(x_m) + (-1)^{m-i} x_{m-i} \zeta] + [d^{\mathcal{X}}(x_{m-i}) + (-1)^{m-2i} x_{m-2i} \zeta] T^{(1)} + \dots +$$

$$+ [d^{\mathcal{X}}(x_{m-(p-1)i}) + (-1)^{m-pi} x_{m-pi} \zeta] T^{(p-1)} + d^{\mathcal{X}}(x_{m-pi}) T^{(p)},$$

unde prin $x_h$ am notat un element din $\mathcal{X}_h$, $(\forall)\ h \in \mathbb{Z}$.

Cum $i \equiv o \pmod 2$, rezultă că diferenţiala $d^{\mathcal{Y}}$ acţionează astfel:

$$d^{\mathcal{Y}}\left(\sum_{k=0}^{p} x_{m-ki} T^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} [d^{\mathcal{X}}(x_{m-ki}) + (-1)^m x_{m-(k+1)i} \zeta] T^{(k)} + d^{\mathcal{X}}(x_{m-pi}) T^{(p)}$$

sau:

$$d^{\mathcal{Y}}\left(\sum_{k=0}^{p} x_{m-ki} T^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{p} d^{\mathcal{X}}(x_{m-ki}) T^{(k)} + (-1)^m \sum_{k=1}^{p} x_{m-ki} T^{(k-1)} \zeta$$

(Cum $i \equiv 0 \pmod 2$, $(-1)^m x_{m-ki} \zeta = (-1)^m \cdot (-1)^{(m-ki)(i-1)} \zeta x_{m-ki} = \zeta x_{m-ki}$)

Pentru a scrie mai concis acţiunea diferenţialei $d^{\mathcal{Y}}$, introducem următoarele notaţii:

pentru un element $w = \sum_{k=0}^{p} x_{m-ki} T^{(k)}$ ($p = [\frac{m}{i}]$ din $\mathcal{Y}_m$,

notăm: $\dot{w} = \sum_{k=0}^{p} d^{\mathcal{X}}(x_{m-ki}) T^{(k)}$ şi $\overline{w} = \sum_{k=1}^{p} x_{m-ki} T^{(k-1)}$.

Atunci, ultima expresie a lui $d^{\mathcal{Y}}(w)$ se mai poate scrie:

(13) $\qquad d^{\mathcal{Y}}(w) = \dot{w} + \zeta \overline{w}$

(iii) multiplicarea : este extensia la $\mathcal{Y}$ a multiplicării lui $\mathcal{X}$, prin: $(\forall)\ x \in \mathcal{X}$ şi $k, h \geq 1$ : $x T^{(k)} = T^{(k)} x$ şi

$$T^{(k)} T^{(h)} = \binom{k+h}{k} T^{(k+h)}.$$

Lăsăm ca exercițiu verificarea faptului că $\mathcal{Y}$ de la Def.3 este în adevăr o algebră diferențială graduată peste A.

$\mathcal{Y}$ este liberă de tip finit simultan cu $\mathcal{X}$ și, în acest caz:

(14) $$P_{\mathcal{Y}}(Z) = \frac{P_{\mathcal{X}}(Z)}{(1-Z^{i})} \quad (\text{în } \mathbb{Z}[[Z]]).$$

3. Propoziție

Algebra diferențială graduată $\mathcal{Y} = \mathcal{X}\langle T\rangle$ ; $dT = \xi$, introdusă la Definiția 3, verifică (A1) - (A4).

Demonstrația acestei propoziții este lăsată ca exercițiu.

Pentru a demonstra (A5), considerăm șirul exact de module:

(15) $$0 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \xrightarrow{g} \mathcal{Y} \longrightarrow 0$$

unde f este incluziunea canonică, iar $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ este definit prin $(\forall)\ m \in \mathbb{Z},\ w \in \mathcal{Y}_m$: $g(w) = \overline{w}$, unde $\overline{w}$ este elementul introdus la (13), (ii), Def.3.

Este ușor de văzut că șirul (15) este în adevăr exact. f este un omomorfism omogen de grad zero, iar g este omomorfism omogen de grad (-i).

Acest șir exact produce triunghiul exact de omologie:

(16) $$\begin{tikzcd} & H(\mathcal{Y}) \arrow[dr, leftarrow, "H(g)"] & \\ H(\mathcal{X}) \arrow[ur, "H(f)"] & & H(\mathcal{Y}) \arrow[ll, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

(unde H(f) are grad 0, H(g) are grad -i, iar $\Delta$ are grad i-1)

Lema I

Pentru orice $m \in \mathbb{Z}$, $\Delta \circ H_m(f)$ = omomorfismul de multiplicare cu $(-1)^m \hat{\xi}$.

Demonstrație.

Fie $\xi \in Z_m(\mathcal{X})$ . Atunci $\xi = f(\xi) \in Z_m(\mathcal{Y})$ și $g(\xi T^{(1)}) = \xi$, iar $d^{\mathcal{Y}}(\xi T^{(1)}) = d^{(\mathcal{X})}(\xi)\, T^{(1)} + (-1)^m \xi\, d^{\mathcal{Y}}(T^{(1)}) =$ ( $\xi$ fiind ciclu) $= (-1)^m \xi\, d^{\mathcal{Y}}(T^{(1)}) = (-1)^m \xi \zeta$. Aplicînd definiţia generală a lui $\Delta$, afirmaţia din enunţ rezultă.

Lema II

Dacă $\hat{\zeta}$ nu divide zero în $H(\mathcal{X})$, atunci $H(g) = 0$

Demonstraţie

Arătăm întîi:

(*) dacă $\hat{\zeta}$ nu divide zero în $H(\mathcal{X})$, atunci $\mathrm{Im}(H(f)) \cap \mathrm{Im}(H(g)) = 0$.

In adevăr, fie $\hat{\xi} \in H(\mathcal{X})$ şi $\hat{\eta} \in H(\mathcal{Y})$, încît $H(f)(\hat{\xi}) = H(g)(\hat{\eta})$.
Din lema I rezultă: $(-1)^{\deg \xi} \hat{\xi} . \hat{\zeta} = \Delta \circ H(f)(\hat{\xi}) = \Delta \circ H(g)(\hat{\eta}) =$ $= 0$ (cf.(16)). Cum $\hat{\zeta}$ e de grad impar şi nu divide zero, avem: $\hat{\xi} = \hat{\zeta} \cdot \hat{\theta}$, cu $\hat{\theta} \in H(\mathcal{X})$. Dar atunci:

$$H(f)(\hat{\xi}) = H(f)(\hat{\zeta} \cdot \hat{\theta}) = H(f) \circ \Delta(\hat{\theta}) = (\text{din } (16)) = 0 \; //$$

Din (*) şi (16) rezultă atunci: $\mathrm{Ker}(H(g)) \cap \mathrm{Im}(H(g)) = 0$, adică $H(g) \circ H(g) = 0 \Longrightarrow H(g) = 0$, deci, inductiv: $H(g)^n = 0 \Longrightarrow H(g) = 0$. Dar $H(g)^n = H(g^n)$, şi, din definiţia lui $g$, rezultă că $g$ este local nilpotent, deci, pentru orice $\hat{\eta} \in H(\mathcal{Y})$, găsim $n > 0$ ca $H(g)^n(\hat{\eta}) = 0 \Longrightarrow H(g)(\hat{\eta}) = 0$ .//

4. Propoziţie

Dacă $\hat{\zeta}$ nu divide zero pe $H(\mathcal{X})$, atunci algebra diferenţială graduată $\mathcal{Y} = \mathcal{X}\langle T \rangle$ ; $dT = \zeta$ (introdusă la Def.3) verifică (A5).

Demonstraţie

In adevăr, conform Lemmei II de mai sus, ipoteza: "$\hat{\zeta} \nmid 0$ pe $H(\mathcal{X})$" implică $H(g) = 0$, deci triunghiul exact (16) dă şirul exact:

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow H(\mathcal{Y}) \xrightarrow{\Delta} H(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(f)} H.(\mathcal{Y}) \longrightarrow 0$$

Conform Lemei I, $\Delta \circ H(f) =$ multiplicarea cu $\hat{\zeta}$ , deci (*) dă:

$$H(\mathcal{Y}) \cong H(\mathcal{X})/_{Im(\Delta \circ H(f))} = H(\mathcal{X})/_{\hat{\zeta}} H(\mathcal{X}) \quad \text{, deci (A5)//}$$

Construcţiile de mai sus ale extinderii de algebre diferenţiale:

$$\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}\langle T\rangle \ ; \ dT = \zeta$$

($\zeta \in Z(\mathcal{X})$ fiind un ciclu omogen) sînt <u>explicitări</u> ale următoarei construcţii generale.

Vom nota cu $\tilde{A}\langle T\rangle ; dT = 0$ <u>algebra diferenţială liberă</u> obţinută prin adjuncţionarea la A a unei variabile omogene T.

(Astfel: $\tilde{A}\langle T\rangle$ = algebra exterioară peste $A^{(1)}$, dacă $\deg T \equiv 1 \pmod 2$ şi $\tilde{A}\langle T\rangle$ = algebra de puteri divizate peste $A^{(1)}$, dacă $\deg T \equiv 0 \pmod 2$.

In ambele cazuri, graduarea lui $\tilde{A}\langle T\rangle$ este dată de $i = \deg T$).

Fie $\mathcal{X}$ o algebră diferenţială graduată. Orice ciclu omogen fixat $\zeta \in Z_{i-1}(\mathcal{X})$, determină pe produsul tensorial $\tilde{A}\langle T\rangle \otimes_{\tilde{A}} \mathcal{X}$ ($\deg T = i$) o unică diferenţială d, cu proprietatea: $d(T) = \zeta$.

Algebra diferenţială graduată astfel obţinută: $(\tilde{A}(T) \otimes_{\tilde{A}} \mathcal{X}, d)$, nu este alta decît algebra $\mathcal{X}\langle T\rangle ; dT = \zeta$, construită mai sus.

## §3. <u>ANULAREA BORDURILOR CARE NU DIVID ZERO SI ADJUNCTIA VARIABILELOR IN OMOLOGIE</u>

Fie $\mathcal{X}$ o A-algebră diferenţială graduată.

Fixăm în $B_{i-1}(\mathcal{X})$ un bord de grad <u>par</u> $i-1 \equiv 0 \pmod 2$ să zicem $\beta \in B_{i-1}(\mathcal{X})$. <u>Presupunem că $\beta$ nu divide zero în $\mathcal{X}$.</u>

Alegem un element $\zeta \in \mathcal{X}_i$, încît: $d^{\mathcal{X}}(\zeta) = \beta$.

Fie atunci $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X}/_{\beta\mathcal{X}}$ algebra diferenţială cît, cu diferenţiala indusă $\bar{d} = d^{\mathcal{X}} \pmod{\beta\mathcal{X}}$. Conform alegerii lui $\zeta$ , rezultă numaidecît că $\tilde{\zeta} = \zeta \pmod{\beta\mathcal{X}} \in Z_i(\bar{\mathcal{X}})$.

5. Propoziţie

(i) In situaţia de mai sus, surjecţia canonică $p: \mathcal{X} \twoheadrightarrow \bar{\mathcal{X}}$ induce în omologie un morfism injectiv: $H(p): H(\mathcal{X}) \hookrightarrow H(\bar{\mathcal{X}})$

(ii) $H(\bar{\mathcal{X}})$ este $H(\mathcal{X})$ - algebra liberă, obţinută prin adjuncţia unei variabile omogene $T$, $\deg T = i$ (cu $i \equiv 1 \pmod 2$):

$$H(\bar{\mathcal{X}}) = H(\mathcal{X}) \langle T \rangle ;\ dT = 0$$

Demonstraţie

(i) Ipoteza că $\beta$ nu divide zero pe $\mathcal{X}$ (împreună cu $\deg\beta = i-1 \equiv 0 \pmod 2$) arată că avem şirul exact de module diferenţiale:

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{\mu_\beta} \mathcal{X} \xrightarrow{p} \bar{\mathcal{X}} \longrightarrow 0$$

unde $\mu_\beta$ este omomorfismul de multiplicare cu $\beta$.

Obţinem şirul exact lung de omologie ($m \in \mathbb{Z}$):

$$\cdots \longrightarrow H_m(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(\mu_\beta)} H_{m+i-1}(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(p)} H_{m+i-1}(\bar{\mathcal{X}}) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(\mathcal{X}) \longrightarrow \cdots$$

Avem: $H(\mu_\beta) = 0$ : în adevăr, pentru orice ciclu $\xi \in Z_m(\mathcal{X})$,
$\mu_\beta(\xi) = \xi\beta = \xi\, d^{*}(\zeta) = (-1)^m d^{\mathcal{X}}(\xi\zeta) \equiv 0 \pmod{B_{m+i-1}(\mathcal{X})}$, deci
$H(\mu_\beta)(\hat{\xi}) = 0$, $(\forall)\ \hat{\xi} \in H(\mathcal{X})$.
Dar atunci, din şirul exact lung:

$\ker H(p) = \operatorname{Im} H(\mu_\beta) = 0 \Longrightarrow H(p)$ este injectiv

(ii) Am văzut la (i) că, în şirul exact lung de omologie, $H(\mu_\beta) = 0$, deci $H(p)$ este injectiv şi omomorfismul de conexiune este injectiv.

Obţinem atunci, pentru orice $m \in \mathbb{Z}$, şirul exact scurt:

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow H_{m+i}(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(p)} H_{m+i}(\bar{\mathcal{X}}) \xrightarrow{\Delta} H_m(\mathcal{X}) \longrightarrow 0$$

Arătăm că:

"pentru orice $m \in \mathbb{Z}$ , şirul exact (*) scindează"

In adevăr, vom arăta că $\Delta$ are drept secţiune canonică omomorfismul

$\nabla : H_m(\mathcal{X}) \longrightarrow H_{m+i}(\overline{\mathcal{X}})$, dat de:

$(\forall)\, \xi \in H_m(\mathcal{X})$, $\nabla(\hat{\xi}) = \hat{\xi} \cdot \hat{\zeta}$, unde $\bar{\zeta} = \zeta \pmod{\beta\mathcal{X}}$ şi $d^{\mathcal{X}}(\zeta) = \beta$ în $\mathcal{X}$. Arătăm că $\Delta \circ \nabla(\hat{\xi}) = \hat{\xi}$, $(\forall)\, \hat{\xi} \in H(\mathcal{X})$. Considerăm ciclul din $\overline{\mathcal{X}}$. Pentru a calcula $\Delta(\hat{\xi}\cdot\hat{\zeta})$ (aplicînd definiţia lui $\Delta$), cum $\xi\cdot\zeta$ este o p-preimagine a lui $\hat{\xi}\cdot\hat{\zeta}$, din:
$d^{\mathcal{X}}(\xi\zeta) = d^{\mathcal{X}}(\xi)\zeta + (-1)^{m+i}\xi\, d^{\mathcal{X}}(\zeta) =$ ($\xi$ fiind ciclu)
$= (-1)^{m+i}\xi\beta = \mu_\beta((-1)^{m+1}\xi)$, obţinem $\Delta\circ\nabla(\hat{\xi}) = \hat{\xi}$, deci şirul (*) scindează.

Aşadar, pentru orice $m \in \mathbb{Z}$:

(**) $\qquad H_{m+i}(\overline{\mathcal{X}}) \cong H_{m+i}(\mathcal{X}) \oplus H_m(\mathcal{X})\cdot\hat{\zeta}$.

Cum $\deg \hat{\zeta} = i \equiv 1 \pmod 2$, deci $\hat{\zeta}^2 = 0$ în $H(\mathcal{X})$, (**) constituie proiecţia pe componentele omogene a descompunerii directe:

$$H(\overline{\mathcal{X}}) = H(\mathcal{X}) \oplus H(\mathcal{X})\cdot\hat{\zeta} = H(\mathcal{X})\langle\hat{\zeta}\rangle = H(\mathcal{X})\langle T\rangle .$$

In plus, cum $dT = d\hat{\zeta} = \hat{\beta} = \hat{0}$ în $H(\mathcal{X})$, vedem că:

$$H(\overline{\mathcal{X}}) = H(\mathcal{X})\langle T\rangle;\ dT = 0,$$

adică $H(\overline{\mathcal{X}})$ este în adevăr extinderea liberă a algebrei $H(\mathcal{X})$, printr-o variabilă de grad impar.//

## §4. APLICATIE: COMPLEXUL KOSZUL AL UNUI INEL LOCAL NOETHERIAN

Vom utiliza acum teoria lui Tate (§§1-3) pentru a da o nouă caracterizare complexului Koszul al unui indl local noetherian $(A, \underline{m}, k)$.

Fie $n = \text{edim } A$ (dimensiunea de scufundare a lui A) şi fie $\{a_1,\dots,a_n\}$ un sistem minimal de generatori ai idealului maximal $\underline{m}_A$. Peste acest sistem de generatori construim o n-schemă arbitrară $a: [n] \longrightarrow A$, $a(i) = a_i$, $i = 1,2,\dots,n$ şi considerăm algebra diferenţială Koszul

$$(K_\bullet(a \mid A),\ d_\bullet(a \mid A))$$

Aşa cum am văzut la Exp.IV, această algebră diferenţială este unic determinată (pînă la un izomorfism de algebre diferenţiale graduate) de inelul local $(A, \underline{m}_A)$ (i.e.permutările $[n]$-schemă $\underline{a}$ şi schimbările sistemelor minimal de generatori ai lui $\underline{m}_A$, produc automorfisme ale algebrei diferenţiale graduate Koszul).

Aşadar, vom nota prin $K_\bullet(A)$ clasa de izomorfism a algebrei $(K_\bullet(a \mid A), d_\bullet(a \mid A))$ şi vom reprezenta această clasă printr-un element oarecare al său, notat de asemenea cu $K_\bullet(A)$ (dacă nu există pericol de confuzie).

In algebra diferenţială graduată $K_\bullet(A)$, punem în evidenţă subalgebra trivială $\widetilde{A} \hookrightarrow K_\bullet(A)$.

Elementele $\{a_1,\dots,a_n\}$ care generează minimal $\underline{m}_A$, definesc totodată diferenţiala Koszul $d_\bullet(a \mid A) := d$, prin:

$$d(E_i) = a_i, \quad i = 1,2,\dots,n \quad ,$$

unde $\{E_1,\dots,E_n\}$ constituie o bază a modulului liber

$$K_1(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} A.E_i .$$

Intrucît $a_i \in K_o(A) = A$, $i = 1,2,\dots,n$ şi $K_{-1}(A) = 0$, avem: $d(a_i) = 0$, $(\forall)\ i \in [n]$. Aşadar: <u>$a_1,\dots,a_n$ sînt cicli omogeni de grad zero în $K_\bullet(A)$</u> şi, mai mult, ei <u>sînt chiar cicli omogeni de grad zero în subalgebra trivială $\widetilde{A} \hookrightarrow K_\bullet(A)$</u>.

Comparînd definiţia algebrei Koszul $K_\bullet(A)$ (cf. §2, Exp.II) cu procesul adjuncţiei variabilelor de grad impar, care anulează cicli omogeni de grad par (2.1, §2 de mai sus), obţinem numaidecît prin iterarea construcţiei de la 2.1, §2 :

6. Propoziţie

Pentru orice $[n]$-schemă peste un sistem minimal de generatori ai lui $\underline{m}_A$ : $a = (a_1,\dots,a_n)$, are loc izomorfismul de A-algebre diferenţiale graduate (libere, de tip finit):

$$(K.(a \mid A),\ d.(a \mid A)) \underset{\tilde{A}}{\cong} \tilde{A}\langle T_1, T_2,\dots,T_n\rangle \quad ; dT_i = a_i\ ,\quad i = 1,2,\dots,n\ .$$

OBSERVATIE

Iterarea procedeului de ajuncţie a variabilelor care anulează cicli, pe cazul de mai sus, corespunde cel mai bine definiţiei de la §4, Exp.II, a complexului Koszul (produsul tensorial al complexelor simple).

In virtutea acestui rezultat, vom nota de acum încolo şi prin:

$$K.(A) = A\langle T_1,\dots,T_n\rangle \ ;\ dT_1 = a_1,\dots,dT_n = a_n\ ,$$

algebra diferenţială Koszul a lui A, construită peste $[n]$-schema $a. = (a_1,\dots,a_n)$, $n = \operatorname{edim} A$ şi $\underline{m}_A = \sum_{j=1}^{n} A.a_j$ .

# EXPUNEREA VI

## OMOLOGIA KOSZUL A INELELOR LOCALE NOETHERIENE

Pe parcursul acestei expuneri, fixăm un inel local noetherian $(A, \underline{m}_A)$, de corp rezidual $k = A/\underline{m}_A$. Vom nota prin $K.(A)$ complexul Koszul al lui $A$ (cf.Def.4, §5, Exp.IV) şi vom nota pentru uşurinţă, prin $H(A) = H(K.(A))$, algebra de omologie a algebrei diferenţiale graduate $(K.(A), d.(a|A))$, unde $a = (a_1,\ldots,a_n)$ este o $[n]$-schemă peste un sistem minimal (arbitrar) de generatori ai idealului maximal $\underline{m}_A$ ($n$ = edim $A$) $H(A)$ are o structură naturală de $k$-algebră diferenţială graduată, liberă de tip finit.

### §1. INTERSECTII COMPLETE

Considerăm o scufundare regulată minimală $R \twoheadrightarrow A$, a inelului local $(A, \underline{m}_A)$. Aceasta înseamnă că $(R, \underline{m}_R)$ este un inel local regulat de dimensiune $n$ = edim $A$ = dim $R$ = edim $R$ şi $R$ are acelaşi corp rezidual cu $A$ : $R/\underline{m}_R = A/\underline{m}_A = k$. Surjecţia canonică $R \twoheadrightarrow A$ este dată de: $r_i \mapsto a_i$, $i \in [n]$, unde $\underline{m}_R = (r_1,\ldots,r_n)$, $\underline{m}_A = (a_1,\ldots,a_n)$ ( $\{r_1,\ldots,r_n\}$ fiind un sistem regulat de parametri ai lui $R$). Pe corpurile reziduale, $R \twoheadrightarrow A$ induce aplicaţia identică $k \xrightarrow{id} k$.

1. Definiţie

$(A, \underline{m}_A)$ se numeşte "intersecţie completă" dacă idealul $\ker(R \twoheadrightarrow A)$ al lui $R$, este generat de un şir regulat de elemente din $R$.

Aşadar, A este intersecţie completă dacă:

"există un şir regulat $(b_1,b_2,\ldots,b_q)$ în $R$, încît

$$\ker(R \twoheadrightarrow A) = \sum_{j=1}^{q} Rb_j"$$

Cum orice şir regulat se poate prelungi la un sistem de parametri, urmează că, pentru o intersecţie completă A, lungimea q a şirului regulat ce generează ker(R $\twoheadrightarrow$ A)) este:

(1) $q = n - d$ , unde $n$ = edim A, d = dim A

Fixăm acum şirul : $(b_1,\ldots,b_q)$ şi definim matricea:

(2) $\mathcal{A} = (\alpha_{ji})_{1\le j\le q,\,1\le i\le n}$ prin: $b_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} r_i,\ j=1,\ldots,q$

unde $(r_1,\ldots,r_n)$ este sistemul regulat de parametri din R, care dă scufundarea minimală R $\twoheadrightarrow$ A.

Evident, intrările matricii $\mathcal{A}$ pot fi luate în $\underline{m}_R$ (căci, modulo un izomorfism local, putem lua scufundarea minimală astfel încît ker(R $\twoheadrightarrow$ A) $\subseteq \underline{m}_R^2$ ).

Surjecţia canonică R $\twoheadrightarrow$ A defineşte în mod natural o surjecţie între algebrele diferenţiale Koszul (cf.§4,Exp.V):

(3) $\varphi: \left[R\langle U_1,\ldots,U_n\rangle\,;\ dU_i = r_i\right] \twoheadrightarrow \left[A\langle T_1,\ldots,T_n\rangle\,;dT_i = a_i\right]$

care acţionează prin reducere modulo idealul $\sum_{j=1}^{q} Rb_j$ = ker(R $\twoheadrightarrow$ A) pe coeficienţi (i.e.coincide cu R $\twoheadrightarrow$ A, $r_j \mapsto a_j$, în grad zero) şi duce: $U_i \longmapsto T_i$, i = 1,2,...,n . Pentru simplitate, notăm prin K.(R), K.(A) algebrele diferenţiale Koszul de mai sus, încît putem scrie şirul exact:

(3)' $K.(R) \xrightarrow{\varphi} K.(A) \longrightarrow 0$

R fiind inel local regulat, H(K.(R)): = H(R) este k-algebra trivială, i.e. H(R) = $\widetilde{k}$ (cf.Prop.15, §5, Exp.IV).

In componenta $K_1(R)$ considerăm elementele:

(4) $\zeta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} U_i$ , j = 1,2,...,q(=n-d),

definite cu ajutorul matricii $\mathcal{A}$ de la (2).

Din (2), (4) şi definiţia diferenţialei Koszul pe K.(R), rezultă imediat:

(5) $\quad d^{(K.(R)}(\zeta_j) = b_j, \quad j = 1,2,\ldots,q$ .

Aşadar $b_1, b_2, \ldots, b_q$ sînt borduri de grad zero în K.(R) şi, dacă A este intersecţie completă, aceste borduri nu divid zero în K.(R). Din Propoziţia 5, §3, Exp.$\overline{V}$, rezultă atunci:

(6) $\quad H(A) \cong H(R) \langle W_1, \ldots, W_q \rangle \; ; \; dW_j = 0$ ,

întrucît, din (3), ştim că A este reducţia lui R modulo $\sum_{j=1}^{q} Rb_j$. Variabilele $\{W_j \,/\, j = 1,2,\ldots,q\}$ se identifică, de fapt, cu ciclii $\{\overline{\zeta}_j \,/\, j = 1,\ldots,q\}$ ai lui K(A), unde $\overline{\zeta}_j = \zeta_j \pmod{\sum_{j=1}^{q} Rb_j}$

Conform definiţiei adjuncţiei libere de variabile de grad impar (2.1, §2, Exp.$\overline{V}$) şi aciclicităţii lui K(R), (6) se mai scrie:

(6)' $\quad H.(A) \cong \Lambda.(H_1(A)) = k \langle W_1, \ldots, W_q \rangle \; ; \; dW_j = 0$

unde $\Lambda.$ denotă "functorul algebră exterioară" şi $H_1(A)$ este componenta omogenă de grad 1 a lui H(A) .

Din această structură a omologiei lui K.(A), rezultă imediat, iterînd procedeul de adjuncţie a variabilelor de grad par (cf.2.2, §2, Exp.$\overline{V}$), că următoarea extindere a algebrei Koszul K.(A):

(7) $\quad K.(A) \hookrightarrow L.(A) = K.(A) \langle Z_1, \ldots, Z_q \rangle \; ; \; dZ_j = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_{ji}} \, T_i$

$, \; j = 1,2,\ldots,q$

(cu $\overline{\alpha_{ji}} = \alpha_{ji} \pmod{\sum_{k=1}^{q} Rb_k}$, i.e. $dZ_j = \overline{\zeta}_j$),

este o algebră diferenţială graduată <u>aciclică</u> (deoarece, conform cu (A5), Exp.$\overline{V}$, $H(L.(A)) = H(K.(A))/(\hat{\zeta}_1, \ldots, \hat{\zeta}_q)H(K.(A)) =$

$=$ (întrucît $\hat{\zeta}_j$ se identifică cu variabilele $W_j$) $= H(K.(A))/(W_1, \ldots, W_q)H(K(A)) =$

$=$ (dim (6)') $= k \langle W_1, \ldots, W_q \rangle / (W_1, \ldots, W_q) = \widetilde{k}$).

Sintetizînd discuţia de mai sus, putem formula următoarea:

1. Propoziţie

Fie $R \twoheadrightarrow A$ scufundarea minimală regulată a intersecţiei complete $A$, cu $n = \operatorname{edim} A = \operatorname{edim} R$ şi $d = \dim A$.

Punem: $q = n-d$, $k = A/\underline{m}_A = R/\underline{m}_R$

Fie $(r_1,\dots,r_n)$ un sistem regulat de parametri în $R$, $(a_1,\dots,a_n)$ un sistem minimal de generatori ai lui $\underline{m}_A$ şi $(b_1,\dots,b_q)$ un şir regulat în $R$, încît $\ker(R \twoheadrightarrow A) = \sum_{j=1}^{q} R\, b_j$

Fie $\mathcal{A}$ $q \times n$ - matricea cu intrări din $\underline{m}_R$, dată de:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, r_i$$

Considerăm surjecţia de algebre diferenţiale Koszul:

$$K.(R) = R\langle U_1,\dots,U_n\rangle ; dU_i = r_i \twoheadrightarrow K.(A) = A\langle T_1,\dots,T_n\rangle ;$$
$$dT_i = a_i$$

dată de reducţia modulo $\ker(R \twoheadrightarrow A)$.

In $K.(R)$ considerăm elementele de grad 1,

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, U_i \ , \ j = 1,2,\dots,q \ ,$$

verificînd: $d^{K.(R)}(\zeta_j) = b_j$ , $(\forall)$ $j$, şi notăm cu $\overline{\zeta}_j = \zeta_j (\operatorname{mod} \sum_{k=1}^{q} R\, b_k)$, $j = 1,2,\dots,q$ , ciclii corespunzători de grad 1 din $K.(A)$.

Atunci:

(i) $A$-algebra diferenţială graduată:

$$L.(A) = K.(A)\langle Z_1,\dots,Z_q\rangle \ ; \ dZ_j = \overline{\zeta}_j =$$
$$= A\langle T_1,\dots,T_n;\ Z_1,\dots,Z_q\rangle \ ; dT_i = a_i,\ dZ_j = \overline{\zeta}_j$$

(cu $\deg T_i = 1$, $\deg Z_j = 2$ pentru $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,q$) este aciclică (deci furnizează o rezoluţie liberă minimală de tip finit a lui $k$ peste $A$).

(ii) Omologia Koszul a lui A este:

$$H(A) = \left[ k\langle W_1,\dots,W_q\rangle \ ;\ dW_j = o \right] = \Lambda.(H_1(A))$$

In plus, (ii) este echivalentă cu (i) şi cu:

(ii)' $\quad H_2(A) = H_1(A)^2$

Demonstraţie

(i)$\Longrightarrow$(ii) rezultă din procedeul de adjuncţie a variabilelor de grad 2, care nulează cicli de grad 1 (cf.2.2.,§2, Exp.V).

(ii)$\Longrightarrow$(i) a fost arătat mai sus.

(ii) $\Longrightarrow$(ii)' este o consecinţă imediată a structurii algebrei exterioare peste un k-spaţiu vectorial finit-dimensional.

(ii)'$\Longrightarrow$(ii) este urmare a procedeului de adjuncţie a variabilelor, care anulează cicli de grad 1 (cf.2.1, §2, Exp.V).//

2. Corolar

Fie $(A, \underline{m}_A)$ o intersecţie completă, n = edim A, d = dim A şi fie q = n-d.

Atunci seria Poincaré a lui A este:

$$P_A(Z) = \frac{(1+Z)^n}{(1-Z^2)^q} \tag{8}$$

Demonstraţie

Din (i), Prop.1, vedem că $P_A(Z) = P_{L.(A)}(Z)$ (deoarece L.(A) este o rezoluţie liberă minimală a lui k peste A), deci (8) rezultă din structura lui L.(A), împreună cu relaţiile (1o), (14), §2, Exp.V (comportamentul seriei Poincaré la adjuncţii de variabile).

OBSERVATIE

După cum se ştie, "seria Poincaré a lui A" este:

$$P_A(Z) = \sum_{i \geq o} \dim_k \operatorname{Tor}_i^A(k,k)\, Z^i ,$$

coeficienţii ei fiind daţi de numerele Betti ale unei rezoluţii libere minimale, de tip finit, a lui k peste A.//

Restul acestui § este rezervat demonstrării reciprocei Propoziţiei 1.
Pentru aceasta, fixăm: un inel local noetherian $(A, \underline{m}_A, k)$, un sistem minimal de generatori pentru $\underline{m}_A$ : $(a_1,\ldots,a_n)$, $n = \operatorname{edim} A$, o scufundare regulată minimală $R \twoheadrightarrow A$ şi un sistem regulat de parametri $(r_1,\ldots,r_n)$ în R.
Fie $\underline{b} = (b_1,\ldots,b_q) = \ker(R \twoheadrightarrow A)$, unde $b_1,\ldots,b_q$ sînt elemente din $\underline{m}^2_R$ , nu neapărat formînd un şir regulat (deci $q \geqslant n-d$, unde $d = \dim A$).
(Conform Definiţiei 1, A este intersecţie completă $\Longleftrightarrow$ $(b_1,\ldots,b_q)$ şir regulat în $R \Longleftrightarrow q = n-d$).
Deşi $(b_1,\ldots,b_q)$ nu formează un şir regulat în R, vom utiliza totuşi aceleaşi notaţii ca mai sus, adică:

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} U_i \in K_1(R)\ ,\quad \bar{\zeta}_j = \zeta_j \left(\operatorname{mod} \sum_{k=1}^{q} R b_k\right) \in K_1(A),$$

cu $d^{K.(R)}(\zeta_j) = b_j$ şi $d^{K.(A)}(\bar{\zeta}_j) = 0$ , $j = 1, 2, \ldots, q$ ,
unde $b_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} r_i$ .
Notăm: $L.(A) = K.(A)\langle Z_1,\ldots,Z_q\rangle$ ; $dZ_j = \bar{\zeta}_j$ , $j = 1, 2, \ldots, q$

(9) $L.(A) = K.(A) \langle Z_1,\ldots,Z_q\rangle$ ; $dZ_j = \quad_j$, $j = 1,2,\ldots,q$ .

L.(A) este evident, un invariant al inelului local $(A, \underline{m}_A)$.
Algebra diferenţială graduată L.(A) are următoarele proprietăţi.

3. Propoziţie

Fie $(A, \underline{m}_A, k)$ un inel local noetherian şi fie L.(A) algebra diferenţială graduată (9), construită cu ajutorul unei scufundări regulate minimale oarecare $R \twoheadrightarrow A$. Atunci:

(i) $H_0(L.(A)) = k$

(ii) $H_1(L.(A)) = (0)$

(iii) $H_2(L.(A)) = H_2(K.(A))/_{H_1(K.(A))^2}$

Demonstrație

(i) este trivială, (ii) rezultă din definiția adjuncției (cf.(A4), §2, Exp.$\overline{V}$) iterată conform cazului de față, i.e. :
$H_1(L.(A)) = H_1(K.(A))/ \hat{\zeta}_1.k + \ldots + \hat{\zeta}_q.k = 0.$
Pentru (iii), începem cu următoarea:

Lemă

Fie $\mathcal{X}$ o R-algebră, cu $H_0(\mathcal{X}) = k$. Fie $\zeta \in Z_1(\mathcal{X})$ și $\mathcal{Y} = \mathcal{X}\langle Z\rangle$ ; $dZ = \zeta$ (deg Z = 2). Considerăm șirul exact asociat acestei adjuncții (cf.2.2.,§2,Exp.$\overline{V}$):

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \xrightarrow{g} \mathcal{Y} \longrightarrow 0$$

(unde f este incluziunea canonică și $g(w_m + w_{m-2}Z^{(1)} + w_{m-4}Z^{(2)} + \ldots) = w_{m-2} + w_{m-4}Z^{(2)} + \ldots, (\forall) m \in \mathbb{Z})$.
Atunci are loc următorul șir exact:

$$0 \longrightarrow \hat{\zeta} H_1(\mathcal{X}) \longrightarrow H_2(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(g)} H_2(\mathcal{Y}) \longrightarrow 0$$

Demonstrația lemei

Considerăm șirul exact lung de omologie, dat de (*):

$$\ldots \longrightarrow H_1(\mathcal{Y}) \xrightarrow{\Delta_3} H_2(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(f)} H_2(\mathcal{Y}) \xrightarrow{H(g)} H_0(\mathcal{Y}) \xrightarrow{\Delta_2} H_1(\mathcal{X}) \xrightarrow{H(f)} H_1(\mathcal{Y}) \longrightarrow 0$$

unde, conform cu Lema I, 2,2.,§2,Exp.$\overline{V}$, știm că $\Delta \circ H(f)$ constă din multiplicarea cu $\hat{\zeta}$ .
Cum $H_0(\mathcal{Y}) = H_0(\mathcal{X}) = k$ și cum $\Delta_2 \neq 0$ (căci $H(f)$: $H_1(\mathcal{X}) \longrightarrow H_1(\mathcal{Y})$ este epimorfism), rezultă ker $\Delta_2 = 0 = \mathrm{Im}\, H(g)$, deci $H(g)$: $H_2(\mathcal{Y}) \longrightarrow H_0(\mathcal{Y})$ este omomorfismul nul $\Longrightarrow$ $H(f)$ : $H_2(\mathcal{X}) \longrightarrow H_2(\mathcal{Y})$ este surjecție.
Cum $\ker H(f) = \mathrm{Im}\, \Delta_3 = \mathrm{Im}(\Delta_3 \circ H(f)) = \mathrm{Im}(\mu_{\hat{\zeta}}) = \hat{\zeta} H_1(\mathcal{X})$, afirmația lemei rezultă.//
Așadar, în condițiile din enunțul lemei: $H_2(\mathcal{Y}) \cong H_2(\mathcal{X})/ \hat{\zeta} H_1(\mathcal{X})$ .
Luăm acum algebrele K.(A) și $L.(A) = K.(A)\langle Z_1,\ldots,Z_q\rangle$ ;$dZ_j = \bar{\zeta}_j$,

$j = 1,2,\dots,q$ , $\deg Z_j = 2$. Iterînd Lema de mai sus, obţinem:

$$H_2(L.(A)) = H_2(K.(A)) \,/(\hat{\zeta}_1,\dots,\hat{\zeta}_q)\, H_1(K.(A))$$

Dar $\{\hat{\hat{\zeta}}_1,\dots,\hat{\hat{\zeta}}_q\}$ generează $H_1(K.(A))$, deci rezultă (iii) .//

Pasul principal în demonstrarea reciprocei Propoziţiei 1, îl constituie următorul rezultat.

4. Propoziţie

In situaţia şi cu notaţiile de mai sus:

dacă $(b_1,\dots,b_q)$ nu este şir regulat în R, atunci $H_2(L.(A)) \neq (o)$.

Demonstraţie

Arătăm întîi următorul fapt general.

Lemă

Fie $\mathcal{X}$ o A-algebră diferenţială graduată, cu $H_o(\mathcal{X}) = k$ şi $H_1(\mathcal{X}) = o$. Fie $b \in A$ un divizor al lui zero şi fie $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}/_{b\mathcal{X}}$ . Atunci $H_2(\overline{\mathcal{X}}) \neq 0$.

Demonstratie

Considerăm şirul exact scurt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{X}/(\mathrm{Ann}_A b)\mathcal{X} \xrightarrow{\mu_b} \mathcal{X} \xrightarrow{can} \overline{\mathcal{X}} \longrightarrow 0$$

care dă şirul exact lung de omologie:

$$\dots \to H_2(\mathcal{X}) \longrightarrow H_2(\overline{\mathcal{X}}) \xrightarrow{\Delta_2} H_1(\mathcal{X}/\mathrm{Ann}\, b\mathcal{X}) \xrightarrow{H(\mu_b)} H_1(\mathcal{X}) \longrightarrow H_1(\overline{\mathcal{X}}) \xrightarrow{\Delta_1}$$

$$\xrightarrow{\Delta_1} H_o(\mathcal{X}/\mathrm{Ann}\, b\mathcal{X}) \longrightarrow H_o(\mathcal{X}) \longrightarrow H_o(\overline{\mathcal{X}}) \longrightarrow 0$$

Cum $H_1(\mathcal{X}) = H_1(\overline{\mathcal{X}}) = o$, iar $H_o(\mathcal{X}) = H_o(\overline{\mathcal{X}}) = k$, rezultă că $\Delta_1$ este izomorfism şi $\Delta_2$ este surjecţie. Dacă b divide zero, avem $\mathrm{Ann}\, b \neq o$ şi atunci $H_1(\mathcal{X}/\mathrm{Ann}\, b\mathcal{X}) \neq 0$, deci $H_2(\overline{\mathcal{X}}) \neq 0$ ($\Delta_2$ fiind surjecţie pe un modul nenul).//

Intorcîndu-ne la demonstraţia propoziţiei, punem:

$$m = \max \left\{ i/b_i \text{ divide zero modulo } (b_1,\dots,b_{i-1}) \right\}$$

Aşadar $(b_{m+1},\dots,b_q)$ este şir regulat.

Fie $\mathcal{X} = K.(R/(b_1,\dots,b_{m-1})R) \langle Z_1',\dots,Z_{m-1}' \rangle$ ; $dZ_j' = \zeta_j$, $j = 1,2,\dots,m-1$.

Vedem numaidecît că: $H_0(\mathcal{X}) = k$, $H_1(\mathcal{X}) = 0$.

Atunci $\mathcal{Y} = \mathcal{X}/_{b_m\mathcal{X}}$ este în situaţia lemei anterioare, deci $H_2(\mathcal{Y}) \neq 0$ şi $H_2(\mathcal{Y}) = H_2(\mathcal{Y}\langle Z_m \rangle$ ; $dZ_m = \zeta_m) \neq 0$.

De la $\mathcal{Y}\langle Z_m \rangle$ ; $dZ_m = \zeta_m$ la $L.(A)$, ajungem făcînd reducţia prin şirul regulat: $(b_{m+1},\dots,b_q)$. Conform procesului de adjuncţie, aplicat acestui caz particular, omologia în grade $\geq 1$ nu este afectată, deci:

$$H_2(L.(A)) = H_2(\mathcal{Y}\langle Z_m \rangle \ ; \ dZ_m = \zeta_m) = H_2(\mathcal{Y}) \neq 0,$$

Aceasta încheie demonstraţia propoziţiei.//

Obţinem acum următorul rezultat:

1. Teoremă

In situaţia de mai sus, următoarele sînt echivalente:

(i) $L.(A)$ este o A-algebră aciclică

(ii) $H_2(L.(A)) = 0$

(iii) $H_2(K.(A)) = H_1(K.(A))^2$

(iv) $H.(K.(A)) = \Lambda.(H_1(K.(A)))$

(v) $(A, \underline{m}_A)$ este intersecţie completă

Demonstraţie

(ii) $\Longrightarrow$(v) (din Prop.4), (v)$\Longleftrightarrow$(i) (Prop.1), (i)$\Longrightarrow$(ii) (trivial), (ii)$\Longrightarrow$(iii) (din Prop.3), (iii)$\Longrightarrow$(iv) (trivial) şi (iv)$\Longrightarrow$(v) (Prop.1).//

OBSERVATII

(i) La §4, Exp.IV, am văzut că $H_+(K.(A)) = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow H_1(K.(A)) = 0$, i.e. aciclicitatea lui $K.(A)$ în toate gradele, rezultă din aceea în gradul 1.

Din cele de mai sus, vedem că $L.(A)$ are proprietatea "imediat următoare", adică: $H_+(L.(A)) = 0 \Longleftrightarrow H_2(L.(A)) = 0$ (căci $H_1(L.(A)) = 0$ este automat îndeplinită).

Condiţia: $H_1(K.(A)) = 0$ caracterizează inelele locale <u>regulate</u> A, iar : $H_2(L.(A)) = 0$ caracterizează intersecţiile complete.

(ii) Unui inel local noetherian $(A, \underline{m}_A, k)$ i se asociază şirul "deviaţiilor" sale: $(\varepsilon_i(A))_{i\geq 0}$, definite prin dezvoltarea canonică următoare a seriei Poincaré, în produs infinit

$$P_A(Z) = \frac{(1+Z)^{\varepsilon_0(A)}}{(1-Z^2)^{\varepsilon_1(A)}} \cdot \frac{(1+Z^3)^{\varepsilon_2(A)}}{(1-Z^4)^{\varepsilon_3(A)}} \cdot \frac{(1+Z^5)^{\varepsilon_4(A)}}{(1-Z^6)^{\varepsilon_5(A)}} \cdot \cdots\cdots$$

(cu $\varepsilon_0(A) = \operatorname{edim} A$, $\varepsilon_1(A) = \operatorname{edim} A - \dim A$).

Caracterizarea intersecţiilor complete cu ajutorul deviaţiilor este următoarea:

<u>"A este intersecţia completă $\Longleftrightarrow \varepsilon_i(A) = 0$, $(\forall)\ i \geq 2$"</u>

Un inel local $(A, \underline{m}, k)$ se zice "<u>local-intersecţie completă</u>" dacă inelul completat $\hat{A}$ (în topologia $\underline{m}_A$-adică) este intersecţie completă.

Se cunoaşte următoarea caracterizare a acestei clase de inele locale (Gulliksen):

<u>"A este local-intersecţie completă $\Longleftrightarrow \varepsilon_i(A) = 0$ pentru $i \gg 0$"</u>

Un rezultat remarcabil este următorul (S.Halperin):

<u>"A nu este intersecţie completă $\Longrightarrow \varepsilon_i(A) \neq 0$ pentru orice $i \geq 0$".</u> //

## §2. INELE LOCALE GORENSTEIN

2. Definiţie

Un inel local noetherian $(A,\underline{m},k)$ se numeşte "Gorenstein" dacă: $(\exists)$ $i > \dim A$ şi $\mathrm{Ext}_A^i(k,A) = 0$.

Următoarele caracterizări ale inelelor locale Gorenstein sînt binecunoscute şi vor fi date fără demonstraţii (vezi N.Radu, Inele locale, vol.II).

5. Propoziţie

Fie $(A, \underline{m}, k)$ un inel local noetherian, $d = \dim A$

(i) A este Gorenstein $\Longleftrightarrow \mathrm{Ext}_A^i(k,A) = \begin{cases} o, & i \neq d \\ k, & i = d \end{cases}$

(ii) A este Gorenstein $\Longleftrightarrow$ A este Cohen-Macaulay şi type $(A) = 1$

(type $(A) := \dim_k \mathrm{Ext}_A^d(k,A)$).

(iii) Fie $d = \dim A = o$ (i.e. A artinian). Atunci:

A este Gorenstein $\Longleftrightarrow$ A este autoinjectiv $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(k,A) = 0$.

(i.e. functorul de dualizare $M \longmapsto M^o = \mathrm{Hom}_A(M,A)$ este exact)

Pentru formularea rezultatelor acestui §, reamintim (vezi şi Exp.III §1) că o A-algebră diferenţială graduată $\mathcal{X}$ se numeşte "algebră Poincaré" dacă: $\mathcal{X}_o = A$, $(\exists)$ $m \geq o$ încît $\mathcal{X}_i = (o)$ cînd $i > n$ şi dacă forma biliniară dată de multiplicare $\mathcal{X}_j \times \mathcal{X}_{m-j} \longrightarrow \mathcal{X}_m$ este nedegenerată, pentru $j = o,1,2,\ldots,m$ (ceea ce implică autodualitatea: $\mathcal{X}_j = \mathcal{X}_{m-j}^o$, $j = o,1,\ldots,m$).

6. Propoziţie

Fie $\mathcal{X}$ o A-algebră diferenţială graduată cu $A = \mathcal{X}_o$ şi $\mathcal{X}_j = o$ pentru $j > m$, unde $m \geq o$ este un întreg.

Următoarele sînt echivalente:

(i) $\mathcal{X}$ este algebră Poincaré

(ii) $\mathcal{X}\langle T\rangle$; $dT = o$ și $\deg T = 1$, este algebră Poincaré.

Demonstrație

(ii) $\Longrightarrow$ (i) este imediată, datorită definiției lui $\mathcal{X}\langle T\rangle$; $dT = o$ ($\deg T = 1$), cf.2.1. §2, Exp.V).

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Fie $\mathcal{Y} = \mathcal{X}\langle T\rangle$; $dT = o$ și $\deg T = 1$. Atunci, întrucît $\mathcal{X} = \bigoplus_{j=o}^{m} \mathcal{X}_j$, graduarea lui $\mathcal{Y}$ este:

$$\mathcal{Y} = \bigoplus_{j=o}^{m+1} \mathcal{Y}_j \quad , \text{ cu } \mathcal{Y}_j = \mathcal{X}_j \oplus \mathcal{X}_{j-1} T \text{ pentru } j = o, 1, \ldots, n$$

și $\mathcal{Y}_{m+1} = \mathcal{X}_m \cdot T$.

Multiplicarea lui $\mathcal{Y}$ o extinde pe aceea a lui $\mathcal{X}$, prin:

$$T^2 = o$$

Fie $\varphi : \mathcal{Y}_{m+1-j} \longrightarrow \mathcal{Y}_{m+1}$ ($j \in \{o,1,\ldots,m+1\}$) o formă liniară.

Trebuie să arătăm că $\varphi$ este dată de multiplicarea cu un element din $\mathcal{Y}_j$ și (ii) va fi demonstrată.

Fie $y = x_{m+1-j} + x_{m-j} T$ (cu $x_k \in \mathcal{X}_k$, $(\forall)$ k).

Atunci $\varphi(y) = \varphi(x_{m+1-j}) + \varphi(x_{m-j} T) = \varphi_1(y) + \varphi_2(y)$,

unde $\varphi_1 : \mathcal{X}_{m+1-j} \longrightarrow \mathcal{X}_m \cdot T$ și $\varphi_2 : \mathcal{X}_{m-j} \cdot T \longrightarrow \mathcal{X}_m T$

sînt două forme liniare.

Cum $\mathcal{X}$ este algebră Poincaré, găsim elemente:

$$\xi_{j-1} \in \mathcal{X}_{j-1} \; , \; \xi_j \in \mathcal{X}_j$$

încît: $\varphi_1 = \mu_{\xi_{j-1}} \cdot T$ și $\varphi_2 = \mu_{\xi_j}$.

Dar atunci:

$$\varphi(y) = \varphi_1(y) + \varphi_2(y) = \xi_{j-1} x_{m+1-j} T + \xi_j x_{m-j} T =$$
$$= (\xi_{j-1} x_{m+1-j} + \xi_j x_{m-j}) T.$$

Să remarcăm că în $\mathcal{X}$ :

$$(\xi_j + \xi_{j-1}T)(x_{m+1-j} + x_{m-j}T) = \xi_j x_{m+1-j} + \xi_j x_{m-j}T +$$

$$+ \xi_{j-1} x_{m+1-j}T + \xi_{j-1} x_{m-j}T^2 = (\text{deoarece } T^2 = 0 \text{ şi } x_{m+k} = 0) =$$

$$= (\xi_{j-1} x_{m+1-j} + \xi_j x_{m-j})T.$$

Aşadar, notînd $t = \xi_j + \xi_{j-1}T \in \mathcal{Y}_j$, rezultă: $\varphi(y) = t.y = \mu_t(y)$.//

7. Corolar

In situaţia din Propoziţia 6, următoarele sînt echivalente:

(i) $\mathcal{X}$ este o algebră Poincaré

(ii) $\mathcal{X}\langle T_1,\ldots,T_q\rangle$; $dT_i = 0$ şi $\deg T_i = 1 (\forall\, i)$ este o algebră Poincaré pentru orice $q \geq 1$.

Demonstratie

Afirmaţia rezultă din Prop.6 prin inducţie după q.//

OBSERVATIE

Proprietatea de a fi algebră Poincaré nu se referă la diferenţiala lui $\mathcal{X}$. Aşadar, pentru un ciclu de grad zero $a \in A = \mathcal{X}_0$, obţinem: $\mathcal{X}$ este algebră Poincaré $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{X}\langle T\rangle$; $dT = a$ este algebră Poincaré.

In particular, aplicînd Cor.7 de mai sus, reobţinem rezultatul Prop.3, §1, Exp.III, anume:

"algebra Koszul $A\langle T_1,\ldots,T_n\rangle$; $dT_i = a_i$ a lui A, este algebră Poincaré ($n = \operatorname{edim} A$, $(a_1,\ldots,a_n)$ = sistem minimal de generatori pentru $\underline{m}_A$).

Aceasta rezultă din observaţia de mai sus, împreună cu faptul că algebra trivială $\widetilde{A} = A$ este în mod evident o algebră Poincaré.//

8. Propoziţie

Fie $(A,\underline{m})$ un inel local noetherian. Următoarele sînt echivalente:

(i) $H(K.(A))$ este o algebră Poincaré (peste $k = A/\underline{m}$ )

(ii) pentru orice non-divizor al lui zero $\beta \in \underline{m}_A$, $H(K_\bullet(A/\beta A))$ este o algebră Poincaré (peste $k = A/\underline{m}$)

Demonstraţie

Avem $H(K_\bullet(A/\beta A)) = H(K_\bullet(A))\langle T\rangle$ ; $dT = \beta$ , cf.Exp.V, deci echivalenţa din enunţ rezultă din Prop.6.//

9. Corolar

Fie $(A,\underline{m}, k)$ un inel local noetherian şi $n$ = edim $A$, $d$ = = dim $A$, $q$ = prof $A$. Fie $(\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_q)$ un A-şir (i.e.regulat, maximal).

Următoarele sînt echivalente:

(i) $H(K_\bullet(A))$ este o algebră Poincaré

(ii) $H(K_\bullet(A/(\xi_1,\ldots,\xi_q)A))$ este algebră Poincaré

In particular, dacă A este Cohen-Macaulay, $H(K_\bullet(A))$ este algebră Poincaré $\Longleftrightarrow$ $H(K_\bullet(A/(\xi_1,\ldots,\xi_d)A))$ este algebră Poincaré.

Demonstraţie

Echivalenţa (i)$\Longleftrightarrow$(ii) rezultă prin inducţie după q, din Prop.8. Ultima afirmaţie din enunţ rezultă din prima afirmaţie şi din definiţia inelelor locale Cohen-Macaulay.//

Demonstrăm acum rezultatul principal al acestui §.

2. Teoremă

Fie $(A, \underline{m}, k)$ un inel local Cohen-Macaulay.

Următoarele sînt echivalente:

(i) A este inel Gorenstein

(ii) $H(K_\bullet(A))$ este o algebră Poincaré

Demonstraţie

Proprietatea (i) rămîne invariantă la reducţia modulo un sistem de parametri (un A-şir), cf.Prop.5.

Proprietatea (ii) rămîne invariantă la reducţia modulo un sistem de parametri (un A-şir), cf.Cor.9.

Aşadar, putem presupune de la bun început A = artinian, i.e. dim A = o. In acest caz, din (iii) Prop.5 vedem că (i) este echivalent cu: $\mathrm{Ext}^1_A(k,A) = o$.

Aşadar, pentru A artinian, este suficient să arătăm echivalenţa:

(i)' $\underline{\mathrm{Ext}^1_A(k,A) = o}$

(ii)' <u>H(K.(A)) este algebră Poincaré</u>

Fie n $\doteq$ edim A.

Stim că algebra Koszul K.(A) este o algebră Poincaré, adică: $(\forall)\ j \in \{o,1,\dots,n\}$, $K_j(A) \cong K_{n-j}(A)^o$, izomorfismul fiind indus de multiplicarea algebrei K.(A).

Această situaţie se traduce omologic prin izomorfismele:

$$(*) \qquad H^j(K.(A)^o) \cong H_{n-j}(K.(A)) \quad , \ j = o,1,\dots,n$$

(vezi şi Cor.3, §1, Exp.II).

Insă, pentru orice complex de A-module $\mathcal{X}.$, omologia lui $\mathcal{X}.$ şi co-omologia dualului $\mathcal{X}.^o$ sînt legate prin următoarea binecunoscută "<u>formulă a coeficienţilor universali</u>":

(FCA) fie A un inel cu proprietatea:"<u>orice A-modul proiectiv este liber</u>". <u>Atunci, pentru orice complex de A-module $\mathcal{X}.$ şi pentru orice A-modul M, au loc şirurile exacte $((\forall)\ j \in \mathbb{Z})$:</u>

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(H_{j-1}(\mathcal{X}.),M) \longrightarrow H^j(\mathrm{Hom}(\mathcal{X}.,M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_j(\mathcal{X}.),M) \longrightarrow 0$$

---

(vezi "R.Godement"ptr.cazul A = $\mathbb{Z}$ şi "Dold" sau "Spanier" ptr. A oarecare).

Aplicînd (FCA) pentru A ca mai sus, $\mathcal{X}. = K_\bullet(A)$, M = A, rezultă pentru $(\forall)\ j \in \{o,1,\dots,n\}$ şirurile exacte:

$$(**)\quad 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(H_{j-1}(K.(A)),A) \longrightarrow H^{j}(K.(A))^{o}) \longrightarrow H_j(K.(A))^{o} \longrightarrow 0$$

Utilizînd (*), obţinem şirurile exacte:

$$(***)\quad 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(H_{j-1}(K.(A)),A) \longrightarrow H_{n-j}(K.(A)) \xrightarrow{\psi_j} H_j(K.(A))^{o} \longrightarrow 0,$$

$\psi_j$ fiind indus de multiplicarea algebrei $H(K.(A))$, $(\forall)\ j \in \{o,1,\ldots$ $\ldots,n\}$.

Echivalenţa lui (i)' cu (ii)' rezultă acum uşor din (***):

<u>(i)' ⟹ (ii)'</u> A Gorenstein ⟺ $\mathrm{Ext}^1_A(k,A) = o \Longleftrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,A) = o$ pentru orice A-modul M (căci dim A = o), deci din (***) obţinem, în particular, că $\psi_j$ este izomorfism pentru orice j, adică $H(K.(A))$ este algebră Poincaré.

<u>(ii)' ⟹ (i)'</u>. Dacă $H(K.(A))$ este algebră Poincaré, atunci, în (***), $\psi_j$ este izomorfism pentru orice j, deci obţinem $\mathrm{Ext}^1_A(H_{j-1}(K.(A)), A) = o$, $j = o,1,\ldots,n$. In particular, pentru $j = 1$, din $H_o(K.(A)) = k$, rezultă $\mathrm{Ext}^1_A(k,A) = o$, adică (i)'.//

## §3. <u>MULTIPLICITATEA</u>

Fie $(A, \underline{m}_A, k)$ un inel local noetherian.

Pentru orice A-modul M, de dimensiune $d = d(M)$ $(=\dim A/_{\mathrm{Ann}M})$ reamintim că un "<u>sistem de parametri pentru M</u>" este un şir de lungime d: $(\xi_1,\ldots,\xi_d)$ din $\underline{m}_A$, cu proprietatea:

$$\mathrm{long}_A(M/(\xi_1,\ldots,\xi_d)M) < \infty .$$

<u>1o. Propoziţie</u>

<u>Pentru orice $j \in \{o,1,\ldots,d\}$, $\mathrm{long}_A(H_j(K.(\xi.|M)) < \infty$.</u>

<u>Demonstraţie</u>

In adevăr, dacă $(\xi_1,\ldots,\xi_d)$ este sistem de parametri pentru M, atunci el rămîne sistem de parametri pentru orice modul $K_j(\xi.|M) = \Lambda^j(M^{(d)})$, deoarece acest modul este o sumă directă de $\binom{n}{j}$ copii ale lui M. Cum $H_j(K.(\xi.|M))_d$ este cît al unui submodul al lui $K_j(\xi.|M)$ şi cum idealul $\underline{\xi.} = \sum_{j=1}^{d} A.\xi_j$ anulează omologia lui $K.(\xi.|m)$, avem:

$$\operatorname{long}_A H_j(K.(\xi.|M)) = \operatorname{long}_A H_j(K.(\xi.|M))/\underline{\xi.}\, H_j(K.(\xi.|M)) =$$

$$= \operatorname{long}_A Z_j(K.(\xi.|M))/\underline{\xi.}\, Z_j(K.(\xi.|M)) + B_j(K.(\xi.|M)) \leq \operatorname{long}_A K_j/\underline{\xi.}\, K_j < \infty$$

deci rezultă afirmaţia din enunţ.//

3. Definiţie

Pentru orice A-modul M şi orice sistem de parametri ai lui M: $\xi. = (\xi_1, \dots, \xi_d)$, d = dim M, întregul:

$$\chi_{\xi.}(M) = \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \operatorname{long}_A(H_j(K.(\xi.|M))$$

se numeşte "caracteristica euleriană" relativă la $\xi.$, a lui M. Conform Prop.lo, $\chi_{\xi.}(M)$ este bine definit. Intregul $\chi_{\xi.}(M)$ are următoarele proprietăţi.

11. Propoziţie

(i) $\underline{\xi.} = (o)$ în $A \Longrightarrow \chi_{\xi.}(M) = \operatorname{long}_A M$.

(ii) $\chi_{\xi.}$ este o funcţie aditivă pe subcategoria modulelor care admit $\xi.$ ca sistem de parametri ( $\underline{\xi.}$ ca "ideal de definiţie" - vezi mai jos)

(iii) Dacă $\xi_1$ nu divide zero pe M, atunci:

$$\chi_{(\xi_1,\dots,\xi_n)}(M) = \chi_{(\xi_2,\dots,\xi_n)}(M/\xi_1 M)$$

Demonstraţie

(i) este evidentă, din definiţia 3.

(ii) rezultă imediat: dacă $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ este şir exact de A-module, el dă şirul exact de complexe:

$$0 \longrightarrow K.(\xi.|M') \longrightarrow K.(\xi.|M) \longrightarrow K.(\xi.|M'') \longrightarrow 0,$$

al cărui şir exact lung de omologie este:

$$0 \to H_d(\xi.|M') \to H_d(\xi.|M) \to H_d(\xi.|M'') \xrightarrow{\Delta} H_{d-1}(\xi.|M') \to \ldots \to$$

$$\ldots \to H_0(\xi.|M') \to H_0(\xi.|M) \to H_0(\xi.|M'') \longrightarrow 0.$$

Exactitatea acestui şir arată că suma alternată a lungimilor termenilor este nulă. Comparînd cu Def.3, rezultă afirmaţia (ii).

(iii) Utilizînd Prop.6, §2, Exp.IV, avem: $a_1 \not| \, o$ pe $M \Longrightarrow$

$\Longrightarrow H_j(a_1,\ldots,a_n|M) = H_j(a_2,\ldots,a_n|M/a_1M)$, $(\forall)$ j.

Comparînd cu Def.3, rezultă afirmaţia din enunţ.//

In legătură cu (iii), Prop.11, avem următorul rezultat general.

12. Propoziţie

Fie $(\xi_1,\ldots,\xi_d)$ un sistem de parametri pentru A-modulul noetherian M. Există $m > o$ un întreg, încît: $\xi_1$ nu divide zero pe $M/(\mathrm{Ann}_M \xi_1^m)$.

Demonstraţie

Avem şirul de submodule:

$$\mathrm{Ann}_M \xi_1 \subseteq \mathrm{Ann}_M \xi_1^2 \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Ann}_M \xi_1^h \subseteq \ldots$$

care staţionează de la un indice $m > o$, adică:

$$\mathrm{Ann}_M \xi_1^m = \mathrm{Ann}_M \xi_1^{m+1}$$

Dacă $\alpha \in M$ şi $\alpha \xi_1 \equiv o \pmod{\mathrm{Ann}_M \xi_1^m} \Longrightarrow \alpha \equiv o \pmod{\mathrm{Ann}_M \xi_1^m}$, ceea ce înseamnă exact faptul că $\xi_1 \not| \, o$ pe $M/\mathrm{Ann}_M(\xi_1^m)$ .//

Caracteristica euleriană are următoarea proprietate de anulare.

13. Propoziţie

Fie $(\xi_1,\ldots,\xi_d)$ un sistem de parametri pentru A-modulul M. Dacă există $j \in \{1,2,\ldots,d\}$ şi $m > o$, încît $\xi_j^m.M = o$, atunci $\chi_{\xi.}(M) = o$.

Demonstrație

Putem lua, evident, j = 1. Atunci $(\xi_1^m, \xi_2, \dots, \xi_d)$ rămîne sistem de parametri pentru M, deci putem presupune m = 1, adică: $\xi_1 . M = 0$.

Din (3), Prop.2, §2, Exp.IV, știm că are loc șirul exact:

$$0 \longrightarrow K.(\xi_2, \dots, \xi_d | M) \longrightarrow K.(\xi_1, \dots, \xi_d | M) \longrightarrow K.^{(-1)}(\xi_2, \dots, \xi_d | M) \to 0$$

deci șirul exact lung de omologie

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H_j(\xi_2, \dots, \xi_d | M) \longrightarrow H_j(\xi_1, \dots, \xi_d | M) \longrightarrow H_{j-1}(\xi_2, \dots, \xi_d | M) \xrightarrow{\Delta}$$

$$\xrightarrow{\Delta} H_{j-1}(\xi_2, \dots, \xi_d | M) \longrightarrow \dots$$

morfismul de conexiune $\Delta$ fiind dat de multiplicarea cu $\xi_1$.

Cum $\xi_1 \cdot M = 0$, rezultă $\Delta = 0$, deci avem șirurile exacte:

$$0 \to H_j(\xi_2, \dots, \xi_d | M) \longrightarrow H_j(\xi_1, \dots, \xi_d | M) \longrightarrow H_{j-1}(\xi_2, \dots, \xi_d | M) \longrightarrow 0,$$

deci

$$(\times)\ long_A(H_j(\xi_1, \dots, \xi_d | M)) = long_A(H_j(\xi_2, \dots, \xi_d | M)) + {} + long_A\, H_{j-1}(\xi_2, \dots, \xi_d | M), \quad \text{pentru orice } j.$$

Scriind suma alternată care dă $\chi_{\xi.}(M)$, obținem:

$$\chi_{\xi.}(M) = \sum_{j=0}^{d} (-1)^j long_A\, H_j(\xi_1, \dots, \xi_d | M) = (\text{din } (\times)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{d} (-1)^j long_A\, H_j(\xi_2, \dots, \xi_d | M) + \sum_{j=0}^{d} (-1)^j long_A\, H_{j-1}(\xi_2, \dots, \xi_d | M) =$$

$$= \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j long_A\, H_j(\xi_2, \dots, \xi_d | M) - \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k long_A\, H_k(\xi_2, \dots, \xi_d | M) =$$

$$= 0 //$$

14. Propoziție

Fie $(\xi_1, \dots, \xi_d)$ un sistem de parametri pentru modulul noetherian M. Atunci există un A-modul noetherian N, cu următoarele proprietăți:

(a) $(\xi_1,\ldots,\xi_d)$ este sistem de parametri pentru N

(b) $\xi_1$ nu divide zero pe N

(c) $\chi_{\xi_\cdot}(M) = \chi_{\xi_\cdot}(N) = \chi_{(\xi_2,\ldots,\xi_d)}(N/\xi_1 N)$

Demonstrație

Luăm $N = M/(\mathrm{Ann}_M \xi_1^m)$, unde $m>0$ este dat în Prop.12.
Atunci $\xi_1 \nmid 0$ pe N (cf.Prop.12) și, din șirul exact:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ann}_M \xi_1^m \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

împreună cu Prop.11, (ii), vedem că:

$$\chi_{\xi_\cdot}(M) = \chi_{\xi_\cdot}(N) + \chi_{\xi_\cdot}(\mathrm{Ann}_M \xi_1^m) = (\text{din Prop.13} = \chi_{\xi_\cdot}(N).$$

Ultima egalitate din (c), rezultă din (b) și (iii), Prop.11.//

In continuare, reamintim noțiunea de "multiplicitate" a unui modul. Fie M un A-modul noetherian și $\underline{a} \subsetneq \underline{m}$ un"ideal de definiție" pentru M (i.e. $\mathrm{long}_A M/_{\underline{a}M} < \infty$).

OBSERVAȚIE

Pentru orice sistem de parametri $\xi_\cdot = (\xi_1,\ldots,\xi_d)$ pentru M idealul $\underline{\xi_\cdot}$ este ideal de definiție al lui M.
Atunci, pentru orice întreg $i \geq 0$, $\mathrm{long}_A(M/_{\underline{a}^i M}) < \infty$.
Funcția numerică: $i \longmapsto \mathrm{long}_A(M/_{\underline{a}^i M})$ are proprietatea importantă de a fi "polinomială" (deoarece șirul diferențelor ei succesive este nul, dd la un rang încolo).
Aceasta înseamnă că există un polinom $P_{\underline{a}}^M(X) \in \mathbb{Q}[X]$, cu proprietatea: $P_{\underline{a}}^M(i) = \mathrm{long}_A(M/_{\underline{a}^i M})$, $(\forall)\ i \geq 0$.
Teorema principală a teoriei dimensiunii inelelor locale noetheriene afirmă că:

$$\deg P_{\underline{a}}^M(X) = \dim M \ (= \dim A/_{\mathrm{Ann}\, M}),$$

pentru orice ideal de definiție $\underline{a}$ al lui M (cf.A.Lascu, Alg.locală).

In baza combinatorială $\left\{ \binom{X}{i} / i \geq 0 \right\}$ a lui $\mathbb{Q}[X]$, $P_{\underline{a}}^{M}(X)$ se poate scrie:

$$P_{\underline{a}}^{M}(X) = e_d \binom{X}{d} + e_{d-1} \binom{X}{d-1} + \dots + e_1 \binom{X}{1} + e_0 ,$$

unde $e_d, e_{d-1}, \dots, e_1, e_0 \in \mathbb{Z}$ (întrucît $P_{\underline{a}}^{M}(i) \in \mathbb{N}, (\forall)\ i \geq 0$), cu $d = \dim M$.

4. Definiţie

Intregul $e_d$ (coeficientul conducător al lui $P_{\underline{a}}^{M}(X)$) se numeşte "multiplicitatea lui M în a" şi se notează cu $e_{\underline{a}}(M)$.

Intregul $e_{\underline{a}}(M)$ are următoarele proprietăţi.

15. Propoziţie

Fie M un A-modul noetherian şi a un ideal de definiţie al lui M. Atunci:

(i) dacă $\underline{a} = 0$, $e_{\underline{a}}(M) = \mathrm{long}_A(M)$

(ii) $e_{\underline{a}}(\ )$ este o functie aditivă pe subcategoria modulelor noetheriene care admit pe a drept ideal de definiţie.

(iii) dacă $\underline{a} = (\xi_1, \dots, \xi_d)$, $d = \dim M$ şi $\xi_1$ nu divide zero pe M, atunci:

$$e_{(\xi_1, \dots, \xi_d)}(M) = e_{(\xi_2, \dots, \xi_d)}(M/\xi_1 M) .$$

Demonstratie.

(i) Dacă $\underline{a} = 0$, atunci $\underline{a}^i = (0)$, $(\forall)\ i \geq 0$, deci $\mathrm{long}_A(M/\underline{a}^i M) = \mathrm{long}_A(M/(0)) = \mathrm{long}_A(M)$, i.e. $i \longmapsto \mathrm{long}_A(M/\underline{a}^i M)$ este funcţia constantă: $i \longmapsto \mathrm{long}_A M$, deci $P_{\underline{a}}^{M}(X)$ este polinom constant. Cum $P_{\underline{a}}^{M}(0) = \mathrm{long}_A(M)$, rezultă din Def.4 că $e_{\underline{a}}(M) = \mathrm{long}_A(M)$.

(ii) Fie $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ un şir exact de module, pentru care $\underline{a}$ este ideal de definiţie. Se arată atunci că: $P_{\underline{a}}^{M}(X) + Q(X) \doteq P_{\underline{a}}^{M'}(X) = P_{\underline{a}}^{M''}(X)$, unde $Q(X)$ este un polinom de grad $\leq d-1$ (cf. Serre, Multiplicités sau A. Lascu, Alg. locală. De aici rezultă afirmaţia din enunţ.

(iii) Fie $M' = M/\xi_1 M$, $\underline{b} = (\xi_2, \dots, \xi_d)M$. Atunci $\underline{b}$ este ideal de definiţie, pentru $M'$, căci $\xi_1 \nmid 0$ pe $M$. Pentru orice $i>0$, avem:

$(\alpha)$ $\underline{a}^i M = \xi_1 \cdot \underline{a}^{i-1} M + \underline{b} M$.

Considerăm şirul exact:

$$(\beta) \qquad 0 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to M/\underline{a}^i M \xrightarrow{\varphi} M'/\underline{b}^i M' \to 0,$$

unde $\varphi : M/\underline{a}^i M \to M'/\underline{b}^i M$ este omomorfismul canonic de reducere modulo $\xi_1$.

Din definiţia lui $M'$, vedem că:

$$M'/\underline{b}^i M' = (M/\xi_1 M)/\underline{b}^i(M/\xi_1 M) = M/\xi_1 M + \underline{b}^i M,$$

deci vom avea, succesiv:

$$\ker\varphi = (M/\underline{a}^i M)/(M/\xi_1 M + \underline{b}^i M) = (\text{cf.}(\alpha)) =$$

$$= \frac{\xi_1 M + \underline{b}^i M}{\xi_1 N + \underline{b}^i M}, \text{ cu } N = \underline{a}^{i-1} M.$$

Din teoremele de izomorfism rezultă:

$$\ker\varphi = \xi_1 M/\xi_1 N + (\xi_1 M \cap \underline{b}^i M)$$

Avem însă şirul exact:

$$0 \to \frac{\xi_1 N + (\xi_1 M \cap \underline{b}^i M)}{\xi_1 N} \to \frac{\xi_1 M}{\xi_1 N} \to \xi_1 M/\xi_1 N + (\xi_1 M \cap \underline{b}^i M) \to 0$$

Cum $\xi_1 \nmid 0$ pe $M$, obţinem: $\dfrac{\xi_1 M}{\xi_1 N} = \dfrac{M}{N} = M/\underline{a}^{i-1} M$, iar,

iar pe de altă parte:

$$\frac{\xi_1 N + (\xi_1 M + \underline{b}^i M)}{\xi_1 N} = \frac{\xi_1 M \cap \underline{b}^i M}{\xi_1 N \cap \underline{b}^i M} \overset{not}{=} P$$

Aşadar, avem şirul exact:

$$(\gamma) \qquad 0 \longrightarrow P \longrightarrow M/_{\underline{a}}{}^{i-1}{}_M \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow 0$$

Evident, P este anulat de $\underline{a}^{i-1}$, deci long $_A(P/_{\underline{a}}j) = 0$, pentru $j \geqslant i-1$, deci funcţia $j \longmapsto \text{long}(P/_{\underline{a}}j)$ dă un polinom de grad zero.

Din şirurile exacte ($\beta$) şi ($\gamma$) deducem, atunci:

$$\text{long}_A(M'/_{\underline{b}}{}^i{}_{M'}) + \text{long}_A(\ker \varphi) = \text{long}_A(M/_{\underline{a}}{}^i{}_M)$$

respectiv

$$\text{long}_A(\ker \varphi) + \text{long}_A(P) = \text{long}_A(M/_{\underline{a}}{}^{i-1}{}_M),$$ ceea ce duce la:

$$(\delta) \qquad P^{M'}_{\underline{b}}(i) = P^M_{\underline{a}}(i) - P^M_{\underline{a}}(i-1) + \text{long}_A(P)$$

Utilizînd faptul că P este artinian, definiţia 4 şi observaţia că, pentru orice polinom $P(X) = \sum_{j=0}^{d} e_j \binom{X}{j}$, avem:

$P(X) - P(X-1) = e_d \binom{X-1}{d-1} + \ldots$ , obţinem din ($\delta$) relaţia dorită, prin identificarea coeficienţilor conducători ai polinoamelor respective.//

Următoarea proprietate a multiplicităţii se poate arăta utilizînd tehnica de la Prop.15, împreună cu Prop.12,13 şi 14, de mai sus.

<u>16. Propozitie</u>

<u>Fie ($\xi_1, \ldots, \xi_d$) un sistem de parametri pentru A-modulul noetherian M.</u>

<u>Atunci, există un A-modul noetherian N, cu următoarele proprietăţi:</u>

(a) $(\xi_1,\dots,\xi_d)$ este sistem de parametri pentru N

(b) $\xi_1$ nu divide zero pe N

(c) $e_{(\xi_1,\dots,\xi_d)}(M) = e_{(\xi_2,\dots,\xi_d)}(N/\xi_1 N)$

Demonstrația acestei propoziții este lăsată ca exercițiu (menționăm că N poate fi luat ca în Prop.14 de mai sus).

Sîntem acum în măsură să formulăm următoarea

3. Teoremă

Fie M un A-modul noetherian și $(\xi_1,\dots,\xi_d)$ un sistem de parametri pentru M. Atunci:

$$e_{\xi.}(M) = \chi_{\xi.}(M)$$

Demonstrație.

$e_{\xi.}(\ )$ și $\chi_{\xi.}(\ )$ sînt funcții aditive pe clasa modulelor noetheriene care admit $\xi.$ ca ideal de definiție.

Ele coincid cu funcția $\mathrm{long}_A(\ )$, cînd $\xi. = (o)$ și, în plus, verifică proprietățile din Prop.14 și Prop.16.

Inductiv, după d, rezultă atunci că ele coincid pe clasa modulelor ce admit $\xi.$ ca ideal de definiție.//

7. Corolar

In situația din Teorema 3, dacă M este Cohen-Macaulay, atunci:

$$e_{\xi.}(M) = \mathrm{long}_A(M/_{\xi.}M),$$

pentru orice sistem de parametri $\xi. = (\xi_1,\dots,\xi_d)$ ai lui M.

Demonstrație

In adevăr, atunci $\xi.$ este chiar un M-șir, deci complexul $K.(\xi.|M)$ este aciclic (cf.Prop.11,§4,Exp.IV), adică:

$$\chi_{\xi.}(M) = \mathrm{long}_A(H_o(\xi.|M)) = \mathrm{long}_A(M/_{\xi.}M)//$$

## §4. SINTEZA REZULTATELOR

Vom sintetiza, acum, rezultatele privind omologia Koszul a unui inel local noetherian.

Fie $(A, \underline{m}, k)$ un inel local noetherian, $n = \operatorname{edim} A$, $d = \dim A$. Fie $K_{\bullet}(A)$ algebra diferenţială Koszul a lui $A$, construită peste un sistem minimal arbitrar de generatori ai idealului maximal $\underline{m}$. Notăm prin $H(A) = H(K_{\bullet}(A))$ algebra de omologie a lui $K_{\bullet}(A)$. Din cele demonstrate anterior, rezultă următoarele proprietăţi ale algebrei $H(A)$:

(I) H(A) este o k-algebră diferenţială graduată. Această k-algebră este un invariant omologic al inelului A.
Componentele lui $H(A)$ sînt nule în grade $j < 0$ şi $j > n$, iar
$H_0(A) = k$, $H_n(A) = \operatorname{Ann}_A(\underline{m})$.

Această proprietate este imediată, pe baza rezultatelor Exp.V, ultima afirmaţie rezultînd din Prop.7, §3, Exp.IV.

(II) A este inel local regulat $\Longleftrightarrow H(A) = \widetilde{H_0(A)} = \widetilde{k}$.

Această proprietate, cunoscută în literatură sub numele de "teorema Auslander-Buchsbaum" (forma prezentată aici provine de la Serre), a fost demonstrată la Exp.IV, §5, Prop.15.
Conform Prop.11, §4, Exp.IV, afirmaţia (I)) este încă echivalentă cu:

$$H_1(A) = 0$$

In acest caz, $K_{\bullet}(A)$ este o algebră diferenţială liberă aciclică, deci complexul augmentat canonic:

$$K_{\bullet}(A) \xrightarrow{\varepsilon} k \longrightarrow 0$$

constituie o rezoluţie liberă minimală a lui $k$ peste $A$, deci seria Poincaré a inelului local regulat $A$ este:

$$P_A(Z) = (1+Z)^n \quad , \; n = \text{edim}\, A = \dim A$$

(cf.(1o), §2, Exp.V).

OBSERVATIE

Seria Hilbert a graduatului lui A în raport cu $\underline{m}$, i.e.

$$H_A(Z) = \sum_{i \geq o} (\dim_k \underline{m}^i/\underline{m}^{i+1}) Z^i$$

se numește "seria Hilbert a lui A".

Datorită noetherianității lui A, $H_A(Z)$ este mereu rațională, avînd reprezentarea:

$$H_A(Z) = \frac{r_A(Z)}{(1-Z)^n} \quad , \; n = \text{edim} A \;\; \text{și} \;\; r_A(Z) \in \mathbb{Z}[Z] \, .$$

In general, această reprezentare a lui $H_A(Z)$ nu este cea ireductibilă. Sub formă ireductibilă, $H_A(Z)$ se scrie:

$$H_A(Z) = \frac{p_A(Z)}{(1-Z)^d} \quad , \; \text{cu } d = \dim A, \quad p_A(Z) \in \mathbb{Z}[Z]$$

și $p_A(1) \neq 0$ (încît dim A = ordinul polului z=1 al lui $H_A(Z)$).

(Polinomul $p_A(Z)$ este un izomorfism important al lui A. El verifică: $p_A(o) = 1$, $p_A(1) = e_{\underline{m}}(A) = e(A)$ (multiplicitatea lui A), deg $p_A(Z)$= înălțimea graduării lui $gr_{\underline{m}}(A)$; cînd A este Cohen-Macaulay, coeficientul conducător al lui $p_A(Z)$ este chiar tipul: type (A). Dacă, în plus, $gr_{\underline{m}} A$ este integru, atunci A este Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $p_A(Z)$ este polinom reciproc).

In cazul cînd A este regulat, $gr_{\underline{m}}(A) \cong k[Y_1, \ldots, Y_n]$, $n$ = edim A = dim A, deci $H_A(Z) = (1-Z)^{-n}$.

Comparînd cu expresia de mai sus a lui $P_A(Z)$, vedem că

$$A \text{ regulat} \Longrightarrow P_A(-Z) \cdot H_A(Z) = 1$$

Un inel local verificînd această ultimă relaţie, se numeşte "inel Fröberg", încît putem spune: "orice inel-local regulat este inel Fröberg". Omologia, proprietatea unui inel local A de a fi Fröberg, revine la liniaritatea rezoluţiei minimale a lui k peste A. Se cunosc şi alte clase de inele Fröberg (cf. Fröberg, Backelin, Manolache, Bărcănescu) şi, actualmente, există caracterizări satisfăcătoare ale acestei clase de inele.//

(III) A este intersecţie completă $\Longleftrightarrow H(A) = \wedge.(H_1(A))$

(unde $\wedge.$ denotă functorul "algebră exterioară" peste k).
Această proprietate, cunoscută în literatură sub numele de "teorema Assmus-Tate" a fost demonstrată la §1, Th.1, în cadrul acestei expuneri.
In acest caz, o rezoluţie minimală a lui k peste A este furnizată de algebra diferenţială graduată:

$$L.(A) = K.(A)\langle Z_1,\dots,Z_q\rangle \;;dZ_j = \zeta_j,\ \deg Z_j = 2,$$

construită la (9), §1 (mai sus), $q = n-d$, cu $n = \operatorname{edim} A$ şi $d = \dim A$.
Rezultă aşadar că seria Poincaré a intersecţiei complete A, este:

$$P_A(Z) = \frac{(1+Z)^n}{(1-Z^2)^{n-d}}$$

(cf.(14), 2.2. §2, Exp.V).

OBSERVATIE

Pentru orice inel local noetherian $(A, \underline{m}, k)$, Tate a demonstrat că, pentru orice rezoluţie liberă minimală (de tip finit) $\mathcal{R}.$ a lui k peste A, are loc scufundarea de algebre diferenţiale graduate:

$$K.(A) \hookrightarrow \mathcal{R}.$$

Dacă notăm cu $\mathcal{G}.(A)$ algebra diferențială graduată obținută "rezolvînd global" pe $K.(A)$ (i.e. adjuncționînd variabile (de grad par) care anulează "dintr-o dată" $H_+(A)$), ceea ce se poate scrie:

$$\mathcal{G}.(A) = K.(A) \langle H_+(A) \rangle \ ; \ d(H_+(A)) = 0$$

(sub o formă intuitivă), se poate arăta că are loc scufundarea de algebre diferențiale graduate:

$$K.(A) \hookrightarrow \mathcal{R}. \hookrightarrow \mathcal{G}.(A)$$

Trecînd la seriile Poincaré, se obține pentru orice inel local A, șirul de inegalități (coeficient cu coeficient):

$$P_A(K.(A)) = (1+Z)^n \leqslant P_A(Z) \leqslant P_{\mathcal{G}.(A)}(Z) = \frac{(1+Z)^n}{1-Z\left[P_{(A)}(Z) - 1\right]}$$

unde $P_{H(A)}(Z) = \sum_{j=o}^{n-d} (\dim_k H_j(A))\, Z^j$, cu $n = \text{edim } A$, $d = \dim A$.

Cînd $\mathcal{R}. = \mathcal{G}.(A) \Longleftrightarrow P_A(Z) = \dfrac{(1+Z)^n}{1-Z\left[P_{H(A)}(Z)-1\right]}$, inelul local A se numește "<u>inel Golod</u>".

Din expresia de mai sus a lui $P_A(Z)$, cînd A este intersecție completă, vedem ușor că: <u>intersectiile complete nu sînt inele Golod.</u>

(IV) <u>A este Gorenstein $\Longleftrightarrow$ H(A) este algebră Poincaré</u>. Această proprietate, cunoscută în literatură sub numele de "<u>teorema Avramov-Golod</u>", a fost demonstrată la §2 (Th.2) de mai sus.

Aceasta revine la <u>autodualitatea</u> algebrei H(A), care, în structura graduată a acestei algebre, se reflectă în următoarele proprietăți:

(a) $H_j(A) = 0$, pentru $j < o$ sau $j > n-d$ $\quad (n = \text{edim } A,\ d = \dim A)$

(b) $H_j(A) \cong H_{n-d-j}(A)^o \cong H_{n-d-j}$, pentru $o \leq j \leqslant n-d$,

izomorfismul fiind dat de multiplicarea algebrei H(A).

In particular, rezultă din (b): $H_{n-d}(A) = H_o(A) = k$.

OBSERVAȚIE

Se vede ușor că inelele locale Gorenstein nu sînt inele Golod.//

Nu se cunoaște, încă, o formă "generală" a rezoluției minimale a lui k peste A, cînd A este Gorenstein, deci nici o formă "generală" a expresiei seriei Poincaré a acestor inele.

(V) A este Cohen-Macaulay $\Longleftrightarrow H_j(A) = 0$, pentru $j > n-d$

$(n = \text{edim } A,\ d = \dim A)$.

(Această proprietate nu are o paternitate cunoscută. Ea a fost demonstrată în mai multe lucrări de algebră comutativă, circulînd deja în "folclorul" anilor '5o).

Proprietatea (V) a fost demonstrată aici la Exp.IV, §5 (Prop.16).

Se poate arăta, în acest caz, că tipul inelului Cohen-Macaulay A, este:

$$\text{type } (A) = \dim_k H_{n-d}(A) ,$$

ceea ce precizează rezultatul anterior (IV), care implică type (A) = 1 în cazul Gorenstein.

Din caracterizările de mai sus ale inelelor locale noetheriene, prin intermediul algebrei de omologie a complexului Koszul respectiv, rezultă ușor șirul de implicații (pentru A = inel local noetherian):

A regulat $\Longrightarrow$ A intersecție completă $\Longrightarrow$ A Gorenstein $\Longrightarrow$ A Cohen Macaulay

Clasa "următoare" de inele locale noetheriene este aceea a "inelelor Buchsbaum", introduse de Schenzel și Vogel.

Reamintim că un A-modul noetherian M se zice "Buchsbaum" dacă, pentru orice sistem de parametri $\xi_\cdot = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ ai lui M, diferenţa:

$$c(M) = e_{\xi.}(M) - \text{long}_A(M/\xi.M)$$

este un invariant al lui M.

Cum $c(M) = 0$ pentru M Cohen-Macaulay (cf.Cor.7, §3), implicaţia: "M Cohen-Macaulay $\Rightarrow$ M Buchsbaum" devine clară.

(VI) <u>Fie $\xi. = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ un sistem de parametri ai inelului A.</u>

Atunci:

$$\underline{e_{\xi.}(A) = \chi\,(H(\xi.|A))}$$

(unde $e_{\xi.}(A)$ denotă multiplicitatea lui A în $\xi.$ şi $\chi\,(H(\xi.|A))$ denotă caracteristica euleriană a omologiei algebrei Koszul $K.(\xi.|A)$).

Această proprietate a fost demonstrată la §3 (Th.3) de mai sus.

Să remarcăm că, aici, $K.(\xi.|A)$ <u>nu este</u> algebra Koszul standard a lui A, deoarece $K.(A)$ este construită peste un <u>sistem minimal de generatori</u> ai lui $\underline{m}_A$, pe cînd $K.(\xi.|A)$ este construită pe un <u>sistem de parametri</u> ai lui A.

BIBLIOGRAFIE

[1]. T. ALBU - Complexul Cousin al unui modul cu aplicaţii la caracterizarea unor clase de inele comutative, Univ. "Al.I.Cuza" Iaşi, Fac. de Mat., Seminar de Alg., Inele şi module Cohen-Macaulay, 1986.

[2]. E. ASSMUS - On the homology of local rings, Ill.J.Math., 3 , p.187-199, 1959.

[3]. L.AVRAMOV, S. GOLOD - Algebre de omologie a complexului Koszul al unui inel Gorenstein, Mat.Zametki, 1971.

[4]. N. BOURBAKI - Alg.Comm., Hermaron, Paris, 1971.

[5]. - " - - Alg., Ch.1o, Alg.homol., Masson Paris, 198o.

[6]. D. NORTHCOTT - Lessons on Rings, Modules and Multiplicities, Cambridge Univ.Press, 1968.

[7]. - " - - Finite Free Resolutions, Cambridge Univ.Press,1976.

[8]. N. RADU - Inele locale (vol.I,II) Bucureşti, Editura Acad.RSR, 1968-197o.

[9]. J.P.SERRE - Algebre locale. Multiplicites Lect.Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, vol.11, 1965.

[1o]. J.TATE - Homology of Noetherian rings and local rings, Ill. J.Math., 1, p.14-27, 1957.