INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

# UTILIZAREA METODEI OMOGENIZARII IN MECANICA MATERIALELOR COMPOZITE

de

Horia I.ENE

SEMINARIILE INCREST, Nr.2/1983



BUCURESTI

Horia I. ENE

# UTILIZAREA METODEI OMOGENIZARII IN MECANICA MATERIALELOR COMPOZITE

Prezentul material reprezintă expunerile făcute de autor în cadrul seminarului de "Materiale compozite" condus de către Prof.Dr.Doc.N.Cristescu şi Dr.E.Soós.

De un real folos în redactarea acestor rezultate au fost însă şi expunerile făcute în cadrul seminarului de "Teoria omogenizării" care funcţionează la Secţia de Matematică INCREST de aproape 5 ani de zile. In cadrul acestui seminar numeroase aspecte legate de detalii de demonstraţii, exemple sugestive ş.a. au fost elucidate de către tinerii cercetători Gelu Paşa, Dan Poligevschi şi Bogdan Vernescu, cărora pe această cale ţin să le mulţumesc pentru întreaga activitate depusă. Unele detalii care apar în prezenta lucrare şi care nu au mai fost publicate le aparţin lor ca şi lui Ileana Călugăreanu care a avut ideea abordării problemei din §10.

In mod special doresc să mulţumesc colegului Gelu Paşa care a citit cu atenţie manuscrisul prezentei lucrări şi a făcut numeroase sugestii şi observaţii.

# C U P R I N S

# UTILIZAREA METODEI OMOGENIZARII IN MECANICA MATERIALELOR COMPOZITE

## 1. INTRODUCERE

Metoda omogenizării revine la studiul asimptotic al unor medii cu o structură periodică,sau mai precis la studiul problemelor la limită în astfel de medii.

Dacă dimensiunile perioadei sînt mici în comparaţie cu mărimea domeniului în care studiem problema la limită,atunci apare naturală introducerea unui parametru mic $\varepsilon$, definit în general ca raportul dintre dimensiunea perioadei şi dimensiunea corpului, în raport cu care vom încerca să obţinem o dezvoltare asimptotică a soluţiei. Aceasta revine la a descrie trecerea de la studiul local sau microscopic al fenomenului (în cazul compozitilor studiul stării de tensiune şi deplasare într-o celulă) la studiul global sau macroscopic (în cazul compoziţilor studiul stării de tensiune şi deplasare în tot materialul).

Din punct de vedere matematic aceasta revine la a ne da o familie de operatori $A^{\varepsilon}$, care depind de un parametru mic $\varepsilon$, ai căror coeficienţi sînt funcţii periodice în variabilele spaţiale. In domeniul $\Omega$ vom avea o problemă la limită:

$$A^{\varepsilon}u^{\varepsilon} = f \quad \text{în} \quad \Omega \tag{1.1}$$

cu $u^{\varepsilon}$ supus la condiţii la limită adecvate. Problema este apoi de a obţine, dacă este posibil, pentru $u^{\varepsilon}$ o dezvoltare

$$u^{\varepsilon} = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \tag{2}$$

care în general este o dezvoltare asimptotică, sau cel puţin de a obţine pe $u_0$ şi o teoremă de convergenţă pentru $\varepsilon \to 0$.

Rezultatul standard al acestei metode este acela că $u_0$ satisface o ecuaţie de forma:

$$(3) \qquad \mathcal{A} u_0 = f \quad \text{în} \quad \Omega$$

cu condiţii la limită adecvate pentru $u_0$, şi că pentru $\varepsilon \to 0$ soluţia $u^\varepsilon$ a problemei (1) tinde către soluţia $u_0$ a problemei (3).

In (3) $\mathcal{A}$ este un operator cu coeficienţi simpli şi este numit <u>operatorul omogenizat.</u> Sensul acestei terminologii trebuie înţeles în felul următor: $u_0$ care satisface o ecuaţie cu coeficienţi simpli, aproximează soluţia $u^\varepsilon$ exactă, dar greu de obţinut. In felul acesta se trece la o descriere globală a fenomenului, dependenţa de structura microscopică fiind obţinută în calculul <u>coeficienţilor omogenizaţi</u>, sau <u>coeficienţi efectivi.</u>

In cele ce urmează vom prezenta pe scurt modul de construire a operatorului $\mathcal{A}$ şi al coeficienţilor omogenizaţi pentru ecuaţii de tip eliptic, parabolic şi hiperbolic. Vom enunţa de fiecare dată teoremele de convergenţă a soluţiei $u^\varepsilon$ către $u_0$, pentru $\varepsilon \to 0$, demonstraţia fiind reprodusă în Anexă.

In continuare se vor studia probleme de elasticitate a materialelor compozite, problema termoelastică, precum şi estimări ale coeficienţilor omogenizaţi. Mai multe exemple vor încheia această prezentare.

pentru detalii privind aspectele matematice ale acestei probleme ne mărginim să cităm cartea lui A.Bensoussan, J.-L.Lions şi G.Papanicolaou [1], iar pentru alte exemple de aplicare în mecanică, acustică, electromagnetism, ş.a. a acestei metode, cartea lui E.Sanchez-Palencia [2].

## 2. METODA OMOGENIZARII PENTRU ECUATII DE TIP ELIPTIC

Vom considera ecuaţia de forma:

$$(1)\qquad -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(x)\ ;\quad a_{ij}=a_{ji}$$

sau sub formă echivalentă:

$$(2)\qquad -\frac{\partial p_i}{\partial x_i}=f\ ;\ p_i=a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Dacă materialul ar fi omogen atunci $a_{ij}$ nu ar depinde de x. Dar pentru materiale neomogene, coeficienţii $a_{ij}$ sînt funcţii de x.

În cazul materialelor cu o structură periodică, cum este cazul materialelor compozite care conţin incluziuni într-o matrice, $a_{ij}(x)$ este o funcţie periodică de x. Dacă dimensiunile perioadei sînt mici în comparaţie cu dimensiunile întregului domeniu, atunci ne putem gînd că soluţia u a problemei (1) este aproximativ egală cu soluţia corespunzătoare unui material omogenizat în care coeficienţii $a_{ij}$ sînt constanţi.

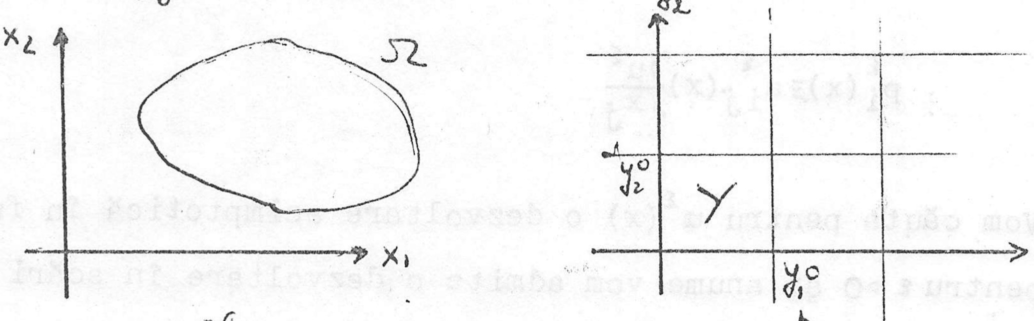



Fig.1

Fie $\Omega$ un domeniu din $R^3$ în coordonate $x_i$ (fig.1a). Vom considera în spaţiul $R^3$ al coordonatelor $y_i$ un paralelipiped de laturi $y_i^o$ (fig.1b) şi paralelipipedele obţinute prin translaţia $n_i y_i^o$ ($n_i$ întreg) în direcţiile axelor.

Vom considera funcţiile Y-periodice $a_{ij}(y)=a_{ji}(y)$ care verifică condiţia că $(\exists)\ \gamma>0$, astfel încît să avem

$a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geq \gamma\,\xi_i\xi_i$ pentru $(\forall)\ y\in Y,\ \xi\in R^3$.

Apoi definim funcţiile

$$a_{ij}^{\varepsilon}(x)=a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

unde $\varepsilon$ este un parametru real pozitiv. Se vede că funcţiile $a_{ij}^{\varepsilon}(x)$ sînt $\varepsilon Y$-periodice în variabila x ($\varepsilon Y$ este paralelipipedul de laturi $\varepsilon y_i^0$).

Atunci, dacă f(x) este o funcţie netedă dată, definită în $\Omega$, vom considera problema la limită

$$(3)\qquad -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^{\varepsilon}(x)\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right)=f(x)\ \text{ în } \Omega$$

$$(4)\qquad u^{\varepsilon}\Big|_{\partial\Omega}=0$$

Această problemă pentru $\varepsilon>0$ fixat admite o soluţie unică datorită condiţiei de elipticitate.

Analog cu (2) vom defini vectorul $p^{\varepsilon}$ de componente:

$$(5)\qquad p_i^{\varepsilon}(x)\equiv a_{ij}^{\varepsilon}(x)\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_j}$$

Vom căuta pentru $u^{\varepsilon}(x)$ o dezvoltare asimptotică în funcţie de $\varepsilon$, pentru $\varepsilon\to 0$ şi anume vom admite o dezvoltare în scări multiple de forma:

$$(6)\qquad u^{\varepsilon}(x)=u^0(x)+\varepsilon u^1(x,y)+\varepsilon^2u^2(x,y)\ \dots\ ;\ y=\frac{x}{\varepsilon}$$

unde $u^i(x,y)$ sînt Y-periodice în variabila y. In fapt, în acest fel, noi postulăm existenţa funcţiilor $u^i(x,y)$ definite pentru $x\in\Omega$, $y\in R^3$, independente de $\varepsilon$, Y-periodice în y şi astfel încît pentru $y=\frac{x}{\varepsilon}$ membrul drept al lui (6) să constituie o dezvoltare asimptotică pentru $u^{\varepsilon}(x)$. De fapt funcţiile $u^{i}(x,y)$ definite pe $\Omega \times R^{3}$, sînt astfel încît derivatele se comportă ca

$$\frac{d}{dx_i} \to \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}$$

In felul acesta dependenţa de x este şi directă şi prin intermediul variabilei y.

Pentru a înţelege semnificaţia fizică a dezvoltării (6) să considerăm $u^{i}(x,\frac{x}{\varepsilon})$ cu $\varepsilon$ mic. Este clar că dependenţa de variabila $\frac{x}{\varepsilon}$ este periodică cu perioada $\varepsilon Y$.

Dacă comparăm valorile lui $u^{i}(x,\frac{x}{\varepsilon})$ în două puncte $P_1$ şi $P_2$ (Fig.2) omoloage prin periodicitate în perioade vecine, se vede că dependenţa în $\frac{x}{\varepsilon}$ este aceeaşi, iar dependenţa în x este aproape aceeaşi deoarece distanţa $P_1P_2$ este mică, iar $u^{i}$ este o funcţie netedă.

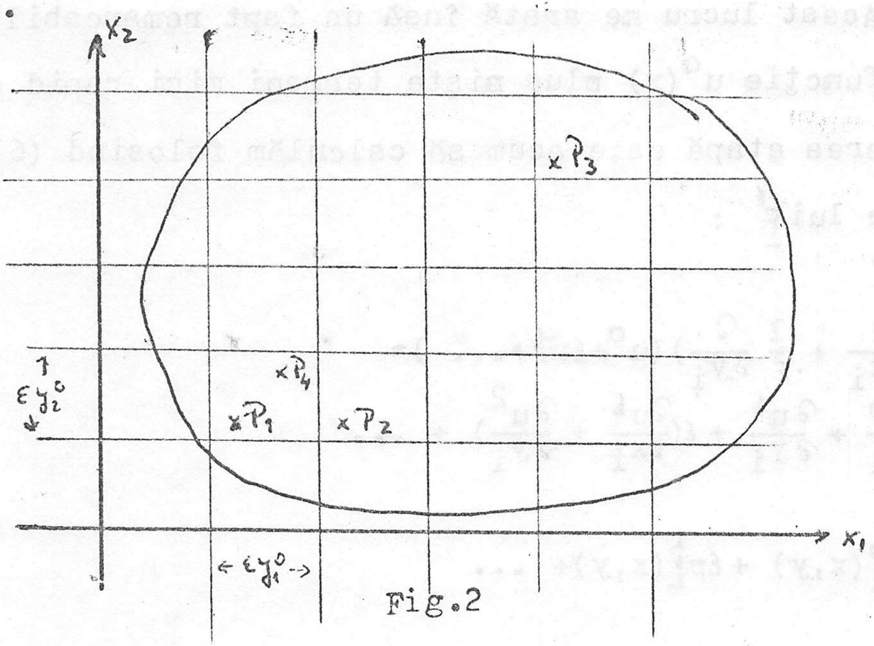



Fig.2

Pe de altă parte, fie $P_3$ punctul omolog lui $P_1$ prin periodicitate situat departe de $P_1$. Dependenţa lui $u^{i}$ în y este aceeaşi, dar dependenţa în x este foarte diferită deoarece $P_1$ şi $P_3$ nu mai sînt apropiate.

Să comparăm acum valorile lui $u^{i}$ în două puncte $P_1$ şi $P_4$ situate în aceeaşi perioadă. Dependenţa în x este aproape aceeaşi deoarece $P_1$ şi $P_4$ sînt foarte aproape, pe cînd dependenţa în y este foarte diferită deoarece $P_1$ şi $P_4$ nu sînt omoloage prin periodicitate. De fapt distanţa $P_1P_4$ este mare măsurată în variabila y.

Astfel de funcţii ne conduc de fapt la ideea de local periodicitate.

In fapt $u^{\varepsilon}$ va depinde de coeficienţii periodici $a_{ij}$, de f şi de frontiera $\partial\Omega$. Este deci natural să-l căutăm sub forma (6), depinzînd de x într-o formă periodică de perioadă $\varepsilon Y$ şi una neperiodică. In orice caz dezvoltarea (6) este valabilă departe de frontiera $\partial\Omega$ unde fenomenele aperiodice sînt preponderente.

Revenind la dezvoltarea (6) se observă că am presupus $u^o(x)$. Acest lucru nu este esenţial. Putem considera în general $u^o(x,y)$ şi din raţionamente simple se obţine că $u^o$ este constant în variabila y [1][2]. Acest lucru ne arată însă un fapt remarcabil: $u^{\varepsilon}(x)$ este o funcţie $u^o(x)$ plus nişte termeni mici rapid oscilanţi.

Următoarea etapă este acum să calculăm folosind (6) expresiile lui $\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_i}$ şi ale lui $p^{\varepsilon}$ :

$$(7)\quad \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)(u^o + \varepsilon u^1 + \dots) = \frac{\partial u^o}{\partial x_i} + \frac{\partial u^1}{\partial y_i} + \varepsilon\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_i} + \frac{\partial u^2}{\partial y_i}\right) + \dots$$

$$(8)\quad p_i^{\varepsilon}(x) = p_i^o(x,y) + \varepsilon p_i^1(x,y) + \dots$$

$$(9)\quad \begin{cases} p_i^o(x,y) = a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u^o}{\partial x_i} + \frac{\partial u^1}{\partial y_i}\right) \\ p_i^1(x,y) = a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_i} + \frac{\partial u^2}{\partial y_i}\right) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Acum ecuaţia (3) care are forma:

$$-\frac{\partial p_i^{\varepsilon}}{\partial x_i} = f(x)$$

se va scrie:

(10) $$\left(-\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)(p_i^o+\varepsilon p_i^1+\dots)=f(x)$$

Identificînd puterile succesive ale lui $\varepsilon$ în (10) vom avea, termenii de ordinul $\varepsilon^{-1}$:

(11) $$\frac{\partial p_i^o}{\partial y_i} = 0$$

şi de ordinul $\varepsilon^o$:

(12) $$-\frac{\partial p_i^o}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i^1}{\partial y_i} = f$$

Ecuaţia (11) se numeşte <u>ecuaţia locală</u> sau microscopică, iar ecuaţia (12) se numeşte <u>ecuaţia omogenizată</u> sau macroscopică. De fapt, ecuaţia (11) va conduce la calculul coeficienţilor omogenizaţi, în timp ce (12) ne va furniza ecuaţia omogenizată.

Pentru aceasta să introducem mai întîi <u>operatorul de medie</u>, definit pentru orice funcţie $\phi(y)$ Y-periodică:

(13) $$\tilde{\phi} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \phi(y)\,dy$$

unde $|Y|$ este măsura lui Y (volumul celulei de periodicitate). Este clar că $\tilde{\phi}$ nu va depinde de y, iar dacă $\phi$ este o funcţie şi de x atunci se vede că <u>operatorul de medie comută cu derivarea în raport cu x.</u>

Pentru a obţine ecuaţia omogenizată, vom aplica operatorul (13) ecuaţiei (12):

$$(14) \qquad -\frac{\partial \tilde{p}_i^o}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial p_i^1}{\partial y_i}\right)^{\sim} = f$$

unde am ţinut seama că $\tilde{f}=f$, deoarece $f(x)$. Să calculăm acum termenul al doilea din membrul drept al relaţiei (14):

$$\left(\frac{\partial p_i^1}{\partial y_i}\right)^{\sim} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \frac{\partial p_i^1}{\partial y_i}\,dy = \frac{1}{|Y|}\int_{\partial Y} p_i^1 n_i\,ds = 0$$

Egalitatea cu zero rezultă din Y-periodicitatea lui $p_i^1$ şi din faptul că $\underline{n}$ este vectorul normal la frontierea lui Y (deci în puncte omoloage $p_i^1$ ia valori egale, în timp ce $\underline{n}$ este de sens contrar).

Atunci rezultă că (14) este:

$$(15) \qquad -\frac{\partial \tilde{p}_i^o}{\partial x_i} = f(x)$$

Ecuaţia (15) este deci <u>ecuaţia macroscopică</u> sau <u>omogenizată</u>, şi se vede că forma ei este analoagă cu (2). Să notăm că $\tilde{p}_i^o$ este acum o funcţie numai de x. Dar noi nu ştim încă felul în care $\tilde{p}_i^o$ depinde de $u^o$. Această dependenţă se află studiind problema locală (11). Cu (9), (11) se scrie succesiv:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u^o}{\partial x_j} + \frac{\partial u^1}{\partial y_j}\right)\right] = 0$$

$$(16) \qquad -\frac{\partial}{\partial y_i}\left[a_{ij}(y)\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\right] = \frac{\partial u^o}{\partial x_j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}$$

Ecuaţia (16) va fi considerată ca o ecuaţie în necunoscuta $u^1(y)$, $u^o(x)$ fiind considerat cunoscut. Evident că şi $u^o$ şi $u^1$ depind de x, dar x va fi considerat ca un simplu parametru pentru problema (16) formulată în variabila y. În plus, noi căutăm soluţia $u^1(y)$, Y-periodică şi această condiţie ţine loc de condiţie la limită pentru problema (16). Deci (16) este tot o problemă la limită de tip eliptic, membrul drept fiind cunoscut. Inainte de a trece la rezolvarea efectivă a problemei (16), trebuie să fim siguri că aceasta admite o soluţie unică. Acest lucru ne este asigurat de următoarea

<u>Lemă.</u> Ecuaţia:

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}\right)=F;\ \varphi\quad Y\text{-periodică}$$

admite o soluţie unică (modulo o constantă aditivă) dacă

$$\int_Y F(y)dy = 0$$

Demonstraţia acestei leme se poate găsi în [1] [2].

Pentru ecuaţia (16) condiţia cerută de această lemă revine la

$$\int_Y \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}\,dy = 0$$

ceea ce este adevărat din Y-periodicitatea coeficienţilor $a_{ij}(y)$.

Acum, pentru determinarea efectivă a soluţiei, este necesară introducerea spaţiului (Anexa1):

$$V_Y=\{u\in H^1_{loc}(R^3);\ u\ \ Y\text{-periodic}\}$$

Atunci (16) este echivalentă cu următoarea problemă: să se găsească $u^1\in V_Y$ care verifică

$$(17)\qquad \int_Y a_{ij}(y)\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_i}\,dy=\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\int_Y\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}v\,dy$$

pentru $(\forall)\ v \in V_Y$.

Această echivalenţă se demonstrează uşor dacă înmulţim (16) cu o funcţie test $v \in V_Y$ şi integrăm în $Y$, se obţine (17), ţinînd cont de următorul calcul:

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\right) v\, dy + \int_Y a_{ij}\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_i}\, dy = \int_{\partial Y} n_i a_{ij}\frac{\partial u^1}{\partial y_j} v\, ds = 0$$

Reciproc, dacă $u^1$ satisface (12), folosind acelaşi calcul ca mai sus se obţine

$$\int_Y \left[\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\right) + \frac{\partial u^0}{\partial x_j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}\right] v\, dy = 0$$

pentru $(\forall)\ v \in V_Y$, ceea ce implică (16).

Mai departe dacă introducem $\chi^k$ soluţia unică a următoarei probleme: să se găsească $\chi^k \in V_Y$ cu $\tilde{\chi}^k = 0$, satisfăcînd

$$(18) \qquad \int_Y a_{ij}\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\frac{\partial v}{\partial y_i}\, dy = \int_Y \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_i} v\, dy$$

pentru $(\forall)\ v \in V_Y$, atunci din liniaritatea problemei (17) se vede că soluţia se scrie sub forma:

$$(19) \qquad u^1(x,y) = \frac{\partial u^0}{\partial x_k}\chi^k(y) + c(x)$$

unde $c(x)$ este o constantă aditivă (funcţie de parametrul $x$).

Odată aflată expresia lui $u^1$ în funcţie de $u^0$ se poate trece la calculul coeficienţilor omogenizaţi. Din (9) cu (19) avem:

$$p_i^o(x,y)=a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u^o}{\partial x_j}+\frac{\partial u^1}{\partial y_j}\right)=a_{ij}(y)\left(\frac{\partial u^o}{\partial x_j}+\frac{\partial u^o}{\partial x_k}\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\right)=$$

$$=\left[a_{ik}(y)+a_{ij}(y)\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\right]\frac{\partial u^o}{\partial x_k}$$

Aplicînd acum acestei relaţii operatorul de medie (13) avem:

(20) $$\tilde{p}_i^o(x)=a_{ik}^o\frac{\partial u^o}{\partial x_k}$$

(21) $$a_{ik}^o=\left[a_{ik}(y)+a_{ij}(y)\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\right]^{\sim}\equiv$$

$$\equiv\left[a_{ij}(y)\left(\delta_{jk}+\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\right)\right]^{\sim}\equiv$$

$$\equiv\tilde{a}_{ik}+\left[a_{ij}\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j}\right]^{\sim}$$

Acum (15) devine o ecuaţie în $u^o$ cu coeficienţi constanţi:

(22) $$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}^o\frac{\partial u^o}{\partial x_k}\right)=f$$

<u>Observaţia 2.1.</u> Coeficienţii omogenizaţi $a_{ik}^o$ daţi de (21) se vede că nu sînt numai simpla medie a coeficienţilor $a_{ik}$ ci mai au un termen aditiv care poate fi interpretat ca un corector.

<u>Observaţia 2.2.</u> Pentru coeficienţii omogenizaţi $a_{ik}^o$ se pot demonstra următoarele proprietăţi [1][2] :

$$a_{ik}^o=a_{ki}^o$$

$$a_{ik}^o\xi_i\xi_k\geq\gamma\,\xi_i\xi_i\ ,\quad \gamma>0\quad (\forall)\ \xi\in R^3$$

unde $\gamma$ este acelaşi cu cel din cazul coeficienţilor $a_{ij}$ .

Din (4) se observă că pentru ecuaţia (22) condiţia la limită este:

$$(23) \qquad u^0(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

In privința convergenței, există o teoremă [3] care afirmă că în ipotezele dinainte dacă $u^\varepsilon$ este soluția problemei (3)(4), iar $u^0$ este soluția problemei (22)(23) atunci pentru $\varepsilon \to 0$ $u^\varepsilon \to u^0$ slab în $H_0^1(\Omega)$ (demonstrația acestei teoreme este dată în Anexa 2).

In cele expuse mai înainte a fost tratată o problemă de tip Dirichlet. Considerațiile anterioare rămîn valabile și pentru problema Neumann următoare:

$$(24) \qquad -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^\varepsilon(x)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right) + a_0^\varepsilon(x)u^\varepsilon = f^\varepsilon(x) \quad \text{în } \Omega$$

$$(25) \qquad a_{ij}^\varepsilon(x)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}n_i = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega$$

unde $a_0^\varepsilon(x) = a_0(\frac{x}{\varepsilon})$ și $a_0(y)$ este o funcție Y-periodică cu $a_0(y) \geq \gamma$ pentru $y \in R^n$, iar $f^\varepsilon(x)$ este un șir de funcții cu proprietatea $f^\varepsilon(x) \to f^*$ slab în $L^2(\Omega)$. In aceste condiții se obține că pentru $\varepsilon \to 0$, $u^\varepsilon \to u^0$ slab în $H^1(\Omega)$ unde $u^0$ este soluția următoarei probleme Neumann:

$$(26) \qquad -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^0\frac{\partial u^0}{\partial x_j}\right) + \tilde{a}_0 u^0 = f^* \quad \text{în } \Omega$$

$$(27) \qquad a_{ij}^0\frac{\partial u^0}{\partial x_j}n_i = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega$$

<u>Observația 2.3.</u> Toate rezultatele anterioare rămîn valabile și pentru cazul coeficienților discontinui. Dacă avem un material compozit în care matricea ocupă domeniul $Y^1$ și are coeficientul $a_{ij}^1$, iar incluziunea domeniului $Y^2$ cu coeficientul $a_{ij}^2$ (Fig.3), separate de o suprafață netedă $\Gamma$.

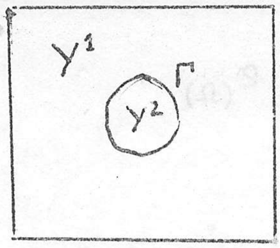



Fig.3

Im acest caz ecuaţiile (3) sau (26) trebuiesc înţelese în sens de distribuţii pentru

$$\left.\begin{array}{l}[u^\varepsilon] = 0 \\ \left[a_{ij}(y)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} n_i\right] = 0\end{array}\right\} \text{ pe } \Gamma$$

unde [ ] semnifică saltul la traversarea suprafeţei $\Gamma$, şi toate rezultatele anterioare se păstrează.

## 3. METODA OMOGENIZARII PENTRU ECUATII DE EVOLUTIE

In acest paragraf vom considera aceeaşi problemă pentru ecuaţia de tip parabolic şi hiperbolic. Avînd în vedere că procedeul de construire a operatorului omogenizat este acelaşi cu cel din §2, nu vom mai reface tot acest raţionament, ci ne vom mărgini să enunţăm rezultatele principale.

Să introducem operatorii:

$$A_\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$\mathcal{A} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^o_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

şi să considerăm o funcţie reală $\rho(y)$, netedă, Y-periodică, cu $\rho(y) \geq \gamma$, $\gamma > 0$, $(\forall)\ y \in Y$.

Fie $u^\varepsilon$ soluţia ecuaţiei parabolice

(1) $$\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + A_\varepsilon u^\varepsilon = f(x)$$

(2) $$u^\varepsilon\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

(3) $$u^{\varepsilon}(0)=u_0\in L^2(\Omega)$$

pentru $x\in\Omega$ şi $t\in[0,\infty)$.

Fie $u^0$ soluţia ecuaţiei omogenizate:

(4) $$\tilde{\rho}\frac{\partial u^0}{\partial t}+\mathcal{A}u^0=f$$

(5) $$u^0\Big|_{\partial\Omega}=0$$

(6) $$u^0(0)=u_0$$

pentru $x\in\Omega$ şi $t\in[0,\infty)$.

Atunci se poate demonstra că pentru $\varepsilon\to 0$, $u^{\varepsilon}\to u^0$ slab în $L^2(0,\infty;\ H_0^1(\Omega))$.

Pentru ecuaţii de tip hiperbolic să considerăm $u^{\varepsilon}$ soluţia ecuaţiei:

(7) $$\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}+A_{\varepsilon}u^{\varepsilon}=f(x)$$

(8) $$u^{\varepsilon}\Big|_{\partial\Omega}=0$$

(9) $$u^{\varepsilon}(0)=u_0\in H_0(\Omega);\quad u^{\varepsilon\prime}(0)=u_1\in L^2(\Omega)$$

pentru $x\in\Omega$ şi $t\in[0,\infty)$.

Analog cu problema parabolică, fie $u^0$ soluţia ecuaţiei:

(10) $$\tilde{\rho}\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}+\mathcal{A}u^0=f$$

(11) $$u^0\Big|_{\partial\Omega}=0$$

(12) $$u^0(0)=u_0\ ;\quad u^{0\prime}(0)=u_1$$

pentru $x\in\Omega$ şi $t\in[0,\infty)$.

In aceste condiţii se poate demonstra că $u^{\varepsilon}$ soluţia problemei (7)-(9) tinde slab în $L^{\infty}(0,\infty;H_0^1(\Omega))$ la $u^0$ soluţia problemei (10)-(12) şi $u^{\varepsilon\prime} \to u^{0\prime}$ slab în $L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$ pentru $\varepsilon \to 0$.

## 4. ELASTICITATEA MATERIALELOR COMPOZITE

In acest paragraf vom arăta cum se pot aplica consideraţiile anterioare la problema echilibrului elastic al unui material compozit. Fie $\Omega$ domeniul ocupat de materialul compozit, avînd o structură periodică analoagă celei descrisă în §2. Dacă vom nota cu $\sigma^{\varepsilon}_{ij}$ tensorul tensiunilor, $\underline{u}^{\varepsilon}$ vectorul deplasare, $f_i$ componentele vectorului forţă exterioară, atunci se consideră următoarea problemă mixtă:

$$\frac{\partial \sigma^{\varepsilon}_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x) = 0 \quad \text{în } \Omega \tag{1}$$

$$\underline{u}^{\varepsilon}\Big|_{\partial_1\Omega} = 0 \tag{2}$$

$$\sigma^{\varepsilon}_{ij}n_j\Big|_{\partial_2\Omega} = F_i(x) \tag{3}$$

$$\sigma^{\varepsilon}_{ij}(x) = a^{\varepsilon}_{ijkh}(x)e_{kh}(\underline{u}^{\varepsilon}) \tag{4}$$

$$a^{\varepsilon}_{ijkh}(x) \equiv a_{ijkh}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{5}$$

unde coeficienţii $a_{ijkh}(y)$ sînt Y-periodici şi verifică în plus:

$$a_{ijkh}=a_{jikh}=a_{ijhk}=a_{khij}$$

$$a_{ijkh}e_{ij}e_{kh} \geq \alpha e_{ij}e_{ij} \; ; \alpha > 0 \; (\forall) e_{ij}$$

Coeficienţii $a_{ijkh}$ trebuiesc înţeleşi în sensul observaţiei 2.3.

Analog cu raţionamentele din §2 ,pentru construirea ecuaţiei omogenizate sau macroscopice şi a legii constitutive macroscopice, vom considera dezvoltări asimptotice de forma:

(6) $$\underline{u}^{\varepsilon}(x)=\underline{u}^{0}(x)+\varepsilon\underline{u}^{1}(x,y)+\ldots$$

(7) $$e^{\varepsilon}_{ij}\equiv e_{ij}(\underline{u}^{\varepsilon})=e^{0}_{ij}(x,y)+\varepsilon e^{1}_{ij}(x,y)+\ldots$$

(8) $$\sigma^{\varepsilon}_{ij}=a_{ijkh}(y)e^{\varepsilon}_{kh}=\sigma^{0}_{ij}(x,y)+\varepsilon\sigma^{1}_{ij}(x,y)+\ldots$$

cu notaţiile evidente:

$$e_{ij}(\underline{v})\equiv e_{ijx}(\underline{v})+\frac{1}{\varepsilon}e_{ijy}(\underline{v})$$

$$e^{0}_{ij}(x,y)=e_{ijx}(\underline{u}^{0})+e_{ijy}(\underline{u}^{1})$$

$$e_{ijx}(\underline{v})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$e_{ijy}(\underline{v})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j}+\frac{\partial v_j}{\partial y_i}\right)$$

Toate funcţiile $u^{k}(x,y)$, $e^{k}_{ij}(x,y)$ şi $\sigma^{k}_{ij}(x,y)$ sînt Y-periodice în variabila y.

Introducînd dezvoltările (6)-(8) în ecuaţia (1) şi identificînd puterile succesive ale lui $\varepsilon$, vom obţine pentru termenii de ordinul $\varepsilon^{-1}$ ecuaţia:

(9) $$\frac{\partial\sigma^{0}_{ij}}{\partial y_j}=0$$

iar pentru termenii de ordinul $\varepsilon^{0}$:

(10) $$\frac{\partial\sigma^{1}_{ij}}{\partial y_j}+\frac{\partial\sigma^{0}_{ij}}{\partial x_j}+f_i=0$$

Să observăm că ecuaţiile (9) şi (10) sînt analoage cu ecuaţiile (2.11) şi (2.12). Ele vor furniza deci pentru problema elastică considerată ecuaţia locală şi respectiv ecuaţia omogenizată. In fond ecuaţia locală (9) ne va permite să calculăm matricea de elasticitate macroscopică sau omogenizată, iar ecuaţia (10) ne va furniza ecuaţia macroscopică a materialului compozit.

Dacă aplicăm operatorul de medie (2.13) ecuaţiei (10) se vede că avem:

$$(11) \qquad \frac{\partial \tilde{\sigma}^{o}_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

unde am ţinut seama de următorul calcul:

$$\widetilde{\left(\frac{\partial \sigma^{1}_{ij}}{\partial y_j}\right)} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \frac{\partial \sigma^{1}_{ij}}{\partial y_j}\,dy = \frac{1}{|Y|}\int_{\partial Y} \sigma^{1}_{ij} n_j\,ds = 0$$

Ecuaţia (11) este <u>ecuaţia macroscopică</u> a materialului compozit şi se observă că ea este analoagă cu ecuaţia (1).

Pentru a obţine legea constitutivă, vom introduce în (9) expresia lui $e^{o}_{ij}$ şi avem:

$$(12) \qquad -\frac{\partial}{\partial y_j}\left[a_{ijkh}(y)e_{khy}(\underline{u}^{1})\right] = e_{khx}(\underline{u}^{o})\,\frac{\partial a_{ijkh}}{\partial y_j}$$

cu condiţia de Y-periodicitate. Ecuaţia (12) trebuie înţeleasă ca o ecuaţie în necunoscuta $u^{1}$, funcţia $u^{o}$ fiind cunoscută. Analog cu §2, vom trece la formularea variaţională a problemei (12): să se găsească $\underline{u}^{1} \in V_y(Y)$ astfel încît pentru $(\forall)\ \underline{v} \in V_y(Y)$ să avem:

$$(13) \qquad \int_Y a_{ijkh}(y)e_{khy}(\underline{u}^{1})e_{ijy}(\underline{v})dy = e_{khx}(\underline{u}^{o})\int_Y \frac{\partial a_{ijkh}}{\partial y_j}\,v_i\,dy$$

Această problemă admite o soluţie unică datorită Y-periodicităţii coeficienţilor.

Notînd cu $\underline{w}^{kh} \in V_y(Y)$ soluţia problemei:

$$\int_Y a_{ijlm}(y)e_{lmy}(\underline{w}^{kh})e_{ijy}(\underline{v})dy = \int_Y \frac{\partial a_{ijkh}}{\partial y_j} v_i\,dy \quad (\forall)\ \underline{v} \in V_y$$

Mett 13/167

se vede că soluţia ecuaţiei (13) este

$$(14) \qquad u^1 = e_{khx}(\underline{u}^o)\,\underline{W}^{kh} + c(x)$$

Introducînd (14) în expresia lui $\sigma^o_{ij}$ se obţine

$$\sigma^o_{ij} = a_{ijlm}\left[e_{lmx}(\underline{u}^o) + e_{lmy}(\underline{u}^1)\right] =$$
$$= a_{ijlm}\left[\delta_{lk}\delta_{mh} + e_{lmy}(\underline{W}^{kh})\right]e_{khx}(\underline{u}^o)$$

de unde aplicînd operatorul de medie avem:

$$(15) \qquad \tilde{\sigma}^o_{ij} = a^o_{ijkh}e_{khx}(\underline{u}^o) \equiv a^o_{ijkh}\tilde{e}^o_{kh}$$

$$(16) \qquad a^o_{ikh} = \widetilde{\left\{a_{ijlm}\left[\delta_{lk}\delta_{mh} + e_{lmy}(\underline{W}^{kh})\right]\right\}}$$

Evident soluţia $u^o$ a ecuaţiei macroscopice (11) trebuie căutată cu condiţiile la limită mixte:

$$(17) \qquad \underline{u}^o\Big|_{\partial_1\Omega} = 0$$

$$(18) \qquad \tilde{\sigma}_{ij}n_j\Big|_{\partial_2\Omega} = F_i$$

Rezultatul de convergenţă în această problemă este următorul: dacă $\underline{u}^\varepsilon$ este soluţia problemei (1)-(5), iar $\underline{u}^o$ soluţia problemei (11) (15) (17)(18) atunci $\underline{u}^\varepsilon \to \underline{u}^o$ slab în $V = \{\underline{u};\ u_i \in H^1(\Omega),\ \underline{u}\big|_{\partial_1\Omega} = 0\}$.

<u>Observaţia 4.1.</u> Dacă în locul problemei (1)-(5) a echilibrului elastic, am fi formulat problema dinamică, deci cu ecuaţia

$$\frac{\partial \sigma^{\varepsilon}_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x) = \rho^{\varepsilon}(x)\,\frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon}}{\partial t^2}$$

atunci aplicînd rezultatele din paragraful 3 ecuaţia omogenizată sau macroscopică ar fi fost:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}^{o}_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x) = \tilde{\rho}\,\frac{\partial^2 u_i^{o}}{\partial t^2}$$

cu aceeaşi lege constitutivă şi aceeaşi expresie a coeficienţilor omogenizaţi.

## 5. O PROPRIETATE A MATRICII DE ELASTICITATE

In problema elastică tratată anterior am obţinut o formulă pentru calculul coeficienţilor omogenizaţi (4.16 ). Aceasta presupune pe de o parte cunoaşterea lui $\underline{w}^{kh}$ care este soluţia unei probleme la limită bine pusă, dar şi efectuarea unor medii pe volumul celulei de periodicitate. Vom demonstra în cele ce urmează că aceste medii de volum pot fi înlocuite cu medii pe suprafaţă, care în anumite cazuri pot fi mai uşor de calculat. Această observaţie a fost făcută sub o formă diferită de cea pe care o prezentă aici de către Th.Levy [4].

Fie egalitatea evidentă

$$(1)\quad \frac{1}{|Y|}\int_Y \frac{\partial}{\partial y_k}(\sigma^{o}_{ik} y_j)\,dy = \frac{1}{|Y|}\int_Y \frac{\partial \sigma^{o}_{ik}}{\partial y_k} y_j\,dy + \frac{1}{|Y|}\int_Y \delta_{jk}\sigma^{o}_{ik}\,dy$$

Se observă imediat că:

$$\frac{1}{|Y|}\int_Y \delta_{jk}\sigma^{o}_{ik}\,dy = \tilde{\sigma}^{o}_{ij}$$

Dacă (1) se poate rescrie sub forma:

$$(2)\quad \tilde{\sigma}^{o}_{ij} = \frac{1}{|Y|}\Big[\int_{Y} \sigma^{o}_{ik} y_j n_k ds - \int_{Y} \frac{\partial \sigma^{o}_{ik}}{\partial y_k} y_j ds\Big]$$

Din ecuaţia (4.9) se vede că avem:

$$\int_{Y} \frac{\partial \sigma^{o}_{ik}}{\partial y_k} y_j\, dy = 0$$

Urmează că în relaţia (2) mai rămîne de calculat prima integrală din membrul drept. Dacă notăm cu $\Sigma_k$ faţa paralelipipedului perpendiculară pe direcţia $y_k$, de cotă $a_k$, şi cu $\Sigma'_k$ faţa opusă lui $\Sigma_k$, atunci $\partial Y = \Sigma_1 \cup \Sigma'_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma'_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma'_3$.

Atunci:

$$\frac{1}{|Y|}\int_{\partial Y} \sigma^{o}_{ik} y_1 n_k ds = \frac{1}{|Y|}\Big[\int_{\Sigma_1} \sigma^{o}_{i1} a_1 dy_2 dy_3 - \int_{\Sigma'_1} \sigma^{o}_{i1}(-a_1) dy_2 dy_3 + \int_{\Sigma_2} \sigma^{o}_{i2} y_1 dy_1 dy_3 - \int_{\Sigma'_2} \sigma^{o}_{i2} y_1 dy_1 dy_3 + \int_{\Sigma_3} \sigma^{o}_{i3} y_1 dy_1 dy_2 - \int_{\Sigma'_3} \sigma^{o}_{i3} y_1 dy_1 dy_2\Big] = \frac{1}{|\Sigma_1|}\int_{\Sigma_1} \sigma^{o}_{i1} dy_2 dy_3$$

integralele pe celelalte feţe fiind zero datorită Y-periodicităţii.

Se vede deci că

$$(3)\quad \frac{1}{|Y|}\int_{\partial Y} \sigma^{o}_{ik} y_j n_k ds = \langle \sigma^{o}_{ij} \rangle = \frac{1}{|\Sigma_j|}\int_{\Sigma_j} \sigma^{o}_{ij} ds$$

unde notaţia $\langle\ \rangle$ este evidentă şi reprezintă media superficială pe una din feţele paralelipipedului.

În fond relaţia (2) a devenit:

$$(4)\quad \tilde{\sigma}^{o}_{ij} = \langle \sigma^{o}_{ij} \rangle$$

Noi ştim că (5.15):

$$\overset{\sim}{\sigma}^{o}_{ij}=a^{o}_{ijkh}e_{khx}(\underline{u}^{o})$$

$$a^{o}_{ijkh}=\widetilde{\left\{a_{ijlm}\left[\delta_{lk}\delta_{mh}+e_{lmy}(\underline{W}^{kh})\right]\right\}}$$

Dacă notăm

$$A_{ijkh}=a_{ijlm}\left[\delta_{lk}\delta_{mh}+e_{lmy}(\underline{W}^{kh})\right]$$

avem că $\sigma^{o}_{ij}=A_{ijkh}e_{khx}(\underline{u}^{o})$. Se vede că $\langle\sigma^{o}_{ij}\rangle=\langle A_{ijkh}\rangle e_{khx}(\underline{u}^{o})$

Rezultă în fond că (4) este echivalentă cu

$$(5)\qquad a^{o}_{ijkh}=\langle A_{ijkh}\rangle=\widetilde{A}_{ijkh}$$

Cu alte cuvinte coeficienţii omogenizaţi pot fi calculaţi sau ca medii pe volum sau ca medii pe una din feţele paralelipipedului.

## 6. TERMOELASTICITATEA MATERIALELOR COMPOZITE

Vom considera în cele ce urmează o structură periodică de forma celei definite în §4, ţinînd însă cont de observaţia 4.1, precum şi de observaţia 2.3. Atunci în $\Omega_{\varepsilon i}$ (i=1,2) vom avea ecuaţiile termoelasticităţii liniare[5][6]:

$$(1)\qquad \frac{\partial\sigma^{\varepsilon}_{ij}}{\partial x_j}-\rho^{\varepsilon}\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}_i}{\partial t^2}=-f_i(x)$$

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial\theta^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right)-T_0\beta^{\varepsilon}_{ij}\frac{\partial e^{\varepsilon}_{ij}}{\partial t}-c^{\varepsilon}\frac{\partial\theta^{\varepsilon}}{\partial t}=-r(x)$$

şi ecuaţia constitutivă:

$$(3)\qquad \sigma^{\varepsilon}_{ij}=a^{\varepsilon}_{ijkh}e^{\varepsilon}_{kh}-\beta^{\varepsilon}_{ij}\,\theta^{\varepsilon}$$

unde în plus față de notațiile anterioare, am introdus $\theta^{\varepsilon}$ temperatura, $r(x)$ sursa de energie exterioară, $T_0$ temperatura de referință, $\beta_{ij}^{\varepsilon}$ tensorul temperatură-deplasare, $k_{ij}^{\varepsilon}$ tensorul conductivității termice, $c^{\varepsilon}$ căldura specifică la deformație constantă și $\rho^{\varepsilon}$ densitatea. Vom considera coeficienții ca fiind Y-periodici în variabila $y = \frac{x}{\varepsilon}$ :

$$a_{ijkh}^{\varepsilon}(x)=a_{ijkh}(\tfrac{x}{\varepsilon});\ \beta_{ij}^{\varepsilon}(x)=\beta_{ij}(\tfrac{x}{\varepsilon})$$
$$k_{ij}^{\varepsilon}(x)=k_{ij}(\tfrac{x}{\varepsilon});\ \rho^{\varepsilon}(x)=\rho(\tfrac{x}{\varepsilon});\quad c^{\varepsilon}(x)=c(\tfrac{x}{\varepsilon})$$

In plus pe $\Gamma$ vom avea condițiile la limită:

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned} &[u^{\varepsilon}]=0\\ &[\sigma_{ij}^{\varepsilon}n_j]=0\\ &[\theta^{\varepsilon}]=0\\ &\left[k_{ij}^{\varepsilon}\frac{\partial\theta^{\varepsilon}}{\partial x_j}n_i\right]=0 \end{aligned}$$

In mod analog cu dezvoltările asimptotice anterioare, vom căuta soluții de forma:

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} &\underline{u}^{\varepsilon}(x,t)=\underline{u}^{0}(x,t)+\varepsilon\underline{u}^{1}(x,y,t)+\ldots\\ &\theta^{\varepsilon}(x,t)=\theta^{0}(x,y,t)+\varepsilon\,\theta^{1}(x,y,t)+\ldots \end{aligned}$$

ceea ce ne conduce la:

$$\text{(6)}\qquad e_{ij}^{\varepsilon}=e_{ij}(\underline{u}^{\varepsilon})=e_{ij}^{0}(x,y,t)+\varepsilon e_{ij}^{1}(x,y,t)+\ldots$$

$$\text{(7)}\qquad \sigma_{ij}^{\varepsilon}=\sigma_{ij}^{0}(x,y,t)+\varepsilon\sigma_{ij}^{1}(x,y,t)+\ldots$$

cu:

$$\sigma^0_{ij}(x,y,t)=a_{ijkh}(y)e^0_{ij}(x,y,t)-\beta_{ij}(y)\,\theta^0(x,y,t)$$
$$\sigma^1_{ij}(x,y,t)=a_{ijkh}(y)e^1_{ij}(x,y,t)-\beta_{ij}(y)\,\theta^1(x,y,t)$$
$$\cdots$$

In mod cu totul analog cu consideraţiile din §4 din (I) folosind (5) şi operatorul de medie (2.13) avem ecuaţia macroscopică sub forma:

$$(8)\qquad \frac{\partial\tilde{\sigma}^0_{ij}}{\partial x_j}-\tilde{\rho}\frac{\partial^2 u^0_i}{\partial t^2}=-f_i$$

Se observă că ecuaţia (8) este ecuaţia clasică din omogenizarea mediilor elastice. Diferenţele faţă de problema elastică vor apărea în scrierea legii constitutive şi în ecuaţia energiei care conţine termeni de cuplaj.

Folosind (5) în (2) avem:

$$(9)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\left\{k_{ij}(y)\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\theta^0}{\partial y_j}+\frac{\partial\theta^0}{\partial x_j}+\frac{\partial\theta^1}{\partial y_j}+\varepsilon\left(\frac{\partial\theta^1}{\partial x_j}+\frac{\partial\theta^2}{\partial y_j}\right)+\ldots\right]\right\}$$
$$-T_0\,\beta_{ij}(y)\left(\frac{\partial e^0_{ij}}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial e^1_{ij}}{\partial t}+\ldots\right)-c(y)\left(\frac{\partial\theta^0}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\theta^1}{\partial t}+\ldots\right)=-r(x)$$

Termenii de ordinul $\varepsilon^{-2}$ din (9) ne conduc la ecuaţia

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial y_i}\left(k_{ij}(y)\frac{\partial\theta^0}{\partial y_j}\right)=0$$

ecuaţie valabilă în toată celula de periodicitate Y în sens de distribuţii (am folosit condiţia la limită (4) în scrierea lui $\theta^0$). Din cauza Y periodicităţii se vede că $\theta^0=\theta^0(x,t)$.

In continuare, termenii de ordinul $\varepsilon^{-1}$ ne dau:

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial y_i}\left[k_{ij}(\ )\left(\frac{\partial\theta^0}{\partial x_j}+\frac{\partial\theta^1}{\partial y_j}\right)\right]=0$$

sau

(11') $$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(k_{ij}(y)\frac{\partial\theta^1}{\partial y_j}\right)=\frac{\partial\theta^0}{\partial x_j}\frac{\partial k_{ij}}{\partial y_i}$$

Dar (11') este o ecuaţie analoagă cu (2.16) şi deci are soluţia de tipul (2.19):

(12) $$\theta^1(x,y,t) = w^j(y)\frac{\partial\theta^0}{\partial x_j} + c(x,t)$$

unde $w^j \in V_y$ este soluţia pentru $(\forall)\ \varphi \in V_y$ a ecuaţiei

(13) $$\int_Y k_{i\ell}(y)\frac{\partial w^j}{\partial y_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}dy = \int_Y \frac{\partial k_{i\ell}}{\partial y_\ell}\varphi\, dy$$

cu condiţia suplimentară $\tilde{w}^j = 0$.

Similar cu (2.21) avem pentru tensorul conductivităţii termice macroscopic expresia:

(14) $$k^0_{ij} = \tilde{k}_{ij} + \left[k_{ij}(y)\frac{\partial w^j}{\partial y_\ell}\right]^{\sim}$$

şi evident

(15) $$\left[k_{ij}(y)\left(\frac{\partial\theta^0}{\partial x_j}+\frac{\partial\theta^1}{\partial y_j}\right)\right]^{\sim} = k^0_{ij}\frac{\partial\theta^0}{\partial x_j}$$

Pentru a obţine ecuaţia constitutivă macroscopică vom proceda din nou prin analogie cu §4, deci în ecuaţia $\frac{\partial\sigma_{ij}^0}{\partial y_j} = 0$ vom folosi (7) şi avem:

(16) $$-\frac{\partial}{\partial y_j}\left[a_{ijkh}(y)e_{khy}(\underline{u}^1)\right] = e_{khx}(\underline{u}^0)\frac{\partial a_{ijkh}}{\partial y_j} - \theta^0\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial y_j}$$

Trecînd la formularea variaţională a ecuaţiei (16) problema devine: pentru $(\forall)\ \underline{v} \in V_y$ să se găsească $\underline{u}^1 \in V_y$ soluţie la:

(17) $$\int_Y a_{ijkh}(y)e_{khy}(\underline{u}^1)e_{ij}(\underline{v})dy = e_{khx}(\underline{u}^0)\int_Y \frac{\partial a_{ijkh}}{\partial y_j}v_i\, dy - \theta^0\int_Y \frac{\partial\beta_{ij}}{\partial y_j}v_i\, dy$$

Introducînd $\underline{W}^{kh}$ şi $\underline{\Theta}$ soluţii din $V_y$, de medie zero, ale ecuaţiilor

$$(18)\qquad \int_Y a_{ijmn}(y)e_{mny}(\underline{W}^{kh})e_{ijy}(\underline{v})dy=\int_Y \frac{\partial a_{ijkh}}{\partial y_j}v_i dy \quad (\forall)\ \underline{v}\in V_y$$

$$(19)\qquad \int_Y a_{ijmn}(y)e_{mny}(\underline{\Theta})\,e_{ijy}(\underline{v})dy=\int_Y \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial y_j}v_i dy \quad (\forall)\ \underline{v}\in V_y$$

atunci soluţia ecuaţiei (17) este:

$$(20)\qquad \underline{u}^1(x,y,t)=e_{khx}(\underline{u}^o)\underline{W}^{kh}-\theta^o\underline{\Theta}$$

abstraţie făcînd de o funcţie depinzînd de x şi t.

Folosind (20) vom avea succesiv:

$$e_{mny}(\underline{u}^1)=e_{khx}(\underline{u}^o)e_{mny}(\underline{W}^{kh})-\theta^o e_{mny}(\underline{\Theta})$$

$$\sigma^o_{ij}=a_{ijkh}\left[\delta_{mk}\delta_{nh}+e_{mny}(\underline{W}^{kh})\right]e_{khx}(\underline{u}^o)-$$
$$-\theta^o\left[\beta_{ij}+a_{ijmn}e_{mny}(\underline{\Theta})\right]$$

şi aplicînd operatorul de medie ultimei relaţii obţinem:

$$(21)\qquad \tilde{\sigma}^o_{ij}=a^o_{ijkh}\tilde{e}^o_{kh}-\beta^o_{ij}\theta^o$$

cu:

$$(22)\qquad a^o_{ijkh}=\tilde{a}_{ijkh}+\left[a_{ijmn}e_{mny}(\underline{W}^{kh})\right]^{\sim}$$

$$(23)\qquad \beta^o_{ij}=\tilde{\beta}_{ij}+\left[a_{ijmn}e_{mny}(\underline{\Theta})\right]^{\sim}$$

Observaţia 6.1. Ecuaţia constitutivă macroscopică (21) are o formă similară cu cea microscopică, dar coeficienţii macroscopici sînt diferiţi de valoarea medie simplă. De fapt se vede că (22) coincide cu (4.16), iar (23) depinde şi de matricea de elasticitate.

Pentru a obţine ecuaţia macroscopică a energiei, vom scrie ecuaţia ce se obţine din (2) cu (5) la ordinul $\varepsilon^{0}$:

$$(24)\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[k_{ij}(y)\left(\frac{\partial\theta^0}{\partial x_j}+\frac{\partial\theta^1}{\partial y_j}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y_i}\left[k_{ij}(y)\left(\frac{\partial\theta^1}{\partial x_j}+\frac{\partial\theta^2}{\partial y_j}\right)\right]-$$
$$-T_0\beta_{ij}(y)\frac{\partial e_{ij}^{0}}{\partial t}-c(y)\frac{\partial\theta^0}{\partial t}=-r(x)$$

şi îi vom aplica operatorul de medie (2.13). Calculul succesiv al valorilor medii ale termenilor din ecuaţia (24) ne dă:

$$\int_Y\frac{\partial}{\partial y_i}\left[k_{ij}(y)\left(\frac{\partial\theta^1}{\partial x_j}+\frac{\partial\theta^2}{\partial y_j}\right)\right]dy=\int_{\partial Y}n_i\left[k_{ij}(y)\left(\frac{\partial\theta^1}{\partial x_j}+\frac{\partial\theta^2}{\partial y_j}\right)\right]ds=0$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[k_{ij}(y)\left(\frac{\partial\theta^0}{\partial x_j}+\frac{\partial\theta^1}{\partial y_j}\right)\right]\right\}^{\sim}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[k_{ij}(y)\left(\frac{\partial\theta^0}{\partial x_j}+\frac{\partial\theta^1}{\partial y_j}\right)\right]^{\sim}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}^{0}\frac{\partial\theta^0}{\partial x_j}\right)$$

$$\left[T_0\beta_{ij}(y)\frac{\partial e_{ij}^{0}}{\partial t}\right]^{\sim}=T_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{\tilde{\beta}_{ij}e_{ijx}(u^0)+\left[\beta_{ij}(y)e_{ijy}(u^1)\right]^{\sim}\right\}=$$
$$=T_0\gamma_{ij}^{0}\frac{\partial\tilde{e}_{ij}^{0}}{\partial t}-T_0\gamma\frac{\partial\theta^0}{\partial t}$$

$$(25)\qquad \gamma_{ij}^{0}=\tilde{\beta}_{ij}+\left[\beta_{kh}e_{khy}(w^{ij})\right]^{\sim}=\beta_{ij}^{0}$$

$$(26)\qquad \gamma=\left[\beta_{ij}(y)e_{ijy}(\circledast)\right]^{\sim}$$

$$\left[c(y)\frac{\partial\theta^0}{\partial t}\right]^{\sim}=\tilde{c}\,\frac{\partial\theta^0}{\partial t}$$

Deci ecuaţia macroscopică a energiei este:

$$(27)\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}^{0}\frac{\partial\theta^0}{\partial x_j}\right)-T_0\beta_{ij}^{0}\frac{\partial\tilde{e}_{ij}^{0}}{\partial t}-(\tilde{c}-T_0\gamma)\frac{\partial\theta^0}{\partial t}=-r(x)$$

Observaţia 6.2. Egalitatea (25) se poate demonstra folosind (18) şi (19) în definiţia $\gamma_{ij}^{0}-\beta_{ij}^{0}$.

Observaţia 6.3. Toate consideraţiile anterioare rămîn valabile în cazul termoelasticităţii necuplate. In acest caz ecuaţia (2) nu va conţine al doilea termen din membrul stîng şi deci în loc de (27) am avea:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k^o_{ij}\frac{\partial \theta^o}{\partial x_j}\right) - \tilde{c}\,\frac{\partial \theta^o}{\partial t} = -r(x) \tag{28}$$

<u>Observaţia 6.4.</u> Dacă vom introduce cantităţi adimensionale [6] constanta de cuplare din ecuaţia (27) are forma

$$\frac{E\,\alpha}{3\tilde{\beta}^2\,\tilde{c}\,(1-2\nu)}$$

unde $E$ este modulul lui Young, $\nu$ coeficientul Poisson şi $\alpha$ coeficientul de expansiune volumică. Pentru un material compozit de tip sticlă - epoxy sau bor - epoxy această constantă este de ordinul unităţii. Deci în studiul problemelor de termoelasticitatea materialelor compozite este necesar să se lucreze cu teoria cuplată [7].

Si în acest caz există un rezultat de convergenţă: dacă $u^\varepsilon$ şi $\theta^\varepsilon$ sînt soluţii la problema (1)-(3) cu condiţii iniţiale omogene şi $(\underline{f},\underline{r}) \in L_2(Q_T) \times L_2(Q_T)$, $Q_T = [0,T] \times \Omega$, iar $u^0$ şi $\theta^0$ sînt soluţii la (8) - (27), atunci pentru $(\forall)\alpha \in (0,T)$ $\underline{u}^\varepsilon \to \underline{u}^0$ slab în $L_2(0,T-\alpha;\, H^1(\Omega))$ şi $\theta^\varepsilon \to \theta^o$ slab în $L(0,T-\alpha;\, H^1(\Omega))$. (Demonstraţia acestei teoreme este dată în Anexa 2).

## 7. <u>CALCULUL COEFICIENTILOR OMOGENIZATI</u>

Vom discuta în acest paragraf cîteva cazuri de calcul exact a coeficienţilor omogenizaţi. In fond pentru un material compozit care am văzut că se comportă din punct de vedere macroscopic ca un mediu elastic omogen este importantă cunoaşterea coeficienţilor elastici.

Din păcate acest calcul se poate face exact doar în două cazuri particulare: cazul unidimensional şi cazul în care coeficienţii matricei şi ai incluziunii sînt funcţii numai de una dintre variabile.

In celelalte cazuri vom da cîteva rezultate de estimare a valorilor maxime şi minime.

7.1. Cazul unidimensional

Să reamintim formula (2.21) care ne furnizează expresia coeficienţilor omogenizaţi:

(1) $$a^o_{ij} = \left[ a_{ij}(y) + a_{ik}(y)\frac{\partial \chi^j}{\partial y_k} \right]^{\sim}$$

In cazul unidimensional (1) se scrie:

(2) $$a^o = \frac{1}{|Y|}\int_Y (a + a\frac{d\chi}{dy})dy$$

unde $\chi$ este soluţia ecuaţiei:

(3) $$-\frac{d}{dy}(a\frac{d\chi}{dy}) = \frac{da}{dy}$$

obţinută din (2.18).

Integrînd odată ecuaţia (3) avem:

(4) $$a\frac{d\chi}{dy} = -a + c; \quad \frac{d\chi}{dy} = -1 + \frac{c}{a}$$

Ecuaţia (4) admite o soluţie periodică dacă

$$\int_Y (-1 + \frac{c}{a})dy = 0$$

ceea ce revine la

(5) $$-1 + c(\frac{1}{a})^{\sim} = 0$$

Pe de altă parte din (2) folosind a doua relaţie (4) avem

$$(6) \qquad a^0 = \frac{1}{|Y|}\int_Y (a-a+c)\,dy = c$$

şi deci din (5) şi (6) rezultă

$$(7) \qquad a^0 = \frac{1}{(\frac{1}{a})^{\sim}}$$

<u>Observaţia 7.1.</u> In cazul unidimensional formula (7) ne arată că valorile macroscopice ale coeficienţilor sînt date de media armonică. Acesta este singurul caz de acest fel, în general coeficienţii omogenizaţi fiind mai mari decît media armonică.

### 7.2. <u>Cazul coeficienţilor depinzînd de o singură variabilă</u>

Să considerăm acum cazul cînd matricea de elasticitate a materialului este funcţie numai de o singură coordonată, pe care o vom lua $x_3$. Vom considera problema echilibrului elastic tratată în §4. In acest caz funcţionează următoarea teoremă datorată lui Mc.Connell [9]:

<u>Teorema 7.1.</u> Fie $u^{\varepsilon}$ soluţia problemei (4.1) cu coeficienţi $a^{\varepsilon}_{ijkh}(x_3)$ şi $\|u^{\varepsilon}\|_{H^3(\Omega)} \le c$. Dacă $u^{\varepsilon}$ converge slab la $u^0$ în $H^1(\Omega)$ şi $\sigma^{\varepsilon} \rightharpoonup \sigma^0$, $(a^{\varepsilon}_{i3j3})^{-1} \rightharpoonup (\tilde{S}_{ij})^{-1}$, $a^{\varepsilon}_{ijkh} - (a^{\varepsilon}_{kj3k}\, a^{\varepsilon\,-1}_{k3s3}\, a^{\varepsilon}_{s3mq}) \rightharpoonup \tilde{a}_{ijkh} - (a_{ij3k}\, S_{ks}\, a_{s3mq})^{\sim}$,
$(a^{\varepsilon}_{ij3k}\, a^{\varepsilon\,-1}_{k3t3}) \rightharpoonup (a_{ij3k}\, S_{kt})^{\sim}$ slab în $L_2(\Omega)$ atunci matricea de elasticitate este dată de formula:

$$(8) \qquad a^0_{ijkl} = \tilde{a}_{ijkl} - (a_{ij3q}\, S_{qs}\, a_{s3kl})^{\sim} + (a_{ijkq}\, S_{qs})^{\sim}\,(\tilde{a}_{s3r3})^{-1}\,(S_{rt}\, a_{3tkl})^{\sim}$$

unde cu $S$ am notat matricea complianţelor.

Fără a intra în detalii privind demonstrațiile de convergență, detalii ce se pot găsi în lucrarea citată [9], vom da o schiță a calcului acestor coeficienți.

Să scriem

$$(9)\quad \sigma_{i3}^{\varepsilon}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{2} a_{i3j\alpha}^{\varepsilon}\, u_{j,\alpha}^{\varepsilon}+\sum_{j=1}^{3} a_{i3j3}^{\varepsilon}\, u_{j,3}^{\varepsilon}$$

Introducînd notația $a_{i3j3}^{\varepsilon^{-1}} = S_{ij}^{\varepsilon}$, inversarea relației (9) ne dă:

$$(10)\quad u_{j,3}^{\varepsilon}=\sum_{i=1}^{3} S_{ij}^{\varepsilon}\sigma_{i3}^{\varepsilon}-\sum_{i,m=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{2} S_{ji}^{\varepsilon}a_{i3m\alpha}^{\varepsilon}u_{m,\alpha}^{\varepsilon}$$

Folosind ipotezele și trecînd la limită pe un domeniu $\Omega_{\varsigma}\subset\Omega\ (\varsigma>0)$ din (10) avem:

$$(11)\quad u_{j,3}^{o}=\sum_{i=1}^{3}\tilde{S}_{ji}\sigma_{i3}^{o}-\sum_{i,m=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{2}(\widetilde{S_{ij}a_{i3m\alpha}})u_{m,\alpha}^{o}$$

relație valabilă a.p.t. în $\Omega_{\varsigma}$. Invercînd (11) avem:

$$(12)\quad \sigma_{i3}^{o}=\sum_{j,t,m,q=1}^{3}(\tilde{S}_{ij})^{-1}(\widetilde{S_{iq}a_{qmt}})u_{m,t}^{o}$$

In general însă avem:

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon}=\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk\alpha}^{\varepsilon}u_{k,\alpha}^{\varepsilon}+\sum_{k=1}^{3} a_{ijk3}^{\varepsilon}u_{k,3}^{\varepsilon}$$

sau folosind (10):

$$(13)\quad \sigma_{ij}^{\varepsilon}=\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\sum_{m=1}^{3} a_{ijm\alpha}^{\varepsilon}-\sum_{t,k=1}^{3} a_{ijk3}^{\varepsilon}\, S_{kt}^{\varepsilon}\, a_{t3m\alpha}^{\varepsilon}\right]u_{m,\alpha}^{\varepsilon}+$$
$$+\sum_{t,k=1}^{3} a_{ijk3}^{\varepsilon}\, S_{kt}^{\varepsilon}\,\sigma_{t3}^{\varepsilon}$$

Trecînd din nou la limită în (13):

$$(14)\quad \sigma^{o}_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{2}\Big[\sum_{m=1}^{3}\tilde{a}_{ijm\alpha}-\sum_{k,t=1}^{3}(a_{ijk3}\,S_{kt}\,a_{t3m\alpha})^{\sim}\Big]w^{o}_{m,\alpha}+$$
$$+\sum_{k,t=1}^{3}(a_{ijk3}\,S_{kt})^{\sim}\,\sigma^{o}_{t3}$$

Folosind (12) în (14) rezultă deci:

$$(15)\quad \sigma^{o}_{ij}=\Big[\tilde{a}_{ijmq}-(a_{ijk3}\,S_{ks}\,a_{s3mq})^{\sim}+$$
$$+(a_{ijk3}\,S_{ks})^{\sim}(\tilde{S}_{kr})^{-1}(S_{rt}a_{t3mq})^{\sim}\Big]w^{o}_{m,q}$$

ceea ce demonstrează formula (8).

Pentru a ilustra modul de folosire a formulei (8) să considerăm două exemple.

Exemplul 7.1. Fie un material compozit în care coeficienţii elastici sînt de forma $a^{\varepsilon}_{ij}(x_3)=f^{\varepsilon}(x_3)\delta_{ij}$ unde $\delta_{ij}$ este simbolul lui Kronecker şi $f^{\varepsilon}(x_3)$ este:

$$f^{\varepsilon}(x_3)=\begin{cases}\alpha_1 & x_3\in[0,\theta\varepsilon]\\ \alpha_2 & x_3\in[\theta\varepsilon,\varepsilon)\end{cases}$$

cu $0<\theta<1$. Atunci formula (8) ne dă:

$$(16)\quad \begin{aligned} a^{o}_{11} &= a^{o}_{22} = \theta\alpha_1+(1-\theta)\alpha_2\\ a^{o}_{33} &= \Big(\frac{\theta}{\alpha_1}+\frac{1-\theta}{\alpha_2}\Big)^{-1}\end{aligned}$$

Exemplul 7.2. Să considerăm acum un alt material compozit în care coeficienţii elastici sînt daţi de:

$$(17)\quad a^{\varepsilon}_{ijkl} = \mu_\beta(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda_\beta \delta_{ij}\delta_{kl}$$

cu $\beta = 1,2$. Am notat cu $\lambda_\beta$ şi $\mu_\beta$ coeficienţii lui Lamé daţi de:

$$(18)\quad \lambda_\beta, \mu_\beta = \begin{cases} \lambda_1, \mu_1 & x \in [0, \frac{\varepsilon}{2}) \\ \lambda_2, \mu_2 & x \in (\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon) \end{cases}$$

In acest caz formula (8) ne dă:

$$(19)\quad \overset{0}{a}_{1111} = \overset{0}{a}_{2222} = \mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{2}\Big\{\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 + 2\mu_1} - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2 + 2\mu_2} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right)^2 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2(\mu_1 + \mu_2)}\Big\}$$

$$(20)\quad \overset{0}{a}_{1122} = \overset{0}{a}_{1111} - \mu_1 - \mu_2$$

$$(21)\quad \overset{0}{a}_{1133} = \overset{0}{a}_{1122} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right) \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1 + 2\mu_2}\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right) - 2\left(\frac{\mu_1\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\mu_2\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right) - 2\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{4\mu_1\mu_2} - \mu_1 - \mu_2\right) + 4\,\frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1 + 2\mu_2}\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right)^2 - 4\left(\frac{\mu_1^2}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2 + 2\mu_2}\right)$$

$$(22)\quad \overset{0}{a}_{1212} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

$$(23)\quad \overset{0}{a}_{2323} = \overset{0}{a}_{1313} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

toţi ceilalţi $\overset{0}{a}_{ijmq} = 0$. Se observă că $\overset{0}{a}_{1111} = \overset{0}{a}_{1122} + 2\overset{0}{a}_{1212}$ adică acest coeficient este izotrop pe direcţia transversală.

## 8. LIMITE PENTRU COEFICIENTII OMOGENIZATI

Calculul coeficienţilor omogenizaţi este dificil deoarece necesită rezolvarea unei probleme la limită pe o celulă de periodicitate, problemă care este dificilă de abordat exact. In literatura de specialitate există lucrări care obţin aceste valori folosind metode numerice [10] [11].

Din acest motiv este util însă să cunoaştem valorile maxime şi minime între care iau valori aceşti coeficienţi. Mai exact spus în literatură s-au evaluat aceste limite pentru matricea de elasticitate sau matricea complianţelor [12] [13]. In lucrarea [16] calculul limitelor pentru coeficienţii efectivi se bazează pe folosirea principiului de minim pentru energia potenţială şi a unor soluţii particulare şi este făcut doar pentru o configuraţie particulară. Şi în alte lucrări se folosesc diverse principii de maxim sau minim pentru a obţine estimări ale coeficienţilor efectivi [14] [15] [17].

Metoda folosită de L.Tartar [17] are un caracter mai general şi utilizează un aparat matematic mai puternic, ceea ce permite renunţarea la soluţiile particulare şi obţinerea limitelor doar prin operaţii asupra coeficienţilor iniţiali. In cele ce urmează, urmînd o cale analoagă cu cea din [17], vom prezenta aceste limite pentru coeficienţii elastici, generalizare obţinută de G.Paşa [18]. Aceste estimări vor fi ilustrate cu diverse exemple, unele obţinute în [17] [18], altele calculate special şi se vor face unele comparaţii cu alte rezultate necunoscute din literatură.

Inainte de a enunţa rezultatele despre care vorbeam, vom considera următoarea relaţie de ordine între matrici: $M \leq N$ dacă prin definiţie $(M\lambda,\lambda) \leq (N\lambda,\lambda)$ pentru $(\forall)\lambda \in R^3$.

In continuare vom nota cu $A^{\varepsilon}$ matricea coeficienţilor $a^{\varepsilon}_{ijkh}(x)$ şi cu $A^{o}$ matricea omogenizată $a^{o}_{ijkh}$.

<u>Teoreama 8.1.</u> Dacă $A^{\varepsilon} \leq B^{\varepsilon}$, $A^{\varepsilon}$ matrice simetrică şi dacă $A^{o}$ şi $B^{o}$ sînt matricile omogenizate obţinute cu formula (4.16) atunci $A^{o} \leq B^{o}$.

<u>Teorema 8.2.</u> Fie $A^{\varepsilon}$ şi $A^{0}$ matricile din §4. Dacă $A^{\varepsilon} \rightharpoonup A_{+}$ slab în $L_2$ şi $A^{\varepsilon-1} \rightharpoonup A_{-}^{-1}$ slab în $L_2$ atunci avem: $A_{-} \leq A^{0} \leq A_{+}$.

Demonstraţiile acestor teoreme se găsesc în [17] pentru cazul coeficienţilor din problema eliptică clasică §2 şi în [18] pentru cazul coeficienţilor elastici §4.

In fond teorema 8.2. ne spune că $A^{0}$ sînt cuprinşi între media aritmetică (limita superioară) şi media armonică (limita inferioară). După cum se va vedea din exemplul următor acest gen de estimare nu este prea bun.

<u>Exemplul 8.1.</u> Să considerăm cazul coeficienţilor din §2. şi anume $a_{ij}^{\varepsilon} = \delta_{ij}\, a\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right)$ cu

$$a(x_1,x_2) = \begin{cases} \alpha & \frac{1}{3} \leq x_1, x_2 \leq \frac{2}{3} \\ 1 & \text{în rest} \end{cases}$$

In acest caz evident $a_{ij}^{0} = a^{0}\delta_{ij}$ şi relaţia din teorema 8.2 ne spune că

$$\frac{9\alpha}{8\alpha+1} \leq a^{0} \leq \frac{8+\alpha}{9}$$

Imediat se vede că pentru cazurile limită $\alpha \to 0$ şi $\alpha \to \infty$ limita inferioară este zero, iar cea superioară infinită.

Acest exemplu ilustrează afirmaţia dinainte.

Pentru îmbunătăţirea acestor limite să introducem un tip de convergenţă analoagă celei din teorema 7.1. Prin definiţie $A^{\varepsilon} \xrightarrow{*1} \tilde{A}$ dacă $a_{1111}^{\varepsilon-1} \rightharpoonup \tilde{a}_{1111}^{-1}$, $(a_{11s\ell}^{\varepsilon}\, a_{1111}^{\varepsilon-1}) \rightharpoonup \tilde{a}_{11s\ell}\, \tilde{a}_{1111}^{-1}$ şi $a_{ijkh}^{\varepsilon} - (a_{11s\ell}^{\varepsilon}\, a_{1111}^{\varepsilon-1}\, a_{ij11}^{\varepsilon}) \rightharpoonup \tilde{a}_{ijkh} - (\tilde{a}_{11s\ell}\, \tilde{a}_{1111}^{-1}\, \tilde{a}_{ij11})$ slab în $L_2$.

<u>Teorema 8.3.</u> Fie $\omega(x_2,x_3)$ o funcţie pozitivă de integrală

1 şi fie $\rho$ măsura $\delta_{x_1} \otimes \omega$ . Dacă avem $A^\varepsilon * \rho \xrightarrow{*1} A_+$ atunci $A^0 * \rho \le A_+$.

Teorema 8.4. Fie $\omega(x_1)$ o funcţie pozitivă de integrală 1 şi fie $\rho$ măsura $\omega \otimes \delta_{x_2=x_3=0}$ . Dacă avem $A^{\varepsilon^{-1}} * \rho \xrightarrow{*1} A_-^{-1}$ atunci $A_- \le A^0 * \rho$.

Din nou pentru demonstraţia acestor rezultate vom trimite la lucrările [17] [18].

Inainte de a ilustra acest tip de limitări să precizăm că în enunţ noi am folosit doar cazul tridimensional, care este cel interesant pentru materialele compozite.

Algoritmul teoremei 8.3 ne spune că trebuie să facem mai întîi media aritmetică în raport cu variabilele $x_2$ şi $x_3$ umrată de media armonică în variabila $x_1$. In acest fel se obţine limita superioară. Pentru aflarea limitei inferioare, teorema 8.4 ne spune că trebuie să efectuăm întîi media armonică în raport cu variabila $x_1$ şi apoi media aritmetică în raport cu $x_2$ şi $x_3$.

Exemplul 8.2. Să reluăm cazul tratat în exemplul 8.1. Atunci notînd cu $\varphi(x_1)$ media aritmetică în raport cu $x_2$ a funcţiei $a(x_1,x_2)$ avem:

$$\varphi(x_1) = \int_0^1 a(x_1,x_2)\,dx_2 = \begin{cases} 1 & x_1 \in (0,\frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3},1) \\ \frac{\alpha+2}{3} & x_1 \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$$

Urmează apoi că pentru aflarea limitei superioare trebuie calculată media armonică a funcţiei $\varphi(x_1)$. Deci vom avea:

$$a_+ = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{\varphi(x_1)}\,dx_1} = \frac{1}{\int_0^{1/3} dx_1 + \int_{1/3}^{2/3} \frac{3}{\alpha+2}\,dx_1 + \int_{2/3}^1 dx_1} = \frac{3(2+\alpha)}{7+2\alpha}$$

Pentru aflarea limitei inferioare vom nota mai întîi cu

$\psi(x_2)$ media armonică a funcţiei $a(x_1,x_2)$ în raport cu $x_1$:

$$\psi(x_2) = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(x_1,x_2)}dx_1} = \begin{cases} 1 & x_2 \in (0,\frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3},1) \\ \frac{3\alpha}{2\alpha+1} & x_2 \in (\frac{1}{3},\frac{2}{3}) \end{cases}$$

Limita inferioară va fi deci dată de media aritmetică a funcţiei $\psi(x_2)$:

$$a_- = \int_0^1 \psi(x_2)dx_2 = \frac{7\alpha+2}{3(2\alpha+1)}$$

Deci am obţinut de fapt că:

$$\frac{7\alpha+2}{3(2\alpha+1)} \le a^0 \le \frac{3(2+\alpha)}{7+2\alpha}$$

Acest exemplu ne arată că acest gen de limitări este mai bun decît cel furnizat de teorema 8.2. deoarece pentru $\alpha \to 0$ limita inferioară este egală cu $\frac{2}{3}$, iar pentru $\alpha \to \infty$ limita superioară este $\frac{3}{2}$.

In cazul în care materialul compozit are coeficientul $\alpha$ pentru incluziune şi $\beta$ pentru matrice, un calcul analog celui dinainte ne furnizează

$$(1) \quad \frac{7\alpha\beta+2\beta^2}{3(2\alpha+\beta)} \le a^0 \le \frac{3\beta(2\beta+\alpha)}{7\beta+2\alpha}$$

Se ştie că problema eliptică tratată în §2 modelează din punct de vedere matematic problema torsiunii unei bare cilindrice întărită cu fibre dispuse paralel cu generatoarea. In acest caz $\Omega$ este secţiunea transversală prin bară. Dacă vom nota cu $\alpha$ şi $\beta$ modulul de forfecare al incluziunii (fibra), respectiv al matricii, atunci inegalitatea (1) ne dă limitele între care variază modulul de forfecare al compozitului nostru.

In cazul cînd această bară este formată din bor-epoxy se ştie că $\alpha=2,5\cdot10^7$ psi, iar $\beta=2,2\cdot10^5$ psi. Atunci formula (1) ne dă:

$$2,56\cdot10^5 \text{ psi} \leq a^0 \leq 3,25\cdot10^5 \text{ psi}$$

Dacă compozitul este de tip sticlă-epoxy atunci valorile sînt $\alpha=4\cdot10^6$ psi, $\beta=2,2\cdot10^5$ psi şi rezultă

$$2,53\cdot10^5 \text{ psi} \leq a^0 \leq 3,07\cdot10^5 \text{ psi}$$

Pentru a încheia acest exemplu să arătăm că în literatură [10] se consideră că pentru bara formată din bor-epoxy $a_0=2,47\cdot10^5$ psi, iar pentru sticlă-epoxy $a_0=2,46\cdot10^5$ psi, valori mai mici decît limita inferioară presupusă de formula (1).

Exemplul 8.3. Limitele depind de orientarea incluziunii. Acest fapt era de aşteptat, deoarece tocmai anizotropia materialelor compozite este cea care permite obţinerea de performanţe pe anumite direcţii. Pentru a exemplifica aceasta să considerăm o incluziune de formă dreptunghiulară de arie 0,8/3 orientată în două moduri diferite:

(a)
$$a(x_1,x_2)=\begin{cases}\alpha & \frac{1}{3}\leq x_1\leq\frac{2}{3}\ ,\quad 0,1\leq x_2\leq 0,9\\ 1 & \text{în rest}\end{cases}$$

respectiv

(b)
$$a(x_1,x_2)=\begin{cases}\alpha & 0,1\leq x_1\leq 0,9\ ,\ \frac{1}{3}\leq x_2\leq\frac{2}{3}\\ 1 & \text{în rest}\end{cases}$$

In cazul (a) se va obţine că

$$(2) \qquad \frac{2,8\alpha+0,2}{2\alpha+1} \le a^o \le \frac{3(0,1+0,8\alpha)}{1,4+1,6\alpha}$$

iar în cazul (b)

$$(3) \qquad \frac{1,4\alpha+1,6}{3(0,2\alpha+0,8)} \le a^o \le \frac{\alpha+2}{0,2\alpha+2,8}$$

De exemplu pentru $\alpha = 10$, formulele (2) şi (3) devin:

$$1,34 \le a^o \le 1,5$$

respectiv

$$1,85 \le a^o \le 2,5$$

Exemplul 8.4. In lucrarea [16] se studiază un material compozit format din fibre cilindrice înconjurat de o matrice, configuraţia fiind periodică hexagonală. Metoda folosită are la bază o soluţie exactă în coordonate cilindrice. Materialul este ortotrop, deci sîntem în cazul unei legi constitutive de forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix}$$

Se consideră că $c_{ij}$ sînt funcţii numai de $x_2$ şi $x_3$. In lucrarea [16] se dau diverse estimări. De exemplu, pentru modulul de forfecare $c_{44}=c_{55}=G$ avem:

(4) $$G^{+} = (mG)v_1 + v_2$$

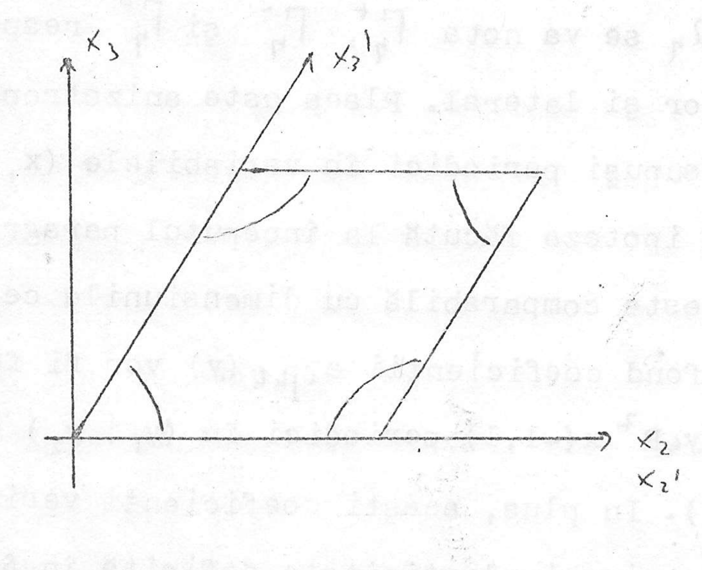
(5) $$G^{-} = \frac{1}{\left(\frac{1}{mG}\right)v_1 + v_2}$$

unde $mG = \dfrac{\eta(1+4r^2) + (1-4r^2)}{\eta(1-4r^2) + (1+4r^2)}$ unde $\eta$ este valoarea lui G în fibră, valoarea în matrice fiind egală cu 1, $v_1$ fiind raportul dintre aria cercului şi aria paralelipipedului, iar $v_2 = 1 - v_1$ , r fiind raza cercului.

In notaţia noastră G este $a_{1313}$ şi aplicînd teoremele 8.3 şi 8.4 se pot obţine următoarele estimări

(6) $$a^{+}_{1313} = \left\{ 2\int_0^{\frac{2r}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{(\eta-1)\sqrt{4r^2-3t^2+1}} + 2\int_{\frac{2r}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}} dt \right\}^{-1}$$

(7) $$a^{-}_{1313} = \left\{ 2\int_0^{\frac{2r}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{(\frac{1}{\eta}-1)\sqrt{4r^2-3t^2+1}} + 2\int_{\frac{2r}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2}} dt \right\}$$



Pentru a obţine formulele (6) şi (7) a fost necesar să se treacă de la coordonatele carteziene $x_2$ şi $x_3$, la coordonatele oblice $x_2'$ şi $x_3'$, $x_2'$ coincide cu $x_2$, iar $x_3'$ este înclinat cu un unghi de $60^o$ faţă de $x_2$.

Pentru cazul $\eta \to \infty$ şi r=0,2 din (4) avem $G^+=1,348$, iar din (6) $a^+_{1313}=1,88$, iar pentru $\eta \to 0$ şi r=0,2 din (5) obţinem $G^-=0,74$, iar din (7) $a^-_{1313}=0,54$. Aceste date numerice ilustrează buna concordanţă dintre estimările obţinute cu metoda omogenizării şi cele obţinute cu alte metode.

## 9. PLACA PLANA INCASTRATA

Vom considera în acest paragraf cazul unei plăci elastice subţiri formată dintr-un material compozit, a cărui grosime este comparabilă cu dimensiunile celulei de periodicitate. Această problemă a fost studiată cu ajutorul metodei omogenizării, recent de către D.Caillerie [19] şi în continuare vom prezenta pe scurt aceste rezultate.

Placa considerată ocupă domeniul $\Omega_\eta$ de formă cilindrică aplatisat, de grosime $2\eta$ în $R^3$ definit de un domeniu $\omega$ din $R^2$ de frontieră $\partial\omega$ şi de $\Omega_\eta = \{x\in R^3;\ (x_1,x_2)\in\omega, |x_3|<\eta\}$ cu $\eta>0$ . Frontierea lui $\Omega_\eta$ se va nota $\Gamma_\eta^+$, $\Gamma_\eta^-$ şi $\Gamma_\eta^0$ respectiv bordul superior, inferior şi lateral. Placa este anizotropă, cu coeficienţii elastici presupuşi periodici în variabilele $(x_1,x_2)$: Aceasta este în acord cu ipoteza făcută la începutul paragrafului, cum că grosimea plăcii este comparabilă cu dimensiunile celulelor de periodicitate. In fond coeficienţii $a_{ijkh}(y)$ vor fi funcţii mărginite definite pentru $y\in R^2 \times (-1,1)$ periodici în $(y_1, y_2)$ de perioadă $Y=(0,Y_{1\omega})\times(0,Y_{2\omega})$. In plus, aceşti coeficienţi verifică condiţiile obişnuite de simetrie şi elipticitate definită în §4.

Atunci coeficienţii elastici ai plăcii $a^{\eta\varepsilon}_{ijkh}(x)$, $x\in\Omega_\eta$ vor fi:

$$a^{\eta\varepsilon}_{ijkh}(x) = \frac{1}{\eta^3}\, a_{ijkh}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\eta}\right)$$

Placa va fi supusă la forţele volumice $f=(f_1,f_2,f_3)$ şi pe bordurile $\Gamma^+_\eta$ şi $\Gamma^-_\eta$ la forţele superficiale $g^{\eta+}=\left(\frac{g^+_1}{\eta}, \frac{g^+_2}{\eta}, g^+_3\right)$ şi $g^{\eta-}=\left(\frac{g^-_1}{\eta}, \frac{g^-_2}{\eta}, g^-_3\right)$. Pe bordul lateral $\Gamma^0_\eta$ placa este încastrată. Aceste forţe vor fi $f\in L_2(\Omega_\eta)$, iar $g^+, g^-\in L_2(\omega)$.

In aceste condiţii vom avea de rezolvat problema:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma^{\eta\varepsilon}_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \\ \sigma^{\eta\varepsilon}_{ij} = a^{\eta\varepsilon}_{ijkh}(x)\, e_{kh}(\underline{u}^{\eta\varepsilon}) \\ \sigma^{\eta\varepsilon}_{ij}\, n_j = g^{\eta+}_i \quad \text{pe } \Gamma^+_\eta \\ \sigma^{\eta\varepsilon}_{ij}\, n_j = g^{\eta-}_i \quad \text{pe } \Gamma^-_\eta \\ u^{\eta\varepsilon}_i = 0 \quad \text{pe } \Gamma^0_\eta \end{cases}$$

Studiul acestei probleme se face mai întîi pornind de la un domeniu $\Omega$ dilatat obţinut din $\Omega_\eta$ prin schimbarea de variabilă:

$$z_\alpha = x_\alpha \quad , \quad z_3 = \frac{x_3}{\eta}$$

In continuare indicii latini vor lua valorile 1,2,3, iar indicii greci doar valorile 1,2. Frontierele lui $\Omega$ vor fi respectiv $\Gamma^+$, $\Gamma^-$ şi $\Gamma^0$, iar o funcţie oarecare din $\Omega_\eta$ va fi considerată:

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = \varphi(z_1, z_2, \eta z_3)$$

Fără a mai schimba notaţiile sistemul (1) se transformă:

$$
(2)\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial \sigma_{i\alpha}^{\eta\varepsilon}}{\partial z_\alpha} + \dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial \sigma_{i3}^{\eta\varepsilon}}{\partial z_3} + f_i = 0 \\
\sigma_{ij}^{\eta\varepsilon} = a_{ijk\alpha}^{\eta\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u_k^{\eta\varepsilon}}{\partial z_\alpha}\right) + \dfrac{1}{\eta}\, a_{ijk3}^{\eta\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u_k^{\eta\varepsilon}}{\partial z_3}\right) \\
\sigma_{\alpha j}^{\eta\varepsilon} n_j = g_\alpha^{+}, \quad \sigma_{3j}^{\eta\varepsilon} n_j = g_3^{+} \ \text{pe}\ \Gamma^{+} \\
\sigma_{\alpha j}^{\eta\varepsilon} n_j = g_\alpha^{-}, \quad \sigma_{3j}^{\eta\varepsilon} n_j = g_3^{-} \quad \Gamma^{-} \\
u_i^{\eta\varepsilon} = 0 \ \text{pe}\ \Gamma_0
\end{cases}
$$

Acest sistem se ştie că admite soluţie unică. Vom studia această problemă pentru $\eta$ şi $\varepsilon$ mici şi proporţionali, $\varepsilon = \lambda\eta$, $\lambda$ număr real fixat.

Prin analogie cu dezvoltările utilizate în §4, vom căuta deplasările şi tensiunile sub forma:

$$
u_i^{\eta\varepsilon}(z) = u_i^0(z_1,z_2) + \eta\, u_i^1(z_1,z_2,y) + \dots
$$

$$
\sigma_{ij}^{\eta\varepsilon}(z) = \frac{1}{\eta^3}\sigma_{ij}^{-3}(z_1,z_2,y) + \frac{1}{\eta^2}\sigma_{ij}^{-2}(z_1,z_2,y) + \dots
$$

Introducînd aceste dezvoltări în (2) şi identificînd puterile asemenea ale parametrului mic se obţin următoarele rezultate:

$$
u_\alpha^0(z_1,z_2) = 0
$$

$$
u_\alpha^1(z_1,z_2,y) = \overset{\vee}{u}{}_\alpha^1 - y_3\frac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha}
$$

$$
\sigma_{ij}^{-3} = 0
$$

$$
\sigma_{ij}^{-2} = \left[\frac{1}{\lambda} a_{ijh\gamma}\frac{\partial \chi_h^{\alpha\beta 1}}{\partial y_\gamma} + a_{ijh3}\frac{\partial \chi_h^{\alpha\beta 1}}{\partial y_3} + a_{ij\alpha\beta}\right]\frac{\partial \overset{\vee}{u}{}_\alpha^1}{\partial z_\beta} + \left[\frac{1}{\lambda} a_{ijh\gamma}\frac{\partial \chi_h^{\alpha\beta 2}}{\partial y_\gamma} + a_{ijh3}\frac{\partial \chi_h^{\alpha\beta 2}}{\partial y_3} - y_3\, a_{ij\alpha\beta}\right]\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}
$$

unde $\overset{\vee}{u}{}_\alpha^1$ este o funcţie numai de $z_1$ şi $z_2$, $\chi^{\alpha\beta\nu} = (\chi_i^{\alpha\beta\nu})$ este un cîmp vectorial definit pe $R^2 \times (-1,1)$ periodic în $y_1$ şi $y_2$ de perioadă Y, soluţia unică a următoarei probleme locale:

$$\tau_{ij} = \frac{1}{\lambda} a_{ijh\gamma} \frac{\partial \chi_h^{\alpha\beta\nu}}{\partial y_\gamma} + a_{ijh3} \frac{\partial \chi_h^{\alpha\beta\nu}}{\partial y_3}$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y_\gamma} + \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial y_3} + \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{\partial (-y_3)^{\nu-1} a_{ij\alpha\beta}}{\partial y_\gamma} + \frac{\partial (-y_3)^{\nu-1} a_{ij\alpha\beta}}{\partial y_3} \right] = 0$$

$$\int_Y \chi_i^{\alpha\beta\nu} dy = 0$$

Introducînd valorile medii

$$\tilde{\sigma}^{-2}_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma^{-2}_{ij}(z_1, z_2, y)\,dy$$

$$\tilde{M}^{-2}_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y y_3 \sigma^{-2}_{ij}(z_1, z_2, y)\,dy$$

atunci obţinem sistemul macroscopic:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\sigma}^{-2}_{\beta\alpha}}{\partial z_\alpha} + g_\beta^+ + g_\beta^- = 0 \\ \dfrac{\partial \tilde{\sigma}^{-2}_{3\alpha}}{\partial z_\alpha} + g_3^+ + g_3^- = 0 \\ \dfrac{\partial \tilde{M}^{-2}_{\beta\alpha}}{\partial z_\alpha} - \tilde{\sigma}^{-2}_{\beta 3} + (g_\beta^+ - g_\beta^-) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \tilde{\sigma}^{-2}_{\alpha\beta} = C^{11}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, e_{\gamma\delta z}(\check{u}^1) - C^{12}_{\alpha\beta\gamma\delta} \dfrac{\partial^2 u_3^0}{\partial z_\gamma \partial z_\delta} \\ \tilde{M}^{-2}_{\alpha\beta} = C^{21}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, e_{\gamma\delta z}(\check{u}^1) - C^{22}_{\alpha\beta\gamma\delta} \dfrac{\partial^2 u_3^0}{\partial z_\gamma \partial z_\delta} \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} u_3^0 \big|_{\partial\omega} = 0 \\ \dfrac{\partial u_3^0}{\partial z_\alpha}\Big|_{\partial\omega} = 0 \\ \check{u}_\alpha^1 \big|_{\partial\omega} = 0 \end{cases}$$

Matricea $C^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ fiind definită de

$$C^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{|Y|} \int_Y \left[ (-y_3)^{\mu-1} a_{\alpha\beta\gamma\delta} + a_{\alpha\beta h\ell} \frac{\partial \chi_h^{\gamma\delta\nu}}{\partial y_\ell} \right] dy$$

Această matrice satisface condiţiile de simetrie şi coercivitate:

$$c^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma\delta} = c^{\mu\nu}_{\beta\alpha\gamma\delta} = c^{\nu\mu}_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

$(\exists) p>0$ astfel încît pentru $(\forall)\ \tau^{\mu}_{\alpha\beta} \in R,\ \tau^{\mu}_{\alpha\beta} = \tau^{\mu}_{\beta\alpha}$

să avem $\quad c^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \tau^{\mu}_{\alpha\beta}\, \tau^{\nu}_{\gamma\delta} \geq p\, \tau^{\mu}_{\alpha\beta}\, \tau^{\mu}_{\alpha\beta}$

Si în acest caz se poate demonstra că $u^{\eta\varepsilon}$ converge la soluţia problemei omogenizate (3)(4)(5) cînd $\eta$ şi $\varepsilon$ tind la zero.

## 10. PROBLEMA LUI SIGNORINI PENTRU MATERIALE COMPOZITE

In locul problemei (4.1)-(4.3) a echilibrului elastic supus la condiţii uzuale pe frontieră, să considerăm următoarea problemă la limită:

(1) $$\frac{\partial \sigma^{\varepsilon}_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x) = 0 \text{ în } \Omega$$

(2) $$\sigma^{\varepsilon}_{T} = 0$$

(3) $$u^{\varepsilon}_{N} \geq 0\ ;\ \sigma^{\varepsilon}_{N} \geq 0;\quad u^{\varepsilon}_{N}\sigma^{\varepsilon}_{N} = 0$$

$\Big\}$ pe $\partial\Omega$

legea constitutivă fiind tot cea dată de (4.4) şi (4.5). Notaţiile utilizate sînt următoarele:

$$\sigma^{\varepsilon}_{N} = \sigma^{\varepsilon}_{ij}\, n_i n_j$$

$$\sigma^{\varepsilon}_{iT} = \sigma^{\varepsilon}_{ij} n_j - \sigma^{\varepsilon}_{N} n_i$$

Aceasta este cunoscută sub numele problema lui Signorini fără frecare [20][21][22]. In fond condiţia (2) ne arată că tensiunea tangenţială este zero, deci nu avem frecare. Pe de altă parte dacă $u^{\varepsilon}_{N}>0$ atunci rezultă că suportul nu produce nici o forţă de reacţie şi deci $\sigma^{\varepsilon}_{N} = 0$. Dacă $u^{\varepsilon}_{N}=0$, adică avem un contact perfect între suport şi corpul compozit considerat, atunci suportul exercită o forţă anormală $\sigma_N^\varepsilon \geq 0$ asupra corpului.

Dacă notăm cu

$$V = \{v / v = \{v_i\}_{i=1,2,3}\ ,\ v_i \in H^1(\Omega)\}$$

$$K = \{v / v \in V,\ v_N \geq 0 \text{ pe } \partial\Omega\}$$

atunci se ştie [20] [21] că problema (1)-(3) este echivalentă cu aflarea lui $u^\varepsilon \in K$ soluţie a inecuaţiei variaţionale:

$$a(u^\varepsilon, v^\varepsilon - u^\varepsilon) \geq (f, v^\varepsilon - u^\varepsilon) \quad (\forall) v^\varepsilon \in K \tag{4}$$

unde

$$a(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_\Omega a^\varepsilon_{ijkh}\, e_{ij}(u^\varepsilon) e_{kh}(v^\varepsilon) dx$$

Procedînd în mod analog cu §4 problema omogenizată corespunzătoare problemei (1)-(3) va fi:

$$\left.\begin{aligned} &(5) && \frac{\partial \tilde{\sigma}^0_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{în } \Omega \\ &(6) && \tilde{\sigma}^0_T = 0 \\ &(7) && u^0_N \geq 0,\ \tilde{\sigma}^0_N \geq 0;\ u^0_N \tilde{\sigma}^0_N = 0 \end{aligned}\right\} \text{ pe } \partial\Omega$$

legea constitutivă fiind tot (4.15) cu coeficienţii (4.16). Problema (5)-(7) în mod cu totul analog cu considerentele de mai sus este echivalentă cu aflarea lui $u^0 \in K$ soluţie a inecuaţiei variaţionale:

$$a(u^0, v - u^0) \geq (f, v - u^0) \quad (\forall) v \in K. \tag{8}$$

Si în acest caz se poate demonstra că soluţia $u^\varepsilon$ converge la $u^o$, soluţia problemei omogenizate [23].

## 11. ACTIUNEA UNOR MICROCUPLURI DE MARE FRECVENTA ASUPRA UNUI MATERIAL COMPOZIT

Vom considera o problemă de elasticitate puţin diferită de cea tratată în §4 şi anume:

$$(1) \qquad \frac{\partial \sigma_{ij}^{\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} F_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\phi(x) + f_i(x) = 0 \quad \text{în} \quad \Omega$$

$$(2) \qquad \sigma_{ij}^{\varepsilon} = a_{ijkh}^{\varepsilon}(x) e_{kh}(\underline{u}^{\varepsilon})$$

$$(3) \qquad \underline{u}^{\varepsilon}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

în care mai presupunem în plus că $F_i(y)$ este Y-periodică şi de medie nulă, $\tilde{F}_i = 0$.

Termenul $\varepsilon^{-1} F_i(y)\phi(x)$ este un microcuplu a cărui valoare medie pe o perioadă este de $O(\varepsilon^o)$, iar $\phi$ reprezintă intensitatea cuplului. Această problemă a fost tratată în [24][25][26].

Folosind dezvoltările asimptotice anterioare vom obţine prin identificarea puterilor lui $\varepsilon$ următoarele ecuaţii:

$$(4) \qquad -\frac{\partial}{\partial y_j}\left[a_{ijkh}(y) e_{kh}(\underline{u}^1)\right] = e_{khx}(\underline{u}^o)\frac{\partial a_{ijkh}}{\partial y_j} + \phi(x)F_i(y)$$

$$(5) \qquad \frac{\partial \sigma_{ij}^o}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^1}{\partial y_j} + f_i(x) = 0$$

Condiţia ca media lui $F_i$ să fie zero este necesară pentru existenţa şi unicitatea soluţiei $u^1$ a problemei locale (4). Această problemă va avea soluţia:

$$(6) \qquad \underline{u}^1 = e_{khx}(\underline{u}^o)\,\underline{W}^{kh} + \phi(x)\,\underline{\omega} + c(x)$$

unde $\underline{W}^{kh}$ sînt cei definiţi în §4, iar $\omega \in V_y(Y)$ este soluţia ecuaţiei:

$$\int_Y a_{ijkh}(y)e_{khy}(\underset{\sim}{\omega})e_{ijy}(\underset{\sim}{v})dy = \int_Y F_i(y)v_i d_y \quad (\forall)v\in V_Y$$

Introducînd (6) în expresia lui $\tilde{\sigma}^o_{ij}$ se obţine legea constitutivă macroscopică:

(7) $$\tilde{\sigma}^o_{ij} = a^o_{ijkh}\tilde{e}^o_{kh} + \alpha_{ij}\phi(x)$$

unde $a^o_{ijkh}$ sînt daţi de formula (4.16), iar $\alpha_{ij}$ depinde de $a_{ijkl}$ şi de $F_i(y)$ şi este dat de:

(8) $$\alpha_{ij} = [a_{ijlm}\, e_{lmy}(\underset{\sim}{\omega})]^{\sim}$$

In plus ecuaţia (5) ne furnizează ecuaţia macroscopică

(9) $$\frac{\partial\tilde{\sigma}^o_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

cu condiţia la limită $u^o\big|_{\partial\Omega} = 0$.

<u>Observaţia 11.1.</u> problema (9) este problema clasică de elasticitate, dar legea constitutivă (7) este diferită, ea conţinînd şi influienţa microcuplurilor. Un exemplu de astfel de problemă este cel al termoelasticităţii necuplate (a se vedea observaţia 6.3)

Rezultatul anterior se poate extinde la cazul cînd densitatea de forţă volumică se compune din două părţi:

- o densitate obişnuită $f_i(x,y)$ definită pe $\Omega\times Y$, Y-periodică, cu $y = \dfrac{x-x_c}{\varepsilon}$, unde $x_c$ este poziţia centrului celulei în care se găseşte punctul $M\in\Omega$;

- o altă densitate de forma

$$\frac{1}{\varepsilon}F(y)\phi(x_c)$$

cu $F(y)$ Y-periodică şi de medie nulă, $\tilde{F} = 0$.

Diferenţa dintre acest caz şi cel tratat anterior este aceea că ea conţine acum şi un termen de ordinul $\varepsilon^{o}$. Pentru aceasta este suficient să observăm că pentru $x=x_c+\varepsilon y$ putem să scriem

$$(10) \qquad \phi(x_c) = \phi(x) - \varepsilon y \ \operatorname{grad}\phi(x) + O(\varepsilon^2)$$

Dacă acum în locul ecuaţiei (1) vom lua ecuaţia:

$$(11) \qquad \frac{\partial \sigma_{ij}^{\varepsilon}}{\partial x_j} + f_i(x, \frac{x-x_c}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}\phi(x_c)F_i(\frac{x-x_c}{\varepsilon}) = 0$$

şi vom considera coeficienţii

$$a_{ijkh}^{\varepsilon}(x) = a_{ijkh}(\frac{x-x_c}{\varepsilon})$$

Y-periodică în variabila $y = \frac{x-x_c}{\varepsilon}$, cu condiţii la limită adecvate (sau de forma (3) sau ca cele din §4).

Folosind dezvoltările asimptotice uzuale şi (10), obţinem problema locală (4), iar în locul ecuaţiei (5) vom avea ecuaţia:

$$(12) \qquad \frac{\partial \sigma_{ij}^{o}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{1}}{\partial y_j} + f_i(x,y) - y_j\frac{\partial \phi}{\partial x_j}F_i(y) = 0$$

Aplicînd operatorul de medie ecuaţiei (12) obţinem o ecuaţie macroscopică diferită de (9) şi anume:

$$(13) \qquad \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}^{o}}{\partial x_j} + \tilde{f}_i(x) - \Gamma_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = 0$$

$$(14) \qquad \Gamma_{ij} = \frac{1}{|Y|}\int_Y F_i(y)y_j\,dy$$

Iată deci că din punct de vedere macroscopic sîntem conduşi la o ecuaţie care conţine cupluri de forţe , legea constitutivă fiind tot cea dată de (7). Pentru a avea o interpretare a valorii cuplului $\Gamma_{ij}$ este necesar să folosim expresia lui $\sigma_{ij}$ din care se deduce (7). Folosind notaţia din §5 să observăm că:

$$(15)\quad \sigma_{ij}^{\circ} = A_{ijkh} e_{khx}(\underline{u}^{\circ}) + \phi(x)\, a_{ijmn} e_{mny}(\underline{\omega})$$

Aplicînd relaţia (15) operatorul de medie superficială definit prin relaţia (5.3) avem:

$$(16)\quad \langle \sigma_{ij}^{\circ} \rangle = \langle A_{ijkh} \rangle\, e_{khx}(\underline{u}^{\circ}) + \beta_{ij} \phi(x)$$

$$(17)\quad \beta_{ij} = \langle a_{ijmn} e_{mny}(\underline{\omega}) \rangle$$

Pentru aflarea valorii macroscopice a cuplului $\Gamma_{ij}$ să observăm că dacă notăm $b_{ij} = a_{ijmn} e_{mny}(\underline{\omega})$ această cantitate verifică ecuaţia $-\frac{\partial b_{ij}}{\partial y_j} = F_i$. Dacă refacem raţionamentul din §5 pentru această ecuaţie atunci vom vedea că

$$(18)\quad \Gamma_{ij} = \alpha_{ij} - \beta_{ij}$$

Deci diferenţa dintre valoarea medie volumică şi cea superficială este tocmai intensitatea cuplului macro.

<u>Observaţia 11.2.</u> Scăzînd relaiile (7) şi (16) şi folosind (18) vom remarca că şi în acest caz proprietatea semnalată la §5 relativ la coeficienţii omogenizaţi se păstrează, $\widetilde{A}_{ijkh} = \langle A_{ijkh} \rangle$.

Rezultate de această formă au fost obţinute în [4] pentru cazul mediilor fără coeficienţi discontinui. In acest caz se obţine însă $\alpha_{ij} = 0$ şi $\Gamma_{ij} = -\beta_{ij}$.

Acest exemplu studiat în prezentul paragraf constituie un caz de mediu care a fost prevăzut de P.Germain [27] prin aplicarea teoriei gradientului de ordinul întîi. Astfel de probleme pot apărea dacă de exemplu materialul compozit este supus la acțiunea unor sarcini electrice repartizate periodic.

## ANEXA 1. DISTRIBUTII SI SPATII SOBOLEV.

In această anexă vom da o serie de definiţii, propoziţii şi teoreme, utile în înţelegerea mai bună a unor detalii din demonstraţia teoremelor care formează obiectul anexei 2, ca şi a unora dintre afirmaţiile utilizate de-a lungul lucrării. Pentru detalii de demonstraţie ne vom mărgini să facem trimiterile bibliografice la excelentele monografii existente în literatură [28][29][30][31] devenite clasice.

Vom numi domeniu $\Omega$ o mulţime deschisă din spaţiul real euclidian $R^n$. Un punct din $R^n$ va fi notat $x=(x_1,\ldots,x_n)$ cu norma $|x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$.

Dacă $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, cu $\alpha_i$ întregi nenegativi, atunci $\alpha$ se numeşte multiindice şi vom înţelege prin $x^\alpha$ monomul $x_1^{\alpha_1} \cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$ de grad $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Analog dacă $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ pentru $1 \le j \le n$, atunci $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdot\ldots\cdot D_n^{\alpha_n}$ reprezintă operatorul de derivare de ordinul $|\alpha|$.

Fie $G \subset R^n$. Vom nota cu $\bar{G}$ închiderea sa. Dacă u este o funcţie definită pe G, se numeşte suportul lui u mulţimea

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in G,\ u(x) \neq 0\}}$$

Se spune că u are suport compact în $\Omega$ dacă supp $u \subset\subset \Omega$ ($A \subset\subset B$ dacă $\bar{A} \subset B$ şi $\bar{A}$ este compactă).

Se numeşte funcţională pe un spaţiu vectorial B o funcţie cu valori scalare definită pe B. In cele ce urmează vom defini toate noţiunile relativ la spaţii vectoriale peste corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$, cazul real fiind imediat. Funcţionala f este liniară dacă

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y) \quad x,y\in B;\ a,b\in \mathbb{C}$$

Mulţimea tuturor funcţionalelor liniare şi continue pe B se numeşte <u>spaţiul dual</u> al lui B şi se notează B'.

Fie B un spaţiu vectorial. Se numeşte <u>normă</u> pe B orice aplicaţie f a lui B în R care verifică:

(i) $f(x)\geq 0$, $(\forall)x\in B$ cu $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $f(cx)=|c|f(x)$, $(\forall)$ $x\in B$, $(\forall)c\in \mathbb{C}$

(iii) $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$, $(\forall)$ $x,y\in B$.

Un spaţiu vectorial B înzestrat cu o normă este un <u>spaţiu normat</u> şi vom nota norma $\|\cdot\|_B$. Acolo unde nu sînt posibile confuzii vom omite să indicăm spaţiul şi vom scrie simplu $\|\cdot\|$.

Un şir $x_n$ dintr-un spaţiu normat B <u>converge</u> la $x_o$ dacă şi numai dacă $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_o\| = 0$ în R. O submulţime S a unui spaţiu normat B se numeşte <u>densă</u> în B dacă $(\forall)x\in B$ este limita unui şir de elemente din S.

Un şir $\{x_n\}$ dintr-un spaţiu normat B se numeşte <u>şir Cauchy</u> dacă şi numai dacă $\lim_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n\| = 0$. Dacă orice şir Cauchy din B are o limită în B, atunci B este complet şi se numeşte <u>spaţiu Banach</u>.

Dacă B este un spaţiu vectorial, aplicaţia $(\cdot,\cdot)$ definită pe B x B cu valori în $\mathbb{C}$ cu proprietăţile:

(i) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

(ii) $(ax + by,z)=a(x,z)+b(y,z)$

(iii) $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x=0$

$(\forall)$ $x,y,z\in B$ şi $a,b\in \mathbb{C}$ se numeşte <u>produs scalar</u>. Aici $\bar{c}$ reprezintă valoarea complex conjugată a lui $c\in \mathbb{C}$.

Fiind dat B un spaţiu vectorial înzestrat cu un produs scalar, este clar că aplicaţia

$$\|x\| = (x,x)^{1/2}$$

defineşte o normă pe B. Un spaţiu Banach cu norma generată de un produs scalar este un <u>spaţiu Hilbert</u>.

Fie B' dualul unui spaţiu normat B. Pe B' se poate defini o normă, dacă pentru $f \in B'$ avem

$$\|f\|_{B'} = \sup_{\substack{x \in B \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_B}$$

Deoarece $\mathbb{C}$ este complet, B' cu topologia indusă de această normă este un spaţiu Banach şi se numeşte <u>dualul normat</u> al lui B. Dacă B este spaţiu Hilbert atunci el poate fi identificat cu dualul său normat B'.

<u>Teorema de reprezentare a lui Riesz.</u> Fie B un spaţiu Hilbert; f aparţine lui B' dacă şi numai dacă $(\exists) x \in B$ astfel încît pentru $(\forall)\ y \in B$ să avem:

$$f(y) = (y,x)$$

şi în acest caz $\|f\|_{B'} = \|x\|_B$. Mai mult x este unic determinat de $f \in B'$.

Un şir $x_n$ <u>converge slab</u> la x în B dacă $f(x_n) \to f(x)$ în $\mathbb{C}$ pentru $(\forall)\ f \in B'$ şi vom nota aceasta $x_n \rightharpoonup x$. Convergenţa în normă o vom nota $x_n \to x$. Datorită faptului că $|f(x_n - x)| \leq \|f\|_{B'} \|x_n - x\|_B$ se vede că convergenţa în normă implică convergenţa slabă, dar reciproc nu.

O submulţime A a unui spaţiu normat B se numeşte <u>compactă</u>

dacă orice şir de puncte din A posedă un subşir convergent în B la un element din A. Mulţimile compacte sînt închise şi mărginite, dar mulţimile închise şi mărginite nu sînt compacte decît dacă B este finit dimensional. A se numeşte <u>precompactă</u> dacă închiderea sa $\bar{A}$ este compactă. A se numeşte <u>slab secvenţial compactă</u> dacă orice şir din A posedă un subşir slab convergent în B la un punct din A.

Fie $\Omega$ un domeniu din $R^n$. Pentru orice m întreg nenegativ vom nota $C^m(\Omega)$ spaţiul vectorial al funcţiilor $\varphi$ continue pe $\Omega$ împreună cu toate derivatele lor $D^\alpha\varphi$ de ordin $|\alpha|\leq m$. Vom nota $C^0(\Omega)\equiv C(\Omega)$. Fie $C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$. Subspaţiile $C_0(\Omega)$ şi $C_0^\infty(\Omega)$ sînt reprezentate de acele funcţii din $C(\Omega)$, respectiv $C^\infty(\Omega)$, care au suport compact în $\Omega$.

Dacă $\Omega$ este deschis funcţiile din $C^m(\Omega)$ nu sînt neapărat mărginite pe $\Omega$. Dacă însă $\varphi\in C(\Omega)$ sînt mărginite şi uniform continue pe $\Omega$ atunci se poate defini în mod unic o extensie mărginită şi continuă la $\bar{\Omega}$. Deci vom defini $C^m(\bar{\Omega})$ ca fiind spaţiul funcţiilor $\varphi\in C^m(\Omega)$ pentru care $D^\alpha\varphi$ este mărginită şi uniform continuă pe pentru $0\leq\alpha\leq m$. $C^m(\bar{\Omega})$ este un spaţiu Banach pentru norma

$$\|\varphi\| = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha\varphi(x)|$$

Dacă $0<\lambda<1$ se poate defini $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ ca fiind subspaţiul lui $C^m(\bar{\Omega})$ al funcţiilor $\varphi$ pentru care $D^\alpha\varphi$ satisface în $\Omega$ o condiţie Hölder de exponent $\lambda$, adică $(\exists)$ K constantă astfel încît:

$$|D^\alpha\varphi(x)-D^\alpha\varphi(y)|\leq K|x-y|^\lambda \qquad x,y\in\Omega$$

$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ este un spaţiu Banach cu norma dată de:

$$\|\varphi\|_{C^{m,\lambda}} = \|\varphi\|_{C^m} + \max_{0\le|\alpha|\le m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\ne y}} \frac{|D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

Să notăm că pentru $0<\nu<\lambda<1$ există incluziunile $C^{m,\lambda}(\bar\Omega) \subset$ $\subset C^{m,\nu}(\bar\Omega) \subset C^m(\bar\Omega)$.

<u>Teorema Stone-Weierstrass</u>. Fie $\Omega$ un domeniu mărginit din $R^n$. O submulţime A a lui $C(\bar\Omega)$ este densă în $C(\bar\Omega)$ dacă sînt verificate următoarele proprietăţi:

(i) Dacă $\varphi,\psi\in A$ şi $c\in\mathbb{C}$, atunci $\varphi+\psi, \varphi\psi$ şi $c\psi$ aparţin lui A

(ii) Dacă $\varphi\in A$, atunci $\bar\varphi\in A$ ($\bar\varphi$ conjugata complexă a lui $\varphi$)

(iii) Dacă $x,y\in\bar\Omega$, $x\ne y$, atunci $(\exists)\ \varphi\in A$ astfel încît $\varphi(x)\ne\varphi(y)$

(iv) Deă $x\in\bar\Omega$, atunci $(\exists)\ \varphi\in A$ astfel încît $\varphi(x)\ne 0$.

Fie $\Omega$ un domeniu din $R^n$. Un şir de funcţii $\varphi_n$ din $C_0^\infty(\Omega)$ se spune că converge în sensul spaţiului $\mathcal{D}(\Omega)$ către o funcţie $\varphi_0\in C_0^\infty(\Omega)$ dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii:

(i) $(\exists) K \subset\subset \Omega$ astfel încît $\operatorname{supp}(\varphi_n-\varphi)\subset K$, $(\forall)n$

(ii) $D^\alpha\varphi_n(x)$ converge uniform la $D^\alpha\varphi(x)$ în K pentru orice multiindice $\alpha$.

Există deci o topologie a spaţiului vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ în raport cu care o funcţională liniară T este continuă dacă şi numai dacă $T(\varphi_n)\to T(\varphi)$ în $\mathbb{C}$ de îndată ce $\varphi_n\to\varphi$ în sensul lui $\mathcal{D}(\Omega)$. Acest spaţiu vectorial topologic se notează $\mathcal{D}(\Omega)$, iar elementele sale se numesc <u>funcţii test</u>. Dualul lui $\mathcal{D}(\Omega)$, notat $\mathcal{D}'(\Omega)$ se numeşte <u>spaţiul distribuţiilor</u>.

Se poate defini noţiunea de convergenţă în $\mathcal{D}'$: $T_n\to T$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$ dacă şi numai dacă $T_n(\varphi)\to T(\varphi)$ în C pentru $(\forall)\ \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$.

Dacă f este o funcţie local integrabilă pe $\Omega$ atunci se poate defini o <u>distribuţie</u> $T_f$ prin relaţia

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

care este liniară şi continuă pe $\mathcal{D}$. Dacă $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ sînt egale a.p.t (aproape peste tot, adică mulţimea $\{x \mid f_1(x) \neq f_2(x)\}$ este de măsură zero) atunci distribuţiile asociate $T_{f_1}$ şi $T_{f_2}$ sînt aceleaşi. In fapt o distribuţie nu este asociată unei funcţii ci unei clase de echivalenţă formată din funcţiile care sînt egale a.p.t.

Fie $f \in C^1(\Omega)$ şi $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Cum $\varphi$ este identic nulă în afara unei submulţimi compacte a lui $\Omega$, integrînd prin părţi avem:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \, dx = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

In mod analog

$$\int_\Omega (D^\alpha f) \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi \, dx$$

Această formulă stă la baza definiţiei derivatei $D^\alpha T$ a unei distribuţii $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \, T(D^\alpha \varphi)$$

In acest sens orice distribuţie din $\mathcal{D}'(\Omega)$ posedă derivate de orice ordin în $\mathcal{D}'(\Omega)$. Mai mult derivarea este o operaţie continuă, adică dacă $T_n \to T$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$ şi $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ atunci

$$D^\alpha T_n(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_n(D^\alpha \varphi) \to (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) = D^\alpha T(\varphi)$$

pentru orice $1 \le p \le \infty$ definim $L^p(\Omega)$ <u>spaţiul funcţiilor măsurabile şi p sumabile</u> pe $\Omega$ normat prin:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p}$$

$$|f|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Dacă $p=2$, $L^2(\Omega)$ este un spaţiu Hilbert, norma fiind asociată produsului scalar

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx$$

Dacă $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ cu $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ , atunci $fg \in L^1(\Omega)$ şi avem inegalitatea lui Hölder

$$\left|\int_\Omega fg dx\right| \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Pentru $1<p<\infty$ dualul lui $L^p(\Omega)$ este $L^q(\Omega)$ cu $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Dualul lui $L^1(\Omega)$ este $L^\infty$.

Să luăm $p \in [1,\infty]$ şi m un întreg $\geq 1$. Se numeşte <u>spaţiu Soboliev</u> $W^m_p(\Omega)$ de ordin m pe $\Omega$, spaţiul distribuţiilor $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avînd proprietatea că $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pentru toţi multiindicii $|\alpha| \le m$. Acesta este un spaţiu Banach pentru norma:

$$\|u\|_{W^m_p} = \left( \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}$$

Dacă $p=2$, $W^m_2$ este un spaţiu Hilbert pe care-l vom nota cu $H^m$, produsul scalar fiind definit de:

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega D^\alpha u(x)\, \overline{D^\alpha v(x)}\, dx$$

In particular produsul scalar în $H^1$ va fi:

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2}$$

Se poate de asemenea defini spaţiul $W_p^m$ pentru $m$ real. In cazul particular $\Omega = R^n$, p=2, de exemplu, $H^s$ se defineşte cu ajutorul transformatei Fourier. $H^s$ este spaţiul funcţiilor $f \in L^2(R^n)$ a căror transformată Fourier $\hat{f}$ satisface $(1+\xi^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2(R^n)$ cu norma dată de $\|(1+\xi^2)^{s/2}\hat{f}\|_{L^2(R^n)}$. Pentru s întreg această definiţie coincide cu cea dinainte.

Se ştie că un element $u \in H^1(\Omega)$ este o distribuţie asociată unei funcţii. Dacă vom considera u ca funcţie atunci ea este încă egală cu ea însăşi chiar după o modificare a unei mulţimi de măsură nulă (în particular $\partial\Omega$) şi deci restricţia sa la $\partial\Omega$ nu are sens. Din acest motiv a fost necesară introducerea noţiunii de urmă. Cum spaţiul $C^\infty(\bar\Omega)$ este dens în $H^1(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega)$ poate fi considerată ca limita (în topologia $H^1$) a unor funcţii netede $u^i$. Pentru astfel de funcţii, restricţia $u^i|_{\partial\Omega}$ are sensul obişnuit. Dacă se va putea demonstra că aceste funcţii converg la o limită unică, într-o topologie adecvată, atunci vom numi acea limită urma $u|_{\partial\Omega}$ a lui u pe $\partial\Omega$.

Mai general, dacă $u \in C_0^\infty(\bar\Omega)$, pentru orice j natural sau 0 se poate defini $\frac{\partial^j u}{\partial n^j}$ (derivata normală de ordin j pe $\Gamma$) orientată spre interior. Evidemt $\frac{\partial^j u}{\partial n^j} \in C_0^\infty(\Gamma)$. In cazul j=0 se obţine urma funcţiei u pe $\Gamma$. Pentru spaţii Sobolev există următoarea:

Teoremă. Fie $\Omega$ o mulţime deschisă şi mărginită din $R^n$, $\bar\Omega$ varietate n dimensională de clasă $C^\infty$ cu frontieră. Atunci aplicaţia

$$u \longrightarrow \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial n^j},\ 0 \le j \le m-1 \right\}$$

definită de la $C_0^\infty(\bar\Omega)$ în $(C_0^\infty(\Gamma))^m$ se poate extinde prin continuitate la o aplicaţie liniară continuă

$$u \to \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial n^j},\ 0 \le j \le m-1 \right\} \text{ de la } H^m(\Omega) \text{ pe } \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$$

Cum această aplicaţie este nulă pe $C_0^{\infty}(\Omega)$ şi surjectivă, rezultă că $C_0^{\infty}(\Omega)$ nu este în general dens în $H^m(\Omega)$, deci $H_0^m(\Omega)$ este un subspaţiu închis propriu al lui $H^m(\Omega)$. De fapt avem:

Teoremă. Spaţiul $H_0^m(\Omega)$ coincide cu mulţimea elementelor $u \in H^m(\Omega)$ avînd proprietatea $\frac{\partial^j u}{\partial n^j} = 0$, $j=0,\dots,m-1$

In cele de mai sus am notat în general $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ închiderea lui $C_0^m(\Omega)$ în topologia dată de norma spaţiului Sobolev; în particular $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.

Să mai amintim şi

Teorema de scufundare. Fie $\Omega$ o mulţime deschisă şi mărginită în $R^n$ cu frontiera $\Gamma$ de clasă $C^{\infty}$. Atunci $W_p^m(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ dacă $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ şi $W_p^m(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega})$ dacă $0 < k < m - \frac{n}{p}$. In plus, injecţia $W_p^m(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ este complet continuă dacă $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.

In încheierea acestei anexe să mai notăm cîteva fapte relative la convergenţă.

Un spaţiu B este reflexiv dacă el coincide cu dualul dualului său. Spaţiile $L^p$ şi $W_p^m$ pentru $1 < p < \infty$ sînt reflexive.

Propoziţie. O condiţie necesară şi suficientă ca $x_n \in B$ să conveargă slab la $x_0$ este ca $\|x_n\|$ să fie mărginită şi ca $f(x_n)$ să conveargă la $f(x_0)$ pentru $(\forall) f$ dintr-o submulţime densă a lui $B'$.

Propoziţie. Dacă B este reflexiv şi şirul $x_n \in B$ este astfel încît $\|x_n\| \le C$ atunci există un subşir $x_{n'}$ şi un element $x \in B$ pentru care $f(x_{n'}) \to f(x)$, $(\forall)\ f \in B'$.

## ANEXA 2. TEOREME DE CONVERGENTA

In această anexă vom prezenta două teoreme de convergență tipice pentru mecanica materialelor compozite tratată cu ajutorul metodei omogenizării. In esență, în aceste teoreme după stabilirea faptului că soluția $u^{\varepsilon}$ are o limită, lucru relativ standard în probleme de convergență, partea dificilă revine la a demonstra că această limită coincide cu soluția ecuației omogenizate, sau macroscopice. Pentru demonstrarea acestui lucru, este de o importanță deosebită lema ajutătoare pe care o vom demonstra și care reprezintă în același timp un exemplu foarte frumos de convergență slabă în $L^2(\Omega)$. Acest exemplu are avantajul de a fi și foarte intuitiv.

In continuare vom demonstra teorema de convergență pentru ecuația eliptică standard, tratată în §2 și teorema de convergență pentru termoelasticitatea materialelor compozite tratată în §6, care este cea mai recentă.

Pentru detaliile de demonstrație a celorlalte teoreme ne mărginim să trimitem la bibliografia indicată și în special la cele două cărți dedicate metodei omogenizării [1][2].

Lemă. Fie $\varphi \in L^2(Y)$. Dacă extindem pe $\varphi$ prin periodicitate la tot spațiul $R^n$ atunci

$$\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to \tilde{\varphi} \quad \text{slab în } L^2(\Omega)$$

Demonstrație. Fie $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ și să notăm cu $\theta_{\varepsilon}^{*}$ funcția care ia în fiecare $\varepsilon Y$ periodică o valoare constantă, egală cu valoarea lui $\theta$ în centrul perioadei. In cele ce urmează prelungim cu zero funcțiile $\theta$ și $\theta_{\varepsilon}^{*}$ în perioadele care nu sînt conținute în $\Omega$. Să notăm tot cu $\varepsilon Y$ cea mai mică reuniune de $\varepsilon Y$ perioade care conține domeniul $\Omega$.

Mai întîi să observăm că $\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ este mărginită în $L^2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \varphi^2(\tfrac{x}{\varepsilon})dx \leq \int_{\varepsilon Y} \varphi^2(\tfrac{x}{\varepsilon})dx = \sum \varepsilon^n \int_Y \varphi^2(y)dy =$$

$$= n(\varepsilon)\, \varepsilon^n M = \frac{|\varepsilon Y|}{|Y|} M$$

unde prin $n(\varepsilon)$ am desemnat numărul perioadelor ce acoperă domeniul $\Omega$.

Cum $\mathcal{D}(\Omega)$ este dens în $L^2(\Omega)$ va fi suficient (a se vedea propoziţia de la sfîrşitul anexei 1) să arătăm că

$$\int_{\Omega} \varphi(\tfrac{x}{\varepsilon})\, \theta(x)\, dx \longrightarrow \tilde{\varphi} \int_{\Omega} \theta(x)\, dx \quad (\forall)\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Pentru aceasta să observăm că diametrul unei $\varepsilon Y$ perioade este de ordinul lui $\varepsilon$ şi din condiţia asupra lui $\theta$ avem

$$|\theta(x) - \theta_{\varepsilon}^{*}(x)| \leq k\,\varepsilon \qquad (\forall)\ x \in \varepsilon Y$$

Să mai remarcăm şi faptul că $|\varepsilon Y| \longrightarrow \Omega$ de unde

(1) $$\int_{\Omega} \varphi(\tfrac{x}{\varepsilon})\, (\theta(x) - \theta_{\varepsilon}^{*}(x))\, dx \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Să calculăm apoi

(2) $$\int_{\Omega} \varphi(\tfrac{x}{\varepsilon})\, \theta_{\varepsilon}^{*}(x)dx = \int_{\varepsilon Y} \varphi(\tfrac{x}{\varepsilon})\, \theta_{\varepsilon}^{*}(x)dx - \int_{\partial\varepsilon} \varphi(\tfrac{x}{\varepsilon})\, \theta_{\varepsilon}^{*}(x)dx =$$

$$= \tilde{\varphi} \int_{\varepsilon Y} \theta_{\varepsilon}^{*}(x)dx - \int_{\partial\varepsilon} \varphi(\tfrac{x}{\varepsilon})\, \theta_{\varepsilon}^{*}(x)dx \longrightarrow \tilde{\varphi} \int_{\Omega} \theta(x)dx$$

unde $\partial\varepsilon$ este $\varepsilon Y - \Omega$, a cărui grosime este mai mică decît $\varepsilon\sqrt{2}$.

Din (1) şi (2) rezultă exact relaţia dorită.

Observaţie. In general nu se poate spera la o convergenţă tare. Pentru a vedea aceasta este suficient să considerăm în cazul unidimensional funcţia $\varphi(\frac{x}{\varepsilon})=\sin\frac{x}{\varepsilon}$. Valoarea medie a acestei funcţii pe o perioadă este zero, $\tilde{\varphi}=0$. Dacă $\Omega=(a,b)$ cu $a,b\in R$ atunci se vede că

$$\int_a^b \sin^2\frac{x}{\varepsilon}\,dx \to \frac{b-a}{2}$$

Teorema de convergenţă pentru ecuaţia de tip eliptic

Enunţul acestei teoreme a fost dat în §2 pag. 12 .

Demonstraţia pe care o vom da urmează calea indicată de L.Tartar şi se poate găsi în [2].

$u^\varepsilon$ şi $u^0$ sînt elemente din $H_0^1(\Omega)$ care satisfac

$$(3)\qquad \int_\Omega a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx=\int_\Omega f v\,dx \quad (\forall)\ v\in H_0^1(\Omega)$$

$$(4)\qquad \int_\Omega a_{ij}^0 \frac{\partial u^0}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx=\int_\Omega f v\,dx \quad (\forall)\ v\in H_0^1(\Omega)$$

rezultate din (2.3) şi (2.22) prin înmulţire cu funcţii test şi integrare. Dacă în (3) luăm $v=u^\varepsilon$ şi ţinem seama că $a_{ij}(y)\xi_i\xi_j\geq\gamma\xi_i\xi_i\ (\forall)y\in Y,\ \underline{\xi}\in R^n$ rezultă

$$\gamma\int_\Omega\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\,dx\leq\int_\Omega a_{ij}^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\,dx\leq c'\|u^\varepsilon\|_{L^2}\leq C''\|u^\varepsilon\|_{H_0^1}$$

Pe de altă parte se ştie că forma biliniară $a(u,v)\equiv$ $\equiv\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx$ este coercivă pe $H_0^1$. Aceasta rezultă din inegalitatea Friedrichs: $(\exists)$ $\gamma$ constant astfel încît să avem $a(u,u)\geq\delta\|u\|^2_{L^2}$, $(\forall)u\in H_0^1$. Mai mult, avem şi $a(u,u)\geq\inf(\frac{1}{2},\frac{\delta}{2})\|u\|^2_{H_0^1}$. O demonstraţie a acestor rezultate se poate găsi şi în [2].

Folosind acest rezultat, membrul stîng al relaţiei dinainte este pătratul normei în $H_0^1$ şi deci rezultă că

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1} \leq C$$

cu C o constantă independentă de $\varepsilon$. Utilizînd din nou propoziţia de la sfîrşitul anexei 1, putem extrage un subşir notat tot $u^\varepsilon$ astfel ca pentru $\varepsilon \to 0$ să avem

(5) $$u^\varepsilon \to u^* \qquad (u^* \in H_0^1)\ \text{slab în}\ H_0^1(\Omega)$$

In continuare pentru a termina demonstraţia trebuie arătat că $u^* = u^0$.

Din (5) rezultă că derivatele parţiale ale lui $u^\varepsilon$ sînt mărginite în $L^2(\Omega)$. Dacă înmulţim aceste derivate cu $a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})$, cu notaţia din §2, va rezulta următoarea mărginire:

(6) $$\|p_i^\varepsilon(x)\|_{L^2} \equiv \|a_{ij}^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\|_{L^2} \leq C$$

şi extrăgînd un subşir convergent pentru $\varepsilon \to 0$, avem

(7) $$p_i^\varepsilon(x) \to p_i^*(x)\ \text{slab în}\ L^2(\Omega) \qquad (p_i^* \in L^2(\Omega))$$

Dacă rescriem (3) sub forma:

(3') $$\int_\Omega p_i^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f v\, dx \qquad (\forall)\ v \in H_0^1(\Omega)$$

putem să trecem la limită cu $(\forall) v \in H_0^1$ fixat şi obţinem:

(8) $$\int_\Omega p_i^* \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f v\, dx \qquad (\forall)\ v \in H_0^1(\Omega)$$

Să presupunem că

(9) $$P_i^* = a_{ij}^0 \frac{\partial u^*}{\partial x_j}$$

Atunci (8) ne arată că $u^* \in H_0^1$ satisface formularea variaţională (4) a problemei pentru $u^0$ şi din unicitatea soluţiei am avea $u^* = u^0$. Urmează deci că trebuie să demonstrăm (9). Pentru aceasta să alegem funcţia test de o formă specială şi anume dacă $\chi^k(y)$ este soluţia problemei (2.18) atunci scriem:

(10) $$w_\varepsilon(x) \equiv x_k + \varepsilon \chi^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

care se vede că tinde tare la $x_k$ în $L^2(\Omega)$ şi în plus verifică ecuaţia

(11) $$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{în } R^n$$

Inmulţind (11) cu $(\forall) v \in H_0^1$ avem:

(12) $$\int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = 0 \qquad (\forall)\ v \in H_0^1(\Omega)$$

Să considerăm în (3) funcţia test $v = \varphi w_\varepsilon$, unde $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Rezultă:

(13) $$\int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} w_\varepsilon + \varphi \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right) dx = \int_\Omega f \varphi w_\varepsilon\, dx$$

In (12) luăm $v = \varphi u^\varepsilon$ şi avem:

(14) $$\int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u^\varepsilon + \varphi \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right) dx = 0$$

Scăzînd (14) din (13) rezultă:

$$(15) \qquad \int_\Omega a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left[\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} w_\varepsilon - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u^\varepsilon\right]dx = \int_\Omega f \varphi w_\varepsilon \, dx$$

Pentru a trece la limită în (15) vom folosi următorul rezultat: dacă $f_i$ converge tare la $f$ în $B'$ şi $g_i$ converge slab la $g$ în $B$ atunci $\int_\Omega f_i g_i dx \to \int_\Omega fg dx$ ($\int_\Omega fg dx$ reprezintă formal produsul de dualitate dintre $B$ şi $B'$).

In relaţia (15) $a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}$ converge slab în $L^2(\Omega)$ (7), $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} w_\varepsilon$ converge tare la $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_k$ în $L^2(\Omega)$, $a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}$ este $\varepsilon Y$ periodică şi tinde slab în $L^2$ (conform lemei) la valoarea sa medie $a^0_{ik} = [a_{ij}(y)(\delta_{ik} + \frac{\partial \chi^k}{\partial y_i})]^\sim$, iar $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} u^\varepsilon$ converge tare la $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} u^*$ (5). Rezultă deci că pentru $\varepsilon \to 0$ avem:

$$(16) \qquad \int_\Omega (p_j^* x_k - a^0_{jk} u^*)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \int_\Omega f \varphi x_k \, dx$$

pe de altă parte din (3') pentru $v = \varphi x_k$ avem:

$$\int_\Omega p_i^*\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_k + \delta_{ik}\varphi\right)dx = \int_\Omega f \varphi x_k \, dx$$

şi deci (16) devine:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_j^* x_k - a^0_{jk} u^*\right) = -\frac{\partial p_j^*}{\partial x_j} x_k$$

sau

$$p_k^* = a^0_{jk}\frac{\partial u^*}{\partial x_j}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

## Teorema de convergenţă pentru cazul termoelasticităţii

Enunţul teoremei a fost dat la sfîrşitul §6 pag. 27

Demonstraţia acestei teoreme se datorează lui G.Paşa[8].

Ecuaţiile (6.1)(6.2) admit o soluţie unică notată $y=(u^{\varepsilon},\vartheta^{\varepsilon})$. Dacă condiţiile iniţiale sînt zero atunci se cunosc [5] următoarele estimări:

(17) $$|y^{\varepsilon}| \leq C_0 \|f,r\|_{L^2(Q_T)\times L^2(Q_T)}$$

(18) $$|y|^2 = \langle (u,\theta),(u,\theta)\rangle = \int_0^T\int_\Omega \left\{ u_i^2 + u_i'^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 + \int_0^t \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right)^2 \right\}$$

pentru $t\in(0,T)$, $Q_T=[0,T]\times\Omega$, iar $'$ semnifică $\partial/\partial t$. Teorema de existenţă şi unicitate se poate găsi în [5].

Fie $h(\varphi) \equiv \int_0^T h(t)\varphi(t)(v)$ $\varphi \in C_0^\infty([0,T])$ şi

$c = C_0 \|(f,r)\|_{L^2(Q_T)\times L^2(Q_T)}$

Conform cu (17) avem:

$$\int_\Omega\int_0^T (u_i^{\varepsilon})^2\,dx\,dt \leq C$$

$$\int_\Omega\int_0^T (u_i^{\varepsilon\prime})^2\,dx\,dt \leq C$$

$$\int_\Omega\int_0^T \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right)^2 dx\,dt \leq C$$

pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$. Rezultă că $(\exists)\ u^*\in L^2(0,T;\ H^1(\Omega))$ astfel încît $u^{\varepsilon}\rightharpoonup u^*$ şi

$$u^{\varepsilon}(\varphi)\to u^*(\varphi) \text{ slab în } H^1(\Omega),\ (\forall)\ \varphi\in C_0^\infty([0,T])$$

(19) $$u^{\varepsilon\prime}(\varphi)\to u^{*\prime}(\varphi) \text{ slab în } L^2(\Omega),\ (\forall)\ \varphi\in C_0^\infty([0,T])$$

Pentru $\theta^{\varepsilon}$ avem

$$\int_{\Omega}\int_{0}^{T}(T-t)\left(\frac{\partial\theta^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)^2 = \int_{\Omega}\int_{0}^{T}\int_{0}^{t}\left(\frac{\partial\theta^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)^2 \leq C, \ (\forall)\ \varepsilon>0$$

$$(T-\alpha)\int_{\Omega}\int_{0}^{\alpha}\left(\frac{\partial\theta^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)^2 < \int_{\Omega}\int_{0}^{T}(T-t)\left(\frac{\partial\theta^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)^2, \ (\forall)\ \alpha\in(0,T)$$

şi deci $(\exists)\ \theta^{*}\in L^2(0,T-\alpha;\ H^1(\Omega))$ cu

(20)

$$\theta^{\varepsilon}\to\theta^{*} \quad \text{slab în } L^2(0,\alpha;\ H^1(\Omega))$$

$$\theta^{\varepsilon}(\varphi)\to\theta^{*}(\varphi) \quad \text{slab în } H^1(\Omega),\ (\forall)\ \varphi\in C_0^{\infty}([0,T])$$

Ca şi în cazul teoremei precedente va trebui să arătăm că $u^{*}=u^{0}$ şi $\theta^{*}=\theta^{0}$, unde $(u^{0},\theta^{0})$ este soluţia problemei (6.8) (6.22).

Dacă $w^{kh}$ este soluţia problemei (6.18) atunci să luăm $w_{\varepsilon i}=\delta_{ik}x_h+\varepsilon w_i^{kh}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Rezultă că vom avea:

(21) $$\int_{\Omega} a_{ijpq}^{\varepsilon}\, e_{pq}(w_{\varepsilon})\, e_{ij}(v)=0 \quad (\forall)\ v\in L^2(0,\alpha;\ H^1(\Omega))$$

Funcţia test v o vom lua de forma $v=\varphi\cdot v_1$, cu $\varphi\in C_0^{\infty}([0,T])$ şi $v_1\in H^1(\Omega)$. Atunci ecuaţia (6.1) se poate scrie:

(22)

$$\int_{\Omega} a_{ijpq}^{\varepsilon}\, e_{pq}(u^{\varepsilon}(\varphi))\, e_{ij}(v)+\int_{\Omega}\rho^{\varepsilon}u_i^{\varepsilon}(\varphi'')v_i-$$

$$-\int_{\Omega}\beta_{ij}^{\varepsilon}\,\theta^{\varepsilon}(\varphi)\,e_{ij}(v)=\int_{\Omega}f_i(\varphi)v_i$$

Dacă în (21) luăm $v_k=u_k^{\varepsilon}(\varphi)\psi$ şi în (22) $v_k=w_{\varepsilon k}\psi$ cu $\psi\in C_0^{\infty}(\Omega)$ şi scădem cele două relaţii, ţinînd seama de simetria coeficienţilor, avem:

$$\int_\Omega a^\varepsilon_{ijpq} \left\{ \frac{\partial u^\varepsilon_p(\varphi)}{\partial x_q} w_{\varepsilon i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial w_{\varepsilon i}}{\partial x_j} u^\varepsilon_p(\varphi) \frac{\partial \psi}{\partial x_q} \right\} +$$

$$+ \int_\Omega \rho^\varepsilon u^\varepsilon_i(\varphi'') w_{\varepsilon i} \psi - \int_\Omega \beta^\varepsilon_{ij} \theta^\varepsilon(\varphi) \left\{ w_{\varepsilon i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \psi e_{ij}(w_\varepsilon) \right\} =$$

$$= \int_\Omega f_i(\varphi) w_{\varepsilon i} \varphi$$

Să notăm limita slabă în $L^2(\Omega)$ a lui $a^\varepsilon_{ijpq} \frac{\partial u^\varepsilon_p(\varphi)}{\partial x_q}$ cu $\sigma^*_{ij}(\varphi)$ (această limită există din (19) şi $a^\varepsilon_{ijpq} \in L^\infty(\Omega)$ ). Dacă trecem la limită în ultima relaţie cu $\varepsilon \to 0$, înlocuind membrul drept cu limita din (22) obţinută pentru $v_i = \psi \delta_{ik} x_h$ se obţine:

$$\int_\Omega \left\{ \sigma^*_{ij}(\varphi) \delta_{ik} x_h \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - a^0_{khpq} u^*_p(\varphi) \frac{\partial \psi}{\partial x_q} \right\} +$$

$$+ \int_\Omega \tilde{\rho} u^*_i(\varphi'') \delta_{ik} x_h \psi - \int_\Omega \tilde{\beta}_{ij} \theta^*(\varphi) \delta_{ik} x_h \frac{\partial \psi}{\partial x_j} -$$

$$- \left[ \beta_{ij} \left( \delta_{ik} \delta_{jh} + \frac{\partial w^{kh}_i}{\partial y_j} \right) \right]^\sim \int_\Omega \theta^*(\varphi) \psi = \int_\Omega \sigma^*_{ij}(\varphi) e_{ij}(\delta_{ik} x_h \psi) +$$

$$+ \int_\Omega \tilde{\rho} u^*_i(\varphi'')(\delta_{ik} x_h \psi) - \int_\Omega \tilde{\beta}_{ij} \theta^*(\varphi) e_{ij}(\delta_{ik} x_h \psi)$$

Rezultă deci:

$$\sigma^*_{kh}(\varphi) = a^0_{khpq} \frac{\partial u^*_p(\varphi)}{\partial x_q} - \left[ \beta_{ij} e_{ij}(w^{kh}) \right]^\sim \theta^*(\varphi) \tag{23}$$

Trecînd la limită în (22) unde ţinem seama de (23) rezultă

$$\int_\Omega \left\{ a^\varepsilon_{ijpq} e_{pq}(u^*(\varphi)) - \left[ \beta_{pq} e_{pq}(w^{ij}) \right]^\sim \theta^*(\varphi) \right\} e_{ij}(v) +$$

$$+ \int_\Omega \tilde{\rho} u^*_i(\varphi'') v_i - \int_\Omega \tilde{\beta}_{ij} \theta^*(\varphi) e_{ij}(v) = \int_\Omega f_i(\varphi) v_i$$

şi deci $(u^*, \theta^*)$ verifică ecuaţia:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( a^0_{ijpq} \frac{\partial u^*_p}{\partial x_q} \right) - \left( \tilde{\beta}_{ij} + \left[ \beta_{pq} e_{pq}(w^{ij}) \right]^\sim \right) \frac{\partial \theta^*}{\partial x_j} - \tilde{\rho} u''^*_i = -f_i \tag{24}$$

Dacă luăm acum ecuaţia temperaturii să notăm $k_{ij}\frac{\partial \theta^{\varepsilon}}{\partial x_j} \to \rho_i^*$ slab în $L^2(\Omega)$. In ecuaţia (6.13) luăm $w_\varepsilon = x_k + \varepsilon w(\frac{x}{\varepsilon})$. Scăzînd această relaţie din (6.2) avem:

$$\int_\Omega k_{ij}^{\varepsilon}\left\{\frac{\partial \theta^{\varepsilon}(\varphi)}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} w_\varepsilon - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\theta^{\varepsilon}(\varphi)\right\} -$$

$$-T_0\int_\Omega a^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}(\varphi')w_\varepsilon\psi - \int_\Omega T_0\beta_{ij}^{\varepsilon}\frac{\partial u_i^{\varepsilon}(\varphi')}{\partial x_j}w_\varepsilon\psi = \int_\Omega \nu(\varphi)w_\varepsilon\psi$$

şi trecînd la limită

$$\int_\Omega\left\{\rho_i^*(\varphi)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}x_p - k_{jp}^{0}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\theta^*(\varphi)\right\} - T_0\int_\Omega \tilde{a}\,\theta^*(\varphi')x_p\psi -$$

$$-T_0\int_\Omega \mu(\varphi')x_p\psi = \int_\Omega \rho_i^*(\varphi)\frac{\partial}{\partial x_i}(x_p\psi) -$$

$$-T_0\int_\Omega \tilde{a}\,\theta^*(\varphi')(x_p\psi) - T_0\int_\Omega \mu(\varphi')x_p\psi$$

unde $\beta_{ij}^{\varepsilon}e_{ij}(u^{\varepsilon}(\varphi')) \to \mu(\varphi')$ slab în $L^2(\Omega)$, $(\forall)\ \varphi\in C_0^{\infty}([0,T])$

Rezultă deci

(25) $$\rho_i^* = k_{ij}^{0}\frac{\partial \theta^*}{\partial x_j}$$

Pentru evaluarea lui $\mu$ se procedează după cum urmează. Să rescriem ecuaţia (6.19) sub forma

(26) $$\int_\Omega a_{ijpq}^{\varepsilon}e_{pq}(z^{\varepsilon})e_{ij}(v) = -\int_\Omega \beta_{ij}^{\varepsilon}e_{ij}(v)$$

unde $z^{\varepsilon} = \varepsilon\,\Theta(\frac{x}{\varepsilon})$. Luînd în (26) $v=u^{\varepsilon}(\varphi)\psi$ şi în (22) $v=z^{\varepsilon}\psi$, cu $\psi\in C_0^{\infty}(\Omega)$ şi scăzînd rezultă:

$$\int_\Omega a_{ijkh}^{\varepsilon}\left\{\frac{\partial u_k^{\varepsilon}(\varphi)}{\partial x_h}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}z_i^{\varepsilon} - \frac{\partial z_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_k}u_h^{\varepsilon}(\varphi)\right\} = \int_\Omega f_i(\varphi)z_i^{\varepsilon}\psi$$

$$-\int_\Omega \rho^\varepsilon u_i^\varepsilon(\varphi'') z_i^\varepsilon \psi + \int_\Omega \beta_{ij}^\varepsilon \theta^\varepsilon(\varphi)\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_j} z_i^\varepsilon + \psi e_{ij}(z^\varepsilon)\right\} +$$

$$+\int_\Omega \beta_{ij}^\varepsilon \left\{\frac{\partial\psi}{\partial x_j} u_i^\varepsilon(\varphi) + \frac{\partial u_i^\varepsilon(\varphi)}{\partial x_j}\psi\right\}$$

Cînd $\varepsilon \to 0$, $z^\varepsilon \to 0$ tare în $L^2(\Omega)$. Deci

$$-[a_{jkh} e_{ij}(\Theta)]^\sim \int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial x_k} u_h^*(\varphi) = [\beta_{ij} e_{ij}(\Theta)]^\sim \int_\Omega \theta^*(\varphi)\psi +$$

$$+\int_\Omega \tilde\beta_{ij} u_i^*(\varphi)\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + \int_\Omega \mu(\varphi)\psi$$

(27) $$\mu(\varphi) = \left\{[a_{ijkh} e_{kh}(\Theta)]^\sim + \beta_{ij}\right\}^\sim \frac{\partial u_i^*(\varphi)}{\partial x_j} -$$

$$- [\beta_{ij}e_{ij}(\Theta)]^\sim \theta^*(\varphi)$$

Ecuaţiile (25) (27) şi (6.2) pentru $\varepsilon \to 0$ implică:

(28) $$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}^0 \frac{\partial\theta^*}{\partial x_i}\right) - T_0\left\{\tilde a - [\beta_{ij}e_{ij}(\Theta)]^\sim\right\}\theta^{*\prime} -$$

$$-T_0\left\{\tilde\beta_{ij} + [a_{ijkl}e_{kl}(\Theta)]^\sim\right\}\frac{\partial u_i^{*\prime}}{\partial x_j} = -r$$

Ecuaţiile (24) şi (28) avînd soluţie unică, coeficienţii fiind aceeaşi rezultă $(u^*, \theta^*) = (u^0, \theta^0)$.

# B I B L I O G R A F I E

[1] Bensoussan, A., Lions J.L. şi Papanicolaou G -"Asymptotic Analysis for Periodic Structures", North-Holland, Amsterdam (1978).

[2] Sanchez-Palencia E. "Non-Homogeneous Media and Vibration Theory" Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag (1980).

[3] De Giorgi, E., Spagnolo S. - Sulla convergenza delli integrali dell energia par operatori ellittici del secondo ordina, Bull Unione Mat.Ital. 8, p.391-411(1973).

[4] Levy Th. - Milieu élastique soumis à des forces volumiques de répartition périodique fine, J.de Mécanique 20,3, p.495-508 (1981).

[5] Ieşan D. - "Teoria termoelasticităţii", Edit.Acad.R.S.R., Bucureşti (1979).

[6] Chadwich P., Thermoelasticity. The Dynamical Theory, cap.VI in vol.I Progress in Solid Mechanics (edited by I.N.Swedom and R.Hill) North-Holland (1960).

[7] Ene H.I., On linear thermoelasticity of composite materials, Int.J.Enging.Sci.21,5,pp.443-448(1983)

[8] Paşa G. A convergence theorem for a periodic media with thermoelastical properties, Int.J.Enging.Sci.(1983) (sub tipar).

[9] Mc.Connel W., On the aproximation of elliptic operators with discontinuous coeficients, Ann.Scuola Normale Sup di Pisa, 76, 34(1975).

[10] Bourgat J.F., Numerical experiments of the homogeneization method for operators with periodic coefficients, IRIA, Rapport No.277, (1978).

[11] Babuška I., Homogeneization approach in engineering pp.137-153, in Computing Method in Applied Sciences and Engineering. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 134, Springer-Verlag (1976).

[12] Hashin Z., Shtrikman S. - Note on a Variational approach to the theory of composite elastic materials, J. of the Franklin Institute 271, pp.336-341 (1961).

[13] Hashin Z., Shtrikman S. - A variational approach to the theory of elastic behaviour of multiphase materials, J. of the Mech. and Phys. of Solids, 11, p.127-140 (1963).

[14] Hashin Z. - The elastic moduli of heterogeneous materials J.Appl. Mech. 29, Trans.ASME, 84, E. p.143-150 (1962).

[15] Hill R. - Elastic properties of reinforced solids: Some Theoretical Principles, J.Mech.Phys. of Solids, 11, p.357-372 (1963).

[16] Hashin Z. , Waltar Rosen B. - The elastic moduli of fiber-reinforced materials, J.Appl.Mech., Trans.ASME, p.223-232 (1964).

[17] Tartar L. - Estimations de coefficients homogénéous, Lecture Notes in Math., 704 , 364-373, Springer-Verlag (1976).

[18] Paşa G. - Contribuţii la studiul mediilor periodice cu ajutorul metodei omogenizării, Teză de doctorat, Universitatea Bucureşti (1983).

[19] Caillerie D. - Plaques élastiques minces à structure périodique de période et d'éspaisseur comparables, CR Acad.Sci.Paris t.294, II p.159-162 (1982).

[20] Duvaut G. , Lions J.L.. - "Les inéquations en mécanique et en physique", Dunod, Paris (1972).

[21] Necas, J., Hlavacek I. - "Mathematical Theory of Elastic and Elastico-plastic Boodies: An Introduction", Studies in Applied Mathematics, Elsevier (1981).

[22] Fichera G. - Problemi elastostatici con medi unilaterali il problema di Signorini con ambigue condizioni al contoro, Mem.Acad.Naj.Lineci 8(7) p.91-140 (1964).

[23] Murat F. - Sur l'homogeneization d'inequations elliptiques du 2 ème ordre, relative au convexe $K(\psi_1,\psi_2) = \{v \in H_0^1(\Omega); \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ p.p.} \Omega\}$ Preprint de l'Université de Paris VI, Analyse numerique et fonctionnelle.

[24] Fleury Fr., Paşa G., Poligevschi D. - Homogeneization de corps composites sous l'action de forces de grande frequence spatiale. C.R.Acad.Sci.Paris, t.289, B-241 (1979).

[25] Paşa G., Poligevschi D. - Comportamentul macroscopic al unui mediu elastic eterogen, St.cerc.mat., 32, 4, p.445 (1980).

[26] Paşa G., Poligevschi D. - Homogeneization of a transmission problem with microscopic forces, Numer.Funct.Anal. and Optimiz. 3(1), 95-104(1981).

[27] Germain P. - La methode des puissances virtuelles en mecanique des milieux continus, J.Mecanique 12, 2, p.235-274 (1973).

[28] Lions, J.L., Magenes E. - Problèmes aux limites non-homogenes et applications, Dunod, Paris (1968).

[29] Yosida K. - Functional Analysis, Springer (1969).

[30] Adams, R.A., Sobolev Spaces, Academic Press (1975).

[31] Nečas, J. - Les methods directes en theorie des equations elliptiques, Masson - Academic, Paris-Praga (1967).