INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

TEORIA RATIONALA A OMOTOPIEI

de

Stefan PAPADIMA și Laurențiu PAUNESCU

SEMINARIILE INCREST Nr.1/1981

BUCURESTI

I N T R O D U C E R E

Aceste Note apar ca rezultat al unui seminar coordonat de autori, la Facultatea de Matematică a Universităţii din Bucureşti, în anul universitar 1978-1979.

Ca domeniu al topologiei algebrice, teoria raţională a omotopiei se constituie prin lucrarea lui Quillen, din 1969. Ea vine să dea răspuns problemei centrale a topologiei algebrice şi anume găsirea unor invarianţi algebrici, efectiv calculabili, care să descrie tipul de omotopie al spaţiilor - în contextul spaţiilor raţionale, i.e., neglijînd fenomenele de torsiune. Următoarea contribuţie, decisivă, o aduce lucrarea lui Sullivan din 1975. Obiectivul urmărit este acelaşi: a descrie, modulo torsiune, categoria omotopică a spaţiilor printr-o categorie algebrică; invariantul lui Sullivan, numit modelul minimal al spaţiului, este obiect într-o categorie de algebre diferenţiale graduate şi s-a impus între timp prin simplitatea sa şi prin largile posibilităţi de a fi manevrat. Pe lîngă faptul că, din punctul de vedere raţional, se pot obţine răspunsuri nete, ce nu sînt de sperat din unghiul clasic, teoria şi-a dovedit puterea de aplicabilitate şi în domeniile conexe, ale geometriei şi topologiei diferenţiale.

Posibilităţile oferite de acest domeniu nou au produs între timp o acumulare firească de lucrări, dedicată, în covîrşitoarea lor majoritate, extinderilor şi aplicaţiilor. După cunoştinţa noastră, lipseşte pînă astăzi o prezentare generală a teoriei, explicită şi accesibilă, cu excepţia lucrării [22] , formulată însă în limbaj semi-simplicial.

Obiectivul acestor Note este, prin urmare, de a oferi o lucrare de sinteză asupra teoriei, coordonînd fapte răspîndite în literatură şi punînd la dispoziţie demonstraţii complete, la un nivel satisfăcător de generalitate. Rezultate în întregime originale, ţinînd de aplicaţiile teoriei, vor apare ulterior.

Precizăm în acelaşi timp că nu am intenţionat o lucrare auto-conţinută; lectura ei presupune cunoscute faptele standard ale topologiei algebrice, conţinute, de exemplu, în lucrarea [1]. Socotim că specialiştii vor afla aici o prezentare a tehnicilor şi posibilităţilor unui domeniu nou şi nu îndeajuns de bine cunoscut. Am avut în vedere, prin alcătuirea unei bibliografii de perspectivă şi posibilitatea ca această lucrare să fie folosită ca ghid al rezultatelor fundamentale ale teoriei, pentru cei direct interesaţi în aplicaţii. Nu vom intra în alte amănunte privind structura lucrării, deoarece ele pot fi găsite în introducerile capitolelor.

Dorim să exprimăm pe această cale vii mulţumiri profesorilor noştri Dan Burghelea, care ne-a iniţiat şi încurajat în acest domeniu şi Kostake Teleman, care a avut amabilitatea de a citi manuscrisul acestei lucrări şi a formula numeroase observaţii ce au condus la îmbunătăţirea ei.

Autorii îşi exprimă regretul de a fi întîrziat redactarea acestor Note, şi speranţa că alte seminarii ale Secţiei de Matematică INCREST vor fi valorificate cu o mai mare promptitudine, pe această cale.

TEORIA RATIONALA A OMOTOPIEI

CAPITOLUL I: LOCALIZAREA SPATIILOR NILPOTENTE

Scopul acestui capitol este de a lămuri modul în care, dat un CW-spaţiu X, se poate asocia acestuia un alt spaţiu X_o, numit localizarea la zero a lui X, care are proprietatea că reţine din informaţiile topologiei algebrice a lui X exact partea fără torsiune; X_o este determinat de proprietatea că invarianţii structurali ai tipului său de omotopie (grupuri de omologie, de omotopie) sînt Q-spaţii vectoriale (de unde apelativul de Q-spatii) şi de existenţa aplicaţiei de localizare, $X \xrightarrow{\ell} X_o$, cerută a induce izomofirsm în $H^*(.;Q)$. In ce măsură această viziune simplificatoare, de "tensorizare cu Q" a categoriei omotopice, simplifică efectiv lucrurile, cum şi cît de simplu adică pot fi descrise în continuare Q-spaţiile, constituie obiectivul celorlalte capitole.

Ca tehnică preferăm să lucrăm nu cu spaţii, ci cu limite inverse de turnuri de fibrări principale, pentru care putem uza de criteriile de cohomologie clasice care obstrucţionează posibilitatea ridicării aplicaţiilor. In §2 prezentăm caracterizarea spaţiilor de acest tip (criteriul nilpotenţei). Calculele făcute în §1 procură o primă clasă de exemple - esenţială - de localizări, şi anume cazul spaţiilor Eilenberg-MacLane, sub forma: $K(\pi,n) \to K(\pi\otimes Q,n)$. In §3, uzînd de acest fapt, realizăm localizarea spaţiilor nilpotente, lucrînd termen cu termen pe turnul lor Postnikov. Exemplele - de determinare efectivă a localizării-din §4, prefigurează o temă ce va fi reluată în Cap.II (§5) şi Cap.IV(§4), cea a formalităţii şi anume prin numitorul lor comun: spaţiile considerate au proprietatea că: localizarea lor, şi deci, implicit, toată informaţia " raţională" despre tipul lor de omotopie, poate fi recuperată din cunoaşterea algebrei lor de coomologie $H^*(\cdot;\mathbb{Q})$-obiect evident mai lesne de procurat.

Un excelent text de referință pentru tematica localizării îl constituie [3] (unde nu este considerat numai aspectul localizării la zero, ci în raport cu o colecție arbitrară de prime) și pe care de altfel l-am folosit copios în redactarea capitolului de față.

Plecînd de la ideea că nu am dorit - și nici nu ar fi fost de dorit - o prezentare monografică și auto-conținută a teoriei, am trimis la surse cuprinzătoare și bine explicitate, ori de cîte ori eforturile și mai ales tehnicile demonstrării nu se dovedeau indispensabile prezentării ulterioare a teoriei. In acest sens, spre exemplu, am organizat § 0 sub forma unei liste concise de rezultate clasice din teoria omotopiei. În ceea ce privește economia celorlalte secțiuni, am ales să tratăm mai cu de-amănuntul acele chestiuni care, fie că ne-au apărut ca esențiale ca pași ai teoriei, fie că, după cunoștința noastră, nu le-am aflat detailate în textele pe teme de omotopie rațională sau pe teme adiacente: coomologia rațională a spațiilor Eilenberg-MacLane (§1), condițiile de finitudine (§1 și §2), <u>descompunerea Postnikov</u> a spațiilor și a aplicațiilor de spații nilpotente (§2), condițiile echivalente pentru aplicația de localizare (§3); în sfîrșit, am ținut să avem de la început la îndemînă un număr suficient de (contra)exemple și modul practic de întrebuințare al localizării la zero (formele raționale ale <u>teoremelor de periodicitate</u>) în §4.

§0 : PRELIMINARII TOPOLOGICE

Această secțiune o consacrăm revederii unor noțiuni și rezultate clasice de teoria omotopiei, care se găsesc expuse în orice text de referință pe această temă. De aceea, ne vom limita la a da definițiile, de a fixa terminologia și de a trece în revistă re-

rezultatele fundamentale, de care vom uza în continuare, omițînd în general, programatic, demonstrațiile. Pe parcurs, atunci cînd va fi cazul, vom apela și la alte fapte standard de teoria omotopiei. Monografia [1] constituie textul de referință de bază pentru această secțiune.

Pentru orice grup π și pentru orice $n \geq 1$ (π necesarmente abelian pentru $n > 1$) există un unic tip de omotopie de CW-complex (pe scurt CW-spațiu), notat <u>$K(\pi,n)$</u>, cu proprietatea:

$$\pi_i(K(\pi,n))=0 \qquad \text{pentru } i \neq n$$
$$\pi_n(K(\pi,n))=\pi \qquad [1] \text{ p.424-426.}$$

Avem anulările: $\tilde{H}^i(K(\pi,n))=0$, pentru $i<n$ (pentru orice coeficienți) și izomorfismele:

$$H^n(K(\pi,n),\pi) \sim Hom(H_n(K(\pi,n),\mathbb{Z}),\pi) \sim$$
$$\sim Hom(\pi_n(K(\pi,n)),\pi) \sim Hom(\pi,\pi).$$

Elementul $u_n \in H^n(K(\pi,n),\pi)$ care se corespunde prin acest izomorfism cu $id \in Hom(\pi,\pi)$ îl vom numi <u>elementul universal</u> în coomologia lui $K(\pi,n)$ (compară cu [1], p.425, unde e folosită terminologia de "element n-caracteristic") în ipoteza că π este abelian.

1. <u>TEOREMA DE CLASIFICARE</u> [1], p.428. Dacă π este grup abelian, pentru orice CW-complex relativ (X,A), corespondența

$$\begin{array}{ccc} [(X,A);(K(\pi,n),pt)] & \longrightarrow & H^n(X,A;\pi) \\ \psi & & \psi \\ [f] & \longrightarrow & f^*(u_n) \end{array}$$

este bijectivă (cu "pt" vom nota ades punctul-bază). In cazul $A=\phi$, există de asemenea o bijecţie:

$$[X, K(\pi,n)] \longrightarrow H^n(X,\pi)$$ definită analog.

Pentru n=1 şi π de data aceasta arbitrar, pentru orice CW-complex conex prin arce X corespondenţa:

$$[(X,pt),(K(\pi,1),pt)] \longrightarrow Hom(\pi_1(X,pt),\pi)$$
$$[f] \longrightarrow f_{\#}:\pi_1(X,pt)\to\pi_1(K(\pi,1),pt)$$

e bijectivă [1] p.427.

§2. OBSTRUCTII COOMOLOGICE IN PROBLEMA EXTENSIEI

Dacă π este grup abelian, dacă (X,A) e CW-complex relativ, aplicaţia $f:A\to K(\pi,n)$ se extinde la X dacă şi numai dacă $\delta f^*(u_n)=0$ în $H^{n+1}(X,A;\pi)$. $\delta f^*(u_n)$ va fi numită <u>obstrucţia coomologică la extinderea aplicaţiei f</u> [1] p.428.

Vom considera în continuare fibrări notate

$$K(\pi,n-1)=\Omega \hookrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow K(\pi,n)\ni pt \quad (\text{cu } \pi \text{ abelian şi } n>1)$$

unde: $\mathcal{P}$ desemnează spaţiul total (contractibil) al drumurilor ce pornesc din punctul bază, proiecţia se face luînd extremitatea drumurilor, iar Ω desemnează fibra, egalitatea cu $K(\pi,n-1)$ rezultînd din şirul exact de omotopie al fibrării şi din unicitatea (modulo -echivalenţă omotopică) a spaţiilor de tip (π,m). Fibrarea de mai sus o vom denumi în continuare <u>fibrarea universală de tip</u> $(\pi,n-1)$. Vom numi <u>fibrare principală de tip</u> $(\pi,n-1)$ o fibrare indusă din fibrarea universală de acelaşi tip, prin intermediul unei aplicaţii $(B,pt)\xrightarrow{k}(K(\pi,n),pt)$. Vom nota cu $[k]\in H^n(B;\pi)$

elementul $k^*(u_n)$. k se va numi <u>aplicatia clasifiantă</u>, iar $[k]$ se va numi <u>clasa caracteristică</u> a fibrării.

3. <u>TEOREMA DE CLASIFICARE (PENTRU RIDICARI)</u> [1] p.432-434. Dacă $E \xrightarrow{p} B$ este o fibrare principală de tip $(\pi, n-1)$ (n>1, cu condiţia ca π să fie abelian), dacă (X,A) e un CW-complex relativ, dată fiind diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"] & B \end{tikzcd}$$

există săgeata punctată care să facă diagramele corespunzătoare comutative (în care caz $\bar{f}$ se va numi o <u>ridicare a lui f relativă la f'</u>), dacă şi numai dacă o clasă de coomologie bine precizată, notată $o(f,f') \in H^n(X,A;\pi)$ şi numită <u>obstrucţia la ridicare a perechii (f,f')</u> se anulează.

In cazul $A=\phi$, obstrucţia poate fi uşor descrisă prin

$$o(f)=f^*([k]).$$

In aceleaşi condiţii dacă avem două ridicări ale lui f, relative la f', $\bar{f}_0$ şi $\bar{f}_1$, atunci ele vor fi <u>omotope relativ la p</u> (i.e. tot prin ridicări ale lui f relativ la f') dacă şi numai dacă o anumită clasă de coomologie notată $d(\bar{f}_0,\bar{f}_1) \in H^{n-1}(X,A;\pi)$ şi numită <u>diferenta dintre</u> $\bar{f}_0$ şi $\bar{f}_1$, se anulează.

In cele ce urmează, în marea majoritate a cazurilor, fibrările considerate vor fi prin construcţie principale şi problema existenţei ridicărilor (şi a omotopiilor de ridicări) va putea fi tranşată uşor cu ajutorul obstrucţiilor coomologice descrise mai sus. In cazul în care, dată fiind fibrarea $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B \ni pt$ despre care avem numai informaţia că $F=K(\pi,n)$ (π abelian) pentru a decide dacă fibrarea este sau nu principală se poate folosi următorul criteriu [2], p.10:

4. <u>CRITERIUL ORIENTABILITATII</u>. In ipotezele de mai sus, fibrarea e principală dacă şi numai dacă acţiunea lui $\pi_1(B,pt)$ pe $\pi_n(F)$ e trivială, această acţiune fiind dată în felul următor: lui $[\omega]\in\pi_1(B,pt)$ i se asociază $h_{[\omega]}\in[F,F]$ ca în [1], p.101 care acţionează pe $\pi_n(F)$ prin $(h_{[\omega]})_\#:$ $\pi_n(F)\to\pi_n(F)$ (ţinînd cont de faptul că spaţiile $K(\pi,n)$, cu π abelian sînt spaţii simple).

Fie $0\to A\to X\xrightarrow{p} G\to 1$ şir exact de grupuri, cu A abelian. Considerînd aplicaţia $K(X,1)\xrightarrow{p}K(G,1)$ (care rezultă din Th.1) drept fibrare (ceea ce e binecunoscut că e posibil, în categoria omotopică şi ceea ce vom mai considera de multe ori în viitor, prin abuz de limbaj şi fără alte precizări), se constată uşor că fibra ei este un $K(A,1)$. Pe scurt deci, fie fibrarea $K(A,1)\xhookrightarrow{i}K(X,1)\xrightarrow{p}K(G,1)$

5. <u>LEMA</u>. Fibrarea este principală dacă şi numai dacă A este inclus în centrul lui X: $A\subset Z(X)$.

<u>Demonstraţie:</u> Fie $[\omega]\in\pi_1(K(G,1),pt.)$ pe care evident îl putem considera de forma $[\omega]=[p\beta]$ cu $[\beta]\in\pi_1(K(X,1),pt)$

In diagrama

$$\begin{tikzcd}
K(X,1) \arrow[rr, "p"] & & K(G,1) \\
K(A,1)\times\{0\}\cup\{pt\}\times I \arrow[u, "i\cup\beta"] \arrow[rr, hook] & & K(A,1)\times I \arrow[u, "\omega\circ pr_I"'] \arrow[ull, dashed, "F"']
\end{tikzcd}$$

(din proprietatea de ridicare a omotopiilor, a fibrărilor), există săgeata punctată care asigură comutativităţile evidente. Prin definiţie $h_{[\omega]}=[F|_{t=1}]\in[K(A,1),K(A,1)]$. Plecînd de la definiţii, se verifică comutativitatea în

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(K(A,1),pt) & \xrightarrow{(h_{[\omega]})^{\#}} & \pi_n(K(A,1),pt) \\ \Big\downarrow i_{\#} & & \Big\downarrow i_{\#} \\ \pi_n(K(X,1),pt) & \xrightarrow[h_{[\beta]^{-1}}]{} & \pi_n(K(X,1),pt) \end{array}$$

unde săgeata $h_{[\beta]^{-1}}$ desemnează acțiunea lui $[\beta]^{-1}\in\pi_1(K(X,1),pt)$ pe $\pi_n(K(X,1),pt)$, în sensul din [1], p.384. Tinînd cont de faptul că, pentru n=1, această acțiune se face prin conjugare, şi de injectivitatea lui $i_{\#}$ în acest caz lema rezultă folosind criteriul 4.

$\oint 1$: SIRUL SPECTRAL AL UNEI FIBRARI. TRANSGRESIA

Fie $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ o fibrare orientabilă (în sensul din [1], p.476) unde B este CW-spaţiu conex prin arce.

Vom presupune că cititorul este familiarizat cu şirul spectral de coomologie asociat unei astfel de fibrări (pentru detalii: [1] p.490-498).

Independent de orice consideraţii de şir spectral se introduce transgresia fibrării, considerînd:

$$H^q(F) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(E,F) \xleftarrow{p^*} H^{q+1}(B,pt) \xrightarrow{j^*} H^{q+1}(B)$$

(unde j^* e indusă de incluziunea $B \hookrightarrow (B,pt)$), prin

$$\tau : \delta^{-1}\mathrm{Im}\,p^* \longrightarrow H^{q+1}B/_{j^*\mathrm{Ker}\,p^*}\ ;\ \tau(u)=j^*p^{*-1}\delta(u)\ ;$$

definiţia se verifică uşor ca fiind corectă.

In anumite situaţii transgresia se poate citi cu ajutorul şirului spectral asociat fibrării după cum urmează (nespecificarea coeficienţilor va desemna: coeficienţi arbitrari)

1. PROPOZITIE

In ipoteza de mai sus dacă $\tilde{H}^n(F)=0 \quad (0 \le n < q)$

rezultă : a) $\delta^{-1} \mathrm{Im}\, p^* = H^q(F)$; b) $H^{q+1}B / j^* \mathrm{Ker}\, p^* \sim H^{q+1}(B)$;

c)

$$\begin{tikzcd}
\delta^{-1}\mathrm{Im}\, p^* \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal] & H^{q+1}B / j^*\mathrm{Ker}\, p^* \arrow[d, "\wr"] \\
H^q(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{q+1}(B) \arrow[d, equal] \\
E_{q+1}^{0,q} \arrow[r, "d_{q+1}"] & E_{q+1}^{q+1,0}
\end{tikzcd}$$

Diagrama de mai sus identifică transgresia cu diferenţiala q+1 din şirul spectral asociat fibrării $(E,\phi) \to (B,\phi)$.

Demonstraţie

b) Pe şirul spectral asociat fibrării $(E,F) \to (B,pt)$ p^* se citeşte în felul următor [1] p. 499 :

$$H^{q+1}(B,pt) \xrightarrow{\sim} H^{q+1}(B,pt;H^0(F)) = \tilde{E}_2^{q+1,0} \to \tilde{E}_\infty^{q+1,0} = F^{q+1}H^{q+1}(E,F) \hookrightarrow H^{q+1}(E,F)$$

In condiţiile noastre impuse asupra fibrei $\tilde{E}_r^{s,t} = 0$ pentru $r \geq 2$ şi $0<t<q$, deci : $\tilde{E}_{r+1}^{q+1,0} = \tilde{E}_r^{q+1,0}$, $r<q$. Deoarece $\tilde{E}_\infty^{q+1,0} = \tilde{E}_{q+2}^{q+1,0} = \tilde{E}_{q+1}^{q+1,0} / d_{q+1}(\tilde{E}_{q+1}^{0,q})$ şi $\tilde{E}_2^{0,s} = 0$, din ipotezele de conexiune asupra bazei, rezultă:

$$\tilde{E}_\infty^{q+1,0} = \tilde{E}_2^{q+1,0} = H^{q+1}(B,pt;H^0(F)) = H^{q+1}(B).$$

In particular: $\mathrm{Ker}\, p^* = 0$.

a) E suficient să arătăm că $\mathrm{Im}\,\delta \subset \mathrm{Im}\, p^*$, sau, echivalent $\mathrm{Ker}\, k^* \subset \mathrm{Im}\, p^*$, unde k^* provine din şirul exact al perechii (E,F):

$$\to H^q(F) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(E,F) \xrightarrow{k^*} H^{q+1}(E) \to$$

In continuare considerăm şi şirul spectral asociat fibrării: $(E,\phi) \to (B,\phi)$ notat $E_r^{s,t}$.

Deoarece avem diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \hookrightarrow & (E,F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \hookrightarrow & (B,pt) \end{array}$$

comutativă alăturată, rezultă din funcțonrialitatea şirului spectral

următoarele diagrame comutative:

$$(1)\quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & F^1H^{q+1}(E,F) & = & F^0H^{q+1}(E,F) & \equiv & H^{q+1}(E,F) & \to & \tilde{E}_\infty^{0,q+1} = 0 \\ & & \downarrow k^1 & & & & \downarrow k^* & & \downarrow \\ 0 & \to & F^1H^{q+1}(E) & \to & F^0H^{q+1}(E) & = & H^{q+1}(E) & \to & E_\infty^{0,q+1} \to 0 \end{array}$$

$$(2)\quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & F^2H^{q+1}(E,F) & \hookrightarrow & F^1H^{q+1}(E,F) & \to & \tilde{E}_\infty^{1,q} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow k^1 & & \downarrow k^\infty & & \\ 0 & \to & F^2H^{q+1}(E) & \hookrightarrow & F^1H^{q+1}(E) & \to & E_\infty^{1,q} & \to & 0 \end{array}$$

Din diagrama 1 rezultă: $\ker k^* \subset \operatorname{Im} p^* \Leftrightarrow \ker k^1 \subset \operatorname{Im} p^*$.

Scriind pe p^* ca în demonstrația punctului precedent rezultă că: $\operatorname{Im} p^* = F^{q+1}H^{q+1}(E,F)$, care este egală cu: $F^2H^{q+1}(E,F)$, din condițiile impuse asupra fibrei.

Din diagrama 2 : va fi suficient să arătăm că K^∞ este monomorfism:

Avem:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_2^{1,q} = \tilde{E}_{q+1}^{1,q} & \hookleftarrow & \tilde{E}_{q+2}^{1,q} = \tilde{E}_\infty^{1,q} \\ k_2 \downarrow & & \downarrow k^\infty \\ E_2^{1,q} = E_{q+1}^{1,q} & \hookleftarrow & E_{q+2}^{1,q} = E_\infty^{1,q} \end{array}$$

E suficient să arătăm că K_2 este izomorfism, ceea ce rezultă din:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_2^{1,q} & = & H^1(B,pt\,;H^q(F)) \\ k_2\downarrow & & s\downarrow j^* \\ E_2^{1,q} & = & H^1(B\,;H^q(F)) \end{array}$$

In definitiv am arătat că: $\delta^{-1}\operatorname{Im} p^* = H^q(F) = E_2^{0,q} = E_{q+1}^{0,q}$.

c) Folosind aceleaşi argumente ca la demonstrarea punctului b) se arată:

$$H^{q+1}B/_{j^* \mathrm{Ker}\, p^*} \sim H^{q+1}(B) = E_2^{q+1,0} = E_{q+1}^{q+1,0}.$$

In ceea ce priveşte identificarea transgresiei cu d_{q+1}, faptul că diferenţiala δ trebuie citită în mod explicit pe şirul spectral conduce inevitabil la detalierea laborioasă a construcţiei şirului spectral, şi deci o vom omite.

Considerăm acum fibrarea universală:

$$K(\pi,q) = \Omega \hookrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{p} K(\pi, q+1) = K, \text{ cu } \pi \text{ abelian.}$$

Condiţiile din propoziţia 1 fiind satisfăcute, rezultă:

$$\tau : H^q(\Omega, \pi) \longrightarrow H^{q+1}(K, \pi)$$

2. <u>LEMA</u> $\tau(u_q) = u_{q+1}$.

<u>Demonstraţie</u>. Plecînd de la definiţia transgresiei, e suficient să arătăm că $\delta(u_q) = p^*(u_{q+1})$.

Pentru aceasta considerăm următoarea diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccc}
H_q(\Omega) & \xleftarrow{\partial} & H_{q+1}(\mathcal{P}, \Omega) & \xrightarrow{p_*} & H_{q+1}(K, pt) \\
{\scriptstyle s}\uparrow{\scriptstyle \varphi} & & {\scriptstyle s}\uparrow{\scriptstyle \varphi} & & {\scriptstyle s}\uparrow{\scriptstyle \varphi} \\
\pi_q(\Omega) & \xleftarrow{\partial} & \pi_{q+1}(\mathcal{P}, \Omega) & \xrightarrow{p_\#} & \pi_{q+1}(K, pt)
\end{array}$$

în care săgeţile verticale desemnează izomorfisme Hurewicz ([1] p.387-399).

Aplicînd primei linii orizontale functorul Hom(•,π) şi ţinînd cont de diagramă şi de definiţia elementelor universale, avem identificările:

$$\delta(u_q) = p^*(u_{q+1}) = \varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(H_{q+1}(\mathcal{P},\Omega),\pi)$$

3. COROLAR. Fie $K(\pi,q)=F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ o fibrare principală indusă de $B \xrightarrow{k} K(\pi,q+1)$ cu B CW-spaţiu conex prin arce (toate spaţiile considerate vor fi de acest tip în lipsa altor precizări). Propoziţia 1 se poate aplica şi avem:

$$\tau : H^q(F,\pi) \longrightarrow H^{q+1}(B,\pi) \quad ; \quad \tau(u_q) = [k].$$

Demonstraţie

Reiese din functorialitatea transgresiei şi din cea mai recentă lemă.

Ca o ilustraţie a avantajelor calculatorii ale şirului spectral multiplicativ, vom calcula în continuare coomologia raţională a spaţiilor Eilenberg-MacLane $K(\pi,n)$, calcule ce vor fi folosite de altfel decisiv în dezvoltarea teoriei omotopiei raţionale.

Dacă V e un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial, vom nota cu $\mathcal{L}_n(V)$ algebra graduată liberă generată de V (considerat ca avînd gradul n), adică: algebra simetrică generată de V (cazul n par) sau algebra exterioară generată de V (cazul n impar).

4. TEOREMA. Dacă π este grup abelian finit generat, atunci $H^*(K(\pi,n),\mathbb{Q}) = \mathcal{L}_n(H^n(K(\pi,n),\mathbb{Q}))$.

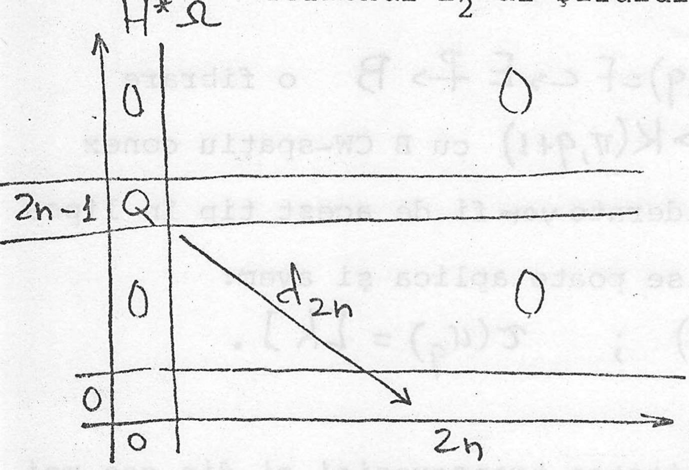
Demonstraţie: $\pi = \mathbb{Z}$. Inducţie: $n=1$: $K(\mathbb{Z},1)=S^1$. Clar. Pentru a face trecerea $n \to n+1$ vom raţiona pe şirul spectral al fibrării universale:

$$K(\mathbb{Z},n)=\Omega \hookrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow K(\mathbb{Z},n+1)=K$$

ţinînd cont de faptul că $E_\infty^{s,t} = 0$, pentru $s+t>0$ (P contractibil) şi de condiţiile asupra fibrei.

Examinăm două situaţii: n impar; n par. Fie deci fibrarea universală $\Omega = K(Z, 2n-1) \hookrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow K(Z, 2n) = K$.

Termenul E_2 al şirului spectral arată ca mai jos:



Singura diferenţială netrivială fiind d_{2n} avem $E_{2n+1} = E_\infty$ şi $E_2 = E_{2n}$

K fiind de tip (Z, 2n) avem: $E_2^{s,t} = 0$, $0 < s < 2n$.

$0 = E_\infty^{s,2n-1} = E_{2n+1}^{s,2n-1} = \ker d_{2n}$ şi:

$0 = E_\infty^{s+2n,0} = E_{2n+1}^{s+2n,0} = \operatorname{coker} d_{2n}$ arată că d_{2n} este izo şi, inductiv:

$$H^s K = \begin{cases} Q & s \text{ de forma } l.2n \\ 0 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Pentru a obţine şi structura multiplicativă pentru H^*K (algebră de polinoame generată de $H^{2n}K$), notăm cu α un generator pentru $H^{2n-1}\Omega = Q$ şi apoi $\beta = d_{2n}\alpha$.

Presupunem inductiv $\beta^l \in H^{l.2n}K$ este generator. Avem:

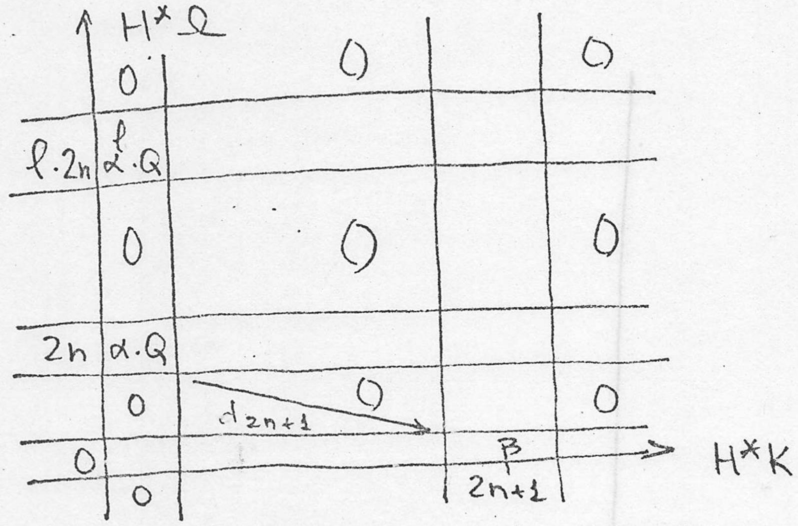
$$\begin{array}{ccc} H^{l.2n}K \otimes H^{2n-1}\Omega & \xrightarrow{d_{2n}} & E_{2n}^{(l+1).2n,0} = H^{(l+1).2n}K \\ \| & \nearrow_{\sim}^{d_{2n}} & \\ E_{2n}^{l.2n,2n-1} & & \end{array}$$

$d_{2n}(\beta^l \otimes \alpha) = \beta^l \cdot d_{2n}\alpha = \beta^{l+1}$ încheie demonstraţia.

In celălalt caz, considerăm fibrarea universală:

$$\Omega = K(Z,2n) \hookrightarrow P \longrightarrow K(Z,2n+1) = K$$

cu E_2 ca mai jos (analog cu raţionamentele precedente):



Prima diferenţială netrivială fiind d_{2n+1}, avem: $E_2 = E_{2n+1}$.

Am notat: $d_{2n+1}\alpha = \beta$ şi avem, în general:

$$d_{2n+1}(\alpha^l) = l.\alpha^{l-1}.d_{2n+1}\alpha = l.\beta \otimes \alpha^{l-1}.$$

(în calculele pe care le-am făcut asupra diferenţialelor din şirurile spectrale am avut în vedere că, în general, ca în [1], ele acţionează prin antiderivare relativ la structura multiplicativă a termenilor E_r, cît şi faptul că, în situaţia de faţă, coeficienţii fiind corp: $E_2^{s,t} \sim E_2^{s,0} \otimes E_2^{0,t} \sim H^sK \otimes H^t\Omega$ izomorfismele fiind multiplicative).

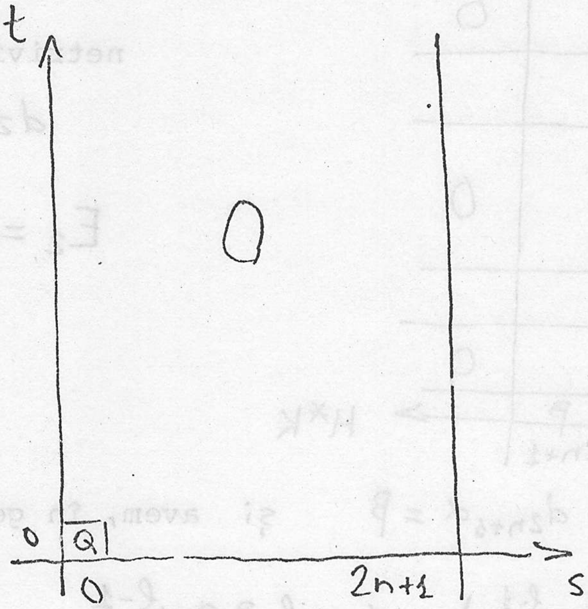
Lucrînd cu coeficienţi Q (sau, puţin mai general, cu coeficienţi de caracteristică zero) avem asigurată implicaţia: "β generator $\Longrightarrow$ $l.\beta$ generator", deci:

$$E_{2n+1}^{0,t} \xrightarrow[\sim]{d_{2n+1}} E_{2n+1}^{2n+1,t-2n} \qquad (\text{ptr. } t > 0)$$

deci: $E_{2n+2}^{s,t} = 0$, ptr. $0 \leq s \leq 2n+1$

şi ptn. $t>0$, deci pentru termenul

E_{2n+2} avem:



Presupunem inductiv că am arătat, pentru $s > 2n+1$:
$H^pK = 0$, $2n+1 < p < s$. Va fi suficient acum să dovedim:
$E_2^{s,0} = E_\infty^{s,0}$ (deoarece $E_2^{s,0} = H^sK$ iar $E_\infty^{s,0} = 0$).Avem

$E_\infty^{s,0} = E_{s+1}^{s,0}$ şi vom arăta: $E_{2n+2}^{s,0} = E_{s+1}^{s,0}$. Fie: $2n+2 \leq r \leq s$

Avem : $E_r^{s-r,r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{s,0}$

Ipoteza de inducţie şi evaluările obţinute anterior
pentru E_{2n+2} implică: $E_r^{p,q} = 0$, ptr. $r \geq 2n+2$, $p<s$
deci $E_r^{s-r,r-1} = 0$ şi $E_\infty^{s,0} = E_{2n+2}^{s,0}$. Deoarece $E_2^{s,0} = E_{2n+1}^{s,0}$

vom încheia demonstrația arătînd: $E_{2n+1}^{s,0} = E_{2n+2}^{s,0}$

Considerăm: $E_{2n+1}^{s-2n-1,2n} \xrightarrow{d_{2n+1}} E_{2n+1}^{s,0}$.

$E_{2n+1}^{s-2n-1,2n} \neq 0$ implică $s-2n-1 = 0$ sau $2n+1$,dintre care se reține numai posibilitatea: $s = 4n+2$. In acest caz:

$$\begin{array}{ccc} E_{2n+1}^{2n+1,2n} & \xrightarrow{d_{2n+1}} & E_{2n+1}^{4n+2,0} \\ \| & \nearrow & \\ E_{2n+1}^{2n+1,0} \otimes E_{2n+1}^{0,2n} & & \end{array}$$

Dar: $d_{2n+1}(\beta \otimes \alpha) = -\beta \cdot d_{2n+1}\alpha = -\beta^2 = 0$ (β fiind de grad impar), deci $d_{2n+1} = 0$ și într-adevăr: $E_{2n+1}^{s,0} = E_{2n+2}^{s,0}$.

Vom considera acum cazul: $\pi = \mathbb{Z}_m$ (i.e. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)

Vom uza de următoarea:

5. <u>LEMA</u>. Fie $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ o fibrare orientabilă cu fibra conexă prin arce. Atunci

$$p^* \text{ este izo} \iff \tilde{H}^* F = 0$$

<u>Demonstrație</u>: Ca în Prop. 1b (de data aceasta pentru cazul $(E,\phi) \xrightarrow{p} (B,\phi)$):

$$H^q B = E_2^{q,0} \longrightarrow E_\infty^{q,0} = F^q H^q E \hookrightarrow H^q E$$

Dacă $\tilde{H}^* F = 0$ înseamnă că $E_2^{s,t} = 0$, ptr. $t > 0$ și deci că: $E_2 = E_\infty$. In general $F^s H^q E / F^{s+1} H^q E = E_\infty^{s,q-s} = 0$ pentru $s \neq q$, deci avem: $F^0 H^q E = F^q H^q E$ deci: $H^q E = F^q H^q E$ și deci prima implicație e dovedită.

Pentru implicația inversă vom presupune inductiv că, pentru $q > 0$, $\tilde{H}^t F = 0$, dacă $t < q$. p^* fiind izomorfism, avem: $F^0H^nE = F^nH^nE$, $\forall n$ deci:

$$E_\infty^{s,t} = 0, \text{ ptr. } t>0 \quad \text{și}:$$

$$E_\infty^{s,0} = E_2^{s,0}, \quad \forall s \quad \text{deci}:$$

$$E_r^{s-r,r-1} \xrightarrow{d_r=0} E_r^{s,0}, \quad \forall r.$$

Din ipoteza de inducție: $H^qF = E_2^{0,q} = E_{q+1}^{0,q} \xrightarrow{d_{q+1}=0} E_{q+1}^{q+1,0}$

iar: $0 = E_\infty^{0,q} = E_{q+2}^{0,q} = \ker d_{q+1}$ implică: $H^qF = 0$

Q.E.D.

Tratăm cazul: $K(Z_m, n)$. Din teorema de clasificare 0.1, înmulțirea cu m: $Z \xrightarrow{\times m} Z$ induce o aplicație $K(Z,n) \xrightarrow{p} K(Z,n)$ cu proprietatea: $\times m = p\#: \pi_n(K(Z,n)) \longrightarrow \pi_n(K(Z,n))$. Considerăm fibrarea $K(Z_m, n-1) \hookrightarrow K(Z,n) \xrightarrow{p} K(Z,n)$ (identificarea fibrei se face examinînd șirul exact de omotopie). Orientabilitatea ei e trivială pentru $n>1$ și în cazul $n=1$ rezultă din criteriul 0.4. Deoarece: $\pi_n(K(Z,n))\otimes Q \xrightarrow{p\#\otimes id} \pi_n(K(Z,n))\otimes Q$ este izomorfism, avem că: $H^n(K(Z,n),Q) \xleftarrow{p^*} H^n(K(Z,n),Q)$ e izomorfism și ținînd cont de cele demonstrate anterior, rezultă că $\tilde{H}^*(K(Z_m, n-1), Q) = 0$

Deoarece orice grup abelian finit generat este produs (finit) de factori de forma: Z sau Z_m, deoarece $K(\pi\times\pi', n) \sim K(\pi,n)\times K(\pi',n)$ și deoarece are loc izomorfismul Künneth multiplicativ ([1], p.249), demonstrația teoremei se încheie.

Afirmația teoremei 4 rămîne valabilă nu numai pentru π abelian finit generat, ci și pentru V Q-spațiu vectorial finit generat, ceea ce se vede ușor urmînd aceeași cale a demonstrației, observînd că raționamentele se pot repeta formal de îndată ce am stabilit rezultatul pentru $K(Q,1)$. Pentru aceasta, vom considera, pentru $n\in \mathbb{N}$, înmulțirea cu n: $Z \xrightarrow{\times n} Z$ și aplicaţia indusă de ea $K(Z,1) \xrightarrow{f_n} K(Z,1)$ (unde de data aceasta am uzat de faptul că, în categoria omotopică, orice aplicaţie poate fi privită ca o incluziune care este în acelaşi timp şi o cofibrare, punct de vedere pe care îl vom mai adopta ades). Definind $K = \varinjlim K(Z,1)$, se constată imediat că $K = K(Q,1)$ (π_* comută cu limitele inductive). H_* (cu coeficienţi Q) comută de asemenea cu limitele inductive, deci:

$H_*(K(Q,1), Q) = Q$ şi deci: $H^*(K(Q,1), Q) = Q$

6. COROLAR. Fie π abelian finit generat. Aplicaţia canonică $\pi \longrightarrow \pi \otimes Q$ induce o aplicaţie: $K(\pi,n) \longrightarrow K(\pi\otimes Q, n)$, care induce izomorfism în $H^*(\cdot, Q)$.

Observaţie. Toate calculele rămîn valabile înlocuind coeficienţii Q cu un corp arbitrar de caracteristică zero, după cum am indicat în cursul demonstraţiei Th.4.

O fibrare $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ se va numi total transgresivă (coeficienţi corp) dacă există $V = \bigoplus_{n>0} V^n$ subspaţiu graduat inclus în H^*F, astfel încît: $H^*F = \mathcal{L}(V)$ şi astfel încît, pentru orice n: $V^n \subset \delta^{-1} \operatorname{Im} p^*$.

Evident, fibrările principale de tip (π, n) şi $(\pi\otimes Q, n)$ furnizează astfel de exemple (π finit generat) (unde $\mathcal{L}(V)$ înseamnă algebra graduată, comutativă în sens graduat, liber generată de V, cu generatorii din V^n desemnaţi a avea grad n).

In finalul secţiunii, vom extinde Th.4 şi Cor.6 pentru o clasă mai largă de grupuri abeliene .

7. PROPOZITIE. Corolarul 6 se menţine fără nici o restricţie asupra lui π şi deci implicit teorema 4, în ipotezele slăbite: $\dim_Q \pi\otimes Q < \infty$.

<u>DEMONSTRATIE</u>: Prin inducţie. In cazul n=1, avem

([1], p.503-504):

$$H_*(K(\pi,1),Z) = \varinjlim_{\substack{\pi'\subset\pi \text{ subgrup} \\ \text{finit generat}}} H_*(K(\pi',1),Z).$$ Tensorizînd cu

Q această egalitate şi ţinînd cont de Th.4, avem:

$\tilde{H}_i(K(\pi,1),Q) = 0 \,,\, i \neq 1$ Izomorfismul Hurewicz

ne dă că: $H_1(K(\pi,1),Q) \sim \pi\otimes Q$. Aceleaşi evaluări au

loc şi pentru $K(\pi\otimes Q, 1)$, se observă imediat apoi că

$\pi \to \pi\otimes Q$ induce izomorfism în $H_*(\cdot, Q)$, deci şi în

$H^*(\cdot, Q)$.

Pasul inductiv: fie:
$$\begin{tikzcd} K(\pi,n+1) \arrow[r, "f_{n+1}"] & K(\pi^Q,n+1) \\ pt \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r] & pt \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \end{tikzcd}$$

$(\pi^Q = \pi\otimes Q)$

indusă de $\pi \to \pi\otimes Q$. Apare în mod natural un morfism între fibrările universale:

$$\begin{tikzcd} \Omega K(\pi,n+1)=K(\pi,n) \arrow[r, "f^n"] \arrow[d] & K(\pi\otimes Q,n)=\Omega K(\pi\otimes Q,n+1) \arrow[d] \\ \mathcal{P}K(\pi,n+1) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d] & \mathcal{P}K(\pi\otimes Q,n+1) \arrow[d] \\ K(\pi,n+1) \arrow[r, "f_{n+1}"] & K(\pi\otimes Q,n+1) \end{tikzcd}$$

care induce un morfism între şirurile spectrale corespunzătoare, fie acesta notat f. Ipoteza de inducţie implică $f_2^{0,q}$ izomorfism $\forall q$, iar contractibilitatea spaţiilor de drumuri implică $f_\infty^{p,q}$ izomorfism, $\forall p,q$. Se poate trage concluzia, folosind teorema de comparare, punctul ii), din [6], p.27-28, că $f_2^{p,0}$ este izomorfism, $\forall p$, deci că f_{n+1} induce izomorfism în $H^*(\cdot, Q)$

Q.E.D.

§ 2. SPATII NILPOTENTE

Fiind obligaţi deoseori a folosi noţiuni şi rezultate ale teoriei grupurilor, vom reduce demonstraţiile la strictul necesar, apelînd la lucrarea [3].

Fie $G \xrightarrow{p} H$ (epimorfism de grupuri). Vom spune că avem o extindere abeliană (centrală) $\Longleftrightarrow$ Ker p este abelian (Ker p $\subset$ Z(G)).

Dacă $x, y \in G$ notăm cu $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ şi dacă X,Y$\subset$G notăm cu $[X,Y]$ subgrupul generat de $[x,y]$, cu $x \in X$ şi y$\in$Y.

Definim seria centrală descendentă ca fiind: $G_0 = G$, $G_n = [G, G_{n-1}]$, ptr. $n \geq 1$ şi avem:

1) $G_n \subset G_{n-1}$

2) $G_n \subset G$ este subgrup normal, $\forall n$.

G se va numi nilpotent $\Longleftrightarrow \exists n$ a.î. $G_n = 0$.

Noţiunea de nilpotenţă extinde evident noţiunea de abelianitate.

Definim în continuare: $G^n = G/G_n$ şi se observă că: 3) $G^{n+1} \twoheadrightarrow G^n$ este extensie centrală (nucleul, notat $A_{n+1}(G)$ se va numi abelianizatul de ordin n+1), pentru $\forall n$.

4) G nilpotent $\Longleftrightarrow \exists n$ a.î. $G^n = G$.

Morfismul arbitrar p induce $G_n \xrightarrow{p_n} H_n$ şi avem:

5) $G \overset{p}{\hookrightarrow} H \Rightarrow G_n \overset{p_n}{\hookrightarrow} H_n$, deci: H nilpotent $\Rightarrow G$ nilpotent;

6) $G \xrightarrow{p} \!\!\!\to H \Rightarrow G_n \xrightarrow{p_n} \!\!\!\to H_n$, deci: G nilpotent $\Rightarrow$ H nilpotent;

7) $G \xrightarrow{p} \!\!\!\to H$ centrală: G nilpotent$\Leftrightarrow$H nilpotent.

Dem. 7) (Evidenţa celorlalte afirmaţii ne scuteşte de demonstraţii).

Dacă $H_n = 0$ rezultă: $G_n \subset \operatorname{Ker} p \subset Z(G)$, deci:

$G_{n+1} = 0$.

8. <u>COROLAR</u>. G nilpotent $\Leftrightarrow \exists\, G^{(n)} \xrightarrow[q_n]{} G^{(n-1)} \dots \dots G^{(1)} \xrightarrow[q_1]{} G^{(0)}$, extensii centrale, i=1,...,n, a.î. $G^{(0)} = 0$ şi $G^{(n)} = G$.

Intr-o perfectă analogie se poate introduce noţiunea de <u>modul nilpotent</u> după cum urmează:

Dacă π este grup, grupul A se zice π - modul (stîng), via h, dacă s-a dat morfismul $\pi \xrightarrow{h} \operatorname{Aut}(A)$. Vom nota:

$\alpha \cdot x = h(\alpha)(x)$, pt.r. $\alpha \in \pi$, $x \in A$.

Pînă la sfîrşitul acestor consideraţii algebrice introductive <u>A va fi abelian</u>.

Noţiunile de morfism de π - module, π - submodul şi π - modul factor se introduc în mod corespunzător.

Un π - modul A se zice <u>trivial</u> $\Leftrightarrow \alpha \cdot x = x, \forall \alpha \in \pi, x \in A$

Definim inelul grupal al lui π , notat $\mathbb{Z}[\pi] = R$, prin $R = \left\{ \sum_{\alpha \in \pi} m_\alpha \cdot \alpha \mid m_\alpha \in \mathbb{Z},\ \text{familie de suport finit} \right\}$, cu înmulţirea:

$$\left(\sum_\alpha m_\alpha \cdot \alpha \right) \left(\sum_\beta n_\beta \beta \right) = \sum_\gamma \left(\sum_{\alpha \cdot \beta = \gamma} m_\alpha n_\beta \right) \cdot \gamma$$

Noţiunile de π - modul, morfism, submodul şi modul factor revin atunci la noţiunile corespunzătoare din categoria R-modulelor (stîngi).

Notăm cu $I(\pi) \subset R$ idealul stîng generat de $\{\alpha - 1\}_{\alpha \in \pi}$ (idealul augmentării). Dacă A e un π - modul definim : $A_0 = A$

$A_q = I^q \cdot A$, pt.r. $q \geq 1$ şi avem:

1)' $A_q \subset A_{q-1}$ (<u>seria descendentă de π-module</u>);

2)' $A_q \subset A$ submodul, $\forall q$.

π-modulul A se zice nilpotent $\Leftrightarrow \exists q$ a.î. $A_q = 0$

(evident: trivial $\Rightarrow$ nilpotent).

Un morfism $A \xrightarrow{\varphi} B$ induce $A_q \xrightarrow{\varphi_q} B_q$ şi avem:

5') $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B \Rightarrow A_q \overset{\varphi_q}{\hookrightarrow} B_q$ deci: B nilpotent $\Rightarrow$ A nilpotent

6') $A \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} B \Rightarrow A_q \overset{\varphi_q}{\twoheadrightarrow} B_q$, deci: A nilpotent $\Rightarrow$ B nilpotent

7') LEMA. Dacă $A' \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} A''$ e un şir exact de π - module, atunci: A', A'' nilpotente $\Longrightarrow$ A nilpotent.

Demonstraţie

Fie $A'_p = 0$, $A''_q = 0$ şi

$x \in A$, $\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p \in I$.

Avem $\psi(\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_q x) = 0 \Rightarrow \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_q x = \varphi(x')$

$\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_p \cdot \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_q x = \varphi(\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_p x') = 0 \Rightarrow A_{p+q} = 0$.

Lăsăm în grija cititorului atent formularea lui 3'),4').

Un spaţiu (X, pt) se numeşte nilpotent d.n.d.

$\pi_1(X, pt)$ e nilpotent şi:

$\pi_n(X, pt)$ este $\pi_1(X, pt)$-modul nilpotent, ptr.n $\geq$ 2.

OBSERVATIE. Condiţia este independentă de punctul de bază, deci se poate formula definiţia şi pentru X neconex prin arce, referindu-ne la componentele sale.

In mod evident avem: simplu $\Longrightarrow$ nilpotent (unde simplu înseamnă prin def. că acţiunea lui $\pi_1(X, pt)$ pe $\pi_n(X, pt)$ e trivială pentru n$\geq$1).

9. LEMA

Fie $(F, pt) \overset{i}{\hookrightarrow} (E, pt) \xrightarrow{p} (B, pt)$ o fibrare. In acest caz, şirul exact de omotopie al fibrării e un şir de $\pi_1(F, pt)$-module, cu acţiunile:

a) pe $\pi_n(F, pt)$, $n \geq 1$: uzual

b) pe $\pi_n(E, pt)$, $n \geq 1$: acţiunea lui $\pi_1(E, pt)$, restrînsă via $i_\#$

c) pe $\pi_n(B, pt)$, $n \geq 1$: trivial.

<u>DEMONSTRATIE</u>. Sirul exact de omotopie al (E,F,p^t) e şir de $\pi_1(F,p^t)$ - module, acţiunile a) şi b) fiind corecte. Sirul exact al fibrării se obţine din acesta înlocuind pe $\pi_n(E,F,p^t)$ cu $\pi_n(B,p^t)$, via $p_\#:\pi_n(E,F,p^t)\xrightarrow{\simeq}\pi_n(B,p^t,p^t)$ şi c) iese imediat din faptul că acţiunea lui $\pi_1(F,p^t)$ pe $\pi_n(B,p^t,p^t)$ indusă de $p_\#$ se factorizează prin $\pi_1(p^t,p^t)$.

10. <u>LEMA</u>. Fie $(F,p^t)\xrightarrow{i}(E,p^t)\xrightarrow{p}(B,p^t)$ o fibrare de fibră simplă. Atunci şirul de omotopie al fibrării e un şir de $\pi_1(E,p^t)$ - module, cu acţiunile:

a') pe $\pi_n(E,p^t), n\geq 1$: uzual

b') pe $\pi_n(B,p^t), n\geq 1$: acţiunea uzuală a lui $\pi_1(B,p^t)$ restrînsă, via $p_\#$

c') pe $\pi_n(F,p^t), n\geq 1$ următoarea acţiune a lui $\pi_1(B,p^t)$ restrînsă via $p_\#$: $[\beta]\in\pi_1(B,p^t)$ acţionează ca $\left(h_{[\beta]^{-1}}\right)_\#$, unde $h_{[\beta]^{-1}}\in[F,F]$.

<u>DEMONSTRATIE</u>. Demonstraţia se compune din aplicarea succesivă a definiţiilor.

11. <u>TEOREMA</u>. Fie $(F,p^t)\xrightarrow{i}(E,p^t)\xrightarrow{p}(B,p^t)$ fibrare. Atunci E nilpotent $\Longrightarrow$ F nilpotent.

<u>DEMONSTRATIE</u>.

Sirului $\pi_{n+1}(B,p^t)\xrightarrow{\partial}\pi_n(F,p^t)\xrightarrow{i_\#}\pi_n(E,p^t)$, $n\geq 2$, de $\pi_1(F,p^t)$ – module îi aplicăm lema 9 şi lema 7'.

In cazul n=1 considerăm şirul de $\pi_1(F,p^t)$ - module:

$$0\to \operatorname{Im}\partial\to\pi_1(F,p^t)\xrightarrow{i_\#}\operatorname{Im} i_\#\to 1$$

Deîndată ce arătăm că avem o extensie centrală, teorema este demonstrată aplicînd lema 7.

Din următoarea diagramă comutativă furnizată de lema 9 avem, pentru $[\omega] \in \pi_1(F, pt)$

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(B,pt) & \xrightarrow{\partial} & \pi_1(F,pt) \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\omega](\cdot)[\omega]^{-1}} \\ \pi_2(B,pt) & \xrightarrow{\partial} & \pi_1(F,pt) \end{array}$$

de unde rezultă cele dorite.

12. PROPOZITIE. Fie $F \overset{i}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{p} B$ o fibrare cu fibra simplă şi acţiunea lui $\pi_1(B,pt)$ pe $\pi_*(F,pt)$ e trivială. Dacă B e nilpotent atunci E e nilpotent.

DEMONSTRATIE

Din şirul exact de omotopie: $\pi_n F \to \pi_n E \to \pi_n B$, $n \geq 2$ şi lema 10, rezultă aplicînd lema 7' că $\pi_n E$ este $\pi_1 E$ - nilpotent.

In cazul n=1 avem şirul

$$0 \to \operatorname{Im} i_\# \to \pi_1 E \to \pi_1 B \to 1$$

Pentru a încheia demonstraţia e suficient să arătăm că extensia e centrală.

Pentru $[\omega] \in \pi_1 E$ avem diagrama comutativă alăturată

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 F & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1 E \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\omega](\cdot)[\omega]^{-1}} \\ \pi_1 F & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1 E \end{array}$$

deci extensia e centrală.

13. COROLAR

Dacă $E \xrightarrow{p} B$ e principală de tip (π, n) cu π abelian şi B nilpotent, rezultă E nilpotent.

14. PROPOZITIE. a) X,Y nilpotente, atunci X×Y nil-

potent

b) (X,pt), (Y,pt) simplu conexe (pt figurează ca o çelulă la ambele spaţii),

atunci : $X \vee Y$ este simplu conex.

DEMONSTRATIE. a) $\pi_1(X\times Y)=\pi_1(X)\times\pi_1(Y)$ şi acţiunea lui $\pi_1(X\times Y)$ pe $\pi_n(X\times Y)=\pi_n(X)\times\pi_n(Y)$ se face pe componente

b) $Hom(\pi_1(X\vee Y),\pi)\sim Hom(\pi_1 X,\pi)\times Hom(\pi_1 Y,\pi)$

pentru orice grup π (vezi teorema Van Kampen, [4], p.156-158), iar afirmaţia rezultă ţinînd cont de $\pi_1 X=\pi_1 Y=0$

şi luînd $\pi=\pi_1(X\vee Y)$

O altă clasă de exemple: dacă K este complex finit, conex, şi dacă X e spaţiu nilpotent, conex prin arce (pe scurt: c.p.a), spaţiile funcţionale $Map(K,X)$ şi $Map((K,pt),(X,pt))$, cu topologia compact-deschisă, sînt spaţii nilpotente ([3], p.64).

In cele ce urmează vom da o <u>caracterizare a spaţiilor nilpotente.</u>

E binecunoscut faptul că, dat un spaţiu X, există:

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d, phantom] \\ & X_n \arrow[d, "p_n"] \\ X \arrow[ur, "f_n"] \arrow[r, "f_{n-1}"'] & X_{n-1} \\ & \vdots \\ & X_0=pt \end{tikzcd}$$

a.î.

a) f_n induce izomorfisme: $\pi_i X \xrightarrow{\sim} \pi_i X_n$, ptr. $i\leq n$

b) $\pi_i X_n = 0$, ptr. $i>n$

c) $p_n f_n = f_{n-1}$

(compară cu [5], p.32-33).

(Se poate observa uşor că fibra lui p_n este un $K(\pi_n X,n)$).

Mai mult, această construcţie este unic determinată de a), b), c), pînă la un izomorfism (într-un sens lesne de precizat) şi se va numi <u>turnul Postnikov (T.P.)</u> al spaţiului considerat.

Pentru a face folositoare teoria obstrucţiilor recapitulată în paragraful 0 , ne vor interesa acele spaţii pentru care, chiar dacă p_n nu sînt principale, ele admit ceea ce se cheamă o rafinare principală la pasul n, adică: există $X_n = X_n^r \xrightarrow[r]{q} X_n^{r-1} \cdots X_n^1 \xrightarrow[1]{q} X_n^0 = X_{n-1}$ cu q_i principale de tip (.,n) şi

$$p_n = q_1 \circ \cdots \circ q_r$$

15. TEOREMA

a) $\pi_1(X, pt)$ e nilpotent d.n.d. TP admite rafinare principală la pasul 1.

b) $\pi_n(X, pt)$ e $\pi_1(X, pt)$ - modul nilpotent d.n.d. TP admite rafinare principală la pasul n, $n \geqslant 2$.

a) Demonstrăm implicaţia directă. Notăm $\pi_1(X, pt) = G$

Avem $G = G^{(r)} \xrightarrow[r]{q} G^{(r-1)} \cdots G^{(1)} \xrightarrow[1]{q} G^{(0)} = 0$ q_i extensii centrale, $1 \leqslant i \leqslant r$, cf.3. Deci şirul

$$X_1 = K(G^{(r)}, 1) \xrightarrow[r]{q} K(G^{(r-1)}, 1) \cdots K(G^{(1)}, 1) \xrightarrow[1]{q} K(G^{(0)}, 1) = X_0$$

produce, cf.0.4, o rafinare principală a TP la pasul 1.

Să reţinem şi natura fibrelor acestei rafinări şi anume:

$$K(A_i(\pi_1 X), 1) \hookrightarrow K(G^i, 1) \longrightarrow K(G^{i-1}, 1)$$

Invers, fie rafinarea principală la pasul 1:

$$X_1 = K(\pi_1 X, 1) = X_1^r \xrightarrow[r]{q} X_1^{r-1} \cdots X_1^1 \xrightarrow[1]{q} X_1^0 = K(0, 1) = X_0$$

Avem $\pi_1 X = \pi_1(X_1^r) \xrightarrow{(q_r)_\#} \pi_1(X_1^{r-1}) \cdots \pi_1(X_1^1) \xrightarrow{(q_1)_\#} \pi_1(X_1^0) = 0$

cu $(q_i)_\#$ extensii centrale cf.0.4 şi deci, după Cor.8, $\pi_1 X$ e nilpotent.

b) Implicaţia inversă: In prezenţa unei rafinării principale la pasul n, trecerea de la X_{n-1} la X_n se face prin intermediul unui şir finit de fibrări principale de tipul: $K(\pi,n) \hookrightarrow E \xrightarrow{q} B$ caz în care se poate constata uşor (demonstraţia identică cu cea a Cor.13) că proprietatea bazei: " $\pi_1 B$ acţionează nilpotent pe $\pi_n B$ " se transmite spaţiului total: " $\pi_1 E$ acţionează nilpotent pe $\pi_n E$ ". Deoarece, la primul pas, $B = X_{n-1}$ şi $\pi_n(X_{n-1}) = 0$, în final vom avea că $\pi_1(X_n) = \pi_1(X)$ acţionează nilpotent pe $\pi_n(X_n) = \pi_n(X)$.

Q.E.D.

16. <u>LEMA</u>: Fie $(X,pt) \xrightarrow{f} (B,pt)$ o n-echivalenţă (în sensul din [1], p.404), $n \geq 2$. Fie de asemeni: $\pi_i X = \pi_i B = 0$, ptr. $i \geq n+1$. Notînd: $\pi_1(X,pt) = \pi$ şi cu I idealul augmentării, există:

$$\begin{tikzcd} & K(A,n) \arrow[d] \\ & E \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

a.î.

- q e fibrare principală;
- g e n-echivalenţă;
- $\operatorname{Ker} g_\# = I \cdot \operatorname{Ker} f_\#$

<u>Dem.</u>: Avem: $\pi_i(B,X) = 0$, $i \leq n$ (considerînd f ca incluziune) , $H_i(B,X) = 0$, $i \leq n$, şi izomorfismul Hurewicz:

$$A = \pi_{n+1}(B,X) / I \cdot \pi_{n+1}(B,X) \xrightarrow[\sim]{\varphi} H_{n+1}(B,X)$$

Notăm: $K(A,n+1) = K$ şi, ca de obicei: $pt \in \Omega \hookrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{p} K \ni pt$ fibrarea universală (punctul bază din Ω e drumul constant) şi: $u_{n+1} \in H^{n+1}(K;A)$ elementul universal.

$\varphi^{-1} \in \operatorname{Hom}(H_{n+1}(B,X),A) \sim H^{n+1}(B,X;A)$ şi vom lua, cf.th.clasificare 0.1, $k:(B,X) \longrightarrow (K,pt)$ astfel încît $k^*(u_{n+1}) \in H^{n+1}(B,X;A)$ să se corespundă, prin izomorfismul de mai sus, cu φ^{-1} . Avem:

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(B,X) \arrow[rr, "k_*"] \arrow[dr, "\varphi^{-1}"', "\sim"] & & H_{n+1}(K,pt) \arrow[dl, "\varphi^{-1}", "\sim"'] \\ & A & \end{tikzcd}$$

deci şi:

$$\begin{tikzcd} \pi_{n+1}(B,X) \arrow[r, "k_\#"] \arrow[d, "\varphi"'] & \pi_{n+1}(K,pt) \arrow[d, "\varphi", "\wr"'] \\ H_{n+1}(B,X) \arrow[r, "k_*", "\sim"'] & H_{n+1}(K,pt) \end{tikzcd}$$

, de unde şirul exact:

$$(*) \quad 0 \longrightarrow I\cdot\pi_{n+1}(B,X) \longrightarrow \pi_{n+1}(B,X) \xrightarrow{k_\#} \pi_{n+1}(K,pt) \longrightarrow 0$$

în diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, equal] \arrow[d, "j"'] & \Omega \arrow[r, equal] \arrow[d, "j"] & \Omega \arrow[d, "j"] \\ X\times\Omega \arrow[r, "\bar f"] \arrow[d, "pr_X"'] & E \arrow[r, "\bar k"] \arrow[d, "q"] & G \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "g"] & B \arrow[r, "k"] & K \end{tikzcd}$$

(q indusă de k)

(pr_X indusă de $k_{|X}$)

avem în plus: $\bar k \bar f = pr_\Omega$, iar incluziunea $\Omega \overset{j}{\hookrightarrow} X\times\Omega$ e dată de $j(\omega) = (pt, \omega)$. Definim secţiunea: $s: X \longrightarrow X\times\Omega$ prin $s(x) = (x, pt)$ şi avem: $pr_X s = id$. Punînd $g = \bar f s$ avem: $qg = f$

Reţinem şirul exact:

$$(**) \quad 0 \longrightarrow \pi_{n+1}(B,X) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X,pt) \xrightarrow{f_\#} \pi_n(B,pt) \longrightarrow 0$$

Compunerea:

$$\pi_i(B,X) \underset{\sim}{\xleftarrow{q_\#}} \pi_i(E, X\times\Omega) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(X\times\Omega) \xrightarrow{pr_\Omega} \pi_{i-1}(\Omega)$$

defineşte, ca în [1] p.441-443, $\lambda: \pi_i(B,X) \longrightarrow \pi_{i-1}(\Omega)$

şi se verifică uşor (de exemplu pe calea indicată la pagina amintită din [1]) anticomutativitatea diagramei:

$$(***)\qquad \begin{tikzcd} \pi_i(B,X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h"'] & \pi_{i-1}(X) \arrow[d, "g_\#"] \\ \pi_{i-1}(\Omega) \arrow[r, "j_\#"'] & \pi_{i-1}(E) \end{tikzcd}$$

precum şi comutativitatea în diagrama:

$$(****)\qquad \begin{tikzcd} \pi_n(X\times\Omega) \arrow[r, "pr_\Omega"] & \pi_n(\Omega) \\ \pi_{n+1}(E, X\times\Omega) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "\bar{k}_\#"] \arrow[d, "q_\#", "\cong"'] & \pi_{n+1}(\wp, \Omega) \arrow[u, "\partial"', "\cong"] \arrow[d, "p_\#", "\cong"'] \\ \pi_{n+1}(B,X) \arrow[r, "k_\#"] & \pi_{n+1}(K,pt) \end{tikzcd}$$

(*) şi (****) dau: $0 \longrightarrow I\cdot\pi_{n+1}(B,X) \longrightarrow \pi_{n+1}(B,X) \xrightarrow{h} \pi_n(\Omega) \longrightarrow 0$

Adăugînd (**) şi (***) obţinem:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi_{n+1}(B,X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h"] & \pi_n(X) \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "g_\#"] & \pi_n(B) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \pi_n(\Omega) \arrow[r, "j_\#"'] & \pi_n(E) \arrow[r, "q_\#"'] & \pi_n(B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

de unde (alergînd pe diagramă): $g_\#$ surjecţie, şi $\operatorname{Ker} g_\# = I\cdot \operatorname{Ker} f_\#$ (în dimensiunea n). Faptul că $g_\# : \pi_i X \longrightarrow \pi_i E$ e izo pentru $i<n$ rezultă uşor observînd că q e de asemeni n-echivalenţă, şi cu aceasta demonstraţia lemei se încheie.

<u>Dem.</u>: implicaţiei directe de la b). Fie $X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1}$ pasul n din TP $(n\geq 2)$. Luînd în lema precedentă $X = X_n$ şi, pentru început, $f = p_n$ se constată imediat că aplicarea ei iterată e posibilă, dînd drept rezultat diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
X_n^r \arrow[r, "q_r"] & X_n^{r-1} \cdots X_n^1 \arrow[r, "q_1"] & X_n^0 \arrow[dl, equal] \\
 & X_n \arrow[ul, "g_r"] \arrow[u, "g_{r-1}"] \arrow[r, "p_n"'] & X_{n-1}
\end{tikzcd}$$

în care: q_i sînt fibrări principale de tip $(\cdot,n)$ şi g_i sînt n-echivalenţe, iar în plus (în dimensiune n): $Ker(g_i)_\# = I^i\cdot\pi_n X_n \sim I^i\cdot\pi_n X$ deci luînd r suficient de mare (din nilpotenţă) g_r va fi o echivalenţă slabă, şi deci, cf. Cor.24 din [1] p.405, o echivalenţă omotopică, ceea ce încheie demonstraţia teoremei.

Revăzînd demonstraţia lemei precedente, putem preciza fibra fibrării principale $X_n^i \xrightarrow{g_i} X_n^{i-1}$ ca fiind $K(A_i,n)$ cu $A_i = I^{i-1}\cdot\pi_n X / I^i\cdot\pi_n X$.

In concluzie, dat fiind spaţiul nilpotent X luînd TP, rafinîndu-l principal la fiecare pas n, apoi renumerotînd spaţiile şi aplicaţiile obţinute, avem următoarea situaţie $(\alpha\in\mathbb{N})$:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \\
 & X_{\alpha+1} \arrow[d, "p_{\alpha+1}"] \\
X \arrow[ur, "f_{\alpha+1}"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_\alpha \\
 & \vdots
\end{tikzcd}$$

unde:

i) $K(\pi_\alpha,n_\alpha) \hookrightarrow X_{\alpha+1} \xrightarrow{p_{\alpha+1}} X_\alpha$ e fibrare principală

ii) $\alpha\le\beta \Rightarrow n_\alpha\le n_\beta$ şi mulţimile $\{\alpha \mid n_\alpha = n\}$ sînt finite, $\forall n$

iii) π_α e de tipul $A_i(\pi_1 X)$ pentru $n_\alpha = 1$ şi de tipul $I^{i-1}\pi_n X / I^i\cdot\pi_n X$ pentru $n_\alpha = n \geq 2$.

iv) pentru orice $n\in\mathbb{N}$ există $\alpha_n\in\mathbb{N}$ a.î. $\alpha\geq\alpha_n \Rightarrow f_\alpha$ e n-echivalenţă (ceea ce implică în particular că aplicaţia $X \to \varprojlim X_\alpha$ e echivalenţă omotopică - vezi [1] p.438-439)

Turnurile de aplicaţii $\{X_{\alpha+1} \xrightarrow{p_{\alpha+1}} X_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ cu proprietăţile i)-ii) vor fi numite, prin analogie, turnuri nilpotente (TN).

Observaţiile precedente spun că: orice spaţiu nilpotent se poate construi, prin trecerea la limită proiectivă, dintr-un turn nilpotent, turnul nilpotent construindu-se la rîndul său inductiv, plecînd de la un punct, prin procedeul "fibrare principală de tip (π, n)" (cu π abelian) "dimensiunea" n a fibrei fiind crescătoare şi existînd un număr finit de paşi pentru fiecare "dimensiune".

Si invers: dat un turn nilpotent $\{X_{\alpha+1} \xrightarrow{p_{\alpha+1}} X_\alpha\}_{\alpha \in N}$, notînd $X = \varprojlim X_\alpha$, X e un spaţiu nilpotent (se arată întîi inductiv, folosind Cor.13, că X_α e nilpotent, $\forall \alpha$, apoi se foloseşte din nou [1] p.438-439 pentru a conclude nilpotenţa lui X).

Din aceste motive, de acum înainte ne vom simţi îndreptăţiţi să identificăm, modulo aceste consideraţii, noţiunile de "spaţiu nilpotent" şi "turn nilpotent".

La un moment dat, va fi convenabil să impunem spaţiilor cu care lucrăm anumite condiţii de finitudine. Pentru început, cîteva preliminarii de natură algebrică.

Dacă A e un grup abelian, vom spune, prin abuz, că $\dim_Q A < \infty$ (sau că A e de tip finit peste Q) dacă $\dim_Q A \otimes Q < \infty$. O clasă de exemple o constituie grupurile finit generate (fără a înţelege de aici valabilitatea reciprocei!) Dacă $A = \oplus A_n$ e grup abelian graduat, spunem că A e de tip finit peste Q dacă A_n e de tip finit peste Q, $\forall n$. Pentru Q-spaţii vectoriale (graduate) noţiunile se reduc la cele uzuale.

Dacă G e un grup, vom zice că G e de tip finit peste Q (sau vom scrie: $\dim_Q G < \infty$) dacă $\dim_Q A_i(G) < \infty$ pentru orice i. Dacă G e abelian, regăsim noţiunea introdusă anterior.

17. Lemă: Fie $0 \to A \to G \xrightarrow{f} H \to 1$ extensie abeliană. Dacă $\dim_Q A$, $\dim_Q H < \infty$ rezultă: $\dim_Q G < \infty$.

Dem.: Considerăm diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A\cap G_i \arrow[r] \arrow[d] & G_i \arrow[r, "p_i"] \arrow[d] & H_i \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
0 \arrow[r] & A\cap G_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & G_{i-1} \arrow[r, "p_{i-1}"] \arrow[d] & H_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] & A_i(G) \arrow[r, "A_i(p)"] & A_i(H) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Plimbarea pe diagramă conduce rapid la concluzia că săgeata $A\cap G_{i-1} \to K_i$ e surjecţie. Tinînd cont de faptul că $A, A\cap G_{i-1}, K_i$ sînt abeliene, $\dim_Q A < \infty$ implică $\dim_Q K_i < \infty$. Adăugînd şi ipoteza de inducţie, din şirul orizontal inferior rezultă $\dim_Q A_i(G) < \infty$, $\forall i$, de unde lema.

18. Corolar. Dacă G e nilpotent, $\dim_Q G < \infty$ d.n.d. $\exists\ G = G^{(n)} \xrightarrow{q_n} G^{(n-1)} \dots G^{(1)} \xrightarrow{q_1} G^{(0)} = 0$ cu q_i extensii centrale cu nucleu de tip finit peste Q.

Un spaţiu punctat X se va numi de tip finit peste Q dacă $\pi_n(X, pt)$ e de tip finit peste Q, $\forall n$. Condiţia e evident independentă de punctul bază cîtă vreme rămînem în aceeaşi componentă conexă prin arce, şi poate fi extinsă imediat la cazul neconex impunînd-o pe fiecare componentă.

19. Teoremă: Fie X un spaţiu nilpotent. Avem echivalenţele

a) X e de tip finit peste Q;

b) $H_*(X;Q)$ e de tip finit peste Q;

c) $H^*(X;Q)$ e de tip finit peste Q.

Dem.: b) $\Longleftrightarrow$ c) $H^*(X;Q) \sim Hom_Q(H_*(X;Q),Q)$

a) $\Rightarrow$ c). Considerăm turnul nilpotent al spaţiului X. Cf.observaţiei iii) ce rezultă din Th.15, vom avea: $\dim_Q \pi_\alpha < \infty$, pentru orice α. Vom arăta, inductiv, că fiecare spaţiu X_α satisface condiţia c). Pasul de inducţie e asigurat de:

20. Lemă: Fie $F \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ o fibrare orientabilă (coeficienţii Q). Dacă $H^*(B;Q)$ şi $H^*(F;Q)$ sînt de tip finit atunci $H^*(E;Q)$ e de tip finit (peste Q).

Dem.: In şirul spectral: $E_2 \sim H^*B \otimes H^*F$, deci E_2 e de tip finit (în raport cu graduarea totală: $E_2^n = \bigoplus_{s+t=n} E_2^{s,t}$). Rezultă că E_∞, şi deci H^*E, e de tip finit.

21. Corolar. Fie $K(\pi,n) \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ o fibrare principală şi H^*B de tip finit peste Q, π abelian cu $\dim_Q \pi < \infty$ Atunci H^*E e de tip finit peste Q.

Dem.: Prop.1.7 asigură că: $H^*(K(\pi,n);Q) \sim \mathcal{L}_n(H^n(K(\pi,n),Q))$; dar $H^n(K(\pi,n),Q) \sim Hom_Q(\pi \otimes Q, Q)$, pe de o parte, şi implicaţia evidentă: $\dim_Q V < \infty \Rightarrow \mathcal{L}_n(V)$ de tip finit peste Q, pe de altă parte, fac posibilă aplicarea Lemei 20. Odată cu aceasta se încheie şi inducţia. Pentru a încheia implicaţia : "a) $\Longrightarrow$ c)" vom ţine cont şi de obs.iv), precum şi de următoarele fapte standard:

Dacă $f: X \to Y$ e n-echivalenţă (vom spune uneori, pentru a preciza, "n-echivalenţă în π_*") atunci: - [1](Th. Whitehead p.399) f e n-echivalenţă în H_* (i.e.: $f_*: H_i(X;Z) \to H_i(Y;Z)$ e izo pentru $i<n$ şi epi pentru $i=n$);

- f e n-echivalenţă în $\pi_*(\cdot,Q)$ (i.e.: $f_\# \otimes id$: $\pi_i(X)\otimes Q \to \pi_i(Y)\otimes Q$ e izo pentru $i<n$ şi epi pentru $i=n$, cîtă

vreme $\pi_1(X)$ şi $\pi_1(Y)$ sînt abeliene);

- f e n-echivalenţă în $H_*(;Q)$)i.e.: $f_*: H_i(X;Q) \to H_i(Y;Q)$ e izo pentru $i<n$ şi epi pentru $i=n$);

- f e n-echivalenţă în $H^*(\cdot\,;Q)$ (i.e.: $H^i(X;Q) \xleftarrow{f^*} H^i(Y;Q)$ e izo pentru $i<n$ şi mono pentru $i=n$).

c) $\Rightarrow$ a) Considerînd din nou turnul nilpotent al lui X, va fi evident suficient să arătăm că X_α e de tip finit peste Q, pentru orice α. Dacă X_α e în aceste condiţii, în fibrarea:

$$K(\pi_\alpha, n_\alpha) \hookrightarrow X_{\alpha+1} \xrightarrow{p_{\alpha+1}} X_\alpha \qquad \text{avem:}$$

$$E^{0,n_\alpha}_{n_\alpha+1} = E^{0,n_\alpha}_2 = H^{n_\alpha}(K(\pi_\alpha, n_\alpha), Q) \sim \mathrm{Hom}_Q(\pi_\alpha \otimes Q, Q)$$

Arătînd deci $\dim_Q E^{0,n_\alpha}_{n_\alpha+1} < \infty$ va rezulta $\dim_Q \pi_\alpha < \infty$.

Avem: $f_{\alpha+1}: X \to X_{\alpha+1}$ e n_α-echivalenţă în π_*, după cum rezultă din demonstraţia Th.15b), deci: $f^*_{\alpha+1}: H^{n_\alpha}(X_{\alpha+1};Q) \hookrightarrow H^{n_\alpha}(X;Q)$ deci, din ipoteze: $\dim_Q H^{n_\alpha}(X_{\alpha+1};Q) < \infty$, în particular: $\dim_Q E^{0,n_\alpha}_\infty < \infty$. Considerăm şirul exact:

$$0 \to E^{0,n_\alpha}_\infty \to E^{0,n_\alpha}_{n_\alpha+1} \xrightarrow{d_{n_\alpha+1}} \mathrm{Im}\, d_{n_\alpha+1} \to 0$$

Folosind implicaţia a) $\Rightarrow$ c) avem: $\dim_Q H^{n_\alpha+1}(X_\alpha;Q) < \infty$ deci $\dim_Q E^{n_\alpha+1,0}_2 < \infty$ în particular: $\dim_Q \mathrm{Im}\, d_{n_\alpha+1} \le \dim_Q E^{n_\alpha+1,0}_{n_\alpha+1} < \infty$ şi deci: $\dim_Q E^{0,n_\alpha}_{n_\alpha+1} < \infty$.

Pentru a arăta că $\pi_i(X_{\alpha+1})$ e de tip finit, ne rezumăm numai la cazurile: $i = n_\alpha$, $i = n_\alpha + 1$, în celelalte cazuri avînd izomorfism (indus de $p_{\alpha+1}$) cu $\pi_i(X_\alpha)$. Dacă $n_\alpha > 1$, avem următorul şir exact (grupuri abeliene):

$$0 \to \pi_{n_\alpha+1}(X_{\alpha+1}) \xrightarrow{(p_{\alpha+1})_\#} \pi_{n_\alpha+1}(X_\alpha) \xrightarrow{\partial} \pi_\alpha \xrightarrow{j_\#} \pi_{n_\alpha}(X_{\alpha+1}) \xrightarrow{(p_{\alpha+1})_\#} \pi_{n_\alpha}(X_\alpha) \to 0$$

$\pi_{n_{\alpha+1}}(X_\alpha)$ de tip finit implică evident: $\pi_{n_{\alpha+1}}(X_{\alpha+1})$ de tip finit, de asemenea: π_α de tip finit implică $\mathrm{Im}\, j_\#$ de tip finit. In şirul exact: $0 \to \mathrm{Im}\, j_\# \to \pi_{n_\alpha}(X_{\alpha+1}) \to \pi_{n_\alpha}(X_\alpha) \to 0$ grupurile de la extremităţi sînt de tip finit, deci şi $\pi_{n_\alpha}(X_{\alpha+1})$ rezultă de tip finit.

In cazul $n_\alpha = 1$, şirul de omotopie al fibrării se reduce la: $0 \to \pi_\alpha \to \pi_1(X_{\alpha+1}) \xrightarrow{(p_{\alpha+1})_\#} \pi_1(X_\alpha) \to 1$. Cu ajutorul Lemei 17 obţinem concluzia dorită şi în acest caz, şi demonstraţia Th.19 ia sfîrşit.

Convenind să spunem că un turn nilpotent e de tip finit dacă $\dim_{\mathbb{Q}} \pi_\alpha < \infty, \forall \alpha$, se constată că am demonstrat acum la urmă şi că: dacă turnul e de tip finit, spaţiul asociat e de tip finit; reciproc, în cursul dem.Th.19 a) $\Rightarrow$ c) am observat că: dacă spaţiul e de tip finit, atunci turnul e de tip finit, ceea ce face ca să putem identifica <u>spaţiile şi turnurile de tip finit</u>.

In final vom explica modul în care se poate face o <u>"rafinare principală" pentru aplicaţiile între spaţii nilpotente</u>.

Fie deci $X \xrightarrow{\Psi} X'$ o asemenea aplicaţie. Reluînd terminologia şi notaţiile anterioare (toate construcţiile relative la X' vor fi accentuate cu $'$), se ştie că putem scrie: $\Psi = \varprojlim \{X_n \xrightarrow{\Psi_n} X'_n\}$ i.e. $\Psi_{n-1} p_n = p'_n \Psi_n$ şi: $\Psi_n f_n = f'_n \Psi$ (de exemplu [5] p.48). Vom considera turnurile nilpotente asociate spaţiilor, păstrînd notaţiile introduse după Th.15 şi presupunînd în plus $n_\alpha = n'_\alpha, \forall \alpha$, ceea ce evident nu introduce restricţii.

22. <u>Teoremă</u>: Există $X_\alpha \xrightarrow{\Psi_\alpha} X'_\alpha$ a.î.:

a) $\Psi_\alpha p_{\alpha+1} = p'_{\alpha+1} \Psi_{\alpha+1}$

b) $\Psi_{\alpha+1} f_{\alpha+1} = f'_{\alpha+1} \Psi$

c) restricţiile: $\Psi_{\alpha+1} : K(\pi_\alpha, n_\alpha) \to K(\pi'_\alpha, n_\alpha)$ sînt induse de morfisme: $\pi_\alpha \longrightarrow \pi'_\alpha$ după cum urmează:

- dacă $n_\alpha = 1$ (vezi Obs.iii), $A_i(\pi_1 X) \longrightarrow A_i(\pi_1 X')$

e indus de $\psi_\# : \pi_1 X \longrightarrow \pi_1 X'$

- dacă $n_\alpha = n \geq 2$ (vezi idem): $I^{i-1}\cdot\pi_n X / I^i\cdot\pi_n X \longrightarrow I'^{i-1}\cdot\pi_n X' / I'^i\cdot\pi_n X'$

e indus de $\psi_\# : \pi_n X \longrightarrow \pi_n X'$

Dem.: Procedînd ca în demonstraţia lui 2.15 a), vom considera $X_\alpha = K(G^\alpha, 1) \xrightarrow{\psi_\alpha} K(G'^\alpha, 1) = X'_\alpha$ induse de morfismele: $G^\alpha \longrightarrow G'^\alpha$ provenind din: $G = \pi_1 X \xrightarrow{\psi_\#} \pi_1 X' = G'$

Pretenţia c) rezultă din comutativităţile:

$$\begin{tikzcd}
K(A_{\alpha+1}(G),1) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\psi_{\alpha+1}"'] & K(G^{\alpha+1},1) \arrow[r, "p^{\alpha+1}"] \arrow[d, "\psi_{\alpha+1}"'] & K(G^\alpha,1) \arrow[d, "\psi_\alpha"'] \\
K(A_{\alpha+1}(G'),1) \arrow[r, hook] & K(G'^{\alpha+1},1) \arrow[r, "p'^{\alpha+1}"] & K(G'^\alpha,1)
\end{tikzcd}$$

făcînd identificările de cuviinţă ca în demonstraţia lui 0.4.

Trecînd la $n_\alpha = n \geq 2$, pasul inductiv va fi procurat de următoarea:

23. Lemă: Fie $(X, pt) \xrightarrow{f} (B, pt)$ şi $(X', pt) \xrightarrow{f'} (B', pt)$ în condiţiile din lema 2.16. Dată fiind diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\
B \arrow[r, "\psi_\alpha"] & B'
\end{tikzcd}$$

(reluînd şi concluziile lemei 2.16) există: $\psi_{\alpha+1} : E \longrightarrow E'$ a.î.:

a) $\psi_\alpha q = q' \psi_{\alpha+1}$; b) $\psi_{\alpha+1}\, g = g'\, \psi_n$

c) $\psi_{\alpha+1} : K(A,n) \to K(A',n)$ e indus de $A = \pi_{n+1}(B,X) / I\cdot\pi_{n+1}(B,X) \longrightarrow \pi_{n+1}(B',X') / I'\cdot\pi'_{n+1} = A'$

(ca în demonstraţia lemei 2.16), indus la rîndul său de

$$(\psi_\alpha)_\# : \pi_{n+1}(B,X) \longrightarrow \pi_{n+1}(B',X')$$

Dem.: Păstrînd toate notaţiile din demonstraţia lemei 2.16 considerăm diagrama:

$$(*)\quad \begin{array}{ccc} (B,X) & \xrightarrow{\psi_\alpha} & (B',X') \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k'} \\ (K(A,n+1),pt) & \xrightarrow{\overline{\psi}_\alpha} & (K(A',n+1),pt) \end{array}$$

(unde $\overline{\psi}_\alpha$ e indus în modul descris mai sus la c)).

Comutativitatea se verifică arătînd că: $(\overline{\psi}_\alpha \circ k)^*(u_{n+1}) = (k' \circ \psi_\alpha)^*(u_{n+1})$

$$= pr \circ (\psi_\alpha)_\# \in Hom(\pi_{n+1}(B,X), \pi_{n+1}(B',X')/\Gamma'\pi_{n+1}(B',X')) \sim H^{n+1}(B,X;A')$$

(unde: $(\psi_\alpha)_\# : \pi_{n+1}(B,X) \longrightarrow \pi_{n+1}(B',X')$ şi : $pr : \pi_{n+1}(B',X') \longrightarrow A'$).

$\overline{\psi}_\alpha$ induce în mod natural un morfism între fibrările universale:

$$(**)\quad \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\overline{\overline{\psi}}_\alpha} & \mathcal{S}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \xrightarrow{\overline{\psi}_\alpha} & K' \end{array}$$

unde săgeata $\Omega \longrightarrow \Omega'$ e tocmai ceea ce descriam în enunţ la pct. c).

Pătratul comutativ $(*)$ permite ca morfismul $(**)$ să fie transportat pe fibrările incluse:

$$(***)\quad \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\psi_{\alpha+1}} & E' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q'} \\ B & \xrightarrow{\psi_\alpha} & B' \end{array}$$

ceea ce arată a) şi c).

Restrîngînd morfismul (***) încă odată, obţinem:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\ X \times \Omega \arrow[r, "\psi_n \times \psi_{\alpha+1}"] \arrow[d, "p^n_X"'] & X' \times \Omega' \arrow[d, "p^n_{X'}"] \\ X \arrow[r, "\psi_n"] & X' \end{tikzcd}$$

ceea ce, ţinînd cont de definiţia aplicaţiilor g şi g', încheie demonstraţia lemei.

Pentru a finaliza demonstraţia teoremei, urmărim cu atenţie firul demonstraţiei Lemei 16.

§ 3. <u>LOCALIZAREA SPATIILOR NILPOTENTE</u>

Un grup G se va numi $\mathbb{Q}$-local d.n.d, $\forall n \in \mathbb{N}$, aplicaţia: $y \longrightarrow y^n$ este bijecţie.

1. <u>Propoziţie</u>

a) Fie G un grup abelian; atunci: <u>G este $\mathbb{Q}$-local d.n.d. G este Q-spaţiu vectorial d.n.d. aplicaţie canonică ($g \to g \otimes 1$) dă un izo: $G \sim G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.</u>

b) Fie: $0 \to G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \to 1$ o extensie centrală; atunci: dacă două grupuri sînt 0-locale, şi al treilea este 0-local.

c) Fie şirul exact arbitrar: $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$; dacă G e nilpotent, afirmaţia precedentă se menţine.

d) Fie: $G \xrightarrow{\alpha} G'$; dacă grupurile sînt $\mathbb{Q}$-locale, atunci $\operatorname{Ker}\alpha, \operatorname{Im}\alpha$ sînt $\mathbb{Q}$-locale.

e) Fie G nilpotent; atunci: G este $\mathbb{Q}$-local d.n.d. toţi abelianizaţii sînt $\mathbb{Q}$-spaţii vectoriale d.n.d $\exists\ 0 \to A_\alpha \to \pi_{\alpha+1} \to \pi_\alpha \to 1$ $\alpha = 0, \dots, r-1$, un şir de extensii centrale cu: $\pi_0 = 0$, $\pi_r = G$

şi A_α Q-spaţii vectoriale, $\forall\alpha$.

Dem.: Singurele afirmaţii netriviale sînt c) şi e) prima implicaţie (compară cu [3] p.19, Cor.2.5 şi p.20 Th.2.7) pe care ne propunem a le admite.

Un spaţiu nilpotent X se va numi Q-spaţiu dacă $\pi_q X$ este grup Q-local, $\forall q \geq 1$. După Prop.1, apar ca alternative posibile şi următoarele definiţii echivalente: $\pi_q X$ sînt Q-spaţii vectoriale $q \geq 2$ şi abelianizaţii lui $\pi_1 X$ sînt Q-spaţii vectoriale d.n.d. $\pi_q X$ sînt Q-spaţii vectoriale (pe scurt: Q-s.v.), pentru $q \geq 2$, şi $\pi_1 X$ se încadrează într-un şir de extensii centrale:

$$0 \to A_\alpha \to \pi_{\alpha+1} \to \pi_\alpha \to 1,\ \alpha = 0,\dots,r-1 \quad \text{şi}: \pi_0 = 0,\ \pi_r = \pi_1 X,$$

A_α fiind Q-s.v., $\forall\alpha$.

O clasă imediată de exemple o constituie spaţiile $K(V,n)$ unde V este Q-s.v.

2. Corolar

Fie fibrarea de spaţii nilpotente: $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$

Dacă două dintre ele sînt Q-sp., atunci şi al treilea este Q-sp.

Dem.

a) F, B Q-sp. $\Rightarrow E$ Q-sp.

Din şirul exact de omotopie al fibrării avem:

$$0 \to \operatorname{Im}\partial_n \to \pi_n F \xrightarrow{i_\#} \operatorname{Im} i_\# \to 0 \qquad (n \geq 2)$$

şi rezultă din 1 c), d) că $\operatorname{Im} i_\#$ este Q-s.v.

Considerăm: $0 \to \operatorname{Im} i_\# \to \pi_n E \xrightarrow{p_\#} \operatorname{Im} p_\# = \operatorname{Ker}\partial_n \to 0$

şi deci rezultă $\pi_n E$ Q-s.v. din 1 c), d), pentru $n \geq 2$.

In cazul $n = 1$ avem: $0 \to \operatorname{Im}\partial \to \pi_1 F \xrightarrow{i_\#} \operatorname{Im} i_\# \to 1$

şi $1 \to \operatorname{Im} i_\# \to \pi_1 E \to \pi_1 B \to 1$. Din primul şir rezultă:

$\operatorname{Im} i_\#$ Q-local, iar din al doilea: $\pi_1 E$ Q-local (1.c), d)).

b) F, E Q-sp. $\Longrightarrow$ B Q-sp.

Considerăm şirurile exacte: $0 \to \operatorname{Im} i_\# \to \pi_n E \xrightarrow{p_\#} \operatorname{Im} p_\# \to 0$

$$0 \to \operatorname{Im} p_\# \to \pi_n B \xrightarrow{\partial} \operatorname{Im} \partial \to 1$$

de unde reiese perfect analog: $\pi_n B$ Q-local, pentru $n \geq 2$.
In cazul $n=1$ avem: $1 \to \operatorname{Im} i_\# \to \pi_1 E \to \pi_1 B \to 1$, deci şi $\pi_1 B$ este Q-local.

Oprim aici ilustrarea demonstraţiei.

3. Corolar. Fie fibrarea principală $K(\pi,n) \hookrightarrow E \longrightarrow B$ cu π Q-s.v. şi B Q-spaţiu; atunci E este Q-spaţiu.

Dem.: Corolarul precedent şi corolarul 2.13.

Se observă că dacă X, Y sînt Q-spaţii, atunci $X \times Y$ este Q-spaţiu. Ca de obicei totul se întîmplă pe componente

Se numeşte localizare a spaţiului nilpotent X, un Q-spaţiu X_0, dat împreună cu o aplicaţie $f: X \to X_0$ (aplicaţia de localizare) care au următoarea proprietate de universalitate: $\forall Y$ Q-sp. arbitrar, aplicaţia indusă de f la nivelul mulţimilor de clase de omotopie: $[X,Y] \xleftarrow[\sim]{f^\#} [X_0,Y]$ e o bijecţie. Aceasta se întîmplă d.n.d. $\forall g: X \to Y$, $\exists \bar{g}: X_0 \to Y$, unic pînă la omotopie, a.î.: $\bar{g} \circ f \simeq g$ (aplicaţii omotope).

Se observă din definiţie că orice două localizări sînt echivalente omotopic.

4. Teoremă. Fie $f: X \to Y$. Atunci sînt echivalente:

a) $[X,Z] \xleftarrow[\sim]{f^\#} [Y,Z]$, $\forall$ Q-spaţiul Z; b) f^* e izomorfism în coomologie raţională; c) f_* e izomorfism în omologie raţională.

Dem.: Ne mulţumim doar cu a) d.n.d b).

a) $\Longrightarrow$ b)

Dacă $Z = K(Q,n)$ avem:

$$\begin{array}{ccc} [Y, K(Q,n)] & \xrightarrow[\sim]{f^{\#}} & [X, K(Q,n)] \\ \wr\!\downarrow & & \downarrow\!\wr \\ H^n(Y;Q) & \xrightarrow{f^*} & H^n(X;Q) \end{array}$$

unde izomorfismele verticale sînt cele din paragraful 0.

b) $\Longrightarrow$ a) Presupunem f^* izomorfism în coomologie rațională

şi fie Z un Q-spațiu. Considerăm T.N. al lui Z:

$\{K(\pi_\alpha, n_\alpha) \hookrightarrow Z_{\alpha+1} \xrightarrow{p_{\alpha+1}} Z_\alpha\}$, şi fie $g: X \longrightarrow Z$. Vom nota cu g_α compunerea $f_\alpha \circ g$. Avem următoarea diagramă comutativă (din ipoteza de inducție, deoarece $Z_0 = pt$)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g_{\alpha+1}} & Z_{\alpha+1} \\ f\downarrow & \searrow^{g_\alpha} & \downarrow p_{\alpha+1} \\ Y & \xrightarrow{\bar{g}_\alpha} & Z_\alpha \end{array}$$

Trebuie să ridicăm pe $\bar{g}_\alpha$ la $\bar{g}_{\alpha+1}: Y \to Z_{\alpha+1}$ astfel încît:

$$g_{\alpha+1} = \bar{g}_{\alpha+1} \circ f .$$

Ţinînd cont de observațiile ce rezultă din Th.2.15 şi de faptul că dacă un π-modul A este Q-s.v. atunci $I \cdot A$ este Q-s.v., şi de ipoteza asupra lui Z rezultă: π_α Q-s.v.

Obstrucția la cele de trebuință stă în $H^{n_\alpha+1}(Y,X;\pi_\alpha)$ care este nul din ipoteza asupra lui f^*.

Mai mult: orice două ridicări cu proprietățile cerute sînt omotope deoarece obstrucția omotopiei lor stă în $H^{n_\alpha}(Y,X;\pi_\alpha) = 0$ (0.3).

Putem defini: $\bar{g}: Y \longrightarrow \varprojlim Z_\alpha \sim Z$ prin: $\bar{g} = \varprojlim \bar{g}_\alpha$.

In final avem: $\bar{g} \circ f \simeq g$, deoarece considerînd f ca incluziune am introdus o comutativitate omotopică.

Unicitatea omotopică a lui $\bar{g}$ rezultă din construcție.

5. <u>Corolar</u>

Fie π grup abelian; atunci aplicaţia canonică $\pi \to \pi\otimes Q$ induce $K(\pi,n) \to K(\pi\otimes Q,n)$, care <u>este localizare</u>.

<u>Dem.</u>: teorema precedentă şi propoziţia 1.7.

6. <u>Lema</u>: Fie diagrama comutativă (fibrări principale):

$$\begin{tikzcd} K(\pi,n) \arrow[r, "\bar{\bar{f}}"] \arrow[d] & K(\pi_0,n) \arrow[d] \\ E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & E_0 \arrow[d, "p_0"] \\ B \arrow[r, "f"] & B_0 \end{tikzcd}$$

Dacă f şi $\bar{\bar{f}}$ sînt localizări, rezultă $\bar{f}$ localizare.

<u>Dem.</u>: E_0 rezultă Q-spaţiu din Cor.3. Morfismul indus între şirurile spectrale ale fibrărilor (coeficienţi Q) are proprietăţile: $f_2^{0,*} = \bar{\bar{f}}^*$ e izo şi: $f_2^{*,0} = f^*$ e izo, deci, folosind din nou una din implicaţiile din teorema de comparare din [6] rezultă $f_\infty = \bar{f}^*$ izo. Tinînd cont de Th.4, lema rezultă.

7. <u>Lema</u>: Fie: $K(\pi,n) \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ o fibrare principală şi $B \xrightarrow{f} B_0$ localizare. Există atunci o fibrare principală $K(\pi\otimes Q,n) \hookrightarrow E_0 \xrightarrow{p_0} B_0$, astfel ca, în diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd} K(\pi,n) \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d] & K(\pi\otimes Q,n) \arrow[d] \\ E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & E_0 \arrow[d, "p_0"] \\ B \arrow[r, "f"] & B_0 \end{tikzcd}$$

g să fie localizare, iar aplicaţia între fibre să fie inclusă de morfismul canonic $\pi \to \pi\otimes Q$.

<u>Dem.</u> Deîndată ce vom construi diagrama comutativă, restul afirmaţiilor vor rezulta din Cor.5 şi lema 6.

Fie: $B \xrightarrow{k} K(\pi, n+1)$ aplicaţia clasifiantă a fibrării.

f fiind localizare, găsim: $B_0 \xrightarrow{k_0} K(\pi\otimes Q, n+1)$ care face comutativă omotopic diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & B_0 \arrow[d, "k_0"] \\
K(\pi, n+1) \arrow[r, "\iota_{n+1}"] & K(\pi\otimes Q, n+1)
\end{tikzcd}$$

cu ajutorul căreia inducem fibrarea $E_0 \xrightarrow{p_0} B_0$.

Rămîne să construim aplicaţia $g : E \to E_0$ deasupra lui f astfel încît: $g|K(\pi,n) = \iota_n$.

Pentru aceasta să considerăm fibrările p', p'' induse de $k_0 \circ f$ şi $\iota_{n+1}\circ k$.

$$\begin{tikzcd}
K(\pi\otimes Q, n) \arrow[r, equal] \arrow[d] & K(\pi\otimes Q, n) \arrow[d] \\
E' \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p'"'] & E_0 \arrow[d, "p_0"] \\
B \arrow[r, "f"] & B_0
\end{tikzcd}$$

unde $\bar{f}(x,\omega) = (f(x),\omega)$ $x \in B$, $\omega \in \mathcal{P}K(\pi\otimes Q, n+1)$

$$\begin{tikzcd}
K(\pi, n) \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d] & K(\pi\otimes Q, n) \arrow[d] \\
E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & E'' \arrow[d, "p''"] \\
B \arrow[r, equal] & B
\end{tikzcd}$$

unde $\psi(x,\omega) = (x, \iota_{n+1}\circ\omega)$

Deoarece $k_0 \circ f \simeq \iota_{n+1}\circ k$ rezultă echivalenţa omotopică de fibrări induse:

$$\begin{tikzcd}
K(\pi\otimes Q, n) \arrow[r, equal] \arrow[d] & K(\pi\otimes Q, n) \arrow[d] \\
E'' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & E' \arrow[d] \\
B \arrow[r, equal] & B
\end{tikzcd}$$

Nu avem atunci decît să definim: $g = \bar{f}\circ\varphi\circ\psi : E \longrightarrow E_0$.

8. <u>Teoremă</u> (<u>de existenţă a localizării</u>)

<u>Orice spaţiu nilpotent X admite o localizare $f : X \longrightarrow X_0$</u>

a.î.: f induce izomorfisme din $\pi_n(X)\otimes Q$ în $\pi_n(X_0)\otimes Q = \pi_n(X_0), n>1$

şi: $\pi_1 X_0$ se scrie ca un şir de extensii centrale:

$$0 \longrightarrow A_\alpha \longrightarrow \pi_{\alpha+1} \longrightarrow \pi_\alpha \longrightarrow 1, \text{ cu } A_\alpha\ Q\text{-s.v.}, \alpha = 0,\dots,r-1$$

şi

$$\pi_0 = 0,\ \pi_r = \pi_1 X_0, \quad \text{a.î.} \quad A_\alpha \sim A_{\alpha+1}(\pi_1(X))\otimes Q .$$

<u>Demonstraţie</u>:

Existenţial imediată, din aplicarea consecventă a lemei 7 şi folosirea echivalenţei stabilite în Th.4, punînd $f = \varinjlim g_\alpha$ cu $g_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X_{\alpha,0}$, unde X_α fac parte din T.N. al lui X.

$\pi_1 X_0$ are proprietatea din enunţ prin construcţie, iar în ceea ce priveşte proprietatea pentru π_n, $n \geqslant 2$, vom considera acele g_α cu $n_\alpha \geqslant 2$. Vom presupune, inductiv: $(g_\alpha)_\#\otimes id$: $\pi_n X_\alpha\otimes Q \to \pi_n X_{\alpha,0}\otimes Q$ izomorfism, pentru orice $n \geqslant 2$, şi va rezulta aceeaşi proprietate pentru $(g_{\alpha+1})_\#\otimes id$, considerînd morfismul indus între şirurile exacte de omotopie ale celor două fibrări (partea abeliană) tensorizat cu Q:

$$\begin{array}{ccc}
K(\pi_\alpha, n_\alpha) & \longrightarrow & K(\pi_\alpha\otimes Q, n_\alpha) \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_{\alpha+1} & \xrightarrow{g_{\alpha+1}} & X_{\alpha+1,0} \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_\alpha & \xrightarrow{g_\alpha} & X_{\alpha,0}
\end{array}$$

9. <u>Corolar</u>. Fie X, Y spaţii simple. Atunci: $f : X \to Y$ e cu proprietăţile echivalente din teorema 4 d.n.d. f induce izomorfisme între: $\pi_q(X)\otimes Q \longrightarrow \pi_q(Y)\otimes Q$, $q \geq 1$.

<u>Dem</u>.

Dacă f e ca în teorema 4, luăm $Y \xrightarrow{g} Y_0$ localizare şi teorema 4 implică: $g\circ f$ e localizare a lui X.

Din teorema 8 şi faptul că spaţiile sînt simple rezultă implicaţia directă.

Invers: considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X_0 \arrow[r, "f_0"] & Y_0 \end{tikzcd}$$

unde săgeţile verticale sînt localizări iar clasa de omotopie a lui f_0 e unic determinată din condiţia ca diagrama să fie omotopic comutativă (e suficient ca spaţiile să fie nilpotente, caz în care vom numi f_0 : <u>localizarea lui f</u>).

Din ipoteză rezultă că f e izo în π_* şi cum săgeţile verticale sînt izomorfisme în coomologia raţională rezultă f^* izomorfism în coomologia raţională.

10. <u>Teorema</u>. Fie X, Y nilpotente şi $f : X \to Y$.

Atunci următoarele sînt echivalente:

a) f e echivalenţă omotopică;

b) $f_\#$ e izomorfism;

c) f_* e izomorfism;

d) $[X,Z] \underset{\sim}{\xleftarrow{f^\#}} [Y,Z]$ pentru $\forall Z$ nilpotent.

<u>Dem</u>. a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) clar.

<u>d) $\Rightarrow$ a)</u> Pentru aceasta folosim următoarele diagrame:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[dl, "g"] \\ X & \end{tikzcd} \qquad g\circ f \simeq 1_X \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & X \arrow[dl, "f"] \\ & Y & \end{tikzcd} \qquad f\circ g\circ f \simeq f$$

şi analoagele pentru g.

Implicaţia c) $\Rightarrow$ d) este replica în coeficienţi $\mathbb{Z}$ a implicaţiei c) $\Rightarrow$ a) din teorema 4.

11. Propoziţie

a) $\tilde{H}_*(K(Q,n);Z)$ e Q-s.v.

b) Fie: $F \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ fibrare orientabilă şi $\tilde{H}_*B$, $\tilde{H}_*F$ Q-s.v.; atunci: $\tilde{H}_*E$ e Q-s.v.

Dem.

b) In şirul spectral de omologie al fibrării: $E^2_{p,q} = H_p(B;H_q(F)) \sim H_p(B)\otimes H_q(F)$ este Q-s.v. pentru $p+q>0$ deci $E^\infty_{p,q}$ va fi Q-s.v. şi deci, considerînd seria de compoziţie: $0=F_0H_nE \subset F_1H_nE \subset \dots \subset F_nH_nE = H_nE$ cu factorizările succesive Q-s.v., încheiem demonstraţia.

a) In general: $\tilde{H}_*(X;Z)$ e Q-s.v. d.n.d. $\tilde{H}_*(X;Z) \to \tilde{H}_*(X;Q)$ e izomorfism, conform 1.a).

Procedînd prin inducţie putem presupune afirmaţia adevărată pentru n-1 (pentru n=1 afirmaţia rezultă din construcţia lui $K(Q,1)$ dată în cursul dem.Th.1.4).

Morfismul $Z \hookrightarrow Q$ induce un morfism între şirurile spectrale cu coeficienţi corespunzători ale fibrării universale de tip $(Q,n-1)$.

Avînd izomorfism la E_∞ şi la $E^2_{0,*}$, o teoremă de comparare ne permite să încheiem demonstraţia.

Observaţie: Afirmaţia a) rămîne valabilă, înlocuind pe Q cu un Q-s.v. V arbitrar, de dimensiune finită, în mod evident; luînd apoi: V Q-s.v. arbitrar şi trecînd la limită după subspaţiile de dimensiune finită, rezultatul însă se menţine, ceea ce ne permite să formulăm:

12. <u>Teoremă</u>: Fie X nilpotent. Atunci: X Q-sp. d.n.d.

$$\tilde{H}_* X \quad Q\text{-s.v.}$$

<u>Dem</u>.: Pentru implicaţia directă se lucrează inductiv pe T.N. al lui X folosind Prop.11.

Pentru cealaltă implicaţie vom proceda în felul următor:

Considerăm $f: X \to X_0$ localizarea cu proprietăţile: X_0 nilpotent, $\pi_q X_0$ Q-local, $\tilde{H}_q X_0$ Q-local, $\forall q$.

Avem diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_*(X,Q) & \xrightarrow[\sim]{f_*} & \tilde{H}_*(X_0,Q) \\ \| & & \| \\ \tilde{H}_*(X) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_*(X_0) \end{array}$$

Rezultă: f_* izomorfism cu coeficienţi întregi şi deci f echivalenţă omotopică, conform Th.10.

13. <u>Corolar</u>. Fie X, Y simplu conexe punctate cu Q -celule Dacă X, Y sînt Q -spaţii rezultă: $X \vee Y$ Q -spaţiu (de tip finit peste Q).

<u>Dem</u>.: Corolarul 2.14 b) arată că $X \vee Y$ rămîne simplu conex. Deoarece $\tilde{H}_*(X \vee Y) \sim \tilde{H}_*(X) \oplus \tilde{H}_*(Y)$, din teorema 12 rezultă: $X \vee Y$ Q -spaţiu. Din teorema 2.19 rezultă şi finitudinea peste Q.

§ 4. EXEMPLE

1. Lemă: Fie B un spaţiu şi fie $u \in H^{2n}(B;Q)$ nondivizor al lui zero. Fie: $\Omega \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ fibrarea principală indusă de $[\bar{u}] \in [B, K(Q,2n)] \sim H^{2n}(B;Q)$. Atunci:

$$H^*(B)/\mathrm{ideal}(u) \xrightarrow{p^*} H^*(E) \quad \text{e izo cu coeficienţi raţionali}$$

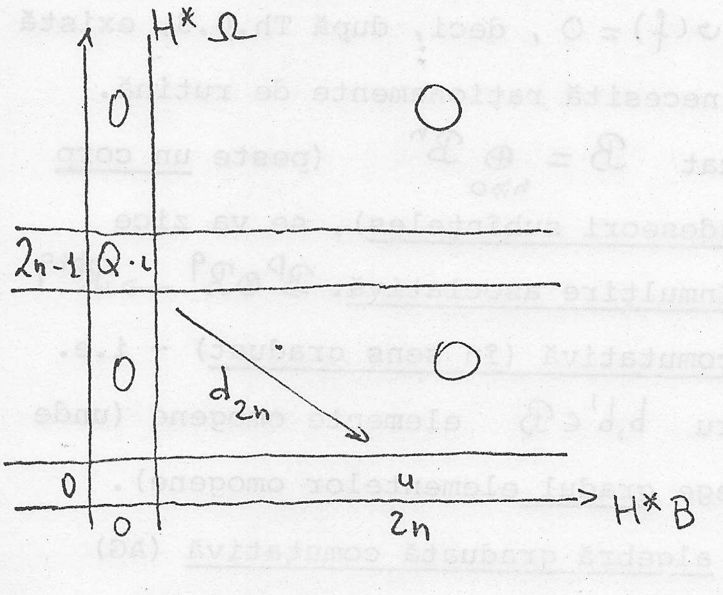
Demonstraţie: Arătăm întîi că $p^*(u)=0$. Avem diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega \arrow[d] \\ E \arrow[r, "\bar{\bar{u}}"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{P} \arrow[d, "q"] \\ B \arrow[r, "\bar{u}"] & K(Q,2n) \end{tikzcd}$$

$$p^*(u) = p^*\bar{u}^*(u_{2n}) = \bar{\bar{u}}^* q^*(u_{2n})$$

$$\text{dar: } q^*(u_{2n}) = 0$$

Termenul E_2 din şirul spectral arată în felul următor: ($H^*\Omega$ rezultă din Th.1.4, iar egalitatea $d_{2n}(\iota)=u$ din Prop.1.1 şi Cor. 1.3)



Avem de arătat
- p^* surjecţie şi
- $\mathrm{Ker}\,p^* \subset \mathrm{ideal}(u)$

Avem: $E_2 = E_{2n}$ şi $E_{2n+1} = E_\infty$

Avem: $d_{2n}(b \otimes 1) = 0 \quad , \quad b \in H^*B$

$$d_{2n}(b \otimes \iota) = (-1)^s\, b\cdot u \otimes 1 \quad , \quad b \in H^sB \qquad (*)$$

p^* identificîndu-se, ca în demonstraţia Prop.1.1, cu:

$$H^sB = E_2^{s,0} = E_{2n}^{s,0} \twoheadrightarrow E_{2n+1}^{s,0} = E_\infty^{s,0} \hookrightarrow H^sE$$

putem scrie $E_\infty^{s,2n-1} = E_{2n+1}^{s,2n-1} = \operatorname{Ker}\{d_{2n}: H^sB \otimes H^{2n-1}\Omega \longrightarrow H^{s+2n}B\} = 0$ (din ecuaţia (*) şi ipoteza asupra lui u), deci $E_\infty^{s,t} = 0$ pentru $t>0$, deci p^* surjecţie.

Iar: $\operatorname{Ker} p^* = \operatorname{Im}\{d_{2n}: H^{s-2n}B \otimes H^{2n-1}\Omega \longrightarrow H^sB\}$

şi din nou din ecuaţia (*) deducem: $\ker p^* \subset$ ideal(u).

2. <u>Lemă</u>: Fie, în plus, dată aplicaţia: $(X,pt) \xrightarrow{f} (B,pt)$ cu proprietăţile: $\begin{cases} - f^* \text{ surjecţie.} \\ - f^*(u) = 0 \end{cases}$ Există atunci o ridicare:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

astfel încît: $\begin{cases} - g^* \text{surjecţie} \\ - \operatorname{Ker} g^* \sim \operatorname{Ker} f^* / u \cdot H^*B \end{cases}$

(prin izomorfismul din lema 1).

<u>Dem.</u>: $f^*(u)=0$ implică $\vartheta(f) = 0$, deci, după Th.0.3, există ridicarea g. Restul afirmaţiilor necesită raţionamente de rutină.

Un spaţiu vectorial graduat $\mathcal{B} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{B}^n$ (peste <u>un corp de caracteristică 0, care va fi adeseori subînţeles</u>), se va zice <u>algebră graduată</u> dacă s-a dat o <u>înmulţire asociativă</u>: $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q \longrightarrow \mathcal{B}^{p+q}$ avînd <u>element neturu</u> $1 \in \mathcal{B}^0$ şi <u>comutativă (în sens graduat)</u> - i.e. $b.b' = (-1)^{|b|.|b'|} b'.b$ pentru $b, b' \in \mathcal{B}$ elemente omogene (unde prin $|\ |$ am înţeles şi vom înţelege <u>gradul</u> elementelor omogene).

Fie deci $\mathcal{B}$ o astfel de <u>algebră graduată comutativă</u> (AG) (sursă inepuizabilă de exemplu: coomologia spaţiilor). Un şir de elemente din $\mathcal{B}$, $u_1, \dots, u_m$ se va zice <u>şir regulat</u>, dacă:

$|u_i| > 0$ şi:

$u_i \in \mathcal{B}/\mathrm{ideal}(u_1,\dots,u_{i-1})$ e nondivizor al lui zero

$(1 \le i \le m)$

(Să observăm că din condiţia a doua rezultă $|u_i| = \text{par}$, $\forall i$).

3. Propoziţie. Fie dată aplicaţia: $f : X \longrightarrow B$ astfel ca:

$$\begin{cases} - f^* \text{ surjecţie şi:} \\ - \mathrm{Ker}\, f^* = \mathrm{ideal}\,(u_1,\dots,u_m) \end{cases}$$ unde $(u_1,\dots,u_m)$ e şir regulat în $H^*(B)$.

In aceste condiţii, există diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
 & B_m \arrow[d, phantom, "\vdots"] \\
 & B_i \arrow[d, "p_i"] \\
X \arrow[uur, "f_m"] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[ddr, "f"'] & B_{i-1} \arrow[d, phantom, "\vdots"] \\
 & {} \\
 & B_0 = B
\end{tikzcd}$$

$- f_i^*$ e epi, $\forall i$

a.î.: $- \mathrm{Ker}\, f_i^* \sim \mathrm{Ker}\, f^* / \sum_{j=1}^{i} u_j \cdot H^*B$, $\forall i$

$- p_i$ e de tip $(Q, |u_i| - 1)$, $\forall i$

Dem.: Imediată, cu lemele precedente.

4. Corolar: Dacă X este nilpotent iar B este Q-sp. de tip finit peste Q, f_m este localizare.

Dem. : Evident, f_m^* e izom. în $H^*(\cdot\,; Q)$. Cor. 3.3 asigură că B_m e Q-spaţiu de tip finit peste Q, iar Th.3.4 asigură că f_m e localizare.

5. Lemă: Dacă X e nilpotent şi dacă algebra $H^*(X;Q)$ e liber generată de $\alpha_1,\dots,\alpha_r$, $\alpha_i \in H^{n_i}(X;Q) \sim [X, K(Q,n_i)] \ni [\bar{\alpha}_i]$ (i.e.: $\bar{\alpha}_i^*(u_{n_i}) = \alpha_i$) atunci aplicaţia:

$$X \xrightarrow{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)} \prod_{i=1}^{r} K(Q,n_i)$$ este localizare

Dem.: Evidentă, folosind criteriul coomologic de localizare din Th. 3.4, care de altfel va apare sistematic în paragraful de faţă.

6. Exemplu: $X = S^{2n-1}$. Sîntem în condiţiile precedenţei. Luăm $\alpha \in H^{2n-1}(S^{2n-1};Q)$ generator şi avem:

$$S^{2n-1} \xrightarrow{\bar{\alpha}} K(Q,2n-1) \quad \text{localizare}$$

S^{2n-1} fiind simplu, Th.3,8.2) permite să calculăm:

$$\pi_i(S^{2n-1}) \otimes Q = \begin{cases} Q, & i = 0, 2n-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

7. Exemplu: Fie X un H-spaţiu conex cu omologia raţională de tip finit. Din [1] p.267-269 rezultă că sîntem în condiţiile din lema 5. O clasă particulară de exemple de acest tip o constituie X=G grup Lie conex şi compact. In acest caz, faptul că dim $\dim_Q H^*(G;Q) < \infty$ exclude prezenţa generatorilor polinomiali (de grad par) pentru algebra $H^*(G;Q)$.

8. Exemplu: Pentru un astfel de grup, se poate arăta existenţa unui spaţiu clasifiant B_G, a unei fibrări principale universale $G \hookrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{p} B_G$ (unde de data aceasta "principală" se citeşte în sensul fibrărilor cu grup structural G) cu proprie-

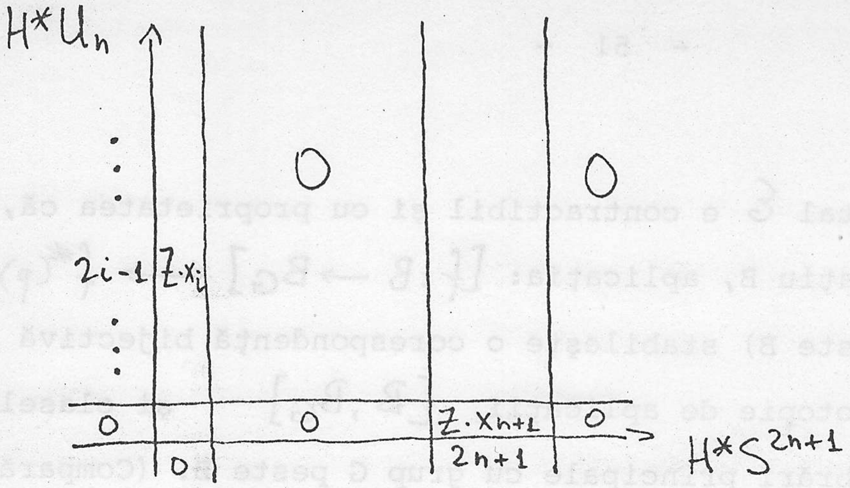
tatea că spaţiul total $\mathcal{E}$ e contractibil şi cu proprietatea că, pentru orice CW-spaţiu B, aplicaţia: $[f:B \to B_G] \longrightarrow f^*(p)$ (fibrarea indusă peste B) stabileşte o corespondenţă bijectivă între clasele de omotopie de aplicaţii $[B, B_G]$ şi clasele de izomorfism de fibrări principale cu grup G peste B. (Compară cu construcţiile din [7], făcute pentru cazul grupurilor clasice sau vezi [20] p.39-57).

Ca o primă proprietate, afirmăm că <u>fibrarea universală e total transgresivă</u>. G fiind conex, rezultă B_G simplu conex, şi deci orientabilitatea fibrării. Pe de o parte, raţionînd exact în Prop. 1.1 a) (dar fără a mai impune condiţiile suplimentare asupra fibrei) se observă că, dată fiind o fibrare orientabilă $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ condiţia $x \in \delta^{-1}\operatorname{Im} p^* \subset H^q F$ e echivalentă cu condiţia $x \in E_{q+1}^{0,q} \subset E_2^{0,q}$. Pe de altă parte, odată stabilită această formulare echivalentă a trnsgresivităţii cu ajutorul şirului spectral, Th. Borel din [6] p.54-55 asigură că fibrarea universală, şi deci toate fibrările principale cu grup G, sînt total transgresive. Aceeaşi teoremă afirmă că dacă $H^*(G;Q)$ e liber generată de $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ atunci $H^*(B_G;Q)$ e liber generată de $\beta_1,\dots,\beta_r$ cu $|\beta_i| = |\alpha_i|+1$, deci B_G e ca în Lema 5.

9. <u>Exemplu</u>: <u>grupul unitar</u> U_n, $n \geq 1$. Arătăm întîi, prin inducţie că: $H^*(U_n;Z)$ e liber generată de $\{x_i\}_{1\le i\le n}$ $|x_i| = 2i-1$. Deoarece $U_1 = S^1$, startul e asigurat. Considerăm fibrarea principală:

$$U_n \xrightarrow{j} U_{n+1} \xrightarrow{p} S^{2n+1}$$

Din ipotezele de inducţie, termenul E_2 e dat de:



Avem: $E_2 = E_{2n+1}$ şi $E_{2n+2} = E_\infty$. Deoarece, evident, $d_{2n+1}(x_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n+1$, E_{2n+1} fiind generată (ca algebră) de aceştia, rezultă: $d_{2n+1} = 0$, $E_\infty = E_2$, şi deci pasul de inducţie.

In plus avem $(1 \leq i \leq n)$: $H^{2i-1} U_{n+1} = E_\infty^{0,2i-1} = E_2^{0,2i-1} = H^{2i-1} U_n$ deci $j^*(x_i) = x_i$, $1 \leq i \leq n$. Pentru $i = n+1$, scriem j^* ca:

$$H^{2n+1} U_{n+1} \longrightarrow E_\infty^{0,2n+1} = E_2^{0,2n+1} = H^{2n+1} U_n$$

observăm că: $x_{n+1} \in E_\infty^{2n+1,0}$, deci: $j^*(x_{n+1}) = 0$.

Spaţiile U_n fiind simple, Th. 3.8.2) implică:

$$\pi_q U_n \otimes Q = \begin{cases} Q, & q = 2i-1,\ i = 1, \ldots, n \text{ şi } q = 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

10. Teorema de periodicitate în cazul complex (forma raţională). Fie $U = \varinjlim U_n$. Atunci:

$$\pi_q U \otimes Q = \begin{cases} Q, & q \text{ impar sau } q = 0 \\ 0, & q \text{ par şi } q \neq 0 \end{cases}$$

Dem.: Păstrînd notaţiile precedente, considerăm:

$$\begin{array}{ccc} U_{n+1} & \xrightarrow{\ell_{n+1}=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_{n+1})} & \prod_{i=1}^{n+1} K(Q,2i-1) \\ j\uparrow & & \uparrow \\ U_n & \xrightarrow{\ell_n=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)} & \prod_{i=1}^{n} K(Q,2i) \end{array}$$

(unde incluziunea din dreapta se face luînd punctul-bază pe componenta $K(Q,2n+1)$)

Notăm: $K = \varinjlim \left(\prod_{i=1}^{n} K(Q,2i-1)\right)$ şi $\ell = \varinjlim \ell_n$ va fi localizare. Teorema rezultă imediat scriind:

$$\pi_q U\otimes Q = \pi_q(\varinjlim U_n)\otimes Q = \varinjlim \pi_q U_n \otimes Q \xrightarrow[\sim]{\ell_\#\otimes id} \varinjlim \pi_q\left(\prod_{i=1}^{n} K(Q,2i-1)\right) = \pi_q K$$

11. Exemplu: Grupurile speciale ortogonale $SO(n)$, $n\geq 1$. Arătăm întîi, inductiv, că: $H^*(SO(2n+1);Q)$ e liber generată de $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$, $|x_i| = 4i-1$. Considerăm fibrarea principală

$$SO(2n-1) \xrightarrow{j} SO(2n+1) \xrightarrow{p} \tau^1(S^{2n})$$ (fibratul tangent unitar al sferei)

Pentru a calcula $H^*(\tau^1(S^{2n});Q)$ vom scrie şirul Gysin ([7] p.143):

$$H^{i-2n}(S^{2n}) \xrightarrow{\cup(e\otimes 1)} H^i(S^{2n}) \longrightarrow H^i(\tau^1 S^{2n}) \longrightarrow H^{i+1-2n}(S^{2n}) \xrightarrow{\cup(e\otimes 1)} H^{i+1}(S^{2n})$$

(unde $e\in H^{2n}S^{2n}$ e clasa Euler a fibratului tangent). Cf. acelaşi [7] p.130, $e = e(S^{2n}) = \chi(S^{2n})\cdot a = 2a$ (unde $a\in H^{2n}(S^{2n};Z)$ e generatorul canonic) deci

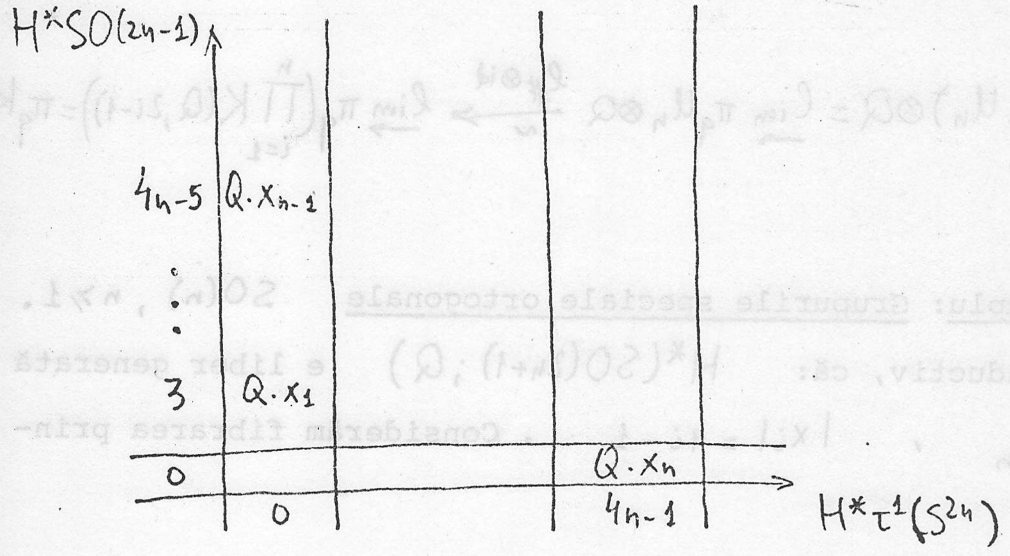
$e\otimes 1\in H^{2n}(S^{2n};Q)$ va fi generator. Examinînd acum şirul Gysin în cele 4 cazuri în care nu avem simultan:

$H^iS^{2n}=H^{i+1-2n}S^{2n}=0$, rezultă că:

$$H^i(\tau^1(S^{2n});Q)=\begin{cases}Q & ,\ i=0,4n-1\\ 0 & ,\ \text{în rest}\end{cases}$$

deci că: $H^*(\tau^1(S^{2n});Q)$ e liber generată de un x_n, $|x_n|=4n-1$.

Scriem acum, ţinînd cont de ipoteza de inducţie, termenul E_2 din şirul spectral al fibrării principale considerate:



Avem: $E_2=E_{4n-1}$, $E_{4n}=E_\infty$. Deoarece $d_{4n-1}(x_i)=0$, $1\le i\le n$: $d_{4n-1}=0$, $E_\infty=E_2$, ceea ce completează inducţia.

Reţinem şi (analog cu Ex.9):

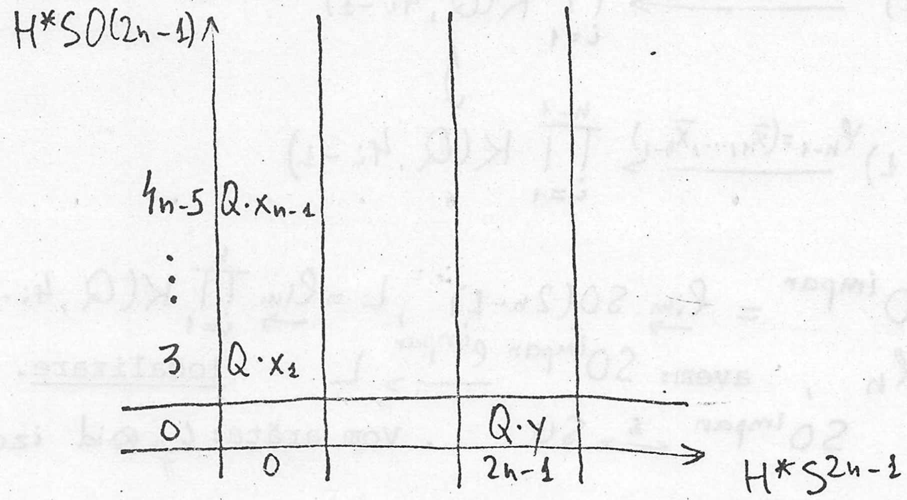
$$j^*(x_i)=x_i\ ,\quad 1\le i\le n-1$$

$$j^*(x_n)=0$$

Spaţiile $SO(2n+1)$ fiind simple, obţinem şi:

$$\pi_q SO(2n+1)\otimes Q = \begin{cases} Q\ , & q = 4i-1,\ 1\leq i\leq n,\ \text{şi } q=0 \\ 0\ , & \text{în rest} \end{cases}$$

Putem calcula acum $H^*(SO(2n);Q)$, considerînd fibrarea principală: $SO(2n-1) \hookrightarrow SO(2n) \longrightarrow S^{2n-1}$. Şirul spectral:



Avem: $E_2 = E_{2n-1}$ şi $E_\infty = E_{2n}$. Exemplul 8 permite să considerăm că $x_i \in E_{4i}^{0,4i-1}$, $1\leq i\leq n-1$ şi cum $d_{4i}(x_i)\in E_{4i}^{4i,0} = 0$, conchidem: $x_i\in E_\infty$, $1\leq i\leq n-1$ şi deci: $d_{2n-1}(x_i) = d_{2n-1}(y) = 0$, $d_{2n-1} = 0$ şi deci $E_\infty = E_2$, adică: $H^*(SO(2n);Q)$ e liber generată de $\{x_i\}_{1\leq i\leq n-1}$, cu $|x_i| = 4i-1$ şi de y, cu $|y| = 2n-1$, şi deci, ca mai sus:

$$\underset{(n=2m+1)}{\pi_q SO(2n)\otimes Q} = \begin{cases} Q, & q = 4i-1,\ 1\leq i\leq 2m,\ q = 4m+1 \text{ şi } q=0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\underset{(n=2m)}{\pi_q SO(2n)\otimes Q} = \begin{cases} Q\ , & q = 4i-1,\ 1\leq i\leq 2m-1\ (i\neq m) \text{ şi } q=0 \\ Q\oplus Q\ , & q = 4m-1 \\ 0\ , & \text{în rest} \end{cases}$$

12. <u>Teoremă</u>: Definind: $SO = \varinjlim SO(n)$, avem:

$$\pi_q SO\otimes Q = \begin{cases} Q\ , & q = 4i-1,\ i\geq 1 \text{ şi } q=0 \\ 0\ , & \text{în rest} \end{cases}$$

Dem.: Considerînd şirul de omotopie al fibrării:

$SO(n) \xrightarrow{j} SO(n+1) \xrightarrow{p} S^n$, rezultă $j_\#$ izo în π_q, pentru $q \leq n-2$ deci $\pi_n SO = \pi_n SO(n+2)$, $\forall$ n. Ţinînd cont de precedentele rezultă: $\pi_n SO \otimes Q = 0$, n par; şi:

$\pi_{2n-1} SO \otimes Q \sim \pi_{2n-1} SO(2n+1) \otimes Q$ de unde afirmaţia.

Considerăm, în perfectă analogie cu cazul complex:

$$\begin{array}{ccc} SO(2n+1) & \xrightarrow{\ell_n = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} & \prod_{i=1}^{n} K(Q, 4i-1) \\ j \uparrow & & \uparrow \\ SO(2n-1) & \xrightarrow{\ell_{n-1} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})} & \prod_{i=1}^{n-1} K(Q, 4i-1) \end{array}$$

deci, notînd: $SO^{impar} = \varinjlim SO(2n-1)$, $L = \varinjlim \prod_{i=1}^{n} K(Q, 4i-1)$,

şi $\ell^{impar} = \varinjlim \ell_n$, avem: $SO^{impar} \xrightarrow{\ell^{impar}} L$ <u>localizare</u>.

Considerăm acum: $SO^{impar} \xrightarrow{\iota} SO$. Vom arăta: $\iota_\# \otimes id$ izo

Avem:

$$\pi_q SO^{impar} \otimes Q = \pi_q L = \begin{cases} Q, & q = 4i-1, \ i \geq 1 \text{ şi } q = 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Vom arăta deci că $\iota_\# \otimes id$ e izo în dimensiunile $q = 4i-1$.

Pentru aceasta, considerînd şirurile de omotopie ale fibrărilor:

$S^{2n-1} \hookrightarrow \tau^1(S^{2n}) \longrightarrow S^{2n}$ şi $SO(2n-1) \xrightarrow{j} SO(2n+1) \xrightarrow{f} \tau^1(S^{2n})$

obţinem: $\pi_s \tau^1(S^{2n}) = 0$, $s \leq 2n-2$ deci $j_\#$ este izo în π_s, $s \leq 2n-3$, şi de aici în particular:

$\pi_{4i-1} SO^{impar} = \pi_{4i-1} SO(4i+1)$. Considerînd diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_{4i-1} SO^{impar} & \xrightarrow{\iota_\#} & \pi_{4i-1} SO \\ s \uparrow & & \uparrow s \\ \pi_{4i-1} SO(4i+1) & = & \pi_{4i-1} SO(4i+1) \end{array}$$

rezultă afirmaţia anunţată. Cor. 3.9 şi Th. 3.4 asigură existenţa aplicaţiei l, care face diagrama de mai jos omotopic comutativă:

$$\begin{tikzcd} SO^{impar} \arrow[r, "l^{impar}"] \arrow[d, "\iota"'] & L \\ SO \arrow[ur, dashed, "l"'] & \end{tikzcd}$$

şi care este localizare.

13. <u>Exemplu</u>: Fie X un spaţiu nilpotent cu proprietatea că: există elemente $\alpha_i \in H^*(X;Q)$ omogene, $1 \leq i \leq r$ astfel încît morfismul:

Φ : algebra liberă generată de $\{x_i\}_{1\leq i\leq r} \longrightarrow H^*(X;Q)$
$(cu: |x_i| = |\alpha_i|)$

dat prin: $\Phi(x_i) = \alpha_i$, $1 \leq i \leq r$, să inducă un izo: algebra liberă generată de $\{x_i\}$ / $ideal(u_1,\ldots,u_m)$

$$\downarrow \Phi \quad \wr$$

$$H^*(X;Q)$$

unde:

$(u_1,\ldots,u_m)$ e un şir regulat.

Localizarea lui X se construieşte atunci aplicînd Cor. 4 situaţiei: $X \xrightarrow{f=(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_r)} B = \prod_{i=1}^{r} K(Q,|\alpha_i|)$.

14. <u>Exemplu</u>: $X = S^{2n}$; luăm: $\alpha \in H^{2n}(S^{2n},Q)$ generator şi avem:

$$\begin{tikzcd} & \Omega \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega \arrow[d] \\ & E \arrow[r] \arrow[d, "p"] & P \arrow[d] \\ S^{2n} \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & K(Q,2n) \arrow[r, "u_{2n}^2"] & K(Q,4n) \end{tikzcd}$$

cu g localizare

Deci: $\pi_q S^{2n} \otimes Q = \begin{cases} Q & , q = 0, 2n, 4n-1 \\ 0 & , \text{în rest} \end{cases}$

15. <u>Exemplu:</u> $X = P^nC$; luăm $\alpha \in H^2(P^nC, Q)$ generator şi avem:

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega \arrow[d] \\
 & E \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \mathcal{Q} \arrow[d] \\
P^nC \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & K(Q,2) \arrow[u, shift left] \arrow[r, "u_2^{n+1}"] & K(Q, 2n+2)
\end{tikzcd}$$

<u>cu g localizare</u>

Prin urmare:

$$\pi_q P^nC \otimes Q = \begin{cases} Q & , q = 0, 2, 2n+1 \\ 0 & , \text{în rest} \end{cases}$$

16. <u>Contraexemplu:</u> <u>Spaţiile $P^{2n}R$ nu sînt nilpotente</u>.
Din acoperirea: $S^{2n} \longrightarrow P^{2n}R$ rezultă: $\pi_q P^{2n}R \otimes Q = \pi_q S^{2n} \otimes Q$, pentru $q \geq 2$. Pe de altă parte, se ştie că:

$$\tilde{H}_q(P^{2n}R; Z) = \begin{cases} Z_2 & , q = 1, 3, \dots, 2n-1 \\ 0 & , \text{în rest} \end{cases}$$

deci: $H^*(P^{2n}R; Q) \sim H_*(P^{2n}R; Q) \sim Q$. Dacă $P^{2n}R$ ar fi nilpotent, după Th. 3.4 aplicaţia: $P^{2n}R \longrightarrow pt$ ar fi localizare, iar după Th.3.8 ar trebui ca $\pi_q P^{2n}R \otimes Q = 0$ pentru orice $q > 1$, ceea ce contrazice claculele făcute anterior pentru $\pi_q S^{2n} \otimes Q$.

Bineînţeles că nilpotenţa spaţiilor $P^{2n}R$ poate fi contrazisă şi printr-un raţionament direct dar avantajul acestui mod de abordare este că oferă în acelaşi timp un exemplu în care o aplicaţie $f:X \longrightarrow Y$ poate induce izo în $H_*(\cdot\,;Q)$ fără a induce izo în $\pi_*(\cdot)\otimes Q$.

CAPITOLUL II

MODELE MINIMALE

Ideile din acest capitol constituie o replică a celor din precedentul, transpusă în categoria *algebrelor graduate diferenţiale* (AGD). Anume: dată fiind o AGD $\mathcal{A}$, i se asociază o altă AGD, $\mathcal{M}$, numită *modelul minimal* al lui $\mathcal{A}$ ($\mathcal{M}$ fiind o AGD liberă şi avînd o diferenţială care satisface o condiţie naturală de decompozabilitate) şi un AGD-morfism: $\rho : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ care induce izo în H^*; ca şi în situaţia localizării spaţiilor, proprietăţile enunţate determină unic modelul minimal. Am preferat să aglomerăm, în ideea acestui paralelism, textul capitolului cu paranteze care indică situaţia topologică ce a sugerat construcţia sau rezultatul din categoria algebrică, înainte de a descrie functorul ce leagă cele două categorii şi dă un sens precis acestui ghid analogic, amînînd aceasta pentru capitolul următor, pentru a nu interpune prea multă tehnică între termenii de comparat.

In § 1 descriem categoria *G-AGD*, unde prefixul G-desemnează un grup discret care acţionează pe algebre, util de luat în considerare (G-spaţiile!). In § 2, formulăm în categoria algebrică noţiunile corespunzînd celor de: omotopie, fibrare principală (*extensie elementară*), transgresie, obstrucţie coomologică - vezi I.0, I.1. Prin analogie cu I.2, unde *spaţiile nilpotente erau privite ca limite inverse de fibrări principale*, în § 3 introducem *extensiile nilpotente ca limite directe de extensii elementare*. § 4 descrie, paralel cu I.3, *construcţia modelului minimal*. Corespunzător situaţiei prezente în exemplele din I.4, în § 5 considerăm *algebre formale*, analizăm cîteva proprietăţi de permanenţă ale noţiunii, dăm exemple şi punem în evidenţă cerinţele suplimentare ce apar în cazul formulărilor echivariante.

Problematica acestui capitol poate fi regăsită, acoperită încă într-o mai largă generalitate, în [10], care, avînd în vedere finalizarea maşinăriei algebrice pe cazul fibrărilor oarecare, dezvoltă programul modelului minimal nu pentru o AGD $\mathcal{Q}$ ci pentru un AGD -morfism $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$. Cazul nostru - model echivariant pentru algebre - e prezent în [19]. Generalitatea celui de-al doilea context dovedindu-se suficientă nevoilor textului nostru, am urmat, fixaţi la această variantă, strategia iniţială a lui Sullivan, de altfel ca şi [19], cu menţiunea că: am evitat restricţiile din [19], de simplă conexiune coomologică a algebrelor, am lăsat o poartă mai larg deschisă aplicabilităţii, înlocuind condiţia de acolo, de finitudine a grupului G, prin cerinţa semi-simplicităţii G-modulelor ce apar, şi în sfîrşit am urmărit să organizăm capitolul şi demonstraţiile în ideea unei prezentări complete, incluzînd toate detaliile şi renunţînd la procedeul tehnic al "cazului relativ, care se demonstrează întru totul analog". Dorinţa de a fi autoconţinuţi se reflectă de altfel şi în prezenţa secţiunii § 0, care trece în revistă fapte standard.

In ceea ce priveşte ultimul paragraf, lucrurile sînt răspîndite în literatură. Un punct de vedere profitabil aduce aici [12]. Din motive de spaţiu, ne-am mulţumit să atragem numai atenţia asupra lui şi asupra posibilităţii de a-l reciti în context echivariant.

§ 0. REPREZENTARI SEMISIMPLE

In cele ce urmează toate consideraţiile ce se vor face vor fi cu spaţii vectoriale peste un corp K de caracteristică 0.

Fie G un grup. Un K-s.v. V (K-spaţiu vectorial) va fi numit G-modul (stîng) d.n.d. s-a dat $\theta : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_K(V)$ un morfism de grupuri şi dacă $g \in G$, $v \in V$ vom nota $\theta(g)(v)$ cu gV.

Noţiunile corespunzătoare de G-morfism (uneori vom zice morfism echivariant) G-submodul şi G-modul factor se introduc corespunzător, ca în I.2. G-modulul V se va zice semisimplu (s.s) dacă orice submodul admite un submodul complementar.

1. Lema. a) Fie V s.s. Fie: $V \xrightarrow{p} V'$ echivariant (ech.). Atunci există $V \xleftarrow{s} V'$ ech., a.î.: ps=id.

b) Fie B s.s. Fie: $B' \xrightarrow{j} B$ ech. Atunci există: $B \xrightarrow{t} B'$ ech., astfel încît: $tj = id$.

Dem. a) $\mathrm{Ker}\, p \subset V$ e submodul. Deci există un submodul W astfel încît: $\mathrm{Ker}\, p \oplus W = V$ şi considerăm: $s = (p|_W)^{-1}$.

b) $\mathrm{Im}\, j \subset B$ e submodul. Deci există un W submodul astfel încît: $\mathrm{Im}\, j \oplus W = B$ şi luăm: $t = j^{-1} \circ pr_{\mathrm{Im}\, j}$.

Dacă V este un G-modul vom introduce submodulele:
$V^G = \{v \in V \mid gv = v, \forall g \in G\}$; $\theta V = \{$ subspaţiul generat de $gv - v;\ g \in G, v \in V\}$ observăm imediat că: V e G-modul trivial d.n.d.

$$V^G = V.$$

2. Lema. i) Dacă Ve s.s., atunci: $V = V^G \oplus \theta V$;

ii) Fie: $V \xrightarrow{\varphi} V'$ ech. Atunci: $-\ \varphi(V^G) \subset V'^G$

$-\ \varphi(\theta V) \subset \theta V'$

iii) Fie: $V' \subset V$ (s.s.) submodul. Atunci: $-\ V'^G = V' \cap V^G$

$-\ \theta V' = V' \cap \theta V$

Dem. i) Considerăm complementul lui V^G, V' a.î.: $V^G \oplus V' = V$

şi fie: $u = \sum g_i u_i - u_i$, $u \in V^G$. Scriem: $u_i = v_i + v'_i$, $v_i \in V^G$

şi $v_i' \in V'$ şi deci: $u = (\sum g_i v_i - v_i) + (\sum g_i v_i' - v_i'), u \in V^G$, prin urmare: $u = 0$ şi: $\theta V \cap V^G = 0$.

In continuare putem considera complementul submodulului $V^G \oplus \theta V$ notat W şi fie: $w \in W, g \in G$: $gw - w \in W \cap \theta V = 0$. Această arată că: $gw = w$, prin urmare $W = 0$, de unde totul.

ii) fără comentarii.

iii) $V'^G = V' \cap V^G$ evident. $\theta V' \subset V' \cap \theta V$ evident. Arătăm: $V' \cap \theta V \subset \theta V'$

Fie $u = \sum g_i u_i - u_i$ şi $u \in V'$. Scriem: $u_i = u_i' + u_i''$ unde u_i'' "aparţin complementului lui V', notat V".

Deci avem: $u = (\sum g_i u_i' - u_i') + (\sum g_i u_i'' - u_i'')$, $u \in V'$, aşadar: $u \in \theta V'$.

Fie: (C, d) un complex de colanţuri i.e.: $C = \bigoplus_{n \in Z} C^n$, $C^n \xrightarrow{d} C^{n+1}$, $d^2 = 0$. (C, d) se va numi G-complex d.n.d.

$$\begin{cases} C \text{ e } G\text{-modul graduat } (GC^n \subset C^n) \\ gd = dg, \ \forall g \in G \end{cases}$$

(De acum şi mereu vom nota, pentru complexe de colanţuri oarecare cu $Z(\cdot) = \operatorname{Ker} d$ şi $B(\cdot) = \operatorname{Im} d$)

Se observă că dacă (C, d) e G-complex, atunci $Z(C), B(C)$ devin submodule graduate şi deci H^*C apare ca G-modul graduat.

Notăm cu j incluziunea de complexe de colanţuri: $C^G \xrightarrow{j} C$ care induce: $H^*(C^G) \xrightarrow{j^*} (H^*C)^G$.

3. <u>Lema</u>. Fie C s.s. (i.e.: pe componente). In acest caz: j^* e izo.

<u>Dem</u>. Avem descompunerile: $H^*C = (H^*C)^G \oplus \theta(H^*C)$ şi $C = C^G \oplus \theta C$ (vezi Lema 2).

Deoarece $\theta C \subset C$ e subcomplex rezultă:

$$H^*C = H^*(C^G) \oplus H^*(\theta C)$$

Intrucît $Z(\theta C) = Z(C) \cap \theta C = \theta Z(C)$ rezultă că:

$H^*(\theta C) \hookrightarrow \theta(H^*C)$ şi deci: $H^*(C^G) = (H^*C)^G$.

4. Exemple

1) Dacă G e grup finit, orice G-modul e s.s. ([8] p.441--455).

2) Dacă G e grup topologic compact şi V e s.v. real de dimensiune finită, şi dacă $\theta : G \longrightarrow Aut_R(V)$ e continuu, atunci V e s.s. ([9] p.17-19).

De acum încolo nu vom face precizări asupra grupului, sau de altă natură, ci vom considera subînţeles faptul că G-modulele ce apar sînt s.s.

§ 1. CATEGORIA G-AGD

Fie $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ AG (vezi I.4.2). Dacă f: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ e o aplicaţie liniară şi $\ell \in Z$, vom spune că f este omogenă de grad ℓ dacă $f(\mathcal{A}^n) \subset \mathcal{A}'^{n+\ell}$, $\forall n$.

Aplicaţia f: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$, omogenă de grad 0, se va numi morfism de AG: dacă e morfism de algebre $(f(a.b) = f(a).f(b))$.

Fie G un grup; o A.G. $\mathcal{A}$ se va numi G-A.G. dacă $\mathcal{A}$ este G-modul graudat şi orice $g \in G$ acţionează pe $\mathcal{A}$ prin morfisme de A.G.

Categoria G-A.G. se introduce luînd drept morfisme aplicaţiile $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ care sînt morfisme de A.G. şi ech.

In lipsa prefixului G-, noţiunile corespunzătoare vor fi gîndite considerînd toate C-modulele în chestiune ca fiind triviale.

Observaţie: Dacă V este G-modul şi $n \geq 0$, algebra $\mathcal{L}_n(V)$ introdusă ca AG în I.1 devine în mod canonic G-AG. In acest moment al expunerii, considerăm nimerit să semnalizăm faptul că, în capitolul următor, se va construi un functor contravariant de la categoria topologică (unde grupul G apare ca acţionînd pe spaţii) într-o categorie de AG (respectiv G-AG).

Avînd în minte existenţa acestei construcţii, vom observa, ca principiu de anticipaţie, cum construcţiile şi diagramele din categoria topologică pot fi transpuse în categoria algebrică, pur şi simplu inversînd săgeţile.

Sperăm ca, în felul acesta, ariditatea materialului algebric să-şi găsească o oarecare compensaţie şi justificare.

Considerînd $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ două G-AG introducem $\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}'$ ca G-AG (analogul algebric al produsului de spaţii) prin următoarele:

$$(\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}')^n = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{O}^p \otimes \mathcal{O}'^q$$

$$(a \otimes a') \cdot (b \otimes b') = (-1)^{|a'| \cdot |b|} a \cdot b \otimes a' \cdot b'$$

$$g(a \otimes a') = ga \otimes ga' \,.$$

Dacă considerăm şi $f : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$, $g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, G-AG-morfisme se observă că: $f \otimes g$ este G-AG morfism.

Dacă $\mathcal{O}' = \mathcal{B}'$ introducem $f \cdot g$ ca fiind: $f \cdot g\,(a \otimes b) = f(a) \cdot g(b)$ şi $f \cdot g$ devine G-AG morfism.

Fie $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ G-AG. Definim $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}'$ ca G-AG în felul următor: (analogul algebric al sumei disjuncte de spaţii) cu graduarea, înmulţirea şi acţiunea lui G pe componenete.

Apar morfismele naturale de G-AG, $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}' \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}' \xrightarrow{\pi'} \mathcal{O}'$

Dacă: $\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{B}$ şi $\psi : \mathcal{O}' \to \mathcal{B}'$ sînt G-AG morfisme, atunci $\varphi \oplus \psi$ devine G-AG morfism.

Puţin mai general: dacă $\begin{cases} \mathcal{O} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \\ \mathcal{O}' \xrightarrow{f'} \mathcal{B} \end{cases}$ sînt G-AG morfisme, <u>definim $\mathcal{O} \underset{f,f'}{\oplus} \mathcal{O}'$</u> ca sub. G-AG în $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}'$ prin următoarea egalitate: $\mathcal{O} \underset{f,f'}{\oplus} \mathcal{O}' = \{(a, a') \mid f(a) = f'(a')\}$

O G-AG $\mathcal{O}$ se va zice <u>augmentată</u> (pe scurt: G-AGA)

dacă se dă G-AG morfismul $\varepsilon : \mathcal{A} \to k$ (analogie cu incluziunea unui punct în spaţiu).

Se introduc corespunzător morfismele de G-AGA .

O G-AG $\mathcal{A}$ se va numi conexă dacă $\mathcal{A}^0 = k$; în acest caz $\mathcal{A}$ devine G-AGA , cu ε , augmentarea dată de proiecţie şi toate G-AG morfismele sînt de fapt G-A.G.A. morfisme;

Dacă $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sînt G-AGA , introducem $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}' = \mathcal{A} \underset{\varepsilon,\varepsilon'}{\oplus} \mathcal{A}'$ ca G-AG (analogie cu suma conexă de spaţii).

In cazul în care avem şi: $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\varphi' : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$, G-AGA morfisme, obţinem G-AG morfismul: $\varphi \vee \varphi' : \mathcal{A} \vee \mathcal{A}' \to \mathcal{B} \vee \mathcal{B}'$.

Fie: $V = \underset{n \geq 0}{\oplus} V^n$ un G -modul graduat. Introducem G-AG $\mathcal{L}(V)$ ca fiind: $\mathcal{L}_s(\underset{n\,par}{\oplus} V^n) \otimes \mathcal{L}_\wedge(\underset{n\,impar}{\oplus} V^n)$, unde prima algebră e simetrică şi a doua e exterioară.

Dacă $\mathcal{A}$ e o G-AG avem următorul izomorfism evident:

$\mathrm{Hom}_{G\text{-}AG}(\mathcal{L}(V), \mathcal{A}) \sim \mathrm{Hom}^0_G(V, \mathcal{A})$, unde ultimul termen desemnează aplicaţiile ech- şi omogene de grad 0.

Fie: $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ G-AG conexe (pe scurt co G-AG) şi fie V, V' G-s.v.

Considerăm următoarea diagramă, în G-AG :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{A}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}_n(V) & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{A}' \otimes \mathcal{L}_n(V') \end{array}$$

Se observă că orice G-AG morfism $\bar{f}$ care face comutativă diagrama considerată este unic determinat de f şi de aplicaţia ech.: $\bar{f}_{|V} : V \xrightarrow{(b,\ell)} \mathcal{A}'^n \oplus V'$.

1. Lemă. Dacă f e izo , atunci: $\bar{f}$ izo d.n.d. ℓ e izo.

Dem. Notăm $f^{-1} = f'$. $\bar{f}$ e izo d.n.d. există $\mathcal{A}' \otimes \mathcal{L}_n(V') \xrightarrow{\bar{f}'} \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}_n(V)$ G-A.G. morfism, a.î.: $\bar{f} \circ \bar{f}' = id$ şi $\bar{f}' \circ \bar{f} = id$ d.n.d există

$V' \xrightarrow{(b',l')} \mathcal{A}^n \oplus V$, ech. a.î. $\bar{f}\bar{f}'|_{V'} = id$ şi $\bar{f}'\bar{f}|_V = id$.

Adică:

$$\begin{cases} (fb'+bl')\oplus ll' = 1_{V'} \\ (f'b+b'l)\oplus l'l = 1_V \end{cases}$$

şi deci: dacă $\bar{f}$ e izo, atunci l e izo.

Dacă l e izo, luăm: $l^{-1} = l'$ şi $-f'bl' = b'$ şi deci $\bar{f}$ e izo.

Dacă $\mathcal{A}$ e G-AG, morfismul $d:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ ech. şi omogen de grad l se numeşte <u>derivare de grad l</u> dacă: $d(ab) = da\cdot b + (-1)^{l\cdot|a|} a\cdot db$, $\forall a,b$. Se observă că: dacă d, d' sînt derivări de grad l, respectiv l', definind: $[d,d'] = dd' - (-1)^{l\cdot l'} d'd$ obţinem o derivare de grad $l+l'$.

Introducem în continuare noţiunea de G-AGD, <u>(G-AG diferenţială) ca fiind o G-A.G $\mathcal{A}$ cu o derivare de grad +1, d, cu condiţia: $d^2=0$.</u>

Morfismele de G-AGD vor satisface şi condiţiile de comutare cu d.

Dacă, $\mathcal{A},\mathcal{A}'$ sînt G-AGD, atunci $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}'$ devine G-AGD cu: $(d\otimes d')(a\otimes a') = da\otimes a' + (-1)^{|a|} a\otimes d'a'$.

Reluînd notaţiile anterioare să observăm că: f,g G-AGD morfisme implică: $f\otimes g$ şi $f\cdot g$, G-AGD morfisme.

Dacă $\mathcal{A},\mathcal{A}'$ sînt G-AGD, atunci $\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}'$ devine natural G-AGD, cu diferenţiala pe componente, iar π,π' devin G-AGD morfisme.

Dacă φ,ψ sînt G-AGD morfisme atunci $\varphi\oplus\psi$ e G-AGD morfism.

Dacă f,f' sînt G-AGD morfisme atunci $\mathcal{A}\underset{f,f'}{\oplus}\mathcal{A}'$ devine G-AGD.

<u>Noţiunea de G-AGAD</u> se introduce cerînd ca augmentarea să fie G-AGD morfism (cerinţă satisfăcută pentru cazul co-G-AGA) şi, în mod nesurprinzător, dacă α, α' sînt G-AGAD , atunci $\alpha \vee \alpha'$ e G-AGD , şi dacă φ, φ' sînt G-AGAD morfisme, atunci $\varphi \vee \varphi'$ e G-AGD morfism.

In cazul în care (α, d) e G-AGD , $Z^*\alpha$ şi $B^*\alpha$ sînt de fapt o subalgebră, respectiv un ideal, şi deci $H^*\alpha$ devine G-AG .

Un $\alpha \xrightarrow{\varphi} \alpha'$ (G-AGD morfism) induce: $H^*\alpha \xrightarrow{\varphi^*} H^*\alpha'$ care este G-AG morfism.

2. <u>Lema</u>. a) (izomorfismul Künneth): fie α, α' G-AGD . Notînd incluziunile cu: $\alpha \xrightarrow{j^{\alpha}} \alpha \otimes \alpha'$ şi $\alpha' \xrightarrow{j^{\alpha'}} \alpha \otimes \alpha'$ avem izomorfismul de G-AG : $H^*\alpha \otimes H^*\alpha' \xrightarrow{j^*_{\alpha} \cdot j^*_{\alpha'}} H^*(\alpha \otimes \alpha')$

b) Avem şi un izo de G-AG (α, α' co-G-AGAD)

$$H^*(\alpha \vee \alpha') \xrightarrow{\pi^* \vee \pi'^*} H^*\alpha \vee H^*\alpha'$$

<u>Dem</u>.: standard.

§ 2. <u>EXTENSII ELEMENTARE. OMOTOPIE. OBSTRUCTII</u>

Urmărind consecvent principiul introdus în precedenta, vom prezenta în continuare analogul algebric al fibrărilor principale de tip (π, n) : $\Omega \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$.

Dicţionar: $B \to \alpha$ G-AGD ; $H^n(\Omega; Q) \to V$ G-s.v. ;

$$(\tau : H^n(\Omega; Q) \longrightarrow H^{n+1}(B; Q)) \to (\tau : V \longrightarrow Z^{n+1}\alpha \text{ ech.})$$

Analogul spaţiului total îl constituie aşa-zisa <u>extensie elementară</u> a lui α cu V, (cu generatori de grad n) via τ , <u>notată $\alpha \otimes_{\tau} \mathcal{Z}_n(V)$</u> definită ca G-AGD prin: $d_{|\alpha} = d_{\alpha}$ şi $d_{|V} = \tau$. Vom nota în continuare cu $[\tau]: V \longrightarrow H^{n+1}\mathcal{A}$ aplicaţia în mod natural indusă de τ, şi vom considera şi morfismul de G-AGD natural $\mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{Z}_n(V)$ (analogul proiecţiei p).

Dacă $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}'$ e G-AG morfism, vom zice că el este o n-<u>echivalenţă</u> dacă: $\varphi: \mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}'^q$ e izo pentru $q<n$ şi injecţie pentru $q=n$. Dacă φ e G-AGD morfism, el se va zice <u>n-echivalenţă în H^*</u> dacă φ^* e n-echivalenţă.

1. <u>Lema</u>: j e n-ech. în H^*. <u>D</u>: $[\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{Z}_n(V) / \mathcal{A}]^q = 0$ pentru $q<n$ şi afirmaţia reiese imediat scriind şirul exact de coomologie asociat perechii $(\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{Z}_n(V), \mathcal{A})$.

O G-AGD $\mathcal{A}$ se va zice <u>coomologie conexă</u> (c-conexă) dacă $H^*\mathcal{A}$ e G-AG conexă; i.e.: $H^0\mathcal{A} = k$.

Momentan vom presupune totuşi $\mathcal{A}$ conexă. În acest caz: $[\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{Z}_n(V) / \mathcal{A}]^n \sim V$ şi obţinem şirul exact:

$$(2) \quad 0 \longrightarrow H^n\mathcal{A} \xrightarrow{j^*} H^n(\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{Z}_n(V)) \longrightarrow V \xrightarrow{[\tau]} H^{n+1}\mathcal{A} \xrightarrow{j^*} H^{n+1}(\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{Z}_n(V))$$

Fie şi o altă co-G-AGD, $\mathcal{A}'$, cu <u>transgresia</u>: $\tau': V' \longrightarrow Z^{n+1}\mathcal{A}'$ şi să considerăm diagrama comutativă (în G-AGD):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{Z}_n(V) \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathcal{A}' \otimes_{\tau'} \mathcal{Z}_n(V') \\
\mathcal{A} \arrow[u, "j"] \arrow[r, "f"] & \mathcal{A}' \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

cu $\bar{f}$ determinat de: $V \xrightarrow{(b,\ell)} \mathcal{A}'^n \oplus V'$. In morfismul natural indus între şirurile exacte (2), săgeata $V \longrightarrow V'$ se identifică uşor ca fiind dată de 1.

3. Lemă: Dacă avem transgresiile: $\tau, \tau' : V \longrightarrow Z^{n+1}\mathcal{A}$ a.î. $[\tau] = [\tau']$, atunci: $\mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}_n(V) \sim \mathcal{A} \underset{\tau'}{\otimes} \mathcal{Z}_n(V)$ (izo de G-AGD)

Dem.: Din ipoteză, există aplicaţia liniară: $\alpha : V \longrightarrow \mathcal{A}^n$ a.î.: $\tau' - \tau = d\alpha$. Lucrînd cu Gmodule s.s. , Lema 0.1 a) ne permite să putem lua α ech.. Definind G-AGD morfismele:

$$\mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}_n(V) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathcal{A} \underset{\tau'}{\otimes} \mathcal{Z}_n(V') \quad \text{prin: } \varphi|\mathcal{A} = id,\ \varphi|V = -\alpha + 1_V$$

$$\psi|\mathcal{A} = id,\ \psi|V = \alpha + 1_V$$

se verifică faptul că ele realizează izomorfismul anunţat.

Fie (prin analogie cu situaţia topologică din I.0):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}_n(V) \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd} \quad (\text{în } G\text{-}AGD)$$

Vom nota cu $\gamma(f)$ compunerea: $V \xrightarrow{[\tau]} H^{n+1}\mathcal{A} \xrightarrow{f^*} H^{n+1}\mathcal{B}$ şi o vom numi obstrucţia la extindere a lui f.

4. Lema: Există săgeata punctată care închide comutativ diagrama de mai sus (în G-AGD) d.n.d. $\gamma(f) = 0$.

Dem. $\gamma(f) = 0$ d.n.d există $\rho : V \longrightarrow \mathcal{B}^n$ ech. (tot după lema 0.1 a)) a.î.: $f \circ \tau = d\rho$.

- Dacă f se extinde la $\bar{f}$, luăm : $\rho = \bar{f}|V$.
- Dacă $\gamma(f) = 0$, luăm $\begin{cases} \bar{f}|\mathcal{A} = f \\ \bar{f}|V = \rho \end{cases}$ şi

In cele ce urmează, vom nota: $(t, dt) = \mathcal{Z}(t, dt)$ ca G-AGD unde: $|t| = 0$, $|dt| = 1$, $d(t) = dt$; $d(dt) = 0$, şi G acţionează trivial (algebra (t, dt) va trebui gîndită drept corespunzătoare intervalului standard I).

Fie $\mathcal{C}$ o G-AGD şi $\lambda \in k$. Definim un morfism de G-AGD : $t=\lambda$: $(t, dt) \to \mathcal{C}$ prin $t \to \lambda$, $dt \to 0$ şi un alt morfism de G-AGD :

$$\mathcal{C} \otimes (t, dt) \xrightarrow{|t=\lambda} \mathcal{C}$$

prin: $|_{t=\lambda} = id_{\mathcal{C}} \cdot (t=\lambda)$ şi în sfîrşit, dacă $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{B} \otimes (t,dt)$ e G-AGD morfism, $\underline{\varphi|_{t=\lambda} = (|_{t=\lambda}) \circ \varphi}$ prin definiţie.

Două G-AGD morfisme φ şi ψ se zic omotope $(\varphi \simeq \psi)$ dacă există un G-AGD morfism $H : \mathcal{C} \to \mathcal{B} \otimes (t,dt)$ a.î.: $H|_{t=0} = \varphi$, $H|_{t=1} = \psi$

(paralelism perfect cu definiţia de la spaţii)

şi scriem: $H : \varphi \simeq \psi$.

Deoarece cazul peste care lucrăm a fost presupus de $char = 0$, în algebra de polinoame $k[t]$ avem definiţi operatorii uzuali de derivare, integrare şi evaluare formală:

$\frac{d}{dt}(1) = 0$, $\frac{d}{dt}(t^i) = i t^{i-1}$, $i \geq 1$; vom nota : $\frac{d}{dt} P(t) = P'(t)$

$\int t^i dt = \frac{1}{i+1} t^{i+1}$, $i \geq 0$ şi

$k[t] \to k$ dat prin $P(t) \to P(\lambda)$ pentru $\lambda \in k$, cu proprietăţile uzuale.

Dacă vom considera în plus şi $\mathcal{B}$ un G-modul, definim: $\mathcal{B}[t] = \mathcal{B} \otimes k[t]$ şi considerăm extinderile naturale:

$\frac{\partial}{\partial t} : \mathcal{B}[t] \to \mathcal{B}[t]$ dată de $\frac{\partial}{\partial t} = id \otimes \frac{d}{dt}$; vom nota: $\frac{\partial}{\partial t} P(t) = P'(t)$

$\int (\cdot)\, dt : \mathcal{B}[t] \to \mathcal{B}[t]$ dată de $\int (\cdot)\, dt = id \otimes \int (\cdot)\, dt$ şi

$e_\lambda : \mathcal{B}[t] \to \mathcal{B}$ evaluarea pentru $t = \lambda\ (\lambda \in k)$, care vor fi ech.

Dacă, în plus, $\mathcal{B}$ e înzestrat cu diferenţiala d, $\mathcal{B}[t]$ va fi considerat cu difernţiala $id \otimes d : P(t) \to dP(t)$ (din nou ech.).

Dacă $\mathcal{B}$ e G-AGD : $[\mathcal{B}\otimes(t,dt)]^m = \mathcal{B}^m[t]\oplus\mathcal{B}^{m-1}[t]\otimes dt$

Avem: $d[p(t)+q(t)dt] = dp(t)+[dq(t)+(-1)^m p'(t)]dt$ (5)

Definim aplicaţia I: $\mathcal{B}\otimes(t,dt) \to \mathcal{B}$ (omogenă de grad-1 şi ech.) prin:

$$\begin{cases} I(b\otimes p(t)) = 0 \\ I(b\otimes p(t)dt) = (-1)^{|b|}\left(\int_0^1 p(t)dt\right)\cdot b \end{cases}$$

6. <u>Lemă</u>: Fie $\mathcal{A} \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$ G-AGD morfisme. $f_0 \simeq f_1$ implică $f_0^* = f_1^*$

<u>Dem</u>. Definim : $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (omogenă de grad-1) prin:

$$h = I\circ H$$

Un calcul direct arată: $f_1 - f_0 = dh + hd$, de unde lema. Fie:

$$\begin{cases} \mathcal{A}\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}_n(V) \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightrightarrows}} \mathcal{B} \quad \text{şi :} \qquad (\text{în } G\text{-AGD}) \\ H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}\otimes(t,dt),\ H : f_0|\mathcal{A} \simeq f_1|\mathcal{A} \end{cases}$$

Considerăm compunerea: $V \xrightarrow{\tau} \mathcal{A}^{n+1} \xrightarrow{H} [\mathcal{B}\otimes(t,dt)]^{n+1}$; apar aplicaţiile ech.: $V \xrightarrow{P(t)} \mathcal{B}^{n+1}[t]$ şi $V \xrightarrow{Q(t)} \mathcal{B}^n[t]$ cu proprietatea că:

$$H\circ\tau = P(t) + (-1)^n Q(t)dt$$

Definind: $c : V \to \mathcal{B}^n$ prin $c = f_1 - f_0 - \int_0^1 Q(t)dt$ avem: c ech. şi $dc = 0$, deci apare aplicaţia ech.: $V \xrightarrow{[c]} H^n\mathcal{B}$ <u>notată d_{f_0,H,f_1}</u> şi numită <u>obstrucţia la extindere a omotopiei</u>.

7. <u>Lemă</u> (prin analogie cu I.0). Există o omotopie de G-AGD:

$$\bar{H} : \mathcal{A}\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}_n(V) \to \mathcal{B}\otimes(t,dt) \quad \text{a.î.} \begin{cases} \bar{H}|\mathcal{A} = H & (**) \\ \bar{H} : f_0 \simeq f_1 & (*) \end{cases} \quad \text{d.n.d.}$$

$$d_{f_0,H,f_1} = 0$$

Dem. Din nou după lema 0.1 a): $d_{f_0,H,f_1}=0$ d.n.d. există aplicaţia ech. $\rho: V \to \mathcal{B}^{n-1}$ a.î.: $d\rho = c$.

Fie (*), (**) satisfăcute, Există deci aplicaţiile ech.:

$$V \xrightarrow{\overline{P}(t)} \mathcal{B}^n[t]\ ,\ V \xrightarrow{\overline{Q}(t)} \mathcal{B}^{n-1}[t] \quad a.\hat{\imath}.:\ \overline{H}_{|V} = \overline{P}(t) + (-1)^n \overline{Q}(t)dt$$

iar $\overline{H}$ e unic determinat ca morfism de G-AG de $\overline{P}(t), \overline{Q}(t)$ şi de condiţia (**).

$\overline{H}$ e morfism de G-AGD d.n.d. $d\overline{H} = H \circ \tau$, ceea ce, după relaţia (5), e echivalent cu condiţiile:

$$\begin{cases} d\overline{P}(t) = P(t) & (***) \\ \overline{P}'(t) + d\overline{Q}(t) = Q(t) & (****) \end{cases}$$

condiţia (*) fiind echivalentă cu: $\overline{P}(i) = f_i\ ,\ i = 0,1$ (*****)

Putem lua atunci: $\rho = -\int_0^1 \overline{Q}(t)dt$.

Implicaţia inversă: existenţa omotopiei $\overline{H}$ cu proprietăţile cerute e echivalentă cu condiţiile (****) şi (*****), căci:

$d\tau = 0$ implică $d(H\circ\tau) = 0$, de unde, folosind din nou (5):

$dP(t) = 0$ şi $dQ(t) = P'(t)$ şi: $H_{|t=i} = f_i\ ,\ i = 0,1$ implică: $P(i) = f_i \circ \tau$.

Nu avem atunci decît să luăm: $\overline{Q}(t) = -\rho \otimes 1$ şi:

$$\overline{P}(t) = f_0 \otimes 1 + \int [Q(t) - d\overline{Q}(t)]dt$$

8. Corolar: Fie

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} \\ & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}_n(V) & \xrightarrow{F'} & \mathcal{B}' \end{array} \quad \text{şi:} \quad \begin{cases} h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}' \otimes (t, dt) \\ h: F'|\mathcal{A} \simeq \varphi \circ f \end{cases}$$

Dacă: $\begin{cases} \varphi^* \text{ e injecţie în } H^{n+1} \\ \text{şi} \\ \varphi^* \text{ e surjecţie în } H^n \end{cases}$ atunci există $\begin{cases} F: \mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}_n(V) \to \mathcal{B} \\ H: \mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}_n(V) \to \mathcal{B}' \otimes (t, dt) \end{cases}$

a.î.: $F|\mathcal{A} = f$, $H|\mathcal{A} = h$ şi: $H: F' \simeq \varphi \circ F$

Dem.: f se extinde (după lema 4) $\Longleftrightarrow \gamma(f)=0 \Longleftrightarrow f^{*}\circ[\tau]=0$ $\Leftrightarrow (\varphi\circ f)^{*}\circ[\tau]=0$, ceea ce, după lema 6, echivalează cu: $[F'|\mathcal{A}]^{*}\circ[\tau]=0$, condiţie care e satisfăcută prin enunţ, conform lemei 4. Luăm:

$\bar{F}:\mathcal{A}\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}_n(V)\to\mathcal{B}$ a.î.: $\bar{F}|\mathcal{A}=f$. Considerăm:

$$d_{F',h,\varphi\bar{F}}=\left[\varphi\bar{F}_{|V}-F'_{|V}-\int_0^1 Q(t)\,dt\right]\in \mathrm{Hom}_G(V,H^n\mathcal{B}')$$

Din ipotezele asupra lui φ^{*} şi din lema 0.1 a), găsim:

$\alpha:V\to Z^n\mathcal{B}$ ech. a.î.: $\varphi^{*}\circ[\alpha]=d_{F',h,\varphi\bar{F}}$ şi definim:

$F:\mathcal{A}\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}_n(V)\to\mathcal{B}$ prin: $\begin{cases} F|\mathcal{A}=f \quad \text{şi:} \\ F_{|V}=\bar{F}_{|V}-\alpha \end{cases}$ Avem:

$$d_{F',h,\varphi F}=(d_{F',h,\varphi F}-d_{F',h,\varphi\bar{F}})+d_{F',h,\varphi\bar{F}}=[\varphi\circ(F_{|V}-\bar{F}_{|V})]+d_{F',h,\varphi\bar{F}}=0,$$

deci încheiem aplicînd precdenta.

§ 3. EXTENSII NILPOTENTE SI CATEGORIA OMOTOPICA G-AGD

Fie $\mathcal{C}\hookrightarrow\mathcal{A}$ (în G-AGD).

$\mathcal{A}$ se numeşte <u>extensie nilpotentă</u> a lui $\mathcal{C}$ d.n.d $\mathcal{A}=\varinjlim \mathcal{A}_{\alpha}$, unde: $\mathcal{A}_0=\mathcal{C}$ şi $\mathcal{A}_{\alpha}\hookrightarrow\mathcal{A}_{\alpha+1}$ sînt extensii elementare, $\forall\alpha$.

Dacă $1\le m\le\infty$, $\mathcal{C}\hookrightarrow\mathcal{A}$ se zice extensie nilpotentă cu generatori $\le m$ d.n.d. $\mathcal{A}_{\alpha}\hookrightarrow\mathcal{A}_{\alpha+1}$ e cu generatori de grad $\le m$, ptr. $\forall\alpha$.

$\mathcal{A}$ se numeşte G - AGD <u>nilpotentă</u> d.n.d $K\hookrightarrow\mathcal{A}$ este extensie nilpotentă.

1. <u>Teoremă</u> $(1\le m\le\infty)$ Fie diagrama comutativă pînă la omotopie:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow\varphi \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{F'} & \mathcal{B}' \end{array} \qquad (\text{în } G\text{-}AGD)$$

Dacă φ e $(n+1)$-echivalență în H^* și $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{A}$ e extensie nilpotentă cu generatori de grad $\leq m$, atunci: există $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ a.î.:

$$\begin{cases} F|\mathcal{C} = f & \text{și:} \\ F' \simeq \varphi \circ F \end{cases}$$

Dem. Corolarul 2.8 și inducția asigură succesul demonstrației.

2. Lemă. Fie: $\mathcal{B} \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{B}'$ (G-AGD) și φ surjectivă în H^*; atunci rezultă: $Z^q\mathcal{B} \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} Z^q\mathcal{B}'$, $q \geq 0$.

Dem. Fie: $db' = 0$, $|b'| = q \Rightarrow \exists\, b, |b| = q, db = 0$

a.î.: $b' = \varphi b + d\bar{b}' = \varphi(b + d\bar{b})$

dar: $d(b + d\bar{b}) = 0$, ceea ce termină demonstrația.

3. Lemă. Fie:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathcal{B} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{L}_n(V) \arrow[r, "F'"] & \mathcal{B}' \end{tikzcd}$$

diagramă comutativă în G-AGD și: φ^* mono în H^{n+1}, φ^* epi în H^n.

Există atunci: $F : \mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{L}_n(V) \to \mathcal{B}$, G-AGD-morfism, a.î.:

$$\begin{cases} F|\mathcal{A} = f \\ \varphi F = F' \end{cases}$$

Dem. Cu riscul de a ne repeta raționăm după cum urmează: f se extinde d.n.d. $f^* \circ [\tau] = 0$ d.n.d. $[F'|\mathcal{A}]^* \circ [\tau] = 0$.

Fie: $F : \mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{L}_n(V) \to \mathcal{B}$ a.î.: $F|\mathcal{A} = f$;

avem $d(\varphi F_{|V} - F'_{|V}) = 0$, deci, conform cu lema 2, luăm: $V \overset{\alpha}{\to} Z^n\mathcal{B}$ (ech.) a.î.: $\varphi F_{|V} - F'_{|V} = \varphi\alpha$, și apoi: $F_{|\mathcal{A}} = f$, $F_{|V} = F_{|V} - \alpha$, care e G-AGD morfisumul căutat.

4, Propoziţie $(1 \leq m \leq \infty)$. Fie diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} \\ j \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{F'} & \mathcal{B}' \end{array} \quad (\text{în } G\text{-AGD})$$

şi: $\begin{cases} \varphi \text{ e } (m+1)\text{-echivalenţă în } H^* ; \\ \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{A} \text{ e extensie nilpotentă cu generatori în dimensiune} \leq m. \end{cases}$

Atunci există: $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (în G-AGD) a.î.: $F|\mathcal{C} = f$

şi $\varphi F = F'$.

Dem.: Inducţie, uzînd lemele anterior demonstrate.

Fie $\mathcal{B}$, o G-AGD. Definim: $\mathcal{B}_{01} = \mathrm{Ker}(|_{t=0}) \cap \mathrm{Ker}(|_{t=1}) \subset \mathcal{B} \otimes (t, dt)$

(sub. G-AGD) şi avem:

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{B}_{01} \to \mathcal{B} \otimes (t, dt) \xrightarrow{|_{t=0} \oplus |_{t=1}} \mathcal{B} \oplus \mathcal{B} \to 0$$

Dacă $\varphi: \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ e G-AGD-morfism, avem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} \otimes (t, dt) & \xrightarrow{\varphi \otimes id} & \mathcal{B}' \otimes (t, dt) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{B}_{01} & \xrightarrow{\varphi_{01}} & \mathcal{B}'_{01} \end{array}$$

5. Lemă. φ surjecţie $\Rightarrow \varphi_{01}$ surjecţie;
φ^* izo $\Rightarrow \varphi_{01}^*$ izo.

Dem. Considerăm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathcal{B}_{01} & \to & \mathcal{B} \otimes (t, dt) & \to & \mathcal{B} \oplus \mathcal{B} & \to 0 \\ & \varphi_{01} \downarrow & & \varphi \otimes id \downarrow & & \varphi \oplus \varphi \downarrow & \\ 0 \to & \mathcal{B}'_{01} & \to & \mathcal{B}' \otimes (t, dt) & \to & \mathcal{B}' \oplus \mathcal{B}' & \to 0 \end{array}$$

şi deci φ_{01}^* e izo.

In general: $P(t) + Q(t)\,dt \in \mathcal{B}_{01} \Leftrightarrow P(t) = (t-1)t\bar{P}(t)$

Fie aşadar: $t(t-1)\bar{P}'(t) + Q'(t) \in \mathcal{B}'_{01}$; luăm: $\varphi \bar{P}(t) = \bar{P}'(t)$

şi: $\varphi Q(t) = Q'(t)$, şi avem: φ_{01} epi.

6. Lema. Fie: $\varphi: \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ surjectiv şi φ^* izo; fie $n \geq 1$.

Considerăm: $\mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}_n(V) \overset{F_0}{\underset{F_1}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$; notăm: $\varphi F_i = F_i'$, $i = 0, 1$; fie

şi diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \mathcal{B}\otimes(t,dt) \arrow[d, "\varphi\otimes id"] \\ \mathcal{A}\underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}_n(V) \arrow[r, "H'"] & \mathcal{B}'\otimes(t,dt) \end{tikzcd}$$ astfel încît:

$$h : F_0|\mathcal{A} \simeq F_1|\mathcal{A}\ ,\ H' : F_0' \simeq F_1'\ .$$

In aceste condiţii, există: $H : F_0 \simeq F_1$ a.î.:

$$H|\mathcal{A} = h\ ,\ (\varphi\otimes id)\circ H = H'\ .$$

Dem. Avem: h se extinde d.n.d. $d_{F_0,h,F_1} = 0$ d.n.d.

$$\varphi^* d_{F_0,h,F_1} = 0 = d_{F_0',H'|\mathcal{A},F_1'}$$

Considerăm deci: $\overline{H} : F_0 \simeq F_1$, $\overline{H}_{|\mathcal{A}} = h$, şi avem:

$d[(\varphi\otimes id)\overline{H}_{|V} - H'_{|V}] = 0$ şi: $[(\varphi\otimes id)\overline{H}_{|V} - H'_{|V}]_{t=i} = 0$, $i = 0, 1$, şi deci, conform cu lemele 5, 2, putem lua: $\alpha : V \to Z^n\mathcal{B}_{01}$ ech. a.î.:

$$(\varphi\otimes id)\overline{H}_{|V} - H'_{|V} = (\varphi\otimes id)\alpha\ .$$

Luăm în continuare: $H_{|\mathcal{A}} = h$ şi : $H_{|V} = \overline{H}_{|V} - \alpha$.

7. Propoziţie Fie: $\begin{cases} \mathcal{M} \overset{f_0}{\underset{f_1}{\rightrightarrows}} \mathcal{B} \\ \mathcal{B} \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{B}' \end{cases}$ (cu $\mathcal{M}$ nilpotentă şi φ^* izo)

Dacă $\varphi f_0 \simeq \varphi f_1$, atunci: $f_0 \simeq f_1$.

Dem. Inductiv, cu lema 6.

8. Lemă. Fie: $\mathcal{B} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}'$. Există: o G-AGD Z_φ şi: $Z_\varphi \overset{i}{\twoheadrightarrow} \mathcal{B}'$, $Z_\varphi \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$, şi : $\mathcal{B} \xrightarrow{r} Z_\varphi$, a.î.: $jr = id_{\mathcal{B}}$ şi $rj \simeq id_{Z_\varphi}$ şi a.î.: $\begin{tikzcd} Z_\varphi \arrow[r, "i"] & \mathcal{B}' \\ \mathcal{B} \arrow[u, "r"] \arrow[ur, "\varphi"'] \end{tikzcd}$ să fie diagramă comutativă ("Cilindrul" aplicaţiei φ).

Dem. $Z_\varphi = \mathcal{B}'\otimes(t,dt) \underset{(t=1),\varphi}{\oplus} \mathcal{B} \overset{\ell}{\hookrightarrow} \mathcal{B}'\otimes(t,dt)\oplus\mathcal{B}$

şi definim: $j : Z_\varphi \overset{\ell}{\hookrightarrow} \mathcal{B}'\otimes(t,dt)\oplus\mathcal{B} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}$ şi : $r : \mathcal{B} \xrightarrow{(incl\circ\varphi)\oplus id} \mathcal{B}'\otimes(t,dt)\oplus\mathcal{B}$

Definim: $(t,dt) \xrightarrow{g} (t,dt)\otimes(s,ds)$ prin:

$t \to (1-s)t+s$, şi apoi:

$$\mathcal{B}'\otimes(t,dt) \xrightarrow{R=id\otimes g} \mathcal{B}'\otimes(t,dt)\otimes(s,ds)$$

Considerînd: $\mathcal{B} \overset{incl}{\hookrightarrow} \mathcal{B}\otimes(s,ds)$, notăm: $R\oplus incl = F$

şi avem:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}'\otimes(t,dt)\oplus\mathcal{B} & \xrightarrow{F} & [\mathcal{B}'\otimes(t,dt)\oplus\mathcal{B}]\otimes(s,ds) \\ \uparrow \ell & & \uparrow \ell\otimes id \\ Z\varphi & \xrightarrow{F} & Z\varphi\otimes(s,ds) \end{array}$$

şi: $F : id_{Z\varphi} \simeq rj$.

Definim şi: $i : Z\varphi \overset{\ell}{\hookrightarrow} \mathcal{B}'\otimes(t,dt)\oplus\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}'\otimes(t,dt) \xrightarrow{(t=0)} \mathcal{B}'$

şi avem: dat $b'\in\mathcal{B}'$, atunci: $(1-t)b'\in Z\varphi$ şi:

$i((1-t)b') = b'$, deci i surjecţie.

9. Teoremă: Fie $\mathcal{M} \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$; $\mathcal{B} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}'$;

(în G-AGD)

fie $\mathcal{M}$ nilpotenţă şi φ^* izo.

Dacă $\varphi f_0 \simeq \varphi f_1$, atunci: $f_0 \simeq f_1$.

Dem. Conform lemei 8 şi propoz.7, $\varphi f_0 \simeq \varphi f_1$ implică:

$i(rf_0) \simeq i(rf_1)$ şi deci: $rf_0 \simeq rf_1$, de unde: $jrf_0 \simeq jrf_1$.

10. Propoziţie: Relaţia " $\simeq$ " e relaţie de echivalenţă în

$Hom_{G\text{-}AGD}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ unde $\mathcal{M}$ e nilpotentă.

Dem. Considerăm:

$$\mathcal{M} \begin{array}{l} \xrightarrow{H} \mathcal{A}\otimes(t,dt) \\ \xrightarrow[H']{} \mathcal{A}\otimes(s,ds) \end{array} \quad \text{a.î.} : H_{|t=1} = H'_{|s=0}.$$

Avem:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}\otimes(t,dt)\oplus\mathcal{A}\otimes(s,ds) & \xleftarrow[(id\otimes\pi_t)\oplus(id\otimes\pi_s)]{\sim} & \mathcal{A}\otimes[(t,dt)\oplus(s,ds)] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}\otimes(t,dt) \underset{(t=1),(s=0)}{\oplus} \mathcal{A}\otimes(s,ds) & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{A}\otimes[(t,dt) \underset{(t=1),(s=0)}{\oplus} (s,ds)] \end{array}$$

şi:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A}\otimes[(t,dt)\oplus(s,ds)] \\ \mathfrak{M} \arrow[ur, "H\oplus H'"] \arrow[dr, "\tilde{H}\oplus H'"'] & \\ & \mathfrak{A}\otimes[(t,dt) \underset{(t=1),(s=0)}{\oplus} (s,ds)] \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

diagrame comutative

Definim: $(t,dt)\otimes(s,ds) \xrightarrow{i\oplus j} (t,dt)\oplus(s,ds)$,

unde: $i(t)=t$, $i(s)=0$ şi $j(t)=1$, $j(s)=s$, $i(dt)=d(it)$, etc. şi avem diagrama:

$$\begin{tikzcd} (t,dt)\otimes(s,ds) \arrow[rr, "i\oplus j"] \arrow[dr, "\ell"'] & & (t,dt)\oplus(s,ds) \\ & (t,dt) \underset{(t=1),(s=0)}{\oplus} (s,ds) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A}\otimes[(t,dt)\otimes(s,ds)] \arrow[d, "id\otimes\ell"] \\ \mathfrak{M} \arrow[ur, dashed, "F"] \arrow[r, "\tilde{H}\oplus H'"] & \mathfrak{A}\otimes[(t,dt) \underset{(t=1),(s=0)}{\oplus} (s,ds)] \end{tikzcd}$$

şi deoarece $\tilde{H}^*[(t,dt)\otimes(s,ds)] = \tilde{H}^*[(t,dt) \underset{(t=1),(s=0)}{\oplus} (s,ds)] = 0$, ℓ fiind surjecţie rezultă: $id\otimes\ell$ surjectivă şi izo în H^* şi deci există F în G-AGD care face diagrama de mai sus comutativă.

Definim: $(t,dt)\otimes(s,ds) \xrightarrow{\Delta} (u,du)$ prin: $\Delta(t)=\Delta(s)=u$,

şi vom nota: $F=(id\otimes\Delta)\circ F$, de unde rezultă: $F: H_{|t=0} \simeq H'_{|s=1}$.

11. <u>Corolar</u>. Fie: $\varphi: \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ în G-AGD cu φ^* izo. In acest caz: $[\mathfrak{M},\mathcal{B}]_G \xrightarrow[\sim]{\varphi_\#} [\mathfrak{M},\mathcal{B}']_G$, pentru $\forall\, \mathfrak{M}$ nilpotent.
(notaţia: $[\mathfrak{M},\mathcal{B}]_G$ va însemna de acum: clase de omotopie de G-AGD morfisme, cînd grupul G figurează în context).

§ 4. EXISTENTA SI UNICITATEA MODELULUI MINIMAL

O G-AGD $(\mathcal{M},d)$ se va zice <u>minimală</u> dacă, ca G-AG : $\mathcal{M}=\mathcal{L}(V)$, $V=\bigoplus_{n>0}V^n$, $V^n=\bigoplus_{p\geq 0}V^{n,p}$ (sumă directă de G-module) şi: $(*)$ (ptr. $n>0, p\geq 0$): $d(V^{n,p})\subset\mathcal{L}((\bigoplus_{m<n}V^m)\oplus(\bigoplus_{q<p}V^{n,q}))$, cu convenţiile: $V^0=0$ şi $V^{n,-1}=0$, pentru $n>0$. $\mathcal{M}$ se va zice m-<u>minimală</u>, dacă $V^n=0$ pentru $n>m$.

Un G-AGD morfism: $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{A}$ se va zice model m-<u>minimal</u> dacă: i) $\mathcal{M}$ e m-minimală; ii) φ e $(m+1)$-echivalenţă în H^* (în cazul $m=\infty$, vom omite în scriere menţiunea m-).

Implicaţia (de real interes): "$\mathcal{M}$ minimală $\Rightarrow\mathcal{M}$ nilpotentă" va deveni evidentă de îndată ce vom relua, într-un context puţin mai general, definiţia nilpotenţei. Si anume: cerînd ca α să parcurgă o mulţime bine ordonată de indici şi făcînd notaţiile: $\mathcal{M}_{<\alpha}=\varinjlim_{\beta<\alpha}\mathcal{M}_\beta$ şi $\mathcal{M}_{\leq\alpha}=\varinjlim_{\beta\leq\alpha}\mathcal{M}_\beta$ şi cerînd ca incluziunile: $\mathcal{M}_{<\alpha}\hookrightarrow\mathcal{M}_{\leq\alpha}$ să fie extensii elementare, toate rezultatele din paragraful precedent rămîn în picioare. In cazul în care $\mathcal{M}$ e minimală, ordonînd lexicografic indicii $(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, condiţia $(*)$ asigură nilpotenţa. Să mai observăm şi faptul că, tot din această condiţie, <u>subalgebrele definite prin:</u> $\underline{\mathcal{M}_n=\mathcal{L}(\bigoplus_{m\leq n}V^m)}$ sînt sub- G-AGD, n-minimale.

1. <u>Teorema</u>: <u>Dacă $\mathcal{A}$ e o G-AGD, c-conexă, ea admite un model minimal.</u>

<u>Dem</u>. Vom arăta de fapt existenţa unui model m-minimal, pentru orice m şi faptul că orice asemenea model poate fi extins pînă la un model minimal. Inducţie: $V^0=0$, $\mathcal{M}_0=k$ şi $\mathcal{M}_0\to\mathcal{A}$ aplicaţia evidentă, realizează, datorită ipotezei de conexiune, un model 0-minimal.

Luăm apoi: $V^{1,0} = H^1\mathcal{A}$ şi $\mathcal{M}_{1,0} = \mathcal{L}_1(V^{1,0})$, cu $d=0$ şi:

$\mathcal{M}_{1,0} \xrightarrow{\varphi_{1,0}} \mathcal{A}$ dat de: $H^1\mathcal{A} \xrightarrow{s} Z^1\mathcal{A}$, cu proprietatea: $[s] = id$

şi avem: $\varphi^*_{1,0}$ izo în H^0, H^1. Fie, pentru $p \geq 1$, construite:

$\mathcal{M}_{1,p-1} \xrightarrow{\varphi_{1,p-1}} \mathcal{A}$ cu proprietatea că: $\varphi^*_{1,p-1}$ e izo în H^0, H^1.

Luăm atunci:

$$V^{1,p} = \mathrm{Ker}\{\varphi^*_{1,p-1} : H^2\mathcal{M}_{1,p-1} \longrightarrow H^2\mathcal{A}\} \quad \text{şi : } V^{1,p} \xrightarrow{\tau} Z^2\mathcal{M}_{1,p-1} \quad \text{a.î.:}$$

$[\tau]$ =incluziune, şi apoi: $\mathcal{M}_{1,p} = \mathcal{M}_{1,p-1} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}_1(V^{1,p})$. Cf. criteriului 2.4, $\varphi_{1,p-1}$ se extinde la $\mathcal{M}_{1,p} \xrightarrow{\varphi_{1,p}} \mathcal{A}$. Scriind în acest caz şirul exact 2(2): $0 \to H^1\mathcal{M}_{1,p-1} \to H^1\mathcal{M}_{1,p} \to V^{1,p} \xrightarrow{[\tau]} H^2\mathcal{M}_{1,p-1}$, injectivitatea lui $[\tau]$ şi ipoteza de inducţie implică faptul că $\varphi^*_{1,p}$ e izo în H^0, H^1.

Putem lua atunci: $\mathcal{M}_1 = \varinjlim \mathcal{M}_{1,p}$ şi $\varphi_1 = \varinjlim \varphi_{1,p}$ drept model 1 -minimal.

Fie (pentru $n \geq 1$) dat: $\mathcal{M}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathcal{A}$ model $(n-1)$ -minimal.

Luăm:

$$V^{n,0} = \mathrm{coker}\{\varphi^*_{n-1} : H^n\mathcal{M}_{n-1} \longrightarrow H^n\mathcal{A}\} \quad \text{şi : } \mathcal{M}_{n,0} = \mathcal{M}_{n-1} \underset{0}{\otimes} \mathcal{L}_n(V^{n,0})$$

Considerînd proiecţia: $Z^n\mathcal{A} \underset{\underset{s}{\dashleftarrow}}{\xrightarrow{pr}} V^{n,0}$, există o secţiune echivariantă a ei (săgeata punctată: $pr \circ s = id$). Definim atunci:

$$\mathcal{M}_{n,0} \xrightarrow{\varphi_{n,0}} \mathcal{A} \quad \text{prin: } \varphi_{n,0}|\mathcal{M}_{n-1} = \varphi_{n-1}, \ \varphi_{n,0}|V^{n,0} = s.$$

Cf. lemei 2.1, incluziunea $j : \mathcal{M}_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{M}_{n,0}$ e n -echivalenţă în H^*, deci, arătînd că $\varphi^*_{n,0}$ e izo în H^n, vom arăta că $\varphi^*_{n,0}$ e izo în H^q, pentru $q \leq n$. Avem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^n\mathcal{M}_{n-1} & \xrightarrow{j^*} & H^n\mathcal{M}_{n,0} & \to & V^{n,0} & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^*_{n,0}} & & \| & & \\ 0 & \to & H^n\mathcal{M}_{n-1} & \xrightarrow{\varphi^*_{n-1}} & H^n\mathcal{A} & \to & V^{n,0} & \to & 0 \end{array}$$

(şirul de sus provine din şirul exact 2(2))

, de unde cele dorite.

In continuare, trecerea de la $\mathcal{M}_{n,p-1}$ la $\mathcal{M}_{n,p}$, şi apoi trecerea de la $\mathcal{M}_{n-1} \to \mathcal{M}_n$ se fac exact ca în cazul $n=1$. In final, modelul minimal se obţine luînd:

$$\mathcal{M} = \varinjlim \mathcal{M}_n \quad , \varphi = \varinjlim \varphi_n \ .$$

2. <u>Lemă</u>: Fie $\mathcal{A}$ o G-AGD şi $\mathcal{M}$ minimală. Pentru $n \geq 1$ şi $p \geq 0$ fixaţi, notăm: $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{L}((\oplus_{m<n} V^m) \oplus (\oplus_{q \leq p} V^{n,q}))$, $V^{n,p} = V$ şi: $\mathcal{M}_{\alpha+1} = \mathcal{M}_\alpha \otimes_{\imath = d} \mathcal{L}_n(V)$. Fie şi diagrama comutativă (în G-AGD):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & \mathcal{A} \\ j \downarrow & & \downarrow \varphi \quad (\text{cu } \varphi^* \text{ izo}) \\ \mathcal{M}_{\alpha+1} & \xrightarrow{\ell} & \mathcal{M} \end{array}$$

Există atunci G-AGD morfismul $f_{\alpha+1} : \mathcal{M}_{\alpha+1} \to \mathcal{A}$

$$\text{a.î.:} \begin{cases} f_{\alpha+1} | \mathcal{M}_\alpha = f_\alpha \\ \varphi f_{\alpha+1} = \ell \end{cases}$$

<u>Dem</u>: Notăm: $\varphi f_\alpha = \ell j = F$. Notăm în continuare cu h compunerea: $\mathcal{M}_\alpha \xrightarrow{F} \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M} \otimes (t,dt)$ şi avem: $h : \ell j \simeq \varphi f_\alpha$.

După Cor.2.8, există: $\bar{f}_{\alpha+1} : \mathcal{M}_{\alpha+1} \to \mathcal{A}$ şi : $H : \mathcal{M}_{\alpha+1} \to \mathcal{M} \otimes (t,dt)$ a.î.: $\bar{f}_{\alpha+1} | \mathcal{M}_\alpha = f_\alpha$, $H | \mathcal{M}_\alpha = h$ şi : $H : \ell \simeq \varphi \bar{f}_{\alpha+1}$.

După criteriul 2.7: $0 = d_{\ell, h, \varphi \bar{f}_{\alpha+1}} = [\varphi \bar{f}_{\alpha+1}|_V - \ell|_V - \int_0^1 Q(t) dt]$

Tinînd cont de modul de definire al lui $Q(t)$ şi de forma particulară a omotopiei h, rezultă $Q(t) = 0$, şi deci existenţa unui:

$V \xrightarrow{\rho} \mathcal{M}^{n-1}_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{M}^{n-1}_\alpha$ a.î.: $\varphi \bar{f}_{\alpha+1}|_V - \ell|_V = d\rho$. Deoarece:

$d\rho(V) \subset B^n \mathcal{M}_\alpha$ rezultă: $f_\alpha d\rho(V) \subset B^n \mathcal{A}$; $f_{\alpha+1}$ cu proprietăţile căutate se defineşte prin: $f_{\alpha+1} | \mathcal{M}_\alpha = f_\alpha$, $f_{\alpha+1}|_V = \bar{f}_{\alpha+1}|_V - f_\alpha d\rho$.

3. <u>Corolar</u>: Fie: $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{M}$ morfism de: G-AGD. Dacă $\mathcal{M}$ e

minimală şi φ^* e izo, există morfismul de $G\text{-}AGD$:
$\mathcal{M} \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}$ a.î. $\varphi\psi = id$.

4. <u>Corolar</u>: Dacă, în condiţiile de mai sus, şi $\mathcal{A}$ e minimală atunci: φ^* e izo d.n.d. φ e izo.

5. <u>Corolar</u> (<u>unicitatea modelului minimal</u>). Fie date modelele minimale (ca mai jos). Din Th.3.1 rezultă existenţa săgeţii punctate care face comutativă (omotopic) diagrama. Cor.4 arată f a fi izo.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{M}' \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "\varphi'"] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

6. <u>Corolar</u> (unicitatea modelului m-minimal).

Fie: $\begin{tikzcd} \mathcal{M}_m \arrow[r, "\varphi_m"] \arrow[d, dashed] & \mathcal{A} \\ \mathcal{M} \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$, respectiv: $\begin{tikzcd} \mathcal{M}'_m \arrow[r, "\varphi'_m"] \arrow[d, dashed] & \mathcal{A} \\ \mathcal{M}' \arrow[ur, dashed, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$, modele m-minimale.

După Th.1, ele se pot extinde la două modele minimale (săgeţile punctate), iar după Cor.5: există un izo de $G\text{-}AGD$: $\mathcal{M}' \xrightarrow{f} \mathcal{M}$. Făcînd observaţia derizorie (dar utilă) că, pentru o algebră minimală $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_m$ mai poate fi descris şi ca subalgebra generată de $\bigoplus_{n\leq m} \mathcal{M}^n$, corolarul actual rezultă, i.e.: f induce un izo:

$$\mathcal{M}'_m \xrightarrow[\sim]{f_m} \mathcal{M}_m \, .$$

7. <u>Corolar</u>: $\mathcal{M}_m \xrightarrow{\varphi_m} \mathcal{M}'_m$, $G\text{-}AGD$ morfism între algebre m -minimale. Atunci: φ_m e $(m+1)$ -echivalenţă, în H^*, d.n.d φ_m e e izo.

Dem. Pentru implicaţia netrivială, Th.1 ne asigură că putem completa situaţia dată pînă la un model minimal::

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_m \arrow[r, "\varphi_m"] & \mathcal{M}'_m \\ \mathcal{M} \arrow[u] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Cor.4 implică: φ e izo, iar observaţia din corolarul precedent arată φ_m a fi izo.

In continuare, urmărind interese de perspectivă, vom acorda o atenţie deosebită algebrelor 1-minimale. Fie: $\mathcal{M} = \mathcal{L}(V)$ o astfel de algebră. Definim inductiv submodulele $W^p \subset V$ prin: $W^{-1} = 0$, $W^0 = \ker\{V \xrightarrow{d} \mathcal{M}^2\}$ şi pentru $p \geq 1$: $W^p = (d|_V)^{-1}((\mathcal{L}(W^{p-1}))^2)$

şi avem: $W^0 \subset \ldots \subset W^{p-1} \subset W^p \subset \ldots$ şi (din minimalitate): $V = \bigcup\limits_p W^p$.

Este limpede faptul că, dată o altă algebră 1-minimală: $\mathcal{M}' = \mathcal{L}(V')$ şi un morfism de G-AGD : $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ avem: $\varphi(W^p) \subset W'^p$, $\forall p$ (unde cele accentuate se referă la construcţiile similare efectuate în $\mathcal{M}'$).

8. Lemă: Fie $\mathcal{M} = \mathcal{L}(V^1) = \mathcal{L}(\bigoplus\limits_{p\geq 0} V^{1,p})$, 1-minimală. Notăm: $U_p = \bigoplus\limits_{q\leq p} V^{1,q}$ şi considerăm incluziunile de G-AGD: $\mathcal{L}(U_p) = \mathcal{M}_p \hookrightarrow \mathcal{M}$.

Presupunem: $\begin{cases} (*)\ d|_{V^{1,0}} = 0 \text{ şi: } V^{1,p} \overset{[d]}{\hookrightarrow} H^2\mathcal{M}_{p-1}, \text{ ptr. } p>0 \\ (**)\ \ker\{H^2\mathcal{M}_p \to H^2\mathcal{M}_{p+r}\} = \ker\{H^2\mathcal{M}_p \to H^2\mathcal{M}_{p+1}\} \\ \qquad \text{ptr. } p\geq 0,\ r \geq 1 \end{cases}$

Atunci: $U_p = W^p$, $p \geq 0$.

Dem. Arătăm, incluziunea netrivială: $W^0 \subset U_0$. Fie deci $v \in V^1$ a.î. $dv = 0$; fie $v = \sum\limits_{q=0}^{p} v_q$, $v_q \in V^{1,q}$, iar $v_p \neq 0$. Rezultă că: $[dv_p] = 0$ în $H^2\mathcal{M}_{p-1}$, şi de aici, cf. ipotezelor $(*)$: $p = 0$ şi deci: $v \in V^{1,0} = U_0$. Fie arătat (pentru $p \geq 1$) că: $U_q = W^q$, dacă $q < p$. Incluziunea de arătat este: $W^p \subset U_p$. Fie deci $v \in V^1$ a.î.: $dv \in \mathcal{M}^2_{p-1}$. Fie,

prin absurd: $v=\sum_{q=0}^{p+r} v_q$, $v_q\in V^{1,q}$, $v_{p+r}\neq 0$ şi: $r\geqslant 1$.
Notînd: $\sum_{q=0}^{p-1} v_q = u_{p-1}\in U_{p-1}$, avem: $dv\in Z^2\mathcal{M}_{p-1}$ şi $[dv]=0$

în $H^2\mathcal{M}_{p+r}$, deci, din ipotezele (**) şi ipotezele de inducţie: $dv=d(u'_{p-1}+v'_p)$ cu: $u'_{p-1}\in U_{p-1}$ şi: $v'_p\in V^{1,p}$

de unde: $\left((u_{p-1}-u'_{p-1})+(v_p-v'_p)+\sum_{q=p+1}^{p+r} v_q\right)\in V^{1,0}$, ceea ce e absurd.

9. <u>Lema</u>. Considerînd: $\mathcal{A}\xrightarrow{f}\mathcal{A}'$, în G-AGD, cu $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}'$ c-conexe, fie modelele minimale: $\mathcal{M}\xrightarrow{\varphi}\mathcal{A}$ şi $\mathcal{M}'\xrightarrow{\varphi'}\mathcal{A}'$. In aceste condiţii: există un G-AGD morfism: $\mathcal{M}\xrightarrow{\tilde f}\mathcal{M}'$ unic pînă la o omotopie, care face diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "f"] & \mathcal{A}' \\
\mathcal{M} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\tilde f"] & \mathcal{M}' \arrow[u, "\varphi'"']
\end{tikzcd}$$

omotopic comutativă.

<u>Dem</u>. Aplicăm Cor.3.11. Vom păstra notaţia $\tilde f$, care <u>va desemna modelul minimal al morfismului f.</u>

Dacă $\mathcal{A}$ e o G-AG, vom nota: $\mathcal{A}^+=\bigoplus_{q>0}\mathcal{A}^q$.

Dacă $\mathcal{M}$ e o AG liberă, de forma: $\mathcal{M}=\mathcal{L}(V)$ cu: $V=\bigoplus_{p>0}V^p$ <u>vom introduce notaţia: $\pi^*\mathcal{M}=\mathcal{M}^+/\mathcal{M}^+\cdot\mathcal{M}^+$</u>, ca s.v. graduat. Să facem observaţia că, în condiţiile menţionate asupra lui V, avem un izomorfism de s.v. graduate: $V\sim\pi^*\mathcal{M}$. Grupurile $\pi^q\mathcal{M}$ vor fi numite <u>grupurile de pseudo-omotopie</u> ale algebrei $\mathcal{M}$.

Un G-AG morfism: $\mathcal{M}=\mathcal{L}(V)\xrightarrow{\varphi}\mathcal{L}(V')=\mathcal{M}'$ induce în mod natural un <u>morfism notat: $\varphi^{(\#)}:\pi^*\mathcal{M}\longrightarrow\pi^*\mathcal{M}'$</u>.

Dacă $\mathcal{A}=\mathcal{L}(V)$ e G-AGD, vom spune că $\mathcal{A}$ este liberă de tip finit d.n.d. V este s.v. graduat de tip finit.

10. Lemă: Fie: $\mathcal{M}$ liberă de tip finit. Atunci: $\mathcal{M}$ e nilpotentă, cu d decompozabil (i.e.: $d\mathcal{M}^+ \subset \mathcal{M}^+ \cdot \mathcal{M}^+$) d.n.d. $\mathcal{M}$ e minimală.

Dem. Pentru implicaţia directă, considerăm: $\mathcal{M}_{\alpha+1} = \mathcal{M}_\alpha \otimes_{\tau_\alpha} \mathcal{L}_{n_\alpha}(V_\alpha)$

Avem: $V^n = \underset{n_\alpha = n}{\oplus} V_\alpha$; suma e finită, din ipoteză, pentru $\forall n$.

$V^{n,p}$ se obţin renumerotînd acei V_α cu $n_\alpha = n$. Decompozabilitatea diferenţialei şi nilpotenţa implică vizibil minimalitatea.

Pentru implicaţia inversă, observăm că decompozabilitatea lui d rezultă indiferent de condiţiile de finitudine. Deoarece:

$V^n = \underset{p}{\oplus} V^{n,p}$ (sumă finită !) ne permitem să renumerotăm indicii în ordine naturală, punînd în evidenţă şi nilpotenţa.

In condiţiile lemei de mai sus, obţinem o scriere a lui $\mathcal{M}$ (minimală şi de tip finit), ca: $\mathcal{M} = \underrightarrow{\lim}\, \mathcal{M}_\alpha$ cu:

$$\mathcal{M}_{\alpha+1} = \mathcal{M}_\alpha \otimes_{\tau_\alpha} \mathcal{L}_{n_\alpha}(V_\alpha)$$

şi: $\alpha \leq \beta \Rightarrow n_\alpha \leq n_\beta$, iar mulţimile: $\{\alpha \mid n_\alpha = n\}$ sînt finite, pentru orice n, ceea ce indică o analogie puternică cu TN, aşa cum este el descris în observaţiile ce rezultă din Th.I.2.15.

Obs.: In cele ce urmează vom considera următorul exemplu care ilustrează faptul că: simpla cerere asupra coomologiei algebrei, ca ea să fie de tip finit, nu implică faptul că modelul ei minimal este de tip finit.

Fie $\mathcal{O}$ o AGD c-conexă a.î.: $\tilde{H}^q\mathcal{O} = \begin{cases} 0, & q \geq 2 \\ K\cdot\alpha \oplus K\cdot\beta, & q = 1 \end{cases}$

Se observă că modelul ei 1-minimal nu este de tip finit.

Exemplu precedent este provocat în primă instanţă de neregularităţile prezentate în $H^1\mathcal{O}$.

In cazul simplu conex (i.e.: $\tilde{H}^0\mathcal{O} = H^1\mathcal{O} = 0$), situaţia se clarifică, după cum dovedeşte următoarea:

11. Propoziţie

a) Fie $\mathcal{M}$ minimală. Atunci: $H^1\mathcal{M}=0$ d.n.d. $\pi^1\mathcal{M}=0$.

b) Fie: $\mathcal{M}$ liberă, $\mathcal{M}=\mathcal{L}(V)$ cu $V^1=0$.
Atunci: $\mathcal{M}$ e minimală d.n.d. d e decompozabilă.

c) Fie: $\mathcal{M}$ minimală şi simplu conexă; atunci: $\mathcal{M}$ e de tip finit d.n.d. coomologia sa e de tip finit.

Dem. a) Vom prefera implicaţia directă şi oarecum netrivială. Dacă $H^1\mathcal{M}=0$, atunci $W^0=0$ (reluînd notaţiile lemei 8), şi, inductiv: $W^p=0$ şi deci: $V^1=0$.

b) De data aceasta considerăm ca netrivială implicaţia inversă pe care o vom demonstra.

Din ipoteză: $dV^n\subset\mathcal{M}_{n-1}$, pentru orice n, şi deci minimalitatea.

c) Din nou preferăm inversa implicaţiei directe pentru demonstraţii. In acest caz, privind şirul de coomologie al perechii

$$(\mathcal{M},\mathcal{M}_n):\ H^{n+1}\mathcal{M}\to \underset{\substack{\parallel\\ V^{n+1}}}{H^{n+1}(\mathcal{M},\mathcal{M}_n)}\to H^{n+2}\mathcal{M}_n,$$

un raţionament inductiv ne permite încheierea demonstraţiei.

Vom încheia secţiunea aducînd o nouă precizare asupra legăturii dintre nilpotenţă şi minimalitate, şi anume: vom indica un algoritm care permite, dată fiind o algebră nilpotentă $\mathcal{N}$, să extragem din structura ei informaţie despre modelul său minimal, fie acesta $\mathcal{M}$, fără a-l construi.

Dacă $\mathcal{N}$ e nilpotentă, în particular e liberă, deci avem identificarea grupurilor sale de pseudo-omotopie: $\mathcal{N}^+/\mathcal{N}^+\cdot\mathcal{N}^+\sim V$, dacă $\mathcal{N}$ e deforma $\mathcal{L}(V)$; să observăm că: $d\mathcal{N}^+\subset\mathcal{N}^+$ şi:

$d(\mathcal{N}^+\cdot\mathcal{N}^+)\subset\mathcal{N}^+\cdot\mathcal{N}^+$, deci d induce o diferenţială, notată $d':V\to V$.

O consecinţă a teoremei de strctură din [10], II 1-2, îndică algoritmul promis: $\pi^*\mathcal{M} \sim H^*(V, d')$, $\mathcal{M}$ fiind model minimal pentru $\mathcal{N}$.

§ 5. ALGEBRE FORMALE

Dacă $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sînt G-AGD, prin <u>echivalenţă coomologică simplă</u> între ele vom înţelege: fie un morfism de G-AGD: $\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}$ care induce izo în H^*, fie o săgeată în sens invers : $\mathcal{A} \xleftarrow{\psi} \mathcal{B}$ cu aceeaşi proprietate în H^*; în oricare din aceste situaţii vom scrie: $\mathcal{A} \overset{c}{\longleftrightarrow} \mathcal{B}$.

1. <u>Lemă</u>: Fie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ c-conexe. Dacă $\mathcal{A} \overset{c}{\longleftrightarrow} \mathcal{B}$, atunci modelele lor minimale (construite şi dovedite a fi unice pînă la izomorfism în 4), $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ şi $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, sînt izomorfe.

<u>Dem</u>: Presupunînd de exemplu dat: $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, izo în H^* construim ca în lema 4.9 modelul său minimal:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B} \\ \uparrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{A}}} & & \uparrow{\scriptstyle \rho_{\mathcal{B}}} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathcal{M}_{\mathcal{B}} \end{array}$$

$\tilde{\varphi}$ rezultă izo în H^*, deci, după Cor. 4.4. $\tilde{\varphi}$ este izo.

$\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ se vor zice <u>coomologie echivalente</u> (c-echiv) dacă există G-AGD $\mathcal{A}_i$, $0 \le i \le r$, a.î.: $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_r = \mathcal{B}$ şi totodată echivalenţe coomologice simple: $\mathcal{A}_{i-1} \overset{c}{\longleftrightarrow} \mathcal{A}_i$, $1 \le i \le r$. Vom scrie în cazul acesta: $\mathcal{A} \overset{c}{\sim} \mathcal{B}$.

2. <u>Lemă</u>: Fie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ c-conexe. Atunci: $\mathcal{A} \overset{c}{\sim} \mathcal{B}$ d.n.d. $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ (vom mai folosi, abuziv, "egal", pentru "izomorf").

<u>Dem</u>: ca precedenta.

$\mathcal{A}$ se va zice G-AGD <u>formală</u> dacă $\mathcal{A} \overset{c}{\sim} H^*\mathcal{A}$ (ultima considerată ca G-AGD cu diferenţiala nulă)

3. Lemă: Fie $\mathcal{M}$ minimală. $\mathcal{M}$ e formală d.n.d există G-AGD morfismul : $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow H^*\mathcal{M}$ a.î. : $\varphi^* = id$.

Dem: Comentăm doar implicaţia directă. După lema 2, avem G-AGD morfismul : $\bar{\varphi} : \mathcal{M} \longrightarrow H^*\mathcal{M}$ a.î.: $\bar{\varphi}$ induce izo în H^*. Luăm atunci: $\varphi = (\bar{\varphi}^*)^{-1} \circ \bar{\varphi}$. Să observăm că, odată stabilită, pentru G-AGD c-conexe, echivalenţa imediată: "$\mathcal{A}$ formală d.n.d $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ formal", unde $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ desemnează modelul minimal, Lema 3 furnizează de fapt reducerea formalităţilor, pentru G-AGD c-conexe, la cazul minimal.

O clasă de exemple de algebre formale furnizează:

4. Propoziţie: Fie: $V = \bigoplus_n V^n$ un G-modul graduat, şi fie $(\mathcal{Z}, d) = (\mathcal{Z}(V), d)$ o G-AGD. Considerăm submodulul $C \subset V$ definit prin: $C = \ker(d_{|V})$.

Dacă există o descompunere: $V = C \oplus N$ (G-submodule) a.î.: ideal$(N) \cap Z^*(\mathcal{Z}) \subset B^*(\mathcal{Z})$, atunci: există: $\varphi : \mathcal{Z} \longrightarrow H^*\mathcal{Z}$, G-AGD morfism, a.î.: $\varphi^* = id$.

(In particular $\mathcal{Z}$ e formală).

Dem: Notăm cu π proiecţia: $Z^*\mathcal{Z} \xrightarrow{\pi} H^*\mathcal{Z}$. Definim φ (G-AG morfism) prin: $\varphi_{|C} = \pi_{|C}$, $\varphi_{|N} = 0$. Observăm că φ e G-AGD morfism d.n.d. $\varphi d_{|N} = 0$, ceea ce vom dovedi. Luăm $v \in N$ şi scriem: $dv = c' + v'$ cu $c' \in \mathcal{Z}(C)$ şi $v' \in$ ideal(N)

Avem: $0 = d^2 v = dv'$ şi deci, din ipoteze, $c' \in B^*(\mathcal{Z})$ şi atunci: $\varphi dv = \pi c' = 0$. Arătăm în continuare, pentru a încheia demonstraţia, că $\pi(C)$ generează, ca algebră, $H^*\mathcal{Z}$.

Luăm $z \in Z^*(\mathcal{Z})$ şi scriem: $z = c' + v'$ ca mai sus, obţinînd, identic, $v' \in B^*(\mathcal{Z})$ şi deci : $\pi(z) = \pi(c')$.

In continuare, vom numi o G-AG$\mathcal{H}$ intrinsec formală dacă, ori de cîte ori $\mathcal{M}$ şi $\mathcal{M}'$ sînt minimale, din : $H^*\mathcal{M} \sim H^*\mathcal{M}' \sim \mathcal{H}$

(izo G-AG) rezultă : $\mathcal{M} \sim \mathcal{M}'$ (izo G-AGD).

5. <u>Lemă</u>: Dacă $\mathcal{H}$ e conexă, ea e intrinsec formală d.n.d. ori de cîte ori $\mathcal{M}$ e minimal cu proprietatea: $H^*\mathcal{M} \sim \mathcal{H}$, rezultă $\mathcal{M}$ formal.

<u>Dem</u>:-Direct: $H^*\mathcal{M} \sim \mathcal{H}$ implică : $\mathcal{M} \sim \mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ (ca G-AGD) şi deci : $\mathcal{M} \sim \mathcal{M}_{H^*\mathcal{M}}$.

-Invers: Dacă $H^*\mathcal{M} \sim H^*\mathcal{M}' \sim \mathcal{H}$, $\mathcal{M}$ şi $\mathcal{M}'$ rezultă formale, deci: $\mathcal{M} \sim \mathcal{M}_{H^*\mathcal{M}} \sim \mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ (izo în G-AGD) şi analog $\mathcal{M}'$.

<u>Obs</u>: Dacă $\mathcal{M}$ e minimală, dar nu formală, $H^*\mathcal{M}$ nu are cum fi intrinsec formală.

Fie: $(\mathcal{A}, d)$ o AGD , $V = \bigoplus_{n \geq 0} V^n$ un k-s.v. graduat, şi τ aplicaţie liniară de grad +1, $\tau : V \longrightarrow Z^*\mathcal{A}$ (transgresia). Prin analogie cu exemplul 8 din I.4 (fibrări principale cu grup structural compact), vom introduce noţiunea de <u>extensie principală</u> a lui $\mathcal{A}$ cu V via τ , definind o AGD : $(\mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}(V), d_\tau)$ prin: $d_{\tau|\mathcal{A}} = d$ şi $d_{\tau|V} = \tau$. Notăm ca de obicei incluziunea $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}(V)$ cu j. Avem:

6. <u>Lemă</u>: Există un şir spectral multiplicativ, situat în primul cadran, convergent la $H^*(\mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}(V))$, şi în plus:

a) $E_2 \sim H^*\mathcal{A} \otimes \mathcal{Z}(V)$ (ca algebre bigraduate);

b) dacă $v \in V^n$, atunci: $1 \otimes v \in E_{n+1}^{0,n}$ şi
$d_{n+1}(1 \otimes v) = \pi_n[\tau v]$

unde π_n desemnează proiecţia naturală : $E_2^{n+1,0} \twoheadrightarrow E_{n+1}^{n+1,0}$, şi

c) compunerea: $H^m\mathcal{A} \sim E_2^{m,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{m,0} \hookrightarrow H^m(\mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}(V))$

se identifică cu : $j^* : H^m\mathcal{A} \longrightarrow H^m(\mathcal{A} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}(V))$.

<u>Dem</u>: Notăm cu ∇_τ diferenţiala din $\mathcal{A} \otimes \mathcal{Z}(V)$ corespun-

zătoare extensiei principale $\mathcal{A}\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}(V)$, obţinute considerînd $d=0$, şi avem : $d_\tau = d\otimes id + \nabla_\tau$. Pentru $q\geq 0$, notăm: $M^q = \mathcal{A}^q \otimes \mathcal{L}(V)$ şi pentru $p\geq 0$: $F^p = \bigoplus_{q\geq p} M^q$, şi avem : $F^{p+1}\subset F^p$, $p\geq 0$; $\bigcup_{p\geq 0} F^p = \mathcal{A}\otimes\mathcal{L}(V)$; $F^r\cdot F^s \subset F^{r+s}$;

şi, deoarece: $d\otimes id : M^q \to M^{q+1}$, $q\geq 0$, iar : $\nabla_\tau : M^q \to F^{q+2}$, $q\geq 0$, un raţionament standard (cum se află, de exemplu, în [11], p.48-51) ne permite evaluările:

$$(E_0,d_0) = (\mathcal{A}\otimes\mathcal{L}(V), 0) \; ; \; (E_1,d_1) = (\mathcal{A}\otimes\mathcal{L}(V), d\otimes id)$$

de unde a).

Cît despre b) şi c), acestea se verifică fără dificultate prin calcul direct.

7. Exemplu: Fie $\mathcal{L} \circ AG$ liberă de tip finit şi $(u_1,\dots,u_m)$ un şir regulat în $\mathcal{L}$ (în sensul din I.4), şi care au în plus proprietatea că: $u_i \in \mathcal{L}^+\cdot\mathcal{L}^+$, $1\leq i\leq m$. Notînd cu $\mathcal{H}$ algebra: $\mathcal{L}$ /ideal $(u_1,\dots,u_m)$, afirmăm că ea e intrinsec formală. Pentru aceasta, considerăm extensia principală: $\mathcal{M} = \mathcal{L}\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}(v_1,\dots,v_m)$, unde: $\mathcal{L}$ e considerată cu $d=0$; $|v_i| = |u_i| - 1$, $1\leq i\leq m$ şi $\tau(v_i) = u_i$, $1\leq i\leq m$. Ipotezele şi lema 4.10 asigură minimalitatea. Definim un AGD -morfism: $\mathcal{M}\xrightarrow{\varphi}\mathcal{H}$ prin : $\varphi|_{\mathcal{L}}$ = proiecţia canonică, şi: $\varphi(v_i)=0$, $1\leq i\leq m$.

Pentru a arăta că φ e izo în H^* , vom proceda inductiv, definind, pentru $1\leq i\leq m$, o sub- AGD $\mathcal{M}_i$ prin: $\mathcal{M}_i = \mathcal{L}\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}(v_1,\dots,v_i)$ şi o $AG\,\mathcal{H}_i$ prin : $\mathcal{H}_i = \mathcal{L}/$ideal$(u_1,\dots,u_i)$ considerînd diagramele comutative:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_i \arrow[r, "\varphi_i"] & \mathcal{H}_i \\ \mathcal{M}_{i-1} \arrow[u, hook, "j"] \arrow[r, "\varphi_{i-1}"] & \mathcal{H}_{i-1} \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$ (cu φ_i analoage cu φ și cu p proiecția canonică),

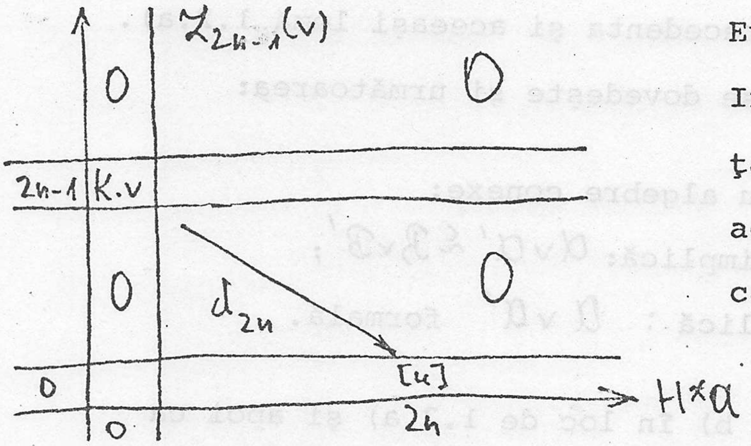
convenind a începe cu: $\mathcal{L} \xrightarrow{id} \mathcal{L}$, și aplicînd următoarea:

8. Lemă: Fie $\mathcal{A}$ o AGD și : $u \in Z^{2n}\mathcal{A}$ a.î.: $[u] \in H^{2n}\mathcal{A}$ este nondivizor al lui 0. Considerăm extensia elementară:

$\mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{L}_{2n-1}(v)$ cu : $\tau(v) = u$. Are loc șirul exact:

$$0 \to \mathrm{ideal}([u]) \to H^*\mathcal{A} \xrightarrow{j^*} H^*(\mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{L}_{2n-1}(v)) \to 0 .$$

Dem: Folosind șirul spectral introdus la 6, avem (termenul E_2):



Evident: $E_2 = E_{2n}$ și $E_{2n+1} = E_\infty$

In continuare, concluzia anunțată se obține formal, urmărind același raționament spectral ca în demonstrația lemei I.4.1.

Fie acum $\mathcal{M}'$ o altă AGD minimală, cu proprietatea că: $H^*\mathcal{M}' \sim \mathcal{H}$; deci, dacă $\mathcal{L} = \mathcal{L}(W)$, putem considera scufundarea de s.v. graduate: $W \xrightarrow{\psi} Z^*\mathcal{M}'$ a.î., notînd tot cu ψ AG morfismul canonic indus:

$\mathcal{L}(W) \xrightarrow{\psi} H^*\mathcal{M}'$ să avem șirul exact:

$$0 \to \mathrm{ideal}(u_1, \dots, u_m) \to \mathcal{L} \xrightarrow{\psi} H^*\mathcal{M}' \to 0 .$$

Alegem: $v_i' \in \mathcal{M}'$ a.î.: $dv_i' = \psi(u_i)$, $1 \le i \le m$, și definim un AGD-morfism : $\overline{\psi} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ prin: $\overline{\psi}|_{\mathcal{L}} = \psi$ și $\overline{\psi}(v_i) = v_i'$.

Avem diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{ideal}(u_1,\dots,u_m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{Z} \arrow[r, "(\varphi^*)^{-1}\circ pr"] \arrow[d, equal] & H^*\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\Psi}^*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{ideal}(u_1,\dots,u_m) \arrow[r] & \mathcal{Z} \arrow[r, "\Psi"] & H^*\mathcal{M}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(unde: $\mathcal{Z} \xrightarrow{pr} \mathcal{H}$ e proiecția canonică)

care, combinată cu Cor.4.4, arată $\overline{\Psi}$ a fi izo, deci $\mathcal{H}$ intrinsec formală.

9. <u>Propoziție</u>: Pentru algebre c-conexe:

a) $\mathcal{A} \overset{c}{\simeq} \mathcal{B}$ și $\mathcal{A}' \overset{c}{\simeq} \mathcal{B}'$ implică: $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}' \overset{c}{\simeq} \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}'$;

b) $\mathcal{A},\mathcal{A}'$ formale implică : $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}'$ formală.

<u>Dem</u>: a) Imediat, cu lema 2 și lema 1.2.a).

b) Imediat, cu precedenta și aceeași lemă 1.2.a).

Tot atît de imediată se dovedește și următoarea:

10. <u>Propoziție</u>: Pentru algebre conexe:

a) $\mathcal{A} \overset{c}{\simeq} \mathcal{B}$ și $\mathcal{A}' \overset{c}{\simeq} \mathcal{B}'$ implică: $\mathcal{A}\vee\mathcal{A}' \overset{c}{\simeq} \mathcal{B}\vee\mathcal{B}'$;

b) $\mathcal{A},\mathcal{A}'$ formale implică : $\mathcal{A}\vee\mathcal{A}'$ formală.

<u>Dem</u>: Citește lema 1.2 b) în loc de 1.2.a) și apoi ca mai sus.

Fie $\mathcal{A}$ o ACD și: $a,b,c \in H^*\mathcal{A}$ a.î.: $a\cdot b = b\cdot c = 0$.

In acest caz: $\langle a,b,c\rangle \in H^{|a|+|b|+|c|-1}\mathcal{A}/\mathrm{ideal}(a,c)$

(<u>produsul Massey</u>) e definit prin: $[\eta\gamma + (-1)^{|a|+1}\alpha\varrho]$

unde: $a=[\alpha]$, $b=[\beta]$, $c=[\gamma]$ și $\alpha\cdot\beta = d\eta$, $\beta\gamma = d\varrho$.

11. <u>Propoziție</u>

Fie: $\mathcal{A}$ c-conexă, $\mathcal{A}$ formală. In acest caz, produsul Massey $\equiv 0$.

Dem: Fie: $\mathcal{A} \xleftarrow{\rho} \mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} H^*\mathcal{A}$ (ρ^*, φ^* izo). $H^*\mathcal{A}$ are $d \equiv 0$ şi deci produsul Massey $\equiv 0$.

Este momentul să facem o distincţie oarecum subtilă, sugerată de ceea ce se va întîmpla la spaţii, între noţiunile de formalitate, respectiv G-formalitate, care se pot introduce pentru o G-AGD. Noţiunea neechivariantă se obţine uitînd G-structura.

12. Propoziţie: Fie $\mathcal{A}$ o G.AGD, c-conexă şi formală. Atunci: $H^*\mathcal{A}$ G-trivială implică: $\mathcal{A}$ G-formală.

Dem: Fie $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, G-modelul minimal. Uitînd G-structura, $\mathcal{M}$ devine evident model minimal pentru $\mathcal{A}$, neechivariant. Din formalitate, ca în lema 3, există: $\mathcal{M} \xrightarrow{g} H^*\mathcal{M}$ a.î. : $g^* = id$. Deoarece G acţionează trivial în $H^*\mathcal{A}$, el acţionează trivial şi în $H^*\mathcal{M}$ şi deci: $(H^*\mathcal{M})^G = H^*\mathcal{M}$.

Ipotezele noastre permanente de semisimplicitate şi lema 0.3, ne permit să afirmăm că: $\mathcal{M}^G \hookrightarrow \mathcal{M}$ induce izo în H^*.

De asemenea: $g|\mathcal{M}^G$ va fi izo în H^*, şi în acelaşi timp G-AGD morfism şi deci rezultă cele dorite.*)

Fie: $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{A}'$ un AGD-morfism între algebre formale, c-conexe. f se vazice *formal* dacă modelul său minimal poate fi reconstituit numai din aplicaţia indusă de f în H^*; mai precis: deîndată ce este dat, ca în diagrama de mai jos, modelul minimal $\tilde{f}$ (i.e.: patratul din stînga, omotopic comutativ) există aplicaţiile φ şi φ', care să inducă izo în H^* şi să facă pătratul din dreapta omotopic comutativ:

---

*) Se poate arăta, folosind teoria obstrucţiilor la formalitate dezvoltată în [12], adaptată echivariant, că afirmaţia rezultă fără a impune restricţii asupra acţiunii în $H^*\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[d, "f"'] & \mathcal{M} \arrow[l, "\rho"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"] & H^*\mathcal{A} \arrow[d, "f^*"] \\ \mathcal{A}' & \mathcal{M}' \arrow[l, "\rho'"'] \arrow[r, "\psi'"] & H^*\mathcal{A}' \end{tikzcd}$$

13. Corolar. Fie $\mathcal{A}$ o G-AGD, c-conexă şi G-formală. In acest caz G e grup formal de automorfisme ale lui $\mathcal{A}$.

Dem: Considerăm: $\mathcal{A} \xleftarrow{\rho} \mathcal{M} \xrightarrow{\psi} H^*\mathcal{A}$ (model G-minimal); ρ, ψ sînt echivariante, deci G este grup formal.

(Prin "G e grup formal de automorfisme al lui $\mathcal{A}$" nu putem înţelege decît faptul că înmulţirea cu $g \in G$ este automorfism formal, pentru orice $g \in G$).

14. Exemplu

Dacă: $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\alpha,\beta)/\mathrm{ideal}(\alpha^2,\alpha\beta)$, $|\alpha| = |\beta| = 2$ şi $d = 0$, considerăm: $\mathcal{M}_3 = \mathcal{L}(x,y,\varphi,\psi)$, $|x| = |y| = 2$, $|\varphi| = |\psi| = 3$, cu: $dx = dy = 0$ şi: $d\varphi = x^2$, $d\psi = xy$, şi: $\mathcal{M}_3 \xrightarrow{f} \mathcal{H}$ dat de: $x \to \alpha$, $y \to \beta$, φ si $\psi \to 0$, morfism de AGD ce induce izo în H^*, $p^{tr.}\ * \leq 4$.

Avem: $H^3\mathcal{M}_3 = 0$, deci: $\langle [x],[x],[y] \rangle = [-x\psi + y\varphi] \neq 0$ în $H^5\mathcal{M}_3$ şi deci $\mathcal{M}_3$ nu e formal (prop.11).

Remarcăm faptul că: $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_2 \otimes_{\tau} \mathcal{L}_3(\varphi,\psi)$ cu: $\mathcal{M}_2 = \mathcal{L}_2(x,y)$ şi $d = 0$, ceea ce arată că: o extindere elementară de model formal nu rămîne formală.

In acelaşi timp, $\mathcal{M}_3$ se extinde (teorema 4.1) pînă la un model minimal $\mathcal{M}$, evident formal ($\mathcal{H}$ are $d=0$).

Rezultă deci că: dacă $\mathcal{M}$ e formală, $\mathcal{M}_n$ nu rămîne neapărat formală.

15. <u>Exemplu</u> (Semnificaţia topologică a acestui exemplu va fi dezvăluită în capitolul IV).

Fie: $\mathcal{M} = \mathcal{L}(x,y,\bar{x},\bar{y})$, $|x|=2$, $|y|=3$, $|\bar{x}|=1$, $|\bar{y}|=2$, cu: $dx=0$, $dy=x^2$, $d\bar{x}=0$, $d\bar{y}=x\bar{x}$.

Rezultă: $\langle[\bar{x}],[x],[\bar{x}]\rangle = 2[\bar{x}\bar{y}]$, mod $[\bar{x}]\cdot H^2\mathcal{M}$.

Deoarece: $d(ax+b\bar{y}) = b\cdot x\bar{x}$, rezultă: $H^2\mathcal{M} = Q\cdot[x]$ şi deci: $[\bar{x}]\cdot H^2\mathcal{M} = 0$ şi $\langle[\bar{x}],[x],[\bar{x}]\rangle \neq 0$ în $H^3\mathcal{M}$, deci $\mathcal{M}$ nu e formal.

De acum înainte, G va fi un grup Lie compact, şi reprezentările lui finit dimensionale presupuse continue, deci $\Delta.\Delta$ (exemplul 0.4).

16. <u>Lema</u>: Fie $\mathcal{Q}$ o G-AGD a.î.: 1) $H^0\mathcal{Q}=R$ şi $H^1\mathcal{Q}=0$

2) $\exists\ B^*\mathcal{Q} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{Q}$ ech., de grad -1, a.î.: $d\sigma = id$

3) $\exists\ H \subset Z^*\mathcal{Q}$, G-submodul de tip finit, a.î.: $H \xrightarrow[\sim]{\pi} H^*\mathcal{Q}$.

In aceste condiţii: există G-model minimal, de tip finit şi deci $\Delta.\Delta$, pentru $\mathcal{Q}$.

<u>Dem</u>: In demonstraţie vom face inducţie după n; fie:

$$(n)\begin{cases} \exists\ \mathcal{M}_n = \mathcal{L}(W^n),\ \text{cu}: W^n = \bigoplus_{m>1}^{n} V^m, \text{ G-modul de tip finit;} \\ \mathcal{M}_n \text{ e } G\text{-AGD, şi: } d_n\mathcal{M}_n^+ \subset \mathcal{M}_n^+\cdot\mathcal{M}_n^+ ; \\ \exists\ \mathcal{M}_n \xrightarrow{\rho_n} \mathcal{Q} \text{ (în } G\text{-AGD), } (n+1)\text{-echivalenţă în } H^*. \end{cases}$$

In cazul n=1 luăm: $W^1 = V^1 = 0$, $d=0$, şi deci: $\mathcal{M}_1 = R$ şi: $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\rho_1} \mathcal{Q}$, dat de : $1 \to 1$.

Pentru cazul $(n) \Rightarrow (n+1)$, luăm: $V_0^{n+1} = \mathrm{coker}\{\rho_n^* : H^{n+1}\mathcal{M}_n \to H^{n+1}\mathcal{A}\}$

$V_1^{n+1} = \mathrm{Ker}\{\rho_n^* : H^{n+2}\mathcal{M}_n \to H^{n+2}\mathcal{A}\}$ şi: $V^{n+1} = V_0^{n+1} \oplus V_1^{n+1}$

şi: $W^{n+1} = W^n \oplus V^{n+1}$.

In continuare: $\mathcal{M}_{n+1} = \mathcal{M}_n \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}_{n+1}(V^{n+1})$, unde : $V^{n+1} \xrightarrow{\tau} Z^{n+2}\mathcal{M}_n$ e

dat de: $\begin{cases} \tau|V_0^{n+1} = 0 \\ \tau|V_1^{n+1} = s|V_1^{n+1} \end{cases}$ unde s e o secţiune (din 1.1)

pentru: $Z^{n+2}\mathcal{M}_n \twoheadrightarrow H^{n+2}\mathcal{M}_n$.

Considerăm şi: $H^{n+1}\mathcal{A} \xrightarrow{pr} V_0^{n+1}$, ech. Deoarece $H^*\mathcal{A}$

e s.1. (vezi 3), rezultă că există o secţiune t ech. a.î.: $pr \circ t = id$

şi definim:

$$\begin{cases} \rho_{n+1}|\mathcal{M}_n = \rho_n \\ \rho_{n+1}|V_0^{n+1} = \pi^{-1} \circ t \\ \rho_{n+1}|V_1^{n+1} = \sigma \circ \rho_n \circ s|V_1^{n+1} \end{cases} \quad \text{şi apoi :} \quad \begin{cases} \mathcal{M} = \varinjlim \mathcal{M}_n \\ \rho = \varinjlim \rho_n \end{cases}$$

minimalitatea rezultă din propoziţia 4.11 b).

17. Propoziţie

Dacă M este varietate C^∞, compactă, $\pi_1 M = 0$

şi : $G \times M \to M$ este o acţiune C^∞ (G ca mai sus), vom nota

momentan cu $\mathcal{A}$ algebra De Rham a lui M, care devine G-AGD

cu acţiunea: $g \to (g^{-1})^*$.

In aceste condiţii: $\mathcal{A}$ admite G-model minimal.

Dem: Se poate considera pe M o metrică faţă de care G acţionează prin izometrii şi vom nota, ca în [13] p.220-226, cu δ adjunctul formal al lui d, cu Gr funcţia Green a Laplacianului şi H formele armonice corespunzătoare.

Luăm apoi: $\sigma = \delta \circ Gr_{|B^*\alpha}$, şi sîntem ca în lema 16

18. <u>Corolar</u>

Dacă, în plus, G este conex şi α este formală, atunci α este G -formală.

<u>Dem:</u> G conex implică $H^*\alpha$ G -trivială şi deci, reluînd demonstraţia Lemei 16, cu această ipoteză suplimentară, observăm uşor că - mai mult de fapt decît ceea ce anunţă Cor.18 - G-modelul minimal al lui α e G-trivial.

Cap. III - TEOREME DE RHAM

Rolul capitolului de faţă este de a procura legătura între aspectul topologic şi cel algebric, care făceau obiectul precedentelor. Mai precis, aceasta ar reveni la: a găsi o construcţie, functorială pe categoria spaţiilor topologice cu valori în categoria AGD şi care să calculeze cohomologia spaţiilor - a da deci o soluţie aşa-zisei probleme clasice a "colanţurilor comutative". Odată cu ideea lui Sullivan şi cu trecerea timpului, soluţionarea problemei a devenit ea însăşi de domeniul clasicului, două (diferite) prezentări clare şi detaliate în acest sens putînd fi găsite - de exemplu - în [10] şi [21].

Pe de altă parte, capitolul prezent îşi justifică necesitatea prin aceea că, depăşind stadiul simplelor analogii între topologie şi algebră (prezente pe alocuri şi în prezentarea anterioarelor) face să demareze ideile teoriei raţionale a omotopiei: aici este într-adevăr locul cel mai nimerit de a indica legătura intimă între noţiunile de fibrare principală şi extensie elementară, prin aşa-zisa "lemă Hirsch".

Primei chestiuni îi consacrăm primul paragraf. Rezultatele au un aer încă odată clasic (sugerat şi în titlu), referinţele citate constituie lecturi complementare excelente, tehnicile de demonstrare însă sînt nu o dată laborioase şi ţin de un formalism nu neapărat indispensabil scopurilor acestor note, în care în ultimă instanţă, nu vom opera decît cu forma finală a rezultatelor acestui paragraf.

In mod firesc, cel de-al doilea paragraf e repartizat celeilalte chestiuni. O bună referinţă ar fi aici [2] - dar insuficient detaliată. In plus, construcţiile însăşi făcute în cursul demonstraţiilor de aici joacă un rol esenţial în capitolul următor.

Drept care am preferat următoarele puncte de vedere: a da definiţiile, construcţiile şi enunţurile de bază cît mai clar (în primul caz), trimiţînd în general, pentru demonstraţii, la [21] şi [10], detaliind în schimb la maximum, în cele de-al doilea caz.

§ 1. ALGEBRE SI IZOMORFISME DE RHAM

In cele ce urmează vom descrie rezolvarea problemei "colanţurilor comutative" în contextul semisimplicial, după cum se obişnuieşte. Sîntem deci obligaţi să introducem <u>categoria semisimplicială</u>, ca avînd drept obiecte <u>mulţimi simpliciale</u> :

$$S = \{S_q\}_{q\in\mathbb{N}}$$

structurate cu operatorii: $\varepsilon_i : S_q \longrightarrow S_{q-1}$, $0\le i\le q$, (<u>de faţă</u>) şi: $\eta_i : S_q \longrightarrow S_{q+1}$, $0\le i\le q$, (<u>de degenerare</u>), care verifică relaţiile de comutare uzuale [21] pg.21 .

Morfismele categoriei sînt aplicaţii de mulţimi care respectă gradul simplexelor ($\sigma\in S_q$ d.n.d $|\sigma| = q$ d.n.d σ e simplex de grad q) şi comută cu operatorii ε_i, η_i .

Avem exemplul standard: functorul S ,

$$S : \{\text{spaţii topologice}\} \longrightarrow \{\text{mulţimi simpliciale}\}$$

$$X \longrightarrow S(X) = \{S_q(X)\}, \text{ unde } S_q(X)$$

este: $\{\sigma : \Delta^q \to X \mid \sigma \text{ continuă}\}$, cu operatorii ε_i, η_i

daţi de: $\varepsilon_i(\sigma) = \sigma\circ\varepsilon^i$ şi $\eta_i(\sigma) = \sigma\circ\eta^i$, unde:

$\varepsilon^i : \Delta^{q-1} \longrightarrow \Delta^q$ și $\eta_i : \Delta^{q+1} \longrightarrow \Delta^q$ sînt uzuali [21] pg.21 .

Ca notație: definind A_n ca algebra formelor C^∞ definite într-o vecinătate a simplexului standard Δ^n , urmează a înțelege prin o <u>p-formă φ pe mulțimea simplicială S</u>, o colecție $\{\varphi_\sigma\}_{\sigma\in S}$ unde $\varphi_\sigma \in A^p_{|\sigma|}$ sînt supuse condițiilor de compatibilitate: $\varphi_{\varepsilon_i\sigma} = \varepsilon^{i*}\varphi_\sigma$. Organizarea acestor p-forme ca AGD se face profitînd de structura de AGD a algebrelor standard A_n și de [21] pg.22 , și vom nota această AGD cu $\widetilde{\mathcal{A}}_\infty(S)$ (prevenire: simplificarea notațiilor va apare invers proporțional cu complicarea definițiilor!)

Avem deci functorul $\widetilde{\mathcal{A}}_\infty$, din mulțimi simpliciale în AGD, pe de o parte; pe de altă parte avem functorul clasic al <u>colanțurilor singulare</u>: $\left\{\begin{array}{c}\text{mulțimi}\\ \text{simpliciale}\end{array}\right\} \xrightarrow{C^*(\cdot;\mathbb{R})} \left\{\begin{array}{c}\text{aproape}\\ \text{AGD}\end{array}\right\}$ (lipsește comutativitatea în sens graduat!) - [21] pg.23 - și transformarea naturală I: $\widetilde{\mathcal{A}}_\infty \longrightarrow C^*(\cdot;\mathbb{R})$, dată prin: $(I\varphi)_\sigma = \int_{\Delta^{|\sigma|}} \varphi_\sigma$ (în categoria complexelor de colanțuri!).

1. <u>Teoremă</u>

(De Rham simplicială) I^* e izo; mai precis: th. 2.16 [21] afirmă că:

I comută cu diferențialele; există transformări naturale $E : C^*(\cdot;\mathbb{R}) \to \widetilde{\mathcal{A}}_\infty$ comutînd cu diferențialele și cu proprietatea: $I \circ E = id$, și operatorii naturali de omotopie: $s_k : \widetilde{\mathcal{A}}^k_\infty \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}^{k+1}_\infty$ (i.e.: $E \circ I - id = s_{k+1}\circ d + d \circ s_k$) și, în plus, în coomologie, izomorfismul indus I^* este multiplicativ (th.2.33 din [21]).

Aceasta este o soluţie a problemei noastre, însă pentru coeficienţi reali, şi de aceea vom fi obligaţi să deducem de aici una pentru coeficienţi raţionali (cu preţul definiţiilor următoare).

Definind $\mathcal{a}_n$ ca fiind subalgebra GD (peste Q) a algebrei GD, A_n, a formelor exterioare cu coeficienţi polinoame cu coeficienţi raţionali, putem defini $\tilde{\mathcal{a}}(S)$ ca fiind sub-AGD în $\tilde{\mathcal{a}}_\infty(S)$ formată din p-formele $\{\varphi_\sigma\}$ cu $\varphi_\sigma \in \mathcal{a}^p_{|\sigma|}$.

Observăm că: $C^*(\cdot\,;Q) \subset C^*(\cdot\,;R)$ şi că toţi operatorii definiţi anterior invariază aceste sub-AGD peste Q, de curînd definite, de unde avem:

2. Teoremă. I: $\tilde{\mathcal{a}}(S) \longrightarrow C^*(S;Q)$ comută cu diferenţialele, şi I^* e izo (multiplicativ).

O teorie rezonabilă, care-şi propune să calculeze coomologia spaţiilor cu ajutorul formelor diferenţiabile, e de aşteptat să aibe proprietatea că: algebra de forme a unui complex de dimensiune n să nu conţină forme de grad mai mare ca n. Pentru a satisface această dorinţă reluăm definiţiile.

Prin $\mathcal{a}(S)$ vom înţelege sub-AGD în $\tilde{\mathcal{a}}(S)$ a formelor $\{\varphi_\sigma\}$ supuse următoarei condiţii suplimentare de compatibilitate:

$$\varphi_{\eta;\sigma} = \eta^{i*}\varphi_\sigma .$$

Analog, introducem $C^*_N(S;Q)$ ca fiind sub-complexul lui $C^*(S;Q)$ format din acele colanţuri $\{c_\sigma\}$ pentru care $c_{\eta;\sigma} = 0$.

In continuare, observăm că toţi operatorii din Th.1 invariază construcţiile recente, şi deci : $I : \mathcal{a}(S) \to C^*_N(S;Q)$ este izo în coomologie.

Pe de altă parte, topologia algebrică clasică ne arată că incluziunea $C^*_N(S;Q) \hookrightarrow C^*(S,Q)$ induce de asemeni izo în

coomologie. (Un îndemn încurajator în ceea ce priveşte veridicitatea acestor afirmaţii este conţinut în ex. 3, 4 pg.36-37 [21])
Deci putem afirma că!

3. Teoremă. $I: \mathfrak{a}(S) \longrightarrow C^*(S;\mathbb{Q})$ induce izo în H^*, multiplicativ şi natural în S (mulţime simplicială).

4. Obs. Să mai observăm că în construcţiile şi demonstraţia Th.2 nu intervin operatorii de degenerare, deci putem afirma că ea are loc pentru mulţimi semisimplicale (i.e. în absenţa degenerărilor).

Pentru a trece însfîrşit la spaţii topologice, considerăm functorul contravariant, notat de asemeni, cu : $\left\{\begin{array}{l}\text{spaţii}\\ \text{topologice}\end{array}\right\} \xrightarrow{\mathfrak{a}} \text{AGD}$

Pe obiecte, vom nota: $\mathfrak{a}(X) = \mathfrak{a}(S(X))$, iar pe morfisme, dacă: $X \xrightarrow{f} X'$ vom nota : $f^*: \mathfrak{a}(X') \to \mathfrak{a}(X)$, cu menţiunea că, acolo unde va apare pericolul confuziei în notaţie cu aplicaţia indusă în H^*, o vom nota pe aceasta din urmă cu: $H^*X' \xrightarrow{f^{**}} H^*X$, $f^{**} = (f^*)^*$. Th.3 se pune acum sub forma:

5. Teoremă: I: $\mathfrak{a}(X) \longrightarrow C^*(X;\mathbb{Q})$, induce izo în H^*, multiplicativ şi natural în X.

6. Observaţie: Dacă X este G-spaţiu (i.e. grupul discret G acţionează pe X), atunci $\mathfrak{a}(X)$ devine G-AGD în mod natural, cu acţiunea: $g \to (g^{-1})^*$, ptr. $g \in G$.

7. Observaţie: Dacă X=pt, atunci $\mathfrak{a}(X) = \mathbb{Q}$, şi, în general: dacă S e mulţime simplicială de dimensiune $\leq n$ (i.e. simple-

xele de grad $>$ n sînt degenrate), atunci are loc axioma de degenerare: $\alpha^p(S) = 0$, pentru $p > n$.

Ca un corolar la Th. 5 avem:

8. Corolar. Fie X, X' spaţii topologice (punctate); atunci avem izomorfismele în coomologie (naturale în X şi X'):

a) $\alpha(X) \otimes \alpha(X') \xrightarrow{p_X^* \cdot p_{X'}^*} \alpha(X \times X')$; $(X \times X' \xrightarrow{p_X(p_{X'})} X(X'))$

b) $\alpha(X) \vee \alpha(X') \xleftrightarrow{j_X^* \vee j_{X'}^*} \alpha(X \vee X')$; $(X(X') \xleftrightarrow{j_X(j_{X'})} X \vee X')$

In continuare vom trece la a face nişte consideraţii suplimentare, în cazul cînd în loc de spaţii topologice vom considera varietăţi diferenţiabile.

Dacă M este o varietate diferenţiabilă introducem $A(M)$ ca fiind algebra de Rham a varietăţii (a formelor C^∞ pe varietate).

Analog cu cele introduse anterior, introducem $S_\infty(M)$, unde de data aceasta vom considera doar simplexele $C^\infty : \Delta^q \xrightarrow{\sigma} M$, organizarea simplicială făcîndu-se analog. Avem deci functorul:

$$S_\infty : \{\text{varietăţi } C^\infty\} \longrightarrow \{\text{mulţimi simpliciale}\}$$

In spiritul celor demonstrate (amintite) anterior, vom avea următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd} \omega \in A(M) \arrow[rr, "I"] \arrow[dr, "i"'] & & C^*(S_\infty(M), R) \\ & \tilde{\alpha}_\infty(S_\infty(M)) \arrow[ur, "I"'] & \end{tikzcd}$$

$(i\omega)_\sigma = \sigma^* \omega$

([21], p.22, p.30)

$(I\omega)_\sigma = \int_{\Delta^{|\sigma|}} \sigma^* \omega$

([21], p.10)

Th.1.15 [21] (de Rham) arată că: $I : A(M) \to C^*(S_\infty(M), R$

induce izomorfism în coomologie (multiplicativ).

In continuare, vom considera cîteva diagrame comutative extrem de folositoare în demonstrarea echivalenţei coomologice a algebrelor A(M) şi $\mathcal{A}(M)\otimes_Q R$:

$$\begin{tikzcd}
A(M) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "I"'] & \tilde{\mathcal{A}}_\infty(S_\infty(M)) \arrow[d, "I"] & \tilde{\mathcal{A}}_\infty(S(M)) \arrow[l] \arrow[d, "I"] \\
& C^*(S_\infty(M),R) & C^*(S(M),R) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Săgeţile verticale sînt izo în coomologie conform cu Th.1, iar săgeata orizontală inferioară este izo în coomologie conform cu [21] pg.19.

Din comutativitatea pătratului rezultă că săgeata orizontală superioară induce izo în coomologie.

Avem şi un izo în coomologie definit de: $\mathcal{A}_\infty(S(M)) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{A}}_\infty(S(M))$ unde $\mathcal{A}_\infty(S(M))$ reprezintă sub-AGD a lui $\tilde{\mathcal{A}}_\infty(S(M))$, a formelor supuse la condiţiile de compatibilitate suplimentară cu degenerările (analogul perfect al incluziunii $\mathcal{A}(S) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{A}}(S)$).

Demonstraţia acestui fapt se face considerînd diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_\infty(S(M)) \arrow[r] \arrow[d, "I"'] & \tilde{\mathcal{A}}_\infty(S(M)) \arrow[d, "I"'] \\
C^*_N(S(M),R) \arrow[r] & C^*(S(M),R)
\end{tikzcd}$$

Verticala din dreapta induce izo în H^* (Th.1). Verticala din stînga idem (analog cu consideraţiile folosite în demonstrarea Th.3), iar orizontala inferioară se identifică cu $C^*_N(M,R) \hookrightarrow C^*(M,R)$ care induce (clasic) izo în H^*.

Rezultă deci cele dorite momentan.

Considerăm în continuare următoarea diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_\infty(S(M)) \arrow[d, "I"'] & \mathcal{A}(S(M))\otimes_Q R = \mathcal{A}(M)\otimes_Q R \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "I"] \\ C^*(M,R) = C^*(M,Q)\otimes_Q R & \end{tikzcd}$$

Integrarea stîngă rezultă izo în H^* din cele amintite mai sus, iar integrarea din dreapta rezultă izo din Th.3.

In cele din urmă rezultă deci:

9. Teoremă: $A(M) \overset{c}{\simeq} \mathcal{A}(M)\otimes_Q R$ (natural în M).

O altă serie de extra-consideraţiuni necesită cazul complexelor simpliciale K (în sensul din [1], p. 108-109). Să ne reamintim întîi faptul că am constituit functorul $\mathcal{A}$ pentru spaţii, avîndu-l definit pentru mulţimi simpliciale, şi apoi via functorul S; să reamintim acum şi existenţa functorului în sens invers de "realizare geometrică", notat:

$$|\cdot| : \{\text{mulţimi simpliciale}\} \longrightarrow \{\text{spaţii topologice}\}$$

construcţie analoagă realizări geometrice a complexelor simpliciale $|K|$ ([1], p.110-111):

10. Teoremă: Pentru orice mulţime simplicială S, $|S|$ e un CW-complex, avînd celulele în corespondenţă bijectivă cu simplexele nedegenerate ale lui S ([5] p.55-56). Mai mult:

11. Teoremă: Există o transformare naturală: $\psi : id \to S(|\cdot|)$ care are proprietatea că, pentru orice mulţime simplicială, S,

$$\psi(S)^* : C^*(S,Q) \longrightarrow C^*(S(|S|),Q)$$

induce izo în H^*. ([5] p.62-63).

Cu Th.3, e imediat următorul:

12. <u>Corolar</u>: Există o c-echivalenţă (simplă):

$\mathcal{A}(S) \longleftarrow \mathcal{A}(S(|S|))$ (naturală în S, şi dată de fapt de $\psi(S)^*$ - la nivel de forme).

Fie acum K un complex simplicial (vom presupune că vîrfurile lui K sînt ordonate - parţial - de aşa manieră încît simplexele lui K reprezintă părţi total ordonate). Ii asociem acestuia o mulţime simplicială, notată ΔK, luînd drept n-simplexe (n+1)-plurile de vîrfuri ale lui K, $(v_0,\dots,v_n)$, cu proprietăţile că: $v_0 \leq \dots \leq v_n$ şi că $\{v_0,\dots,v_n\}$ reprezintă un simplex în K, feţele şi degenerările definindu-se în modul obişnuit (vezi şi [22], p.80-81).

Se observă fără dificultate că simplexele nedegenerate ale lui ΔK sînt în corespondenţă bijectivă cu simplexele lui K, de unde, ţinînd cont de Th.10, se poate lesne deduce existenţa unui homeomorfism natural: $|\Delta K| \sim |K|$. Combinînd cu Cor.12, obţinem:

13. <u>Corolar</u>: $\mathcal{A}(|K|) \overset{c}{\sim} \mathcal{A}(\Delta K)$

Pe de altă parte, urmînd ideile iniţiale ale lui Sullivan, pentru complexul simplicial K se poate defini o altă AGD (esenţialmente mai simplă, mai bine legată de structura simplicială şi mai cu folos manevrabilă - după cum se va observa de altfel la timpul cuvenit - decît $\mathcal{A}(|K|)$), după cum urmează: observînd că ordonarea vîrfurilor lui K face posibilă stabilirea unei bijecţii canonice: $\{0,\dots,|\sigma|\} \sim \sigma$, pentru orice simplex σ, astfel încît incluziunea oricărei feţe: $\tau \subset \sigma$, dă naştere unei aplicaţii: $\{0,\dots,|\tau|\} \xrightarrow{r_{\sigma,\tau}} \{0,\dots,|\sigma|\}$, şi prin urmare unui AGD-morfism canonic: $\mathcal{A}_{|\tau|} \xleftarrow{r^*_{\sigma,\tau}} \mathcal{A}_{|\sigma|}$, definim o p-formă φ pe K drept o colecţie: $\{\varphi_\sigma\}_\sigma$, cu $\varphi_\sigma \in \mathcal{O}\!\mathcal{C}^p_{|\sigma|}$ şi cu condiţiile de compatibilitate: $\varphi_\tau = r^*_{\sigma,\tau}\varphi_\sigma$, iar apoi organizăm aceste forme ca AGD (notată $\mathcal{O}\!\mathcal{C}(K)$) prin procedeul uzual. Dacă: $f : K \to K'$ e simplicială, ea induce: $\mathcal{O}\!\mathcal{C}(K) \xleftarrow{f^*} \mathcal{O}\!\mathcal{C}(K')$ dat de: $(f^*\varphi')_\sigma = f^*(\varphi'_{f\sigma})$ unde: $f^* : \mathcal{O}\!\mathcal{C}_{|\sigma|} \leftarrow \mathcal{O}\!\mathcal{C}_{|f\sigma|}$ e indus de $\sigma \xrightarrow{f} f\sigma$, via identificările produse de bijecţiile introduse mai sus. Apare deci functorul: $\mathcal{O}\!\mathcal{C} : \{\text{complexe simpliciale}\} \longrightarrow \{\text{AGD}\}$. Existenţa unui izomorfism natural: $\mathcal{O}\!\mathcal{C}(K) \sim \mathcal{O}\!\mathcal{C}(\Delta K)$ ([22], Prop.13.3) şi Cor.13 implică:

14. Teoremă: $\mathcal{O}\!\mathcal{C}(K) \overset{c}{\simeq} \mathcal{O}\!\mathcal{C}(|K|)$ (natural în K).

In continuare, considerăm mulţimi simpliciale ataşate simplexelor standard, după cum urmează:

Notăm cu Δ^n, şi numim n-simplexul standard, complexul simplicial avînd drept vîrfuri $\{v_0, \dots, v_n\}$, în ordinea naturală: $v_0 < \dots < v_n$, şi drept feţe toate sub-mulţimile mulţimii considerate, şi apoi notăm cu $\underline{\Delta}^n$ mulţimea care definea pe ΔK, în consideraţiile ce preced Cor.13 (vezi şi [10], p.XII 4-5). In tradiţia acestei notaţii, să numim $\partial\underline{\Delta}^n$, (n-1)-scheletul complexului simplicial Δ^n, şi să mai observăm în treacăt egalitatea ([10] p.XII 5.6): $\partial\underline{\Delta}^n = (\underline{\Delta}^n)^{(n-1)} \subset \underline{\Delta}^n$, în care notaţia $S^{(m)}$ desemnează, pentru S mulţime simplicială dată, m-scheletul ei, definit prin analogie cu cazul complexelor (detalii în [10] p.XII 2-3).

15. Lema. (de extensie). Incluziunea : $\partial\underline{\Delta}^n \subset \underline{\Delta}^n$ induce o surjecţie: $\mathcal{O}\!\mathcal{C}(\underline{\Delta}^n) \longrightarrow\!\!\!\!\!\to \mathcal{O}\!\mathcal{C}(\partial\underline{\Delta}^n)$.

Dem: Am preferat să dăm demonstraţia acestei leme, în loc de a cita pur şi simplu comod rezultatul-extrem de plauzibil - pe care aceasta îl implică pentru spaţii în general, pentru motivul că ea pune foarte bine în evidenţă savoarea aspectului geometric şi pentru eleganţa argumentului, preluat de noi din [10] p.XIII 4.5, care la rîndul ei preia pe Sullivan.

Să ntăm cu $[\Delta^n]$ simplexul n-dimensional prezent în mod natural în $\underline{\Delta}^n$ şi să observăm că p-formă $\varphi \in \mathcal{Q}^p(\partial\underline{\Delta}^n)$ e determinată de valorile ei pe cele (n+1) feţe (n-1)-dimensionale, notate $\varphi_i = \varphi_{\varepsilon_i[\Delta^n]} \in \mathcal{Q}^p_{n-1}$. Presupunînd, inductiv, că primele aceste valori sînt nule, i.e. $\varphi_i = 0$ pentru $i<r$ (unde $r<n$), avem atunci, pentru $i<r$ (din condiţiile de compatibilitate şi din ipoteze): $\varepsilon^{i*}\varphi_r = 0$ şi putem defini, prin aceleaşi formule polinomiale ce dădeau pe φ_r, o p-formă $\psi_r \in \mathcal{Q}^p_n$, care la rîndul ei va satisface, formal, condiţiilor: $\varepsilon^{i*}\psi_r = 0$, pentru $i<r$, şi: $\varepsilon^*\psi_r = \varphi_r$; observînd că aceasta se poate completa, în mod unic, pînă la o p-formă în $\mathcal{Q}^p(\Delta^n)$, putem considera că ne-am redus în cazul în care forma φ e nulă pe toate feţele (n-1)-dimensionale, cu excepţia celei date de ecuaţia $t_n = 0$. Simplexul (geometric) mai puţin vîrful opus acestei feţe, se poate proiecta pe aceasta:

$$|\Delta^n| \setminus \{v_n\} \xrightarrow{\pi} |\Delta^{n-1}| \ ; \ \pi\Big(\sum_{i=0}^{n} t_i v_i\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t_i}{1-t_n} v_i$$

La nivel de forme diferenţiabile, aplicaţia indusă, π^*, e dată de: $\pi^*(t_i) = \dfrac{t_i}{1-t_n}$ şi : $\pi^*(dt_i) = \dfrac{dt_i}{1-t_n} + \dfrac{t_i dt_n}{(1-t_n)^2}$.

φ_n fiind polinomială, se observă de aici că, dacă H e luat suficient de mare, $(1-t_n)^H \pi^*(\varphi_n)$ va reprezenta o formă în

α_n^p , care determină extensia căutată a lui φ pe Δ^n .

16. <u>Corolar</u>: $S \subset T$ (mulţimi simpliciale) induce o surjecţie : $\alpha(S) \twoheadleftarrow \alpha(T)$.

Cu lema precedentă, o p-formă dată, definită pe S, se poate extinde succesiv, pe scheletele lui T. Pentru o demonstraţie formală completă trimitem la [10] Prop.21 din Cap. XII, unde în locul noţiunii de "F extendable local system" trebuie gîndit sistemul local de AGD $\{\alpha_n\}_n$.

Corolarul precedent ne permite ca să asociem fiecărei incluziuni de spaţii: $A \hookrightarrow X$, şirul exact scurt de complexe de colanţuri, notat: $0 \to \alpha(X,A) \to \alpha(X) \to \alpha(A) \to 0$, şi apare posibilitatea de a defini şirul exact lung de coomologie "de Rham" al perechii, iar Teorema 5 citită în acest context afirmă că:

17. <u>Teoremă</u>: I^* induce un izo între şirurile exacte lungi ale coomologiei de Rham şi singulară, natural în perechi de spaţii.

In sfîrşit, putem face legătura cu teoria modelului minimal, dezvoltată în capitolul precedent, observînd că, dacă X e spaţiu c.p.a, atunci $\alpha(X)$ e AGD c-conexă, deci admite un model minimal (unic pînă la izo de AGD), <u>pe care îl vom nota</u> $\mathcal{M}_X$. In ceea ce priveşte situaţia pe morfisme, putem afirma că:

18. <u>Propoziţie</u>: Dacă X şi Y sînt c.p.a (pe scurt, de acum: spaţii), şi dacă aplicaţiile : $X \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightrightarrows}} Y$ sînt omotope, atunci aplicaţiile induse între AGD, f_0^* şi f_1^* , au acelaşi model minimal (în categoria algebrică omotopică).

Dem: Fie : $X\times I \xrightarrow{H} Y$, $H: f_0 \simeq f_1$.

Va fi util să facem notaţiile:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_X \arrow[d, "\rho_X"'] & \mathcal{M}_Y \arrow[l, "\tilde{f}_\lambda"'] \arrow[d, "\rho_Y"] \\ \mathcal{A}(X) & \mathcal{A}(Y) \arrow[l, "f_\lambda^*"] \end{tikzcd}$$

(diagrame omotopic comutative pentru $\lambda=0,1$, aşa cum rezultă din Lema II.4.9).

şi: $X \xrightarrow{j_\lambda} X\times I$ $(\lambda=0,1)$, date de: $x \to (x,\lambda)$;

$pt \xrightarrow{i_\lambda} I$ $(\lambda=0,1)$, date de: $pt \to \lambda$;

$\Delta^0 \xrightarrow{i_\lambda} \Delta^1$ $(\lambda=0,1)$, date de: $v_0 \to v_\lambda$.

Avem următoarea diagramă în general omotopic comutativă:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}(X\times I) \arrow[ddl, "j_\lambda^*"'] & \mathcal{A}(Y) \arrow[l, "H^*"'] \\
 & \mathcal{A}(X)\otimes\mathcal{A}(I) \arrow[u, "p_X^*\cdot p_I^*"] \arrow[dl, "id\cdot i_\lambda^*"'] \arrow[dd, leftrightarrow, "id\otimes(c\text{-}ech.)"] & \\
\mathcal{A}(X) & & \mathcal{M}_Y \arrow[uu, "\rho_Y"'] \arrow[ul, dashed] \arrow[dl, dashed] \arrow[ddl, dashed, "\tilde{H}"] \\
 & \mathcal{A}(X)\otimes\mathcal{A}(\Delta^1) \arrow[ul, "id\cdot i_\lambda^*"] \arrow[d, equal] & \\
 & \mathcal{A}(X)\otimes(t,dt) \arrow[uul, "{(t=\lambda)\ (\lambda=0,1)}"] &
\end{tikzcd}$$

în care putem preciza: triunghiurile stîngi se verifică imediat a comuta efectiv (în cazul c-echivalenţei centrale, notată $\updownarrow$ şi provenită din Th.14), trebuie subînţeles că un anumit număr de sub-triunghiuri comută); c-ech. verticală superioară provine din Cor.8, iar identificarea inferioară se face punînd: $(\varphi\in\mathcal{A}^p(\Delta^1)) \longrightarrow (\varphi_{[\Delta^1]}\in\mathcal{A}^p_1=(t,dt)^p)$; în ceea ce priveşte existenţa morfismelor de AGD punctate şi comutativităţile omotopice din dreapta, ele sînt sigurate de Th. II.3.1. Rezultă, ţinînd cont de minimalitatea lui $\mathcal{M}_Y$:

$f_0^* \circ \rho_Y \simeq f_1^* \circ \rho_Y$, deci: $\rho_X \circ \tilde{f}_0 \simeq \rho_X \circ \tilde{f}_1$. Cor. II 3.11 arată că $\tilde{f}_0 \simeq \tilde{f}_1$, şi deci, în categoria omotopică, modelele coincid.

19. Corolar: Notînd cu $[Top]$ categoria omotopică a spaţiilor, şi cu $[Min]$ categoria omotopică a algebrelor minimale, avem corect definit un functor contravariant: $\mathcal{M} : [Top] \to [Min]$ dar prin: $X \to \mathcal{M}_X$, $f \to \tilde{f}$.

§ 2. FIBRARI SI EXTENSII PRINCIPALE

Pentru a fixa terminologia, o (G)-AGD $\mathcal{M}$ se va zice geometrică pentru (G)-spaţiul X, dacă s-a dat (G)-AGD morfismul : $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{O}(X)$, a.î. φ^* să fie izo.

In cuprinsul acestei secţiuni, vom avea în vedere următoarea situaţie: fie : $F \overset{j}{\hookrightarrow} E \overset{p}{\to} B$ o fibrare total transgresivă şi orientabilă (cerinţă ce permite considerarea cu succes a şirului spectral). Suficiente exemple de acest tip constituie: fibrările principale (I.1) şi fibrările principale cu grup structural compact (exemplul I.4.8).

Incepem prin a explicita modul în care, în această situaţie, transgresia poate fi exprimată cu ajutorul algebrelor de Rham: fie deci : $y \in Z^n \mathcal{O}(F)$ a.î. : $[y] \in H^n \mathcal{O}(F) \sim H^n(F)$ să fie transgresiv, i.e.: $[y] \in \delta^{-1}(\operatorname{Im} p^*)$. Urmărind firul definiţiei date în I.1 şi ţinînd cont de Th.1.17, luăm: $u_1 \in \mathcal{O}^n(E)$ a.î.: $j^*(u_1) = y$ şi $x \in Z^{n+1} \mathcal{O}(B, t)$ a.î.: $\tau[y] \in H^{n+1}(B)$ să se corespundă cu: $[x] \in H^{n+1} \mathcal{O}(B) \sim H^{n+1}(B)$.

Deoarece trebuie să avem: $\delta[y] = p^*[x]$ in $H^{n+1}(E,F)$, există:

$v \in \mathcal{A}^n(E,F)$ a.î.: $p^* x = d(u_1+v)$. Punînd: $u = u_1 + v$

am obţinut deci: i) $u \in \mathcal{A}^n(E)$ a.î.: $j^* u = y$;

ii) $p^* x = du$;

iii) $[x] = \tau[y]$.

Scriind acum: $H^*(F) = \mathcal{L}(V)$ $(V = \bigoplus_{n>0} V^n)$ şi liniarizînd construcţia executată mai sus, vom obţine aplicaţiile liniare:

$V \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}(E)$ (de grad 0), şi: $V \xrightarrow{\tau} Z^*\mathcal{A}(B,pt)$.

(de grad +1) a.î.:

i) $j^*\mu(y) \in Z^*\mathcal{A}(F)$ şi : $[j^*\mu(y)] = y$;

ii) $p^*\tau(y) = d\mu(y)$, $\forall y \in V \subset H^*F$.

Considerăm extensia principală: $\mathcal{A}(B) \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}(V)$

şi AGD-morfismul : $\varphi : \mathcal{A}(B) \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}(V) \to \mathcal{A}(E)$, dat prin:

$$\begin{cases} \varphi|\mathcal{A}(B) = p^* \\ \varphi_{|V} = \mu \end{cases}$$

1. Lemă (Hirsch): $\mathcal{A}(B) \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}(V)$ e geometrică pentru E (i.e.: φ^* este izo).

Dem: Procedînd ca în [1] , p.494-495, vom nota cu:

$B_s \subset B$, scheletele CW -complexului B , pentru $s \geq 0$,

şi apoi: $E_s = p^{-1}(B_s)$, presupunînd în linişte:

$B_0 = pt$. Avem diagrame comutative de tipul (morfisme de şiruri exacte de complexe de colanţuri):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{A}(B_s,B_{s-1}) \otimes \mathcal{L}(V) & \to & \mathcal{A}(B_s) \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}(V) & \to & \mathcal{A}(B_{s-1}) \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}(V) & \to & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_s & & \downarrow \varphi_{s-1} & & \\ 0 & \to & \mathcal{A}(E_s,E_{s-1}) & \longrightarrow & \mathcal{A}(E_s) & \longrightarrow & \mathcal{A}(E_{s-1}) & \to & 0 \end{array}$$

în care: AGD-morfismele φ_s şi φ_{s-1} se obţin considerînd restricţiile fibrării iniţiale la B_s şi B_{s-1}, ocazie în care nu se pierde nimic din proprietăţile cerute (compunînd încă μ şi τ cu restricţiile fireşti), iar AGD-morfismul:

$\mathcal{A}(B_s)\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}(V) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(B_{s-1})\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}(V)$ e indus de restricţia:

$$\mathcal{A}(B_s) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(B_{s-1}).$$

Deoarece, pentru $s=0$: $\mathcal{A}(B_0)\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}(V) = (\mathcal{L}(V), d=0)$, $\mathcal{A}(E_0)=\mathcal{A}(F)$ şi φ_0 e dat de: $\mathcal{L}(V) \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{A}(F)$: $\varphi_0(y) = j^*\mu(y)$, pentru $y \in V$ şi deci, după i), din construcţie, $\varphi_0^* = id$, putem presupune φ_{s-1}^* izo şi căuta să arătăm $\overline{\varphi}^*$ izo, pentru a satisface inducţia.

Pentru a evalua $H^*(\mathcal{A}(B_s,B_{s-1})\otimes\mathcal{L}(V))$ (evident, cu diferenţiala indusă de cea din $\mathcal{A}(B_s)\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}(V)$), vom nota întîi cu: $[\mathcal{L}(V)]_n$, pentru $n \geq 0$, subspaţiul generat de produsele de forma: $y_1 \dots y_n$, cu $y_i \in V$, $1 \leq i \leq n$, vom observa că: $\mathcal{L}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} [\mathcal{L}(V)]_n$ şi deci, notînd: $M^n = \mathcal{A}(B_s,B_{s-1}) \otimes [\mathcal{L}(V)]_n$ şi apoi: $F^n = \bigoplus_{n \leq m \leq 0} M^{-m}$, pentru $n \leq 0$, a apărut o filtrare descrescătoare pentru $\mathcal{A}(B_s,B_{s-1})\otimes\mathcal{L}(V)$.

Notînd cu d diferenţiala în chestiune, să observăm că: $d(M^n) \subset M^n \oplus M^{n-1}$ şi deci că vom obţine un şir spectral care converge la $H^*(\mathcal{A}(B_s,B_{s-1})\otimes\mathcal{L}(V))$, situat în cadranul II, şi ai cărui primi termeni se evaluează - standard-a fi:

$(E_0,d_0) = (\mathcal{A}(B_s,B_{s-1})\otimes\mathcal{L}(V), d\otimes id)$ (unde d desemnează acum diferenţiala din $\mathcal{A}(B_s,B_{s-1})$), şi deci:

$$E_1^{p,q} = [H^*(B_s,B_{s-1})\otimes[\mathcal{L}(V)]_{-p}]^{p+q}$$

(unde indicele p+q se referă la graduarea totală uzuală din

$$H^*(B_s,B_{s-1})\otimes\mathcal{L}(V)).$$

Deoarece $H^i(B_s,B_{s-1}) = 0$ pentru $i \neq s$, avem:

$$E_1^{p,q} = H^s(B_s,B_{s-1})\otimes[\mathcal{L}(V)]_{-p}^{p+q-s}$$ şi considerînd:

$$H^s(B_s,B_{s-1})\otimes[\mathcal{L}(V)]_{-p}^{p+q-s} \xrightarrow{d_1} H^s(B_s,B_{s-1})\otimes[\mathcal{L}(V)]_{-p-1}^{p+q-s+1}$$

avînd în vedere faptul că d_1 e indusă de diferenţiala iniţială a extensiei principale, şi deci nu are cum creşte gradul elementelor din $\mathcal{L}(V)$, putem conchide că: $d_1 = 0$. Presupunînd inductiv că: $d_i = 0$, $1 \le i < n$, şi privind situaţia:

$$H^s(B_s,B_{s-1})\otimes[\mathcal{L}(V)]_{-p}^{p+q-s} \xrightarrow{d_n} H^s(B_s,B_{s-1})\otimes[\mathcal{L}(V)]_{-p-n}^{p+q-s+1}$$

acelaşi argument indică: $d_n = 0$, deci: $E_1 = E_\infty$.

Considerînd acum complexul de colanţuri $H^s(B_s,B_{s-1})\otimes\mathcal{L}(V)$ considerat cu graduarea: $[H^s(B_s,B_{s-1})\otimes\mathcal{L}(V)]^i = H^s(B_s,B_{s-1})\otimes[\mathcal{L}(V)]^{i-s}$ şi cu diferenţiala nulă, filtrarea precedentă produce un alt şir spectral, $\{\tilde{E}_n\}$, pentru care, evident: $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_\infty$.

Luînd: $\alpha : H^s(B_s,B_{s-1}) \to Z^s\mathfrak{A}(B_s,B_{s-1})$ o secţiune a surjecţiei canonice, $\alpha\otimes id : H^s(B_s,B_{s-1})\otimes\mathcal{L}(V) \to \mathfrak{A}(B_s,B_{s-1})\otimes\mathcal{L}(V)$ devine morfism de complexe de colanţuri, după cum se constată uşor calculînd $d(\alpha\otimes id) = 0$, bineînţeles ţinînd cont de axioma de degenerescenţă (Obs. 1.7).

Deoarece vizibil: $(\alpha\otimes id)_1 = id$, rezultă izomorfismele:

$$H^s(B_s,B_{s-1})\otimes[\mathcal{L}(V)]^{n-s} \underset{\sim}{\xrightarrow{(\alpha\otimes id)^*}} H^n(\mathfrak{A}(B_s,B_{s-1})\otimes\mathcal{L}(V))$$

(şi, accidental, egalitatea $E_1 = E_\infty$, dovedită anterior cu singurul scop de a contura cine este $H^*(\mathfrak{A}(B_s,B_{s-1})\otimes\mathcal{L}(V))$ înainte de a preciza riguros natura izomorfismului care dă respectiva evaluare).

Pe de altă parte, în [1] la p.494-495 se construieşte un izomorfism: $\psi^*: H^n(E_s, E_{s-1}) \longrightarrow H^s(B_s, B_{s-1}) \otimes H^{n-s}(F)$ în modul următor: fie $u \in H^n(E_s, E_{s-1})$ şi: $\{\sigma: (\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \to (B_s, B_{s-1})\}$ colecţia s-celulelor bazei; $\psi^*(u) = \prod_\sigma [\sigma] \otimes \psi_\sigma(u)$ unde, pentru σ fixată, $\psi_\sigma(u)$ se defineşte considerînd întîi, ca în [1], o ridicare admisibilă: $\bar{\sigma}: (\Delta^s, \dot{\Delta}^s) \times F \to (E_s, E_{s-1})$ i.e.; $p\bar{\sigma} = \sigma \circ pr_{\Delta^s}$, şi: notînd cu i incluziunea:

$$F = pt \times F \hookrightarrow \Delta^s \times F$$

clasa de omotopie a aplicaţiei: $\bar{\sigma} i: F = F_{pt} \to F_{\sigma(pt)}$ este egală cu $h_{[\omega]}$, unde : $\omega: I \to B_s$ e un drum ce leagă pt cu $\sigma(pt)$ (în speranţa de a nu fi creat confuzii în ceea ce priveşte punctele - bază), şi în sfîrşit, punînd condiţia ca: $\bar{\sigma}^*(u) = \varepsilon_s \otimes \psi_\sigma(u)$, unde $\varepsilon_s \in H^s(\Delta^s, \dot{\Delta}^s)$ e generatorul canonic.

Scopul nostru următor este de a încheia inducţia dovedind comutativitatea:

$$id = \psi^* \circ \bar{\varphi}^* \circ (\alpha \otimes id)^* : H^s(B_s, B_{s-1}) \otimes H^{n-s}(F) \to H^s(B_s, B_{s-1}) \otimes H^{n-s}(F)$$

Fie: $x \in Z^s\mathcal{A}(B_s, B_{s-1})$ şi : $y_\ell \in V^{n_\ell}$, $1 \le \ell \le m$, a.î.: $\sum n_\ell = n-s$.

Vom nota: $\bar{v}_\ell = \mu(y_\ell) \in \mathcal{A}^{n_\ell}(E_s)$, $v_\ell = j^* \bar{v}_\ell \in Z^{n_\ell}\mathcal{A}(F)$, şi deci, după condiţia i) din enunţ: $[v_\ell] = y_\ell$, $\forall \ell$; notăm şi: $\tau_\ell = \tau(y_\ell)$, deci, după condiţia ii): $p^*(\tau_\ell) = d\bar{v}_\ell$, $\forall \ell$.

Notînd: $z = p^*(x) \otimes \prod_\ell \bar{v}_\ell = \bar{\varphi} \circ (\alpha \otimes id)([x] \otimes \prod_\ell y_\ell) \in Z^n\mathcal{A}(E_s, E_{s-1})$ va trebui arătat că: $\psi^*[z] = ([x] \otimes \prod_\ell y_\ell) \in H^s(B_s, B_{s-1}) \otimes H^{n-s}(F)$

Fie σ o s-celulă (cu notaţiile aferente). Avem:

$$\bar{\sigma}^*[z] = [pr^*_{\Delta^s} \sigma^* x \cdot \bar{\sigma}^* \bar{v}]$$

(unde cu $\bar{v}$ am notat produsul $\prod_\ell \bar{v}_\ell$). Va fi suficient să arătăm:

$\bar{\sigma}^*[z] = [pr^*_{\Delta^s}\sigma^* x \cdot pr^*_F v]$, in $H^n((\Delta^s, \dot{\Delta}^s)\times F)$ (unde, analog, am notat cuvprodusul $\prod_\ell v_\ell$), sau, echivalent:

$$[pr^*_{\Delta^s}\sigma^* x\cdot(\bar{\sigma}^*\bar{v} - pr^*_F v)] = 0 \text{ în } H^n((\Delta^s, \dot{\Delta}^s)\times F).$$

Pentru fiece indice ℓ, avem însă: $d\bar{\sigma}^*\bar{v}_\ell = \bar{\sigma}^* d\bar{v}_\ell = \bar{\sigma}^* p^*\tau_\ell$
$= pr^*_{\Delta^s}\sigma^*\tau_\ell = pr^*_{\Delta^s} dc_\ell = d\,pr^*_{\Delta^s} c_\ell$ (deoarece $\sigma^*\tau_\ell$ e un cociclu de grad pozitiv în $\mathcal{O}(\Delta^s)$), şi deci:

$$\bar{\sigma}^*\bar{v}_\ell - pr^*_{\Delta^s} c_\ell \in Z^*\mathcal{O}(\Delta^s\times F).$$

Afirmăm în continuare că avem:

$$pr^*_{\Delta^s}\sigma^* x\cdot\prod_\ell(\bar{\sigma}^*\bar{v}_\ell - pr^*_{\Delta^s} c_\ell) = pr^*_{\Delta^s}\sigma^* x\cdot\bar{\sigma}^*\bar{v}$$

, fapt ce se poate constata scriind: $pr^*_{\Delta^s}\sigma^* x\, pr^*_{\Delta^s} c_\ell = pr^*_{\Delta^s}(\sigma^* x\cdot c_\ell)$, ţinînd cont de axioma de degenerescenţă şi de faptul că:

$|\sigma^* x| = s$, $|c_\ell| > 0$, ceea ce implică : $\sigma^* x\cdot c_\ell = 0$.

In această situaţie, va fi suficient să arătăm că:

$$[\prod_\ell(\bar{\sigma}^*\bar{v}_\ell - pr^*_{\Delta^s} c_\ell) - pr^*_F v] = 0, \text{ în } H^{n-s}(\Delta^s\times F),$$

sau echivalent, că: $\prod_\ell[\bar{\sigma}^*\bar{v}_\ell - pr^*_{\Delta^s} c_\ell] = \prod_\ell[pr^*_F v_\ell]$,

ceea ce vom face pentru fiecare indice ℓ , omiţîndu-l însă în scriere, şi remarcînd în continuare că ar fi suficient de dovedit:

$i^*[\bar{\sigma}^*\bar{v} - pr^*_{\Delta^s} c] = i^*[pr^*_F v]$, în $H^*(F)$, ceea ce revine la:

$$[(\bar{\sigma}i)^*\bar{v}] = [v], \text{ în } H^*(F).$$

Tinînd cont de proprietăţile ridicării admisibile $\bar{\sigma}$,acesta revine la a arăta că: $h^*_{[\omega]}[\bar{v}|F_{\sigma(pt)}] = [\bar{v}|F_{pt}]$

deoarece : $d(\bar{v}|F_{\sigma(pt)}) = (d\bar{v})|F_{\sigma(pt)} = (p^*\tau)|F_{\sigma(pt)} = 0$ (pentru simplificare, $|$ înseamnă restricţie).

Reluăm, obligaţi de aceste împrejurări, definiţia lui $h_{[\omega]}$ considerînd diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} F\times I & \xrightarrow{h} & E_s \\ \downarrow pr_I & & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\omega} & B_s \end{array}$$ unde : h_0 = incluziune, şi deci: $h_1 = h_{[\omega]}$.

Considerăm de asemeni şi incluziunile : $i_\alpha : F = F\times\{\alpha\} \hookrightarrow F\times I$, $\alpha = 0,1$, şi observăm întîi că: $dh^*\bar{v} = h^* d\bar{v} = h^* p^* \tau = pr_I^* \omega^* \tau = 0$, deoarece, din nou din motive de degenerescenţă, $\omega^*\tau = 0$. Putem atunci scrie:

$$\begin{cases} h_{[\omega]}^*[\bar{v}|F_{\sigma(pt)}] = i_1^*[h^*\bar{v}] \\ [\bar{v}|F_{pt}] = i_0^*[h^*\bar{v}] \end{cases}$$

Deoarece avem şi diagrame comutative de tipul:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(B)\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}(V) & \longrightarrow & \mathcal{A}(B_s)\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}(V) \\ \varphi\downarrow & & \varphi_s\downarrow \\ \mathcal{A}(E) & \longrightarrow & \mathcal{A}(E_s) \end{array}$$

demonstraţia va fi încheiată în momentul în care vom arăta că săgeţile orizontale reprezintă s-echivalenţe în H^*.

Pentru aceasta, să observăm că: din : $\pi_q(B,B_s) = 0$, pentru $q \le s$, rezultă: $\pi_q(E,E_s) = 0$ pentru $q \le s$, deci (via teorema 1.17) săgeţile: $\mathcal{A}(B) \to \mathcal{A}(B_s)$ şi : $\mathcal{A}(E) \to \mathcal{A}(E_s)$ sînt s-echivalenţe în H^*. In ceea ce priveşte pe prima, ea induce un morfism între şirurile spectrale ale extensiilor principale corespunzătoare (construite în lema II.5.6), care se observă imediat a fi s-echivalenţă la nivelul termenilor E_2, deci şi la E_∞, şi deci săgeata superioară orizontală e de asemeni s-echivalenţă.

Un corolar al acestei leme, ce se va dovedi de mare eficacitate în dezvoltarea ulterioară a teoriei, stabileşte legătura intimă între fibrările principale şi extensiile principale.

2. <u>Corolar</u>: In ipotezele lemei, dacă $\mathcal{M}$ e geometrică pentru B, există o extensie principală: $\mathcal{M} \underset{\lambda}{\otimes} \mathcal{L}(V)$, care să fie geometrică pentru E.

<u>Dem</u>: Fie: $\mathcal{M} \xrightarrow{\rho} \mathcal{A}(B)$, cu ρ^* izo. In acest moment construim $\mathcal{M} \underset{\lambda}{\otimes} \mathcal{L}(V)$ în felul următor: definim : $[\lambda(1 \otimes y)] = \rho^{*-1}\tau(1 \otimes y)$, şi precizăm alegînd o secţiune:

$$H^*\mathcal{M} \xrightarrow{s} Z^*\mathcal{M} \text{ , deci : } \lambda(1 \otimes y) = s\rho^{*-1}[\tau(1 \otimes y)] \text{ , ptr. } y \in V.$$

In continuare, avem: $[\rho\lambda(1 \otimes y)] = [\tau(1 \otimes y)]$ deci: $\rho\lambda(1 \otimes y) - \tau(1 \otimes y) = d\beta(y)$, cu : $\beta : V \to \mathcal{A}(B)$ liniară de grad 0.

Definim un morfism de AGD, $\bar{\rho} : \mathcal{M} \underset{\lambda}{\otimes} \mathcal{L}(V) \to \mathcal{A}(B) \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}(V)$ în modul următor: $\bar{\rho}(1 \otimes y) = (1 \otimes y) + \beta(y) \otimes 1$, ptr. $y \in V$; $\bar{\rho}|\mathcal{M} = \rho$.

$\bar{\rho}$ induce la şirurile spectrale ale acestor extensii (lema II 5.6) un morfism care, la nivelul termenilor E_2 , se poate identifica fără dificultate ca fiind:

$$\bar{\rho}_2 = \rho^* \otimes id : H^*(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{L}(V) \xrightarrow[\sim]{} H^*(\mathcal{A}(B)) \otimes \mathcal{L}(V)$$

deci: $\bar{\rho}^*$ e izo.

Diagramele comutative următoare încheie demonstraţia:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \mathcal{A}(B) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{A}(B) \arrow[d, "p^*"] \\
\mathcal{M} \underset{\lambda}{\otimes} \mathcal{L}(V) \arrow[r, "\bar{\rho}"] & \mathcal{A}(B) \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}(V) \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{A}(E)
\end{tikzcd}$$

Cap. IV: TEORIA RATIONALA A OMOTOPIEI

Revenim aici asupra functorului $\mathcal{M}$ introdus în capitolul precedent, şi arătăm că el dă posibilitatea descrierii categoriei omotopice a Q-spaţiilor (de tip finit), prin categoria omotopică a algebrelor minimale (de tip finit), în § 1, care reprezintă o versiune (completă!) a corespondentului său din [2]. Intenţia iniţială a acestor note, de a oferi o prezentare inteligibilă, pe cît posibil completă, a rezultatului central al teoriei raţionale a omotopiei (echivalenţa categoriilor amintite mai sus), ia sfîrşit odată cu §1. Restul materialului îşi propune numai să ilustreze modul şi direcţiile de aplicare a acestei teorii. Prin adăugarea unei <u>bibliografii de perspectivă</u>, orientăm cititorul în direcţia unor lecturi asupra aplicaţiilor şi extinderilor teoriei.

In § 2 explicităm, într-o manieră amănunţită, modul în care informaţiile din categoria spaţiilor se pot citi în categoria modelelor minimale. Ne-am limitat numai la cîteva proprietăţi fundamentale, legate de grupurile $H^*(\cdot\,;Q)$, $\pi_*(\cdot)\otimes Q$, şi de morfismele induse, la nivelul lor, de aplicaţiile între spaţii. Am inclus şi o discuţie asupra "formei raţionale a lui $\pi_1(\cdot)$", şi a posibilităţii recunoaşterii spaţiilor simple prin modelelkor minimale. In spiritul § 2 se încadrează lucrarea [Andrews-Arkovitz], dedicată omomorfismului Hurewicz raţional şi produselor Whitehead raţionale şi identificării corespondenţelor acestora în categoria modelelor minimale.

In § 3 ilustrăm principalul că, echivalenţa de categorii odată stabilită, transpunerea proprietăţilor "de universalitate" ale construcţiilor pentru spaţii în categoria algebrică poate duce la aflarea modelului minimal (şi, implicit, a informaţiilor ce decurg). Exemplul îl constituie proprietatea spaţiilor funcţionale (legea exponenţială), din care deducem proprietatea de universalitate ce determină modelul lor minimal. Am fi putut continua cu explicitarea acestui model, ca în [Watkiss], şi cu deducerea de aici a algoritmului de calcul pentru grupurile de omotopie raţională ale spaţiilor funcţionale generale (enunţat în [Note anonime]) - dar economia ne-a determinat să alegem cazul simplu, al spaţiilor de lasso-uri, pentru care determinarea pe această cale a modelului minimal e relativ comodă; un alt îndemn în alegere l-a constituit faptul că acest caz oferă posibilitatea enunţării unei aplicaţii spectaculoase: un criteriu coomologic simplu în problema geodezicelor închise (preluat din [16]). O rafinare a acestei direcţii de aplicabilitate: [Grove-Halperin-M.Vigué-Poirrier].

In prima parte a par.4, reluăm chestiunea formalităţii, prezentînd clase de exemple de spaţii şi aplicaţii formale. Esenţialmente, lista reproduce pe cea din [Sullivan]: <u>Infinitesimal computations</u> - lucrare fundamentală de altfel pentru teoria raţională a omotopiei şi importantă sursă de sugestii de dezvoltare. In cea de-a doua parte, inspirată de [19], reluăm G-spaţiile, prezentînd determinarea modelului minimal al spaţiilor de orbite X/G. Avînd în vedere par.II.5, acestea procură noi exemple de spaţii formale (dacă X e G-formal!). Am lăsat deoparte corpul principal al problematicii din [19], şi anume extinderea <u>teoremei principale</u> (§1) la cazul echivariant, rezolvată parţial acolo, pentru cazul G=Zp, p prim, ca ţinînd de un domeniu ce-şi merită o atenţie aparte : teoria raţională <u>echivariantă</u> a omotpiei.

§1. TEOREMA PRINCIPALA

In cele ce urmează, reluăm functorul $\mathfrak{A}$ constituit în Th.III, 1.5, $\mathfrak{A} : \{Top\} \longrightarrow \{AGD\}$. Deoarece am anunţat din timp permanenţa ipotezelor de c-conexiune, putem, trecînd la categoria omotopică, $[Top]$ (cor.III 1.19) compune în continuare acest functor cu functorul : $\mathfrak{M} : [AGD] \to [Min]$, unde $[Min]$ desemnează categoria omotopică a AGD minimale, în care corolarul II 4.4 ne permite să considerăm tipul de omotopie al lui $\mathfrak{M}$ egal cu $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ minimală), fără a mai face precizia că identificarea se face pînă la un izo.

Reamintim că am făcut construcţia modelului minimal al unui morfism de AGD, în lema II 4.9.

Simplificînd notaţiile, vom nota cu $\mathfrak{M}_X$ modelul minimal al AGD $\mathfrak{A}(X)$, notat anterior cu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}(X)}$, şi-l vom numi <u>modelul minimal al spaţiului X</u>.

Dată a aplicaţie : $f : X \to Y$, ea induce: $f^* : \mathfrak{A}(Y) \to \mathfrak{A}(X)$ al cărei model minimal va fi notat : $f : \mathfrak{M}_Y \longrightarrow \mathfrak{M}_X$, şi se va numi <u>modelul minimal al aplicaţiei f</u>.

Introducerea următoarelor notaţii se va dovedi utilă: prin $[Mil]$, respectiv $[Milfin]$, vom desemna categoria omotopică a spaţiilor nilpotente, respectiv nilpotente şi de tip finit peste Q; prin $[Q\text{-}sp]$, respectiv $[Q\text{-}fin]$, vom înţelege categoria omotopică a Q-spaţiilor, respectiv a Q-spaţiilor de tip finit; iar în sfîrşit prin $[Minfin]$ vom preciza categoria omotopică a algebrelor minimale şi de tip finit.

Reamintim aici şi <u>functorul de localizare</u>, construit în Cap.I:

$$\begin{array}{ccc} [Nil] & \longrightarrow & [Q\text{-}sp] \\ \cup & & \cup \\ [Nilfin] & \longrightarrow & [Q\text{-}fin] \end{array}$$

Pe obiecte, localizarea unui spaţiu X va fi notată cu X_o (vezi Th. I.3.8), observînd că proprietăţile de finitudine se păstrează după localizare (Th. I.2.19), iar pe morfisme, localizarea unei aplicaţii f va fi notată cu f_o (Cor. I.3.9).

1. Teoremă (Sullivan): Compunerea $\mathcal{M}\circ\mathcal{O}$ induce o (anti) echivalenţă de categorii: $[Q\text{-fin}] \longrightarrow [\text{Minfin}]$, unde categoria algebrică şi, în general, coomologia spaţiilor, vor fi considerate cu coeficienţi raţionali.

Demonstraţia va rezulta după o serie întreagă de consideraţii şi rezultate ajutătoare, şi va constitui în întregime obiectul atenţiei noastre în acest paragraf.

Vom obţine avantaje considerabile dacă $X \to \mathcal{M}_X$ va fi un model minimal cu proprietăţi suplimentare.

2. Propoziţie: Fie $X \in [Nilfin]$. Vom considera TN al X cu proprietăţile descrise în Th. I.2.15, în care, după observaţiile ce rezultă din Th. I.2.19: $\dim_Q \pi_\alpha < \infty$, $\forall \alpha \in N$.

In aceste ipoteze: $\mathcal{M}_X = \varinjlim \mathcal{M}_\alpha$, unde:

a) $\mathcal{M}_{\alpha+1} = \mathcal{M}_\alpha \otimes_{i_\alpha} \mathcal{L}_{n_\alpha}(V_\alpha)$

unde : $V_\alpha = \mathrm{Hom}(\pi_\alpha \otimes Q, Q)$;

b) avem diagramele comutative:

$$\begin{tikzcd} \alpha(X_{\alpha+1}) & \alpha(X_\alpha) \arrow[l, "p_{\alpha+1}^*"'] \\ M_{\alpha+1} \arrow[u, "\rho_{\alpha+1}"] \arrow[r, leftrightarrow] & M_\alpha \arrow[u, "\rho_\alpha"] \end{tikzcd} \quad (*) \qquad \text{şi:} \quad (**) \quad \begin{tikzcd} \alpha(X) & \alpha(X_\alpha) \arrow[l, "f_\alpha^*"'] \\ M_X \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, leftrightarrow] & M_\alpha \arrow[u, "\rho_\alpha"] \end{tikzcd}$$

cu : ρ_α^* izo , $\forall\alpha$, şi : ρ^* izo ;

c) avem încă diagrame comutative de tipul:

$$\begin{tikzcd} H^{n_\alpha}(K(\pi_\alpha, n_\alpha)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{n_\alpha+1}(X_\alpha) \\ V_\alpha \arrow[r, "{[\tau_\alpha]}"] & H^{n_\alpha+1}(M_\alpha) \arrow[u, "\rho_\alpha^*"'] \end{tikzcd}$$

unde săgeata nemarcată e transgresia fibrării.

Dem. Vom considera fibrarea principală:

$$K(\pi_\alpha, n_\alpha) \hookrightarrow X_{\alpha+1} \xrightarrow{p_{\alpha+1}} X_\alpha$$

şi aplicăm corolarul III 2.2. Rezultă toate proprietăţile cerute, cu excepţia comutativităţii diagramei $(**)$.

Considerăm $M = \varinjlim M_\alpha$, şi: $\varinjlim \rho_\alpha : M \longrightarrow \varinjlim \alpha(X_\alpha)$, care induce izo în coomologie. Este uşor de observat, folosind proprietatea iv), ce rezultă din Th. I.2.15, că: $\varinjlim \alpha(X_\alpha) \xrightarrow[\varinjlim f_\alpha^*]{} \alpha(X)$ este izo în H^*.

Definim: $\rho = (\varinjlim f_\alpha^*) \circ (\varinjlim \rho_\alpha)$, ceea ce asigură şi şi comutativitatea diagramei $(**)$.

3. Corolar. Dacă $X \in [Nilfin]$, atunci: $\mathcal{M}_X \in [Minfin]$.

Sîntem în măsură să demonstrăm propoziţia 2 în sens invers:

4. Propoziţie

Fie $\mathcal{M} \in [Minfin]$. Dacă $\mathcal{M} = \varinjlim \mathcal{M}_\alpha$, cu:

$\mathcal{M}_{\alpha+1} = \mathcal{M}_\alpha \underset{\tau_\alpha}{\otimes} \mathcal{Z}_{n_\alpha}(V_\alpha)$, atunci:

a) există un TN de tip finit, format din fibrările principale:

$$K(\pi_\alpha, n_\alpha) \hookrightarrow X_{\alpha+1} \xrightarrow{p_{\alpha+1}} X_\alpha,$$ astfel încît : $\pi_\alpha = \mathrm{Hom}(V_\alpha, Q)$;

b) avem aceleaşi diagrame comutative ca în propoziţia 2, unde : $X = \varprojlim X_\alpha$ şi f_α e proiecţia: $\varprojlim X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$;

c) analog cu propoziţia 2.

Dem. Vom proceda inductiv. Pentru a construi fibrarea principală $p_{\alpha+1}$ vom preciza aplicaţia clasifiantă în:

$$[X_\alpha, K(\pi_\alpha, n_\alpha+1)] \sim H^{n_\alpha+1}(X_\alpha, \pi_\alpha) \sim \mathrm{Hom}(V_\alpha, H^{n_\alpha+1}(X_\alpha))$$

ca fiind: $\rho_\alpha^* \circ [\tau_\alpha]$ (de unde, imediat, din naturalitatea transgresiei, rezultă c)).

Considerăm diagrama, obţinută ca în III 2.2:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}(X_\alpha) \arrow[r, "p^*_{\alpha+1}"] & \mathcal{Q}(X_{\alpha+1}) & \\
\mathcal{M}_\alpha \arrow[u, "\rho_\alpha"] \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{M}_\alpha \otimes_{\tau'_\alpha} \mathcal{L}_{n_\alpha}(V_\alpha) \arrow[u, "\rho'_{\alpha+1}"] & \mathcal{M}_\alpha \otimes_{\tau_\alpha} \mathcal{L}_{n_\alpha}(V_\alpha) = \mathcal{M}_{\alpha+1} \arrow[l, dashed, "\sim"'] \arrow[ul, "\rho_{\alpha+1}"']
\end{tikzcd}$$

în care vom construi $\rho_{\alpha+1}$ cu proprietăţile cerute.

Tinînd cont de felul în care am definit τ'_α şi de I 1.3, rezultă: $[\tau'_\alpha] = [\tau_\alpha]$, şi deci, după lema II 2.3, există izomorfismul punctat de AGD, care e egal cu identitatea pe $\mathcal{M}_\alpha$.

5. Corolar: Surjectivitatea pe obiecte.

Dem. Să remarcăm că spaţiul X construit mai sus aparţine categoriei $[Q-\text{fin}]$ (corolarul I 3.3).

Fie π un Q-s.v., $\dim \pi < \infty$ şi $n \geq 1$. Considerăm fibrarea principală:

$$\begin{tikzcd}
\Omega = K(\pi, n) \arrow[d, hook] & \\
E \arrow[d, "p"'] & \\
(B, pt) \arrow[r, "k"] & (K(\pi, n+1), pt)
\end{tikzcd}$$

, cu: $[k] \in H^{n+1}(B;\pi)$

Fie : $f : (X, pt) \longrightarrow (B, pt)$ o aplicaţie care admite o ridicare, şi deci: $k \circ f = pt$ (ca şi mai înainte, presupunem f incluziune), şi avem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} X\times\Omega & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ {\scriptstyle p_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ (X, pt) & \xrightarrow{f} & (B, pt) \end{array}$$

unde p_X e fibraţie trivială, indusă de $k\circ f$.

O ridicare a lui f este unic determinată de o secţiune a lui p_X , şi invers. Deci: g ridicare a lui f, implică: există: $g': X \to \Omega$ a.î.: $s: X \to X\times\Omega$, dată de: $s(x) = (x, g'(x))$ este secţiune, şi: $\bar{f}\circ s = g$.

In continuare, considerăm două ridicări pentru f, g_0 şi g_1 şi secţiunile asociate: $s_i(x) = (x, g_i'(x))$, a.î.: $\bar{f}\circ s_i = g_i$, $i = 0,1$.

Reluăm notaţiile: $V = H^n(\Omega)$ şi: $\mu: V \to \mathcal{A}(E)$, liniară de grad 0, şi atunci transgresiu introdusă în III.2 este tocmai $k^*(u_{n+1})$, după cum dovedeşte corolarul I 1.3.

Relaţiile i), ii) din III.2, gîndite cu coeficienţi π , devin:

1) $[j^*(\mu)] = [u_n]$ şi:

2) $p^*k^*(u_{n+1}) = d\mu$.

In aceste condiţii:

$$d(g_0^*\mu - g_1^*\mu) = g_0^*d\mu - g_1^*d\mu = g_0^*p^*k^*(u_{n+1}) - g_1^*k^*p^*(u_{n+1})$$
$$= f^*k^*(u_{n+1}) - f^*k^*(u_{n+1}) = 0 .$$

6. <u>Lemă</u>. Cu notaţiile precedente, avem:

$$[g_0^*\mu - g_1^*\mu] = [g_0'] - [g_1'] \text{ , în } H^n(X;\pi) .$$

<u>Dem</u>. Avem: $d\bar{f}^*\mu = \bar{f}^*d\mu = \bar{f}^*p^*k^*(u_{n+1}) = p_X^*f^*k^*(u_{n+1})$

deci: $d(\bar{f}^*\mu) = 0$ (am presupus: $k\circ f = pt$!), şi deci:

$$[g_0^* \mu - g_1^* \mu] = s_0^*[\bar{f}^* \mu] - s_1^*[\bar{f}^* \mu] .$$

Pe de altă parte, avem izomorfismul:

$$H^n(X;\pi) \oplus H^n(\Omega;\pi) \xrightarrow[\simeq]{p_X^* + p_\Omega^*} H^n(X \times \Omega;\pi)$$

şi deci notînd: $[\bar{f}^* \mu] = [y]$, există aplicaţiile liniare de grad 0:

$$\alpha : V \longrightarrow Z^n(X) \text{ şi } : \omega : V \longrightarrow Z^n(\Omega) \text{ a.î.:}$$

$[y] = p_X^*[\alpha] + p_\Omega^*[\omega]$. De aici rezultă:

$$s_0^*[y] - s_1^*[y] = (s_0^* p_X^*[\alpha] + s_0^* p_\Omega^*[\omega]) - (s_1^* p_X^*[\alpha] + s_1^* p_\Omega^*[\omega])$$

$$= ([\alpha] + g_0'^*[\omega]) - ([\alpha] + g_1'^*[\omega]) = g_0'^*[\omega] - g_1'^*[\omega] .$$

In acelaşi timp, avem:

$j_\Omega^*[y] = [j_\Omega^* \bar{f}^* \mu] = [j^* \mu] = [u_h]$, pe de o parte, şi:

$j_\Omega^*[y] = j_\Omega^* p_X^*[\alpha] + j_\Omega^* p_\Omega^*[\omega] = [\omega]$, pe de altă parte.

Cu acestea, avînd în vedere şi I 0.1., lema rezultă.

7. <u>Corolar</u>: Date: o ridicare g_1 a lui f, şi $u \in H^n(X;\pi)$ arbitrar, există o altă ridicare g_0 a lui f, astfel încît:

$$[g_0^* \mu - g_1^* \mu] = u .$$

8. <u>Obs</u>: u se mai poate interpreta ca fiind un element din

$$Hom(V, H^n X).$$

9. <u>Propoziţie</u> (surjectivitatea pe morfisme): Fie $X \in [Q\text{-}\mathrm{fin}]$ şi X' un spaţiu. Vom considera TN al lui X şi modelul minimal: $\mathcal{M}_X \xrightarrow{\rho} \mathcal{A}(X)$ construit, plecînd de la acest TN, în Prop. 2, şi de asemenei: $\mathcal{M}_{X'} \xrightarrow{\rho'} \mathcal{A}(X')$, un model minimal. Fie: $g : \mathcal{M}_X \longrightarrow \mathcal{M}_{X'}$, um morfism de AGD. Afirmăm că : există o aplicaţie: $F : X' \longrightarrow X$ a.î.: $[\tilde{F}] = [g]$ (egalitatea are loc în categoria omotopică).

<u>Dem</u>: Vom presupune, inductiv, dată diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}(X_{\alpha+1}) & \\
\mathcal{A}(X_\alpha) \arrow[ur, "p^*_{\alpha+1}"] \arrow[rr, "F^*_\alpha"'] & & \mathcal{A}(X') \\
 & \mathcal{M}_{X,\alpha+1} \arrow[uu, "\rho_{\alpha+1}"'] \arrow[dr, "g_{\alpha+1}"] & \\
\mathcal{M}_{X,\alpha} \arrow[uu, "\rho_\alpha"] \arrow[ur] \arrow[rr, "g_\alpha"'] & & \mathcal{M}_{X'} \arrow[uu, "\rho'"']
\end{tikzcd}$$

unde: $g_\alpha, g_{\alpha+1}$ sînt restricţiile evidente, $F_\alpha : X' \to X_\alpha$ şi avem dată în plus omotopia: $h_\alpha : \mathcal{M}_{X,\alpha} \to \mathcal{A}(X') \otimes (t, dt)$, $h_\alpha : F^*_\alpha \rho_\alpha \simeq \rho' g_\alpha$.

Arătînd că: există:

$$F_{\alpha+1} : X' \longrightarrow X_{\alpha+1},\ \text{a.î.: } p_{\alpha+1} F_{\alpha+1} = F_\alpha,\ \text{şi: } h_{\alpha+1} : \mathcal{M}_{X,\alpha+1} \to \mathcal{A}(X') \otimes (t, dt)$$

a.î.: $h_{\alpha+1}|\mathcal{M}_{X,\alpha} = h_\alpha$ şi : $h_{\alpha+1} : F^*_{\alpha+1} \rho_{\alpha+1} \simeq \rho' g_{\alpha+1}$, vom putea lua: $F = \varprojlim F_\alpha$.

După Th. I.0.3, F_α se ridică, avînd în vedere că $p_{\alpha+1}$ e fibrare principală, d.n.d $(F^*_\alpha)^* \circ \rho^*_\alpha \circ [\tau_\alpha] = 0$ (am ţinut cont de Prop.2) d.n.d $\rho'^* \circ g^*_\alpha \circ [\tau_\alpha] = 0$ d.n.d. $g^*_\alpha \circ [\tau_\alpha] = 0$ d.n.d g_α se poate extinde (lema II. 2.4), ceea ce ne permite să considerăm pe moment o ridicare $F_{\alpha+1}$ a lui F_α şi să observăm că sîntem în situaţia topologică, ce a fost descrisă şi exploatată în Lema 6.

In acelaşi timp, ne aflăm şi în situaţia din Lema II.2.7, şi deci putem considera:

$$\bar{d} = d_{\bar{F}^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1},\, h_\alpha,\, \rho' g_{\alpha+1}} = \Big[\rho' g_{\alpha+1}|V_\alpha - \bar{F}^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1}|V_\alpha - \int_0^1 Q(t)\,dt\Big],$$

$$\bar{d} \in \mathrm{Hom}(V_\alpha, H^n X').$$

Obs. 8 ne permite să alegem o altă ridicare, $F_{\alpha+1}$ a lui F_α , astfel încît: $[\bar{F}^*_{\alpha+1}\mu - F^*_{\alpha+1}\mu] = [\bar{F}^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1}|V_\alpha - F^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1}|V_\alpha] = -\bar{d}$

(după construcţia lui $\rho_{\alpha+1}|V_\alpha$ făcută ca în dem.cor.III 2.2)

Avem acum: $d_{F^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1},\, h_\alpha,\, \rho' g_{\alpha+1}} = 0$, şi Lema II.2.7, permite găsirea extinderii $h_{\alpha+1}$, cu proprietăţile corecte.

10. <u>Corolar</u>: Injectivitatea pe obiecte.

<u>Dem</u>: Dacă : $X, X' \in [Q\text{-fin}]$ şi: $\mathcal{M}_X \xrightarrow{g} \mathcal{M}_{X'}$ e izo, obţinem cu propoziţia precedentă o aplicaţie: $X' \xrightarrow{F} X$, şi o diagramă comutativă omotopic:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{F^*} & \mathcal{A}(X') \\ \uparrow{\scriptstyle \rho_X} & & \uparrow{\scriptstyle \rho_{X'}} \\ \mathcal{M}_X & \xrightarrow{g} & \mathcal{M}_{X'} \end{array}$$

care arată F a fi izo în H^* , deci, apelînd de exemplu la proprietatea de unicitate a localizării, o echivalenţă omotopică.

Din acest moment, vom lua în considerare "cazul relativ". Aceasta implică reluarea situaţiilor cheie, topologice şi algebrice, în contextul, puţin mai general dar perfect analog, al CW-complexelor relative (X,A) şi al AGD-morfismelor : $\mathcal{A}(X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{A}(A)$ unde i desemnează incluziunea . Afirmaţiile şi rezultatele expuse mai sus se extind natural în acest context.

Fie dată diagrama comutativă (în AGD):

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}\otimes_{\tau} \mathcal{Z}_n(V) \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, dashed] & \mathcal{A} \\ \mathcal{M} \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{X} \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd}$$

Vom spune că <u>problema de extindere relativă</u> (*) are soluţie dacă există o săgeată (punctată în diagramă) care să facă triunghiurile efectiv (nu numai omotopic) comutative.

Să presupunem, în plus, că φ se poate extinde la $\mathcal{M}\otimes_{\tau}\mathcal{Z}_n(V)$ şi să luăm o astfel de extensie, arbitrară, a lui φ, notată ψ.

Avem: $d(q\psi-\varphi')_{|V} = q\psi\tau - d\varphi'_{|V} = q\varphi\tau - \varphi'\tau = 0$,

deci, notînd: $c_{\psi} = (q\psi - \varphi')_{|V} \in \mathrm{Hom}(V, Z^n\mathcal{A})$

putem defini: $o_{\psi} \in \mathrm{Hom}(V, H^{n+1}(\mathcal{X},\mathcal{A}))$ prin: $o_{\psi} = \delta[c_{\psi}]$,

unde notaţia relativă în coomologie provine din şirul exact:

$$0 \to \ker q \to \mathcal{X} \xrightarrow{q} \mathcal{A} \to 0 .$$

Dacă luăm o altă extindere a lui φ, fie ea $\bar{\psi}$, putem scrie:

$o_{\bar{\psi}} - o_{\psi} = \delta[c_{\bar{\psi}} - c_{\psi}] = \delta[q(\bar{\psi}-\psi)_{|V}] = 0$, deoarece: $(\bar{\psi}-\psi)_{|V} \in \mathrm{Hom}(V, Z^n\mathcal{X})$. Apare deci o clasă de coomologie bine definită, notată cu: $o \in \mathrm{Hom}(V, H^{n+1}(\mathcal{X},\mathcal{A}))$

pe care o vom numi <u>obstrucţia ataşată problemei algebrice (*)</u>.

11. <u>Lemă</u>; Problema (*) admite soluţie d.n.d $o = 0$.

<u>Dem</u>: Pentru implicaţia netrivială, luăm o extensie oarecare a lui φ, fie aceasta ψ; deoarece: $\delta[c_{\psi}] = 0$, rezultă: $[c_{\psi}] \in \mathrm{Im}\, q^{*}$, deci găsim: $\alpha : V \to Z^n\mathcal{X}$ şi: $\gamma' : V \to \mathcal{A}^{n-1}$, a.î.: $(q\psi - \varphi')_{|V} = q\alpha + d\gamma'$.

Luînd apoi: $\gamma : V \to \mathcal{X}^{n-1}$ a.î.: $q\gamma = \gamma'$, definim o altă extensie a lui ψ, notată $\bar{\psi}$, prin: $\bar{\psi}_{|V} = \psi_{|V} - \alpha - d\gamma$

şi avem: $(q\bar{\psi} - \varphi')_{|V} = 0$, deci $\bar{\psi}$ reprezintă o soluţie pentru problema (*).

12. Corolar: Fie, în plus, diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}\otimes_{\varepsilon}\mathcal{L}_n(V) \arrow[r, "\psi'"] & \mathcal{A} \arrow[r, "\rho'"] & \mathcal{B} \\ \mathcal{M} \arrow[u, "i_{\varepsilon}"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{X} \arrow[u, "q"] \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{Y} \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd}$$

care dă naştere unei alte probleme de acelaşi tip, şi anume:

$$(**)\quad \begin{tikzcd} \mathcal{M}\otimes_{\varepsilon}\mathcal{L}_n(V) \arrow[rr, "\rho'\varphi'"] \arrow[drr, dashed] & & \mathcal{B} \\ \mathcal{M} \arrow[u, "i"] \arrow[rr, "\rho\varphi"] & & \mathcal{Y} \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd}$$

Atunci (presupunînd ρ şi ρ' a fi izo în H^*):

i) φ se extinde d.n.d $\rho\varphi$ se extinde;

ii) problema $(*)$ are soluţie d.n.d problema $(**)$ are soluţie.

Dem: i) φ se extinde $\Longleftrightarrow \varphi^*\circ[i]=0 \Longleftrightarrow \rho^*\varphi^*\circ[i]=0$ $\Longleftrightarrow (\rho\varphi)^*\circ[i]=0 \Longleftrightarrow \rho\varphi$ se extinde.

ii) Dacă ψ e soluţie pentru $(*)$, evident: $\rho\psi$ e soluţie pentru $(**)$. Dacă $(**)$ admite soluţie, înseamnă că $\rho\varphi$ se extinde, deci şi φ, şi putem aplica criteriul precedent ambelor probleme. Fie atunci ψ o extensie a lui φ. Avem:

$$0 = o_{(**)} = o_{\rho\psi} = \delta[(r\rho\psi-\rho'\varphi')|V] =$$
$$= \delta\rho'^*[(q\psi-\varphi')|V] = \rho^*\delta[c_\psi] = \rho^* o_{(*)} \Rightarrow o_{(*)}=0.$$

13. Lemă: Fie acum: $\psi, \bar\psi$ două soluţii ale problemei $(*)$. Avem: $d(\bar\psi-\psi)|V=0$ şi: $q(\bar\psi-\psi)|V=0$, deci apare: $d(\bar\psi,\psi)\in Hom(V,H^n(\mathcal{X},\mathcal{A}))$ dat prin: $d(\bar\psi,\psi)=[(\bar\psi-\psi)|V]$.

Cu aceste notaţii: dacă ψ e soluţie, şi dacă $d\in Hom(V,H^n(\mathcal{X},\mathcal{A}))$, atunci: există o soluţie $\bar\psi$ a.î. :

$$d(\bar\psi,\psi)=d.$$

Dem: Luăm: $c: V\to Z^n(\mathcal{X},\mathcal{A})$ a.î.: $[c]=d$ şi definim apoi: $\bar\psi|\mathcal{M}=\psi|\mathcal{M}=\varphi$ şi: $\bar\psi|V=\psi|V+c$.

Fie acum date: (X,A) un CW -complex relativ, şi:

$K(\pi,n) \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ o fibrare principală (cu: π Q-s.v. , şi cu notaţia: $V = \mathrm{Hom}_Q(\pi, Q)$) , indusă de: $k : (B, pt) \to (K(\pi, n+1), pt)$,

şi fie dată diagrama comutativă:

$$(***)\quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "F"] & B \end{tikzcd}$$

Vom spune că <u>problema de ridicare relativă</u> (***) admite soluţie dacă există săgeata punctată, cu comutativităţile de rigoare.

Problemei de ridicare relativă (***) i se asociază diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \otimes_{\tau} \mathcal{L}_n(V) \arrow[r, "\rho'"] & \mathcal{A}(E) \arrow[r, "f'^*"] & \mathcal{A}(A) \\ \mathcal{M} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\rho"'] & \mathcal{A}(B) \arrow[u, "p^*"] \arrow[r, "f^*"'] & \mathcal{A}(X) \arrow[u, "i^*"'] \end{tikzcd}$$

unde: ρ e un model minimal fixat iar ρ' e construit ca în demonstraţia Cor. III 2.2.

Rezultă o problemă de extensie relativă:

$$(****)\quad \begin{tikzcd} \mathcal{M} \otimes_{\tau} \mathcal{L}_n(V) \arrow[r, "f'^*\rho'"] & \mathcal{A}(A) \\ \mathcal{M} \arrow[u, hook] \arrow[r, "f^*\rho"'] & \mathcal{A}(X) \arrow[u, "i^*"'] \end{tikzcd}$$

asociată în mod canonic problemei de ridicare relativă (***). Reluăm, prin analogie cu Lema 13, situaţia din (***), combinată cu cea din Cor.7, i.e.: în prezenţa diagramei (***), fie F_0 şi F_1 două soluţii. Vom nota atunci cu <u>$d(F_0,F_1)$ elementul din $\mathrm{Hom}(V, H^n(X,A))$</u> reprezentat de: $(F_1^* - F_0^*) \circ \mu : V \to Z^n(X,A)$.

14. <u>Lemă</u>: Dacă F_0 este o soluţie, pentru orice element $d \in \mathrm{Hom}(V, H^n(X,A))$, există o altă soluţie F_1 a.î.:

$$d(F_0, F_1) = d .$$

<u>Dem</u>: Fie F_0 şi F_1 soluţii. Urmînd sugestia demonstraţiei

Lemei 6, ele sînt unic determinate (ca ridicări ale lui f) prin: $g_i' : X \to \Omega = K(\pi,n)$, i=0,1, care la rîndul lor dtermină secțiunile lui p_X : $s_i : X \longrightarrow X \times \Omega$ $(s_i = (id, g_i'),\ i=0,1)$ și în final determină F_i prin egalitățile: $F_i = \bar{f} \circ s_i$, $i=0,1$.

Notațiile provin din următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd} A \times \Omega \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_A"'] & X \times \Omega \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p_X"'] & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, hook, "i"] & X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Pe de altă parte, înlocuind X cu A și considerînd situația:

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[rru, "f'"] \arrow[r, hook, "i"] & X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

rezultă f' unic determinată, prin același procedeu, de: $g' : A \to \Omega$, $\Omega = K(\pi,n)$, iar cerințele: $F_i|_A = f'$, $i=0,1$, revin la: $g_i'|A = g'$, $i=0,1$.

După cum rezultă urmărind cele dezvoltate în [14], p.65-78, în situația în care avem:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rd, "g_i'\ (i=0,1)"] & \\ A \arrow[u] \arrow[r, "g'"] & K(\pi,n) \end{tikzcd}$$

(diagrame comutative) apare: $\delta^n(g_0', g_1') \in Hom(V, H^n(X,A))$ indusă de: $g_1'^*(u_n) - g_0'^*(u_n) : V \longrightarrow Z^n(X,A)$, și avem:

dacă g_0' e extindere a lui g', și dacă : $\delta^n \in Hom(V, H^n(X,A))$ e arbitrar dată, există o altă extindere g_1' a lui g' a.î.: $\delta^n(g_0', g_1') = \delta^n$ (Th. 2.8.5, [14] p.73).

Devine suficient de previzibil faptul că, de îndată ce vom fi arătat: $d(F_0, F_1) = [g_1'^*(u_n) - g_0'^*(u_n)]$ lema 14 va fi demonstrată. Cît despre această egalitate, ea va rezulta reluînd cu atenţie demonstrarea lemei 6:

$d(F_0,F_1)=[F_1^*\mu-F_0^*\mu]\in Hom(V,H^n(X,A))$. Avem însă: $F_i^*\mu=s_i^*\bar{f}^*\mu$, $i=0,1$ şi : $\bar{f}^*\mu=p_X^*\alpha+p_\Omega^*\omega+d\lambda$, cu α,ω ca în lema 6 şi cu: $\lambda: V\longrightarrow \mathcal{O}^{n-1}(X\times\Omega)$. Prin urmare:

$$(F_1^*\mu-F_0^*\mu)-(g_1'^*u_n-g_0'^*u_n)=$$

$$=(g_1'^*\omega-g_0'^*\omega)-(g_1'^*u_n-g_0'^*u_n)+d(s_1^*\lambda-s_0^*\lambda).$$

Tot după lema 6: $\omega-u_n=d\nu$, $\nu: V\longrightarrow \mathcal{O}^{n-1}(\Omega)$,

deci putem egala în continuare cu: $d(g_1'^*\nu-g_0'^*\nu)+d(s_1^*\lambda-s_0^*\lambda)$.

Tinînd cont că: $g_1'|A=g_0'|A$, şi : $s_1|A=s_0|A$

rezultă că: $i^*(g_1'^*\nu-g_0'^*\nu+s_1^*\lambda-s_0^*\lambda)=0$, şi demonstraţia ia sfîrşit.

Sîntem în măsură să dovedim acum că legătura între situaţiile - topologică şi algebrică - descrise mai sus nu e numai de domeniul analogiei:

15. <u>Propoziţie</u>: Problema de ridicare relativă (***) admite soluţie d.n.d. problema de extensie relativă (****), canonic asociată, admite soluţie.

<u>Dem</u>: Ne preocupă implicaţia inversă. Dacă problema algebrică are soluţie, rezultă: $(\varphi^*)^*\circ\rho^*\circ[\tau]=0$, de unde $f^*[k^*u_{n+1}]=0$, deci, după Th. I.0.3, aplicaţia de spaţii f se ridică. Fie F_0 o astfel de ridicare. Notînd: $F_0^*\circ\rho'=\psi_0$:

$M\otimes Z_n(V)\xrightarrow{i}\mathcal{O}(X)$ avem: $\psi_0|M=f^*\rho$, deci, după Lema 11:

$0=o=o_{\psi_0}=\delta[c_{\psi_0}]$, şi deci: există: $d: V\rightarrow H^n(X)$

a.î. : $(i^*)^*d=[i^*F_0^*\rho'|V-f'^*\rho'|V]\in Hom(V,H^n(A))$.

După Cor.7, putem lua o altă ridicare a lui f, fie ea F_1, a.î.: $[F_1^*\mu-F_0^*\mu]=-d$. Notînd cu ψ_1 extensia algebrică corespunzătoare, calculăm: $[c_{\psi_1}]-[c_{\psi_0}]=(i^*)^*[F_1^*\rho'|V-F_0^*\rho'|V]$.

Reluînd demonstraţia Cor. III 2.2, vom scrie:

$\rho'|V = \mu + p^*\beta$, cu : $\beta : V \to \mathfrak{A}^n(B)$ - Tinînd cont de: $p F_i = f$, $i = 0, 1$, avem: $(i^*)^*[F_1^*\rho'|V - F_0^*\rho'|V] = (i^*)^*[F_1^*\mu - F_0^*\mu] = -[c_{\psi_0}]$

deci: $[c_{\psi_1}] = 0$.

Ne aflăm acum într-o situaţia de tipul celei din lema 6, şi anume: $f|A$ în loc de f, şi ridicările $F_1|A$ şi f', determinate ca acolo de : $g_1' : A \to \Omega$, respectiv : $g' : A \to \Omega$.

Avem: $[g_1'^* u_n] - [g'^* u_n] = [i^* F_1^* \mu - f'^* \mu]$.

Pe de altă parte:

$$0 = [c_{\psi_1}] = [i^*F_1^*\rho'|V - f'^*\rho'|V] = [(i^*F_1^* - f'^*)(\mu + p^*\beta)] = [(i^*F_1^* - f'^*)\mu]$$

deci după Th. I.0.1: $g_1' \simeq g'$, ceea ce atrage existenţa unei omotopii între $F_1|A$ şi f' : $h : A \times I \to E$ a.î.:

$$p \circ h_t = f \circ i \ , \ \forall t \in I .$$

In diagrama de mai jos, cf. cu [1] p.375, există săgeata punctată:

$$\begin{tikzcd} X\times\{0\} \cup A\times I \arrow[r, "F\cup h"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X\times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "G"] & B \end{tikzcd}$$

(unde: $H_t = f, \forall t$)

care face triunghiurile comutative. Luînd: $F = G_1$, se constată că am obţinut o soluţie a problemei topologice.

Fie $\mathcal{M} \xrightarrow{j} \mathcal{M} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}_n(V)$ o extensie elementară, şi: $\mathcal{X} \xrightarrow{q} \mathfrak{A}$ un AGD-morfism. Ne punem problema invarianţei omotopice a rezolvabilităţii problemei de extindere relativă introdusă anterior.

Fie diagrama comutativă:

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{L}_n(V) \arrow[r, "h"] & \mathfrak{A}\otimes(t,dt) \\ \mathcal{M} \arrow[u, "j"] \arrow[r, "H"] & \mathcal{X}\otimes(t,dt) \arrow[u, "q\otimes id"'] \end{tikzcd}$$

Pentru $\lambda \in Q$, ea produce problema de extindere relativă:

$$(*)_\lambda \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M} \otimes_\tau \mathcal{L}_n(V) \arrow[r, "h|t=\lambda"] \arrow[dr, dashed] & \mathcal{A} \\ \mathcal{M} \arrow[u, hook] \arrow[r, "H|t=\lambda"] & \mathcal{X} \arrow[u, two heads, "q"'] \end{tikzcd}$$

16. Lemă: Problema $(*)_0$ are soluţie d.n.d $(*)_1$ are soluţie.

Dem: $H|t=0$ se extinde d.n.d $(H|t=0)^* \circ [\tau] = 0$ d.n.d. $(t=0)^* H^* \circ [\tau] = 0$ şi analog: $H|t=1$ se extinde d.n.d. $(t=1)^* H^* \circ [\tau] = 0$. Aplicaţiile: $(t=0)$ şi $(t=1) : \mathcal{X} \otimes (t, dt) \to \mathcal{X}$ fiind omotope, rezultă echivalenţa condiţiilor de mai sus, şi deci aplicabilitatea lemei 11.

Fie ψ_0 soluţie pentru $(*)_0$ şi: $\mathcal{M} \otimes_\tau \mathcal{L}_n(V) \xrightarrow{\hat{\psi}_1} \mathcal{X}$ a.î.: $\hat{\psi}_1|\mathcal{M} = H|t=1$. Notăm: $\hat{d} = d_{\psi_0, H, \hat{\psi}_1} \in \mathrm{Hom}(V, H^n \mathcal{X})$.
Putem găsi atunci: $\mathcal{M} \otimes_\tau \mathcal{L}_n(V) \xrightarrow{\bar{\bar{\psi}}_1} \mathcal{X}$ a.î.: $\bar{\bar{\psi}}_1|\mathcal{M} = H|t=1$ şi: $[\bar{\bar{\psi}}_1|V - \hat{\psi}_1|V] = -\hat{d}$. Calculăm: $d_{\psi_0, H, \bar{\bar{\psi}}_1} - \hat{d} = [\bar{\bar{\psi}}_1|V - \hat{\psi}_1|V] = -\hat{d}$
deci, după un mult uzat criteriu, există:

$$\hat{\psi} : \mathcal{M} \otimes_\tau \mathcal{L}_n(V) \to \mathcal{X} \otimes (t, dt), \ \hat{\psi} : \psi_0 \simeq \bar{\bar{\psi}}_1 \text{ şi: } \hat{\psi}|\mathcal{M} = H.$$

Puţin mai degajaţi de context, să observăm că: în condiţiile $(*)$, dacă $\hat{\psi}$ extinde pe H, atunci:

$$(c\hat{\psi})|t=\lambda = c(\hat{\psi}|t=\lambda), \quad \forall \lambda \in Q.$$

ψ_0 fiind soluţie pentru $(*)_0$ avem: $0 = c_{\psi_0} = (c\hat{\psi})|t=0$,
deci: $(t=0)^*[c\hat{\psi}] = 0$, de unde: $0 = (t=1)^*[c\hat{\psi}] = [c\bar{\bar{\psi}}_1]$.
Avem atunci: $o_1 = \delta[c\bar{\bar{\psi}}_1] = 0$ şi deci problema $(*)_1$ admite soluţie.

17. Lemă: In condiţiile $(*)$, fie ψ_0, respectiv $\overline{\overline{\psi}}_1$, soluţii date, pentru $(*)_0$, respectiv $(*)_1$. Există o altă soluţie pentru $(*)_1$, fie ea $\overline{\psi}_1$ şi există: $\overline{\overline{\psi}} : \mathcal{M} \otimes_{\tau} \mathcal{L}_n(V) \to \mathcal{X} \otimes (t, dt)$ a.î.: $\overline{\overline{\psi}}|\mathcal{M} = H$ şi: $\overline{\overline{\psi}} : \psi_0 \simeq \overline{\psi}_1$.

Dem: Mult analog cu precedenta, considerăm:

$\overline{\overline{d}} = d_{\psi_0, H, \overline{\overline{\psi}}_1}$. Avem: $q^* \overline{\overline{d}} = d_{h|t=0,\, h,\, h|t=1} = 0$,

deci există: $d \in \mathrm{Hom}(V, H^n(\mathcal{X}, \mathcal{A}))$ a.î.: $d|_{\mathcal{X}} = \overline{\overline{d}}$.

După lema 13, există o altă soluţie pentru $(*)_1$, fie ea $\overline{\psi}_1$,

a.î.: $d(\overline{\psi}_1, \overline{\overline{\psi}}_1) = -d$. Calculăm: $d_{\psi_0, H, \overline{\psi}_1} - \overline{\overline{d}} =$

$= [\overline{\psi}_1|V - \overline{\overline{\psi}}_1|V] = d(\overline{\psi}_1, \overline{\overline{\psi}}_1)|_{\mathcal{X}} = -\overline{\overline{d}}$, de unde restul.

Tot în ipotezele $(*)$, dacă ψ_λ sînt soluţii ale problemelor $(*)_\lambda$, $\lambda = 0, 1$, vom zice că problema $(*)$ admite soluţie cu capete (ψ_0, ψ_1), dacă există o soluţie a ei ψ, a.î.:

$$\psi : \psi_0 \simeq \psi_1 .$$

Reluînd notaţiile din lema II 3.5, vom considera următoarea situaţie ($\mathcal{X} \overset{q}{\twoheadrightarrow} \mathcal{A}$ este un AGD-morfism)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathcal{X}, \mathcal{A})_{01} & \longrightarrow & \mathcal{X}_{01} & \xrightarrow{q_{01}} & \mathcal{A}_{01} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \otimes dt} & & \uparrow{\scriptstyle \otimes dt} & & \uparrow{\scriptstyle \otimes dt} & & \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{X}, \mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{X} & \xrightarrow{q} & \mathcal{A} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

($\ker q_{01}$ a fost notat cu $(\mathcal{X}, \mathcal{A})_{01}$)

18. Lema: In această diagramă comutativă de complexe de colanţuri, morfismele (omogene de grad +1) verticale induc izo în H^*.

Dem: Evident, va fi suficient să demonstrăm afirmaţia pentru săgeata verticală centrală, de exemplu; vom examina diagrama :

$$\begin{tikzcd}
H^p(\mathcal{X}\otimes(t,dt)) \arrow[r] & H^p(\mathcal{X}\oplus\mathcal{X}) \arrow[r] & H^{p+1}\mathcal{X}_{01} \arrow[r] & H^{p+1}(\mathcal{X}\otimes(t,dt)) \arrow[r] & H^{p+1}(\mathcal{X}\oplus\mathcal{X}) \\
H^p\mathcal{X} \arrow[u, "s", "j^*"'] \arrow[r, "id+id"] & H^p\mathcal{X}\oplus H^p\mathcal{X} \arrow[u, equal] \arrow[r, "(-1)^p(-id+id)"] & H^p\mathcal{X} \arrow[u, "(\otimes dt)^*"'] \arrow[r, "0"] & H^{p+1}\mathcal{X} \arrow[u, "s", "j^*"'] \arrow[r, "id+id"] & H^{p+1}\mathcal{X}\oplus H^{p+1}\mathcal{X} \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

(unde şirul exact de coomologie superior provine din:

$0 \longrightarrow \mathcal{X}_{01} \longrightarrow \mathcal{X}\otimes(t,dt) \xrightarrow{|t=0+|t=1} \mathcal{X}\oplus\mathcal{X} \to 0)$ şi vom aplica

5-lema.

19. Lemă: Fie ψ_0, respectiv $\overline{\psi}_1$, soluţii pentru $(*)_0$, respectiv $(*)_1$ (ca în finalul lemei 17) şi: $\mathcal{M}\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}_n(V) \xrightarrow{\overline{\overline{\psi}}} \mathcal{X}\otimes(t,dt)$ a.î.: $\overline{\overline{\psi}}|\mathcal{M} = H$ şi: $\overline{\overline{\psi}}: \psi_0 \simeq \overline{\psi}_1$.

Există o altă soluţie pentru $(*)_1$, fie ea ψ_1 şi: $\overline{\psi}: \mathcal{M}\underset{\tau}{\otimes}\mathcal{L}_n(V) \longrightarrow \mathcal{X}\otimes(t,dt)$ a.î.: $\overline{\psi}|\mathcal{M} = H$ şi : $\overline{\psi}: \psi_0 \simeq \psi_1$

şi astfel încît:

$$\delta[c_{\overline{\psi}}] = 0 \quad \text{in} \quad \mathrm{Hom}(V, H^{n+1}(\mathcal{X},\mathcal{Q})_{01})$$

(unde δ e indus de şirul exact: $0 \to (\mathcal{X},\mathcal{Q})_{01} \to \mathcal{X}_{01} \xrightarrow{g_{01}} \mathcal{Q}_{01} \to 0$,

iar : $c_{\overline{\psi}}: V \to Z^n\mathcal{Q}_{01}$, deoarece capetele sînt soluţii).

Dem: După lema 18, putem considera:

$$\begin{tikzcd}
H^n\mathcal{Q}_{01} \arrow[r, "\delta"] & H^{n+1}((\mathcal{X},\mathcal{Q})_{01}) & \\
H^{n-1}\mathcal{Q} \arrow[u, "(\otimes dt)^*", "s"'] \arrow[r, "\delta"] & H^n(\mathcal{X},\mathcal{Q}) \arrow[u, "(\otimes dt)^*", "s"'] \arrow[r] & H^n\mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

şi dacă luăm: $d: V \longrightarrow H^n(\mathcal{X},\mathcal{Q})$ a.î. : $(\otimes dt)^* d = \delta[c_{\overline{\overline{\psi}}}]$,

putem observa că: $d_{|\mathcal{X}} = 0$. După lema 13, putem alege o soluţie pentru $(*)_1$, fie ea ψ_1 , cu proprietatea: $d(\psi_1,\overline{\psi}_1)=(-1)^n d$

Calculăm: $d_{\psi_0,H,\psi_1} - d_{\psi_0,H,\overline{\psi}_1} = [\psi_1|V - \overline{\psi}_1|V] = d(\psi_1,\overline{\psi}_1)|\mathcal{X} = 0$,

şi, cum a doua obstrucţie e nulă, rezultă existenţa unui $\overline{\overline{\psi}}$ care satisface toate cerinţele lemei, exceptînd-o pe ultima şi cea mai importantă, de care ne vom ocupa deîndată.

Vom nota: $\Delta = (\overline{\psi} - \overline{\overline{\psi}})|V$, şi avem: $V \xrightarrow{\Delta} Z^n(\mathcal{X}\otimes(t,dt))$,

$\Delta_{|t=0} = 0$, şi: $V \xrightarrow{\Delta_{|t=1}} Z^n(\mathcal{X},\mathcal{A})$ a.î.: $[\Delta_{|t=1}] = d(\psi_1,\overline{\psi}_1)$.

Avem: $\delta[c_{\overline{\psi}}] - \delta[c_{\overline{\overline{\psi}}}] = \delta[(q\otimes id)\Delta]$. Deoarece avem:

$(\Delta - \Delta_{|t=1}\otimes t) \in Hom(V,\mathcal{X}^n_{01})$ şi: $q_{01}(\Delta - \Delta_{|t=1}\otimes t) = (q\otimes id)\Delta$,

putem scrie: $\delta[(q\otimes id)\Delta] = [d(\Delta - \Delta_{|t=1}\otimes t)] =$

$= (-1)^{n+1}(\otimes dt)^*[\Delta_{|t=1}]$, de unde lema.

20. <u>Lemă</u>: Dacă există ψ_0, ψ_1 şi $\overline{\psi}$ cu proprietăţile din concluziile precedente, atunci problema $(*)$ admite soluţie cu capetele date (ψ_0,ψ_1).

<u>Dem</u>: $\delta[c_{\overline{\psi}}] = 0$ implică existenţa unui $c : V \to Z^n\mathcal{X}_{01}$ a.î.: $q^*_{01}[c] = [c_{\overline{\psi}}]$, deci şi existenţa triunghiului comutativ:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}^{n-1}_{01} \arrow[rr, "q_{01}"] & & \mathcal{A}^{n-1}_{01} \\ & V \arrow[ul, "\Gamma"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

a.î.: $c_{\overline{\psi}} - q_{01}c = d\gamma = q_{01}d\Gamma$.

Definind: $\psi : \mathfrak{M}\otimes_{\tau}\mathcal{L}_n(V) \longrightarrow \mathcal{X}\otimes(t,dt)$

prin: $\begin{cases} \psi|\mathfrak{M} = H & \text{şi :} \\ \psi|V = \overline{\psi}|V - c - d\Gamma \end{cases}$

obţinem soluţia căutată.

Ca un ultim preliminariu de topologie, vom construi modele minimale pentru aplicaţiile care intră în spaţii nilpotente, în strînsă legătură cu TN al celor din urmă:

21. Lemă: Fie : $Y \in [Nil\,fin]$, $\mathcal{M}$ modelul său minimal construit cu ajutorul TN (ca în Prop.2), A un spaţiu, $\mathcal{A} \xrightarrow{\rho'} \mathcal{A}(A)$ o AGD geometrică pentru A, şi aplicaţia: $A \xrightarrow{f} Y$. (Vom nota cu f_α compunerile: $A \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{pr_\alpha} Y_\alpha$, unde pr_α sînt proiecţiile canonice ale limitei proiective). Vom presupune, inductiv, că avem construite:

$$\tilde{f}_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{A} \quad \text{şi} : h_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{A}(A) \otimes (t, dt),\ h_\alpha : \rho' \tilde{f}_\alpha \simeq f_\alpha^* \rho_\alpha$$

şi vom extinde aceste construcţii la pasul următor.

Dem: Considerăm diagrama: ($\mathcal{M}_\alpha$ va fi notat $\mathcal{M}$)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_\alpha \otimes_{\tau_\alpha} \mathcal{L}_n(V_\alpha) \arrow[r, "\rho_{\alpha+1}"] & \mathcal{A}(Y_{\alpha+1}) \arrow[dr, "f^*_{\alpha+1}"] & \\
\mathcal{M}_\alpha \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\tilde{f}_\alpha"'] & \mathcal{A}(Y_\alpha) \arrow[u, "\rho^*_{\alpha+1}"] \arrow[r, "f^*_\alpha"] & \mathcal{A}(A) \\
& \mathcal{A} \arrow[ur, "\rho'"'] &
\end{tikzcd}$$

$\tilde{f}_\alpha$ se extinde d.n.d.

$\tilde{f}^*_\alpha \circ [\tau_\alpha] = 0$ d.n.d.

$\rho'^* \tilde{f}^*_\alpha \circ [\tau_\alpha] = 0$ d.n.d.

$(f^*_\alpha)^* \rho^*_\alpha \circ [\tau_\alpha] = 0$ d.n.d.

$(f^*_{\alpha+1})^* (\rho^*_{\alpha+1})^* \rho^*_\alpha \circ [\tau_\alpha] = 0$

d.n.d. $(f^*_{\alpha+1})^* \rho^*_{\alpha+1} j^* \circ [\tau_\alpha] = 0$

Fie deci: $\tilde{f}_{\alpha+1}$ extensie.

Notînd: $\tilde{\tilde{d}} = d_{f^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1}, h_\alpha, \rho' \tilde{\tilde{f}}_{\alpha+1}}$, alegem : $d \in \mathrm{Hom}(V, H^n \mathcal{A})$

a.î.: $\tilde{\tilde{d}} = \rho'^* d$,şi apoi luăm : $\tilde{f}_{\alpha+1}$ o extensie a lui $\tilde{f}_\alpha$

a.î.: $[\tilde{f}_{\alpha+1}|V_\alpha - \tilde{\tilde{f}}_{\alpha+1}|V_\alpha] = -d$. Ca de obicei, rezultă:

$d_{f^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1}, h_\alpha, \rho' \tilde{f}_{\alpha+1}} = 0$, de unde existenţa lui $h_{\alpha+1}$.

In final, vom obţine modelul minim al: $\varinjlim \tilde{f}_\alpha = \tilde{f} : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$,

şi omotopia: $\varinjlim h_\alpha = h : \mathcal{M} \to \mathcal{A}(A) \otimes (t, dt)$.

22. <u>Propoziţie</u>: Fie, în plus faţă de condiţiile Lemei 21, $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$, o incluziune de CW-complex relativ, şi fie dată diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(X) \arrow[r, twoheadrightarrow, "i^*"] & \mathcal{A}(A) \\ \mathfrak{X} \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, twoheadrightarrow, "q"] & \mathcal{A} \arrow[u, "\rho'"'] \end{tikzcd}$$

în care: $\mathfrak{X} \xrightarrow{\rho} \mathcal{A}(X)$ reprezintă o AGD, geometrică pentru X. Atunci: dacă în diagrama (A) există săgeata punctată care să o facă comutativă, atunci în diagrama (T) există săgeata punctată care o face comutativă :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{F}"'] & & \mathcal{A} \\ & \mathfrak{X} \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd} \quad (A) \qquad \begin{tikzcd} Y & & A \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "i"] \\ & X \arrow[ul, dashed, "F"] & \end{tikzcd} \quad (T)$$

<u>Dem</u>: Vom presupune, inductiv, existenţa patratului comutativ

$$(*) \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_{\alpha+1}"] \arrow[d, "i"'] & Y_{\alpha+1} \arrow[d, "p_{\alpha+1}"] \\ X \arrow[r, "F_\alpha"] & Y_\alpha \end{tikzcd}$$

şi a unei omotopii:

$$H_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{A}(X) \otimes (t, dt)$$

cu proprietăţile:

$$\begin{cases} (i^* \otimes id) H_\alpha = h_{\alpha+1} | \mathcal{M}_\alpha = h_\alpha ; \\ H_\alpha | t=0 = \rho \tilde{F}_\alpha ; \\ H_\alpha | t=1 = F_\alpha^* \rho_\alpha . \end{cases}$$

Sîntem conduşi la a lua în considerare diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}(Y_{\alpha+1}) \arrow[r, "f^*_{\alpha+1}"] & \mathcal{O}(A) & \\
 & \mathcal{O}(Y_\alpha) \arrow[r, "F^*_\alpha"] \arrow[u, "p^*_{\alpha+1}"] & \mathcal{O}(X) \arrow[u, "i^*"'] & \\
 n_\alpha \underset{\tau_\alpha}{\otimes} \mathcal{L}_n(V_\alpha) \arrow[ruu, "\rho_{\alpha+1}"] \arrow[rrr, "\tilde{f}_{\alpha+1}"] & & & \mathfrak{A} \arrow[luu, "\rho'"'] \\
 n_\alpha \arrow[u, "j"] \arrow[ruu, "\rho_\alpha"] \arrow[rrr, "\tilde{F}_\alpha"] & & & \mathfrak{X} \arrow[u, "q"'] \arrow[luu, "\rho"']
\end{tikzcd}
$$

cît şi diagrama:

$$
(**) \qquad
\begin{tikzcd}
n_\alpha \underset{\tau_\alpha}{\otimes} \mathcal{L}_n(V_\alpha) \arrow[r, "h_{\alpha+1}"] & \mathcal{O}(A) \otimes (t, dt) \\
n_\alpha \arrow[u, "j"] \arrow[r, "H_\alpha"] & \mathcal{O}(X) \otimes (t, dt) \arrow[u, "i^* \otimes id"']
\end{tikzcd}
$$

Rezultă, ca în lema 16, problemele algebrice:

$$
(**)_0 \qquad
\begin{tikzcd}
n_\alpha \underset{\tau_\alpha}{\otimes} \mathcal{L}_n(V_\alpha) \arrow[r, "\rho' \tilde{f}_{\alpha+1}"] \arrow[rd, "\rho \tilde{F}_{\alpha+1}" near start] & \mathcal{O}(A) \\
n_\alpha \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\rho \tilde{F}_\alpha"'] & \mathcal{O}(X) \arrow[u, "i^*"']
\end{tikzcd}
\qquad \text{și :}
$$

$$
(**)_1 \qquad
\begin{tikzcd}
n_\alpha \underset{\tau_\alpha}{\otimes} \mathcal{L}_n(V_\alpha) \arrow[r, "f^*_{\alpha+1} \rho_{\alpha+1}"] & \mathcal{O}(A) \\
n_\alpha \arrow[u, "j"] \arrow[r, "F^*_\alpha \rho_\alpha"] & \mathcal{O}(X) \arrow[u, "i^*"']
\end{tikzcd}
$$

După lema 16, problema $(**)_1$ are soluţie, deci, după Prop .15, problema (*) are soluţie. Să mai observăm că, dacă $\hat{F}_{\alpha+1}$ e soluţie pentru (*), $\hat{F}^*_{\alpha+1} \cdot \rho_{\alpha+1}$ e soluţie pentru $(**)_1$ şi că, dacă $\hat{\hat{F}}_{\alpha+1}$ e a doua soluţie pentru (*) atunci:

(23) $d(\hat{F}_{\alpha+1}, \hat{\hat{F}}_{\alpha+1}) = -d(\hat{F}^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1}, \hat{\hat{F}}^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1})$, scriind: $\rho_{\alpha+1} = \mu + \rho^*_{\alpha+1}\beta$, cu : $\beta : V_\alpha \longrightarrow \mathcal{U}^n(Y_\alpha)$, ca în demonstraţia Cor. III 2.2. Fie deci : $\bar{\bar{F}}_{\alpha+1}$ o soluţie pentru (*).

Folosim întîi lema 17, cu: $\psi_0 = \rho\tilde{F}_{\alpha+1}$ şi : $\bar{\bar{\psi}}_1 = \bar{\bar{F}}^*_{\alpha+1} \circ \rho_{\alpha+1}$ pentru a găsi o altă soluţie pentru (*), fie ea $\bar{F}_{\alpha+1}$ şi omotopia $\bar{\bar{\psi}}$ cu proprietăţile corespunzătoare (reluînd pur şi simplu demonstraţia, folosind lema 14 în locul lemei 13, şi profitînd de egalitatea între diferenţele din cazul topologic şi diferenţele între corespondenţii algebrici, remarcată anterior prin (23)).

In continuare, vom reciti lema 19, (urmînd instrucţiunile din paranteză precedentă), găsind o nouă soluţie a problemei (*), fie ea $F_{\alpha+1}$ şi o omotopie $\bar{\psi}$ cu proprietăţile menţionate în lema 19. Modificăm $\bar{\psi}$, obţinînd omotopia ψ, ca în lema 20.

Vom lua atunci: $H_{\alpha+1} = \psi$, încheind inducţia, precum şi construcţia aplicaţiei F cu proprietatea din enunţ.

Putem însfîrşit enunţa următorul:

24. Corolar: (injectivitatea pe morfisme). Fie: $Y, Y' \in [\text{Nilfin}]$ şi : $Y' \xrightarrow{f_0, f_1} Y$ aplicaţii. Considerăm modelul minimal η al lui Y, construit cu ajutorul TN, şi: $\eta' \xrightarrow{\rho'} \mathcal{U}(Y')$, un model minimal arbitrar. Fie: $\eta \xrightarrow{\tilde{F}} \eta' \otimes (t, dt)$, $\tilde{F} : \tilde{f}_0 \simeq \tilde{f}_1$. In aceste condiţii:

$$f_0 \simeq f_1 .$$

Dem: Putem să ne punem în condiţiile Prop.22 pentru a construi omotopia cerută, după cum urmează:

$$A \xhookrightarrow{i} X \longrightarrow Y'\times I \xhookrightarrow{i} Y'\times I$$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\rho'} \mathcal{A}(A) \longrightarrow \mathcal{M}'\oplus\mathcal{M}' \xrightarrow{\rho'\oplus\rho'} \mathcal{A}(Y')\oplus\mathcal{A}(Y')$$

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\rho} \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{M}'\otimes(t,dt) \xrightarrow{(p_{Y'}^{*}\circ\rho')\cdot p_I^{*}} \mathcal{A}(Y'\times I)$$

$$A \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Y'\times I \xrightarrow{f_0\cup f_1} Y$$

$$\mathcal{X} \xrightarrow{q} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}'\otimes(t,dt) \xrightarrow{(t=0)+(t=1)} \mathcal{M}'\oplus\mathcal{M}'$$

şi:

$$\text{(A)} \longrightarrow \begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\tilde{f}_0+\tilde{f}_1"] \arrow[dr, "\tilde{F}"'] & \mathcal{M}'\oplus\mathcal{M}' \\ & \mathcal{M}'\otimes(t,dt) \arrow[u, "(t=0)+(t=1)"'] \end{tikzcd}$$

§2. DICTIONARUL ECHIVALENTEI DE CATEGORII

In acest paragraf vom indica unele aspecte ale dicționarului echivalenței de categorii stabilite anterior.

Dacă $X_0 \in [Q\text{-fin}]$, considerăm modelul minimal:

$$\mathcal{M}_{X_0} \in [\mathrm{Minfin}].$$

Din teoria De Rham rațională rezultă că:

$$H^*(X_0) \sim H^*(\mathcal{M}_{X_0}).$$

Este evident faptul că, dacă X_0 este localizantul lui $X \in [\mathrm{Nilfin}]$, atunci: $H^*(X;Q) \sim H^*(\mathcal{M}_{X_0})$,

şi, mai mult: pentru X se poate construi $\mathcal{M}_X$; deoarece : $\mathcal{M}_X \sim \mathcal{M}_{X_0}$, avem : $H^*(X;Q) \sim H^*(\mathcal{M}_X)$.

In cazul în care considerăm omotopia lui X_0 : $\pi_q X_0$, $q \geq 2$, avem : $\mathrm{Hom}(\pi_q X_0, Q) \sim \bigoplus_{n_\alpha = q} V_\alpha$, cu : $V_\alpha = \mathrm{Hom}(\pi_\alpha, Q)$. (notațiile din Prop.1.2).

Aceasta (reluînd notațiile din Th.I.2.15) deoarece avem :

$$\mathrm{Hom}(\pi_q X_0, Q) \sim \bigoplus_i \mathrm{Hom}(I^{i-1}\cdot\pi_q X_0 / I^i\cdot\pi_q X_0, Q).$$

In cazul cînd X_0 e localizantul lui X, ca şi mai sus rezultă că: $\mathrm{Hom}(\pi_q X \otimes Q, Q) \sim \bigoplus_{n_\alpha = q} V_\alpha \sim \pi^q(\mathcal{M}_{X_0}) \sim \pi^q(\mathcal{M}_X)$, $q \geq 2$, $\forall X \in [\mathrm{Nilfin}]$.

Pentru cazul în care vrem să citim şi $\pi_1 X_0$ pe modelul minimal, dăm următoarea teoremă:

1. <u>TEOREMA:</u> Fie G un grup arbitrar şi extensiile centrale:

$$0 \longrightarrow A_{n+1} \longrightarrow G^{n+1} \longrightarrow G^n \longrightarrow 1,$$ introduse în I.2.

In aceste condiții: există $\mathcal{N}$, un model minimal pentru $\varinjlim \mathcal{Q}(K(G^n_\cdot,1))$, astfel încît:

1) $\mathcal{N}$ este model 1-minimal (i.e.: generat în dimensiune 1), şi: scriind : $\mathcal{N} = \mathcal{L}(V)$ şi apoi: $V = \bigcup_p W^p$, ca în Lema II.4.8

2) notînd : $\mathcal{L}(W^p) = {}_p\mathcal{N}$, ${}_p\mathcal{N}$ e model minimal pentru $K(G^p,1)$

3) avem izomorfisme: $Hom(A_p, Q) \sim W^p/W^{p-1}$ şi:

4) considerînd, ca în Lema I.0.5, fibrările principale:

$$K(A_p,1) \hookrightarrow K(G^p,1) \xrightarrow{q_{p,p-1}} K(G^{p-1},1)$$

avem diagramele comutative următoare:

$$\begin{array}{ccc} W^p/W^{p-1} & \xrightarrow{[\tau_{p-1}]} & H^2({}_{p-1}\eta) \\ \wr & & \wr \\ H^1(K(A_p,1)) & \xrightarrow{\tau_{p-1}} & H^2(K(G^{p-1},1)) \end{array}$$, unde:

$[\tau_{p-1}]$ este transgresia extensiei elementare: ${}_{p-1}\eta \hookrightarrow {}_p\eta$, τ_{p-1} este transgresia fibrării considerate, iar izomorfismele verticale sînt date de 2) şi 3).

Demonstrație: Toate spațiile ce apar fiind de tip $K(\pi,1)$, vom nota, pentru simplificare, un asemenea spațiu pur şi simplu cu π .

Modelul minimal η , cu proprietățile indicate, îl vom construi inductiv, considerînd fibrările principale descrise în 4) şi aplicînd Cor.III.2.2, care ne asigură că: dat : ${}_{p-1}\eta \xrightarrow{\rho_{p-1}} \mathcal{A}(G^{p-1})$ (model minimal), există o extensie elementară de forma:

${}_p\eta = {}_{p-1}\eta \otimes_{p-1} \mathcal{Z}_1(V^p)$, care este model minimal pentru $\mathcal{A}(G^p)$, compatibil cu $q^*_{p,p-1}$ - i.e., diagrama:

$$\begin{array}{ccc} {}_p\eta & \xrightarrow{\rho_p} & \mathcal{A}(G^p) \\ \uparrow & & \uparrow q^*_{p,p-1} \\ {}_{p-1}\eta & \xrightarrow{\rho_{p-1}} & \mathcal{A}(G^{p-1}) \end{array}$$

comută-şi în plus:

$V^p \sim Hom(A_p, Q)$. Luînd apoi: $\eta = \lim\limits_{\to} ({}_p\eta)$, toate proprietățile cerute rezultă din această construcție, de îndată ce vom reuşi să arătăm că: ${}_p\eta = \mathcal{Z}(W^p), \forall p$. Pentru aceasta, vom folosi

Lema II.4.8. Demonstraţia teoremei ia sfîrşit deci odată cu demonstraţia următoarelor două leme, care ne pun în posesia ipotezelor (*) şi (**) din enunţul Lemei II.4.8:

2. Lemă: $\mathrm{Ker}\{H^2G^n \longrightarrow H^2G^{n+1}\} = \mathrm{Ker}\{H^2G^n \longrightarrow H^2G\}$, unde nucleul din dreapta se referă la aplicaţia indusă de proiecţia canonică a grupului G : $p_n : G \to G^n$.

Demonstraţie: Categoria omotopică a spaţiilor de tip $K(\pi,1)$ identificîndu-se cu cea a grupurilor (vezi I.0), vom extinde de aici convenţia de notaţie făcută relativ la obiectele de tip $K(\pi,1)$ şi asupra morfismelor. Fie deci B un grup abelian arbitrar, ca grup de coeficienţi, şi : $\alpha \in H^2(G^n;B) \sim [G^n, K(B,2)]$. Există deci, ca în I.0, aplicaţia: $k: G^n \longrightarrow K(B,2)$, cu proprietatea : $\alpha = k^*(u_2)$, pe care o luăm drept aplicaţie clasifiantă a unei fibrări principale p:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d] & \\
 & X \arrow[d, "p"] & \\
G \arrow[ur, dashed, "\bar{p}_n"] \arrow[r, "p_n"] & G^n \arrow[r, "k"] & K(B,2)
\end{tikzcd}$$

Pentru demonstrarea incluziunii netriviale, presupunem: $\alpha \in \mathrm{Ker}\, p_n^*$, sau, echivalent : $p_n^* k^*(u_2) = 0 \Leftrightarrow k\circ p_n \simeq pt$ d.n.d. există ridicarea $\bar{p}_n$. Rezultă că : $p\bar{p}_n(g) = p_n(g) = 1, \forall g \in G_n$ şi deoarece, după Lema I.0.5, p e extensie centrală: $\bar{p}_n(G_n) \subset Z(X)$. Fie : $g \in G$ şi : $\bar{g} \in G_n$, şi deci: $g\bar{g}g^{-1}\bar{g}^{-1} \in G_{n+1}$; vom avea: $\bar{p}_n(g\bar{g}g^{-1}\bar{g}^{-1}) = 1$, şi deci : $G_{n+1} \subset \mathrm{Ker}\,\bar{p}_n$. Există deci factorizarea:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\bar{p}_n"] \arrow[d, "p_{n+1}"'] & X \\
G^{n+1} \arrow[ur, "\bar{p}_{n+1,n}"'] &
\end{tikzcd}$$

care face comutativă diagrama următoare:

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow \\ & \overset{\bar{p}_{n+1,n}}{\nearrow} & X \\ & & \downarrow p \\ G^{n+1} & \xrightarrow{q_{n+1,n}} & G^n \end{array}$$

avem: $\exists\, \bar{p}_{n+1,n} \Leftrightarrow q^*_{n+1,n}\, \alpha = 0$,

deci: $\alpha \in \operatorname{Ker} q^*_{n+1,n}$,

deci: $\operatorname{ker} q^*_{n+1,n} = \operatorname{Ker} p^*_n$.

3. Lema: Fie : $0 \to A_{n+1} \longrightarrow G^{n+1} \longrightarrow G^n \to 1$.

In acest caz transgresia: $\tau : H^1 A_{n+1} \longrightarrow H^2 G^n$ este injectivă.

Dem.: Din: $G^{n+1}/[G^{n+1}, G^{n+1}] \twoheadrightarrow G^n/[G^n, G^n]$, rezultă

că: $\operatorname{Hom}(G^n/[G^n,G^n], Q) \longrightarrow \operatorname{Hom}(G^{n+1}/[G^{n+1}, G^{n+1}], Q)$

este injectivă; este şi surjecţie, deoarece: pentru orice

$f \in \operatorname{Hom}(G^{n+1}/[G^{n+1}, G^{n+1}], Q)$ rezultă:

$$\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker}\{G^{n+1}/[G^{n+1}, G^{n+1}] \longrightarrow G^n/[G^n, G^n]\}$$

Deoarece: $H^1 G^n \sim \operatorname{Hom}(H_1 G^n, Q) \sim \operatorname{Hom}(G^n/[G^n, G^n], Q)$,

va rezulta că: $H^1 G^n \xrightarrow[\sim]{q^*_{n+1,n}} H^1 G^{n+1}$. Aceasta, transcrisă pe şirul spectral al fibrării principale asociate, implică :

$E_\infty^{0,1} = 0$, şi deoarece: $\tau : E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0}$, $\operatorname{Ker} \tau = E_3^{0,1} = E_\infty^{0,1}$,

rezultă afirmaţia lemei.

4. Lema: $\varinjlim \alpha(K(G^n,1)) \to \alpha(K(G,1))$ induce izo în H^1 şi injecţie în H^2.

Dem.: Deoarece : $H^*(\varinjlim \alpha(G^n)) \sim \varinjlim H^*(G^n)$,

este suficient să demonstrăm că:

$\varinjlim H^q G^n \longrightarrow H^q G$ este izo pentru q=1, şi injecţie pentru q=2.

Pentru q=1, este uşor de observat izomorfismul, din explicitarea lui H^1 rezultînd : $H^1G \sim H^1G' \sim H^1G^n, \forall n$ (ca în dem. lemei 3).

Cazul q=2 rezultă din lema 2.

5. Corolar: $\mathcal{N}$ construit în teorema 1 este model 1-minimal pentru $K(G,1)$ şi dacă X este un CW-spaţiu a.î.: $\pi_1 X \sim G$, atunci $\mathcal{N}$ este 1-model minimal pentru X.

Dem.: Considerăm: $X \xrightarrow{f} K(\pi_1 X, 1) = K$, determinată conform teoremei I 0.1, de condiţia : $f_\# = id : \pi_1 X \to \pi_1 K$. Rezultă de aici, standard, că aplicaţia indusă : $f^* : \mathcal{A}(K) \to \mathcal{A}(X)$ este 2-echivalentă în H^*, deci : $\mathcal{N} \to \mathcal{A}(K) \xrightarrow{f^*} \mathcal{A}(X)$ este model 1-minimal pentru X.

După teorema II.4.1, acesta se poate extinde la un model minimal al lui X prin adăugarea de generatori în dimensiune ≥ 2 .

In continuare vom observa următorul lucru: dacă X este un spaţiu a.î. : $\pi_1 X \sim G$ şi $\mathcal{N}$ este construit ca în teorema 1, completăm $\mathcal{N}$ la $\bar{\mathcal{N}}$, model minimal pentru X. Considerăm $\mathcal{M}$, un alt model minimal pentru X; atunci există şi : $\varphi : \bar{\mathcal{N}} \to \mathcal{M}$, un izo . Se observă că : $\bar{\mathcal{N}}_1 = \mathcal{N}$, şi că φ invariază descompunerile de tip $_p\mathcal{N}$, făcute în teorema 1 $(\varphi({}_p\mathcal{N}) = {}_p\mathcal{M}_1)$, deci:

$$ {}_p\mathcal{N}/{}_{p-1}\mathcal{N} \sim {}_p\mathcal{M}_1/{}_{p-1}\mathcal{M}_1 $$

şi deci, în particular:

$W^p/W^{p-1} \sim W^p(\mathcal{M}_1)/W^{p-1}(\mathcal{M}_1)$, unde notaţiile din dreapta desemnează subspaţiile W^p canonic construite plecînd de la modelul 1-minimal $\mathcal{M}_1$. Combinînd cu proprietatea 3) din Th.1, rezultă că: pentru un CW - spaţiu X (nu neapărat nilpotent), rangurile abelianizaţilor de orice ordin ai grupului $\pi_1 X$ se pot regăsi, cu ajutorul oricărui model 1-minimal, $\mathcal{M}$, al lui X, prin:

$$ Hom(A_p(\pi_1 X), Q) \sim W^p(\mathcal{M})/W^{p-1}(\mathcal{M}) \quad . $$

In acest moment, după ce am făcut identificările pe obiecte, trecem la obţinerea identificărilor pe morfisme.

Contextul pentru identificările în coomologie va fi din cel mai general. X, X' vor fi spaţii arbitrare şi : $f : X' \to X$, o aplicaţie între ele. Considerăm aplicaţia indusă : $f^* : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(X')$ şi : $\tilde{f} : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_{X'}$, un model minimal al său. Diagrama omotopie comutativă :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{A}(X') \\ \uparrow{\scriptstyle \rho_X} & & \uparrow{\scriptstyle \rho_{X'}} \\ \mathcal{M}_X & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{M}_{X'} \end{array}$$ ne arată că: $$\begin{array}{ccc} H^*(X;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{f^*} & H^*(X';\mathbb{Q}) \\ \uparrow{\scriptstyle S} & & \uparrow{\scriptstyle S} \\ H^*(\mathcal{M}_X) & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & H^*(\mathcal{M}_{X'}) \end{array}$$

ceea ce ne permite să identificăm f^* cu $\tilde{f}^*$.

In continuare vom detalia modelul minimal al aplicaţiei f, ceea ce ne va înlesni explicitarea aplicaţiei $f_{\#} \otimes id$, $\pi_q(X') \otimes \mathbb{Q} \to \pi_q(X) \otimes \mathbb{Q}$, $q \geq 1$, cu ajutorul modelelor minimale, în condiţii ce vor fi enunţate la momentul potrivit.

Fie : $f : X' \to X$ o aplicaţie de spaţii nilpotente şi de tip finit peste Q. $\mathcal{M}$ şi $\mathcal{M}'$ vor fi modele minimale pentru X, respectiv X', construite ca în prop.1.2 cu ajutorul TN ale spaţiilor considerate.

In acelaşi timp vom considera rafinarea principală a lui f descrisă în teorema I.2.2.2 (permiţînd accentul şi adaptînd în continuare notaţiile la condiţiile actuale).

6. <u>Propoziţie</u>: Fie : $\tilde{f}_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \to \mathcal{M}'_\alpha$ şi : $h_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \to \mathcal{A}(X'_\alpha) \otimes (t, dt)$, $h_\alpha : f_\alpha^* \rho_\alpha \simeq \rho'_\alpha \tilde{f}_\alpha$. In aceste condiţii există : $\tilde{f}_{\alpha+1} : \mathcal{M}_{\alpha+1} \to \mathcal{M}'_{\alpha+1}$ şi : $h_{\alpha+1} : \mathcal{M}_{\alpha+1} \to \mathcal{A}(X'_{\alpha+1}) \otimes (t, dt)$, astfel încît să avem: $\tilde{f}_{\alpha+1}|\mathcal{M}_\alpha = \tilde{f}_\alpha$, $h_{\alpha+1} : f^*_{\alpha+1} \rho_{\alpha+1} \simeq \rho'_{\alpha+1} \tilde{f}_{\alpha+1}$, şi:

$$h_{\alpha+1}|\mathcal{M}_\alpha = (\rho'^*_{\alpha+1} \otimes id) \circ h_\alpha \ .$$

Dem.: Considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}(X_\alpha) \arrow[rr, "f^*_\alpha"] \arrow[dl, "\rho^*_{\alpha+1}"'] & & \mathcal{A}(X'_\alpha) \arrow[dr, "\rho'^*_{\alpha+1}"] & \\
\mathcal{A}(X_{\alpha+1}) \arrow[rrrr, "f^*_{\alpha+1}"] & & & & \mathcal{A}(X'_{\alpha+1}) \\
 & \mathcal{M}_\alpha \arrow[uu, "\rho_\alpha"] \arrow[rr, "\tilde{f}_\alpha"] \arrow[dl] & & \mathcal{M}'_\alpha \arrow[uu, "\rho'_\alpha"'] \arrow[dr] & \\
\mathcal{M}_{\alpha+1} \arrow[uu, "\rho_{\alpha+1}"] & & & & \mathcal{M}'_{\alpha+1} \arrow[uu, "\rho'_{\alpha+1}"']
\end{tikzcd}$$

$\tilde{f}_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}'_{\alpha+1}$ se extinde la $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ d.n.d. $\tilde{f}^*_\alpha \circ [\tau_\alpha] = 0$ d.n.d. $\rho'^*_{\alpha+1} \tilde{f}^*_\alpha \circ [\tau_\alpha] = 0$ d.n.d. $(\rho'^*_{\alpha+1})^* \rho'^*_\alpha \tilde{f}^*_\alpha \circ [\tau_\alpha] = 0$ d.n.d. $(\rho'^*_{\alpha+1})^* (f^*_\alpha)^* \rho^*_\alpha \circ [\tau_\alpha] = 0$, şi deoarece avem:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_{\alpha+1} \arrow[d, "\rho_{\alpha+1}"] \\
X'_{\alpha+1} \arrow[urr, "f_{\alpha+1}"] \arrow[r, "\rho'_{\alpha+1}"] & X'_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] & X_\alpha
\end{tikzcd}$$

, rezultă că: $(\rho'^*_{\alpha+1})^* (f^*_\alpha)^* [k_\alpha] = 0$,

unde $[k_\alpha]$ e clasa caracteristică a lui $\rho_{\alpha+1}$. Diagrama c) (prop.1.2) indică : $[k_\alpha] = \rho^*_\alpha [\tau_\alpha]$, şi deci:există o extensie $\tilde{f}_{\alpha+1}$.

Notăm cu : $\tilde{d} = d_{f^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1},\, (\rho'^*_{\alpha+1} \otimes id)\circ h_\alpha,\, \rho'_{\alpha+1} \tilde{f}_{\alpha+1}}$,

$$\tilde{d} \in Hom(V_\alpha, H^n X'_{\alpha+1}) \ , \text{ unde : } n = n_\alpha .$$

Alegem : $c \in Hom(V_\alpha, Z^n \mathcal{M}'_{\alpha+1})$ astfel încît : $\rho'^*_{\alpha+1} [c] = -\tilde{d}$.

Definim : $\tilde{f}_{\alpha+1} : \mathcal{M}_{\alpha+1} \longrightarrow \mathcal{M}'_{\alpha+1}$ prin: $\tilde{f}_{\alpha+1}|\mathcal{M}_\alpha = \tilde{f}_\alpha$ şi:

$\tilde{f}_{\alpha+1}|V_\alpha = \tilde{f}_{\alpha+1}|V_\alpha + c$. Notăm cu : $\tilde{d} = d_{f^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1},\, (\rho'^*_{\alpha+1} \otimes id) h_\alpha,\, \rho'_{\alpha+1} \tilde{f}_{\alpha+1}}$

Calculăm : $\tilde{d} - \tilde{\tilde{d}} = \rho'^{*}_{\alpha+1}[c] = -\tilde{\tilde{d}}$, deci : $\tilde{d} = 0$,

ceea ce permite găsirea omotopiei $h_{\alpha+1}$ cu proprietățile dorite.

7. Propozitie: In situația din propoziția precedentă, putem scrie (în mod unic) : $\tilde{f}_{\alpha+1}|V_\alpha = b + \ell$, cu : $b : V_\alpha \longrightarrow \mathcal{M}'^{n}_{\alpha}$ şi : $\ell : V_\alpha \longrightarrow V'_\alpha$. Are loc atunci următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\pi_\alpha, Q) \arrow[r, "f^{\#}_{\#}"] \arrow[d, phantom, sloped, "\equiv"] & \mathrm{Hom}(\pi'_\alpha, Q) \arrow[d, phantom, sloped, "\equiv"] \\
V_\alpha \arrow[r, "\ell"] & V'_\alpha
\end{tikzcd}$$

(unde $f^{\#}_{\#}$ este descrisă în Th.I.2.22, c)).

Dem.: Vom considera următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(F'_\alpha) & \mathcal{Z}_n(V'_\alpha) \arrow[l, "\nu'_\alpha"'] \\
\mathcal{A}(X'_{\alpha+1}) \arrow[u, "j'^{*}"] & \mathcal{M}'_{\alpha+1} \arrow[l, "\rho'_{\alpha+1}"'] \arrow[u, "q'"'] \\
\mathcal{A}(X'_\alpha) \arrow[u, "p'^{*}_{\alpha+1}"] & \mathcal{M}'_\alpha \arrow[l, "\rho'_\alpha"'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

, unde :

F'_α este fibra lui $p'_{\alpha+1}$, cu incluziunea : $K(\pi'_\alpha, n) = F'_\alpha \xrightarrow{j'} X'_{\alpha+1}$;

$\mathcal{Z}_n(V'_\alpha)$ se consideră cu $d = 0$;

$q'|\mathcal{M}'_\alpha = 0$ şi : $q'|V'_\alpha = id$;

$\nu'_\alpha|V'_\alpha = j'^{*}\mu'$, şi deci ν'_α reprezintă un model minimal

Definim : $\psi_0, \psi_1 : \mathcal{M}_{\alpha+1} \longrightarrow \mathcal{A}(F'_\alpha)$ prin :

$\psi_0 = j'^{*}\rho'_{\alpha+1}\tilde{f}_{\alpha+1}$, respectiv : $\psi_1 = j'^{*} f^{*}_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1}$.

Deoarece perechea $(f_{\alpha+1}, f_\alpha)$ este morfism de fibrări şi deoarece : $p_{\alpha+1} j' = p^t$ şi : $p_{\alpha+1} j = p^t$, rezultă că:

$\psi_i|\mathcal{M}_\alpha = 0$, pentru i=0,1.

Calculăm : $\psi_i|V_\alpha$ $(i=0,1)$; $\psi_0|V_\alpha = j'^{*}\rho'_{\alpha+1}\tilde{f}_{\alpha+1}|V_\alpha = j'^{*}\rho'_{\alpha+1}(b+\ell) =$

$= j'^{*}\rho'_{\alpha+1}b + j'^{*}\rho'_{\alpha+1}\ell = \nu'_\alpha \ell$, şi $\psi_1|V_\alpha$ se calculează ţinînd cont de faptul că: $\rho_{\alpha+1}|V_\alpha = \mu + p^*_{\alpha+1}\beta$, cu $\beta : V_\alpha \to \mathfrak{A}^n(X_\alpha)$ (ca în demonstrația corolarului III 2.2) și avem:

$$\psi_1|V_\alpha = j'^* f^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1}|V_\alpha = j'^* f^*_{\alpha+1}(\mu + p^*_{\alpha+1}\beta) =$$

$= j'^* f^*_{\alpha+1}\mu + j'^* f^*_{\alpha+1} p^*_{\alpha+1}\beta = (f^*_{\alpha+1})|\, j^*\mu$, unde : $f_{\alpha+1}|$ desemnează restricția la F'_α .

Să observăm totodată că: $\psi_i : V_\alpha \longrightarrow Z^n\mathfrak{A}(F'_\alpha)$, $i = 0,1$. Avem:

8. Lema. Fie : $\psi : \mathfrak{M}_{\alpha+1} \longrightarrow \mathfrak{A}(F'_\alpha)$ cu : $\psi|\mathfrak{M}_\alpha = 0$ și : $\psi : V_\alpha \longrightarrow Z^n\mathfrak{A}(F'_\alpha)$. In aceste condiții, există: $\bar\psi : \mathfrak{M}_{\alpha+1} \longrightarrow \mathcal{L}_n(V'_\alpha)$, a.î.: $\nu'_\alpha\bar\psi \simeq \psi$ și : $[\psi|V_\alpha] = \nu'^*_\alpha[\bar\psi|V_\alpha]$.

Dem.: Considerăm :

$$\begin{tikzcd} V_\alpha \arrow[r, "{[\psi|V_\alpha]}"] \arrow[dr, dashed] & H^n(F'_\alpha) \\ & V'_\alpha \arrow[u, "\wr\ \nu'^*_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

deci : $\exists\, c : V_\alpha \longrightarrow V'_\alpha$ a.î. : $\nu'_\alpha c = \psi|V_\alpha + dh$, cu : $h : V_\alpha \to \mathfrak{A}^{n-1}(F'_\alpha)$

Definim $\bar\psi$ prin : $\bar\psi|\mathfrak{M}_\alpha = 0$ și : $\bar\psi|V_\alpha = c$. Rezultă fără dificultate afirmațiile sublemei.

9. Lemă. Fie : $\mathfrak{M}_{\alpha+1} \xrightarrow{H} \mathcal{L}_n(V'_\alpha)\otimes(t,dt)$; $H : \bar\psi_0 \simeq \bar\psi_1$.

Rezultă că: $\bar\psi_0|V_\alpha = \bar\psi_1|V_\alpha$.

Dem.: După lema II 2.7, rezultă:

$$0 = d_{\bar\psi_0, H|\mathfrak{M}_\alpha, \bar\psi_1} = \left[\bar\psi_1|V_\alpha - \bar\psi_0|V_\alpha - \int_0^1 Q(t)\,dt\right],$$

unde Q(t) e definit de egalitatea: $H\tau_\alpha = P(t) + (-1)^n Q(t)\,dt$;

dar: $H\tau_\alpha = Hd|V_\alpha = dH|V_\alpha = 0$, de unde sublema.

Reluăm considerațiile precedente, observînd că:

$f^*_{\alpha+1}\rho_{\alpha+1} \simeq \rho'_{\alpha+1} f_{\alpha+1}$, și deci : $\psi_0 \simeq \psi_1$, ceea ce ne permite să afirmăm că: $\bar\psi_0|V_\alpha = \bar\psi_1|V_\alpha$, deoarece: $\bar\psi_i$ au semnificația din sub lemă 8, și, conform cu corolarul II 3.11, din: $\psi_0 \simeq \psi_1$, rezultă că: $\bar{\psi}_0 \simeq \bar{\psi}_1$, şi se poate aplica sublema 9.

Din sublema 8 reiese că: $[\psi_0|V_\alpha] = [\psi_1|V_\alpha]$, şi, ţinînd cont de calculele anterioare, rezultă: $[\nu'_\alpha \ell] = [(f_{\alpha+1})^* j^* \mu]$.

Deci am obţinut următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd}
V_\alpha \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "\nu_\alpha^*"', "s"] & V'_\alpha \arrow[d, "s"', "\nu'^*_\alpha"] \\
H^n(F_\alpha) \arrow[r, "(f_{\alpha+1})^{**}"] \arrow[d, phantom, "|||"] & H^n(F'_\alpha) \arrow[d, phantom, "|||"] \\
\mathrm{Hom}(\pi_\alpha, Q) \arrow[r, "f^\#_\#"] & \mathrm{Hom}(\pi'_\alpha, Q)
\end{tikzcd}$$

10. <u>COROLAR</u>: In ipotezele precedente; $\tilde{f} = \varinjlim \tilde{f}_\alpha$.

Introducem noţiunea de <u>algebră simplă</u>, ca fiind: o algebră minimală $\mathcal{M}$ pentru care: $d(V^n) \subset \mathcal{M}^{n+1}_{n-1}$, $\forall n$.

1.1. <u>PROPOZITIE</u>. Fie $X \in [Q - \text{fin}]$. X este spaţiu simplu d.n.d. $\mathcal{M}_X$ este algebră simplă.

<u>DEMONSTRATIE</u>. Reluînd construcţia TN al lui X (teorema I.2.15) şi a modelului minimal asociat (propoziţia 1.2) rezultă implicaţia directă. Pentru implicaţia inversă procedăm în felul următor: Construim un TN asociat modelului simplu, ca în propoziţia 1.4, cu proprietatea: $\mathrm{card}\,\{\alpha \mid n_\alpha = n\} = 1$, $\forall n$.

Vom presupune inductiv că X_α este simplu şi, pentru a arăta că $X_{\alpha+1}$ este simplu, considerăm fibrarea asociată:
$K(\pi_\alpha, n) \xrightarrow{j} X_{\alpha+1} \xrightarrow{p_{\alpha+1}} X_\alpha$, cu şirul de omotopie al fibrării ca şir de $\pi_1(X_{\alpha+1}, t)$ - module, ca în lema I.2.10.

Pentru: $q \neq n, n+1$, $(p_{\alpha+1})_\#$ este izo. în π_q şi deci şirul exact de omotopie se reduce la:

$$0 \to \pi_{n+1}(X_{\alpha+1}, p^t) \to \pi_{n+1}(X_\alpha, p^t) \to \pi_\alpha \xrightarrow{j\#} \pi_n(X_{\alpha+1}, p^t) \to \pi_n(X_\alpha, p^t) \to 0$$

Din ipotezele noastre: $\ddot{\pi}_q X_\alpha = 0$, pentru $q \geq n$, și deci: $\pi_{n+1}(X_{\alpha+1}, p^t) = 0$, ceea ce arată că $j\#$ e izo, deci demonstrația e terminată.

Menționăm că implicația directă are loc pentru $X \in [Nilfin]$.

Pentru a utiliza cu succes propozițiile 6 și 7 sînt necesare cîteva preliminarii algebrice.

12. LEMA. Fie: $H : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \otimes (t, dt)$, $H : f_0 \simeq f_1$, cu $\mathcal{M}$ simplă și $\mathcal{N}$ minimală. In acest caz: $f_0^{(\#)} = f_1^{(\#)} : \pi^*(\mathcal{M}) \to \pi^*(\mathcal{N})$.

DEMONSTRATIE. Calculăm $H(a \cdot b)$, pentru $a \in \mathcal{M}, b \in \mathcal{M}, |a|, |b| \geq 2$.

Dacă: $H(a) = P_a(t) + Q_a(t)\,dt$, și analog $H(b)$ și $H(a \cdot b)$, rezultă din: $H(a \cdot b) = H(a) \cdot H(b)$ că: $P_{a \cdot b}(t) = P_a(t) \cdot P_b(t)$ și: $Q_{a \cdot b}(t) = P_a(t) \cdot Q_b(t) + P_b(t) \cdot Q_a(t)$.

Din Lema II.2.7 rezultă că:

$$f_1|V^n - f_0|V^n = du + \int_0^1 Q(t)\,dt$$

Algebra $\mathcal{M}$ fiind simplă, putem să afirmăm că: $d(V^n) \subset (\bigoplus_{p \geq 1} \mathcal{M}^p) \cdot (\bigoplus_{p \geq 1} \mathcal{M}^p)$, ceea ce ne asigură, împreună cu calculul precedent, că: $\left(\int_0^1 Q(t)\,dt\right) \in \mathcal{N}^+ \cdot \mathcal{N}^+$, de unde lema.

OBSERVATIE: Rezultatul nu se menține dacă se renunță la condiția de simplitate, păstrînd generalitatea asupra omotopiei H.

In cele ce urmează, vom indica modul în care restricţia simplităţii poate fi evitată, impunînd condiţii suplimentare asupra omotopiei.

Dacă X şi Y sînt spaţii punctate, o omotopie care respectă punctele - bază face comutativă diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{h} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ pt \times I & \longrightarrow & pt \end{array}$$

Prin analogie: $H : \mathcal{M} \to \mathcal{N} \otimes (t, dt)$ se va numi <u>omotopie punctată</u> (între algebre minimale), dacă următoarea diagramă, în care am notat cu ε augmentările, comută:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{H} & \mathcal{N} \otimes (t, dt) \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon \cdot id \\ Q & \hookrightarrow & (t, dt) \end{array}$$

13. <u>LEMA:</u> Dacă : $H : f_0 \simeq f_1$ e o omotopie punctată, între algebrele minimale $\mathcal{M}$ şi $\mathcal{N}$, atunci concluzia lemei 12 se menţine: $f_0^{(\#)} = f_1^{(\#)}$.

<u>DEMONSTRATIE:</u> Dacă $a \in \mathcal{M}$ şi $|a| = 1$, păstrînd

notațiile din lema 12 și calculînd $H(a\cdot b)$, pentru b arbitrar, se observă că: $Q_{a\cdot b}(t) = P_a(t)\cdot Q_b(t)$, deoarece: $Q_a(t)=0$, din condiția suplimentară impusă asupra omotopiei.

Inducția după α $\left(\mathcal{M} = \varinjlim \mathcal{M}_\alpha !\right)$ și recitirea lemei 12 termină demonstrația.

14. <u>COROLAR</u>. Fie : $f : X' \to X$ o aplicație de spații simple și de tip finit peste Q. Dacă $\mathcal{M}$ și $\mathcal{M}'$ vor fi modelele minimale ale lor, construite ca în propoziția 1.2 cu ajutorul T.N. al spațiilor, dacă și $\tilde{f}$ va fi un model minimal arbitrar al aplicației f, au loc identificările:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\pi_n X, Q) & \xrightarrow{f^{\#}_{\#}} & \mathrm{Hom}(\pi_n X', Q) \\ \| \wr & & \| \wr \\ \pi^n(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\tilde{f}^{(\#)}} & \pi^n(\mathcal{M}') \end{array}$$

<u>DEM.</u>: vezi propoziția 7, corolarul 10, Prop.11 și Lema 12.

14'. <u>Reluare</u>: In continuare vom ilustra modul de întrebuințare a echivalenței de categorii expuse în paragraful 1, reluînd chestiunea 14, și dînd o nouă demonstrație.

Considerînd sfera S^n și : $c_n \in Z^n\mathcal{Q}(S^n)$, un cociclu reprezentînd generatorul din $H^n(S^n)$, definim: $\mathcal{M}_n = \mathcal{L}_n(x)$, cu : $dx = 0$ și : $\rho_n(x) = c_n$, ceea ce reprezintă un model minimal pentru S^n și deci și pentru S^n_o.

Dacă : $X \in [Q\text{-}fin]$ și X este simplu, putem interpreta:

$$\pi_n(X) = [S^n, X] \sim [S^n_o, X],$$

și dacă : $f : X' \to X$ este

o aplicație între asemenea spații, avem identificările:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X') & \xrightarrow{f^\#} & \pi_n(X) \\ \parallel\!\mid & & \parallel\!\mid \\ [S^n_0, X'] & \xrightarrow{f^\#} & [S^n_0, X] \end{array}$$

Trecînd la modele minimale, identificăm în continuare:

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} [S^n_0, X'] & \xrightarrow{f^\#} & [S^n_0, X] \\ \parallel\!\mid & & \parallel\!\mid \\ [\mathcal{M}_{X'}, \mathcal{M}_{S^n}] & \xrightarrow{\tilde{f}^\#} & [\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_{S^n}] \end{array}$$

De folos se va dovedi următoarea lemă:

15. <u>LEMA.</u> Fie : $\mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{L}_p(V)$ o extensie elementară şi: $\mathcal{B}$ o AGD a.î. : $H^p\mathcal{B}, H^{p+1}\mathcal{B}$, să fie nule.

In aceste ipoteze rezultă:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \xleftarrow[\sim]{j^\#} [\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{L}_p(V), \mathcal{B}] .$$

<u>DEM.</u> Folosim obstrucţiile coomologice din II.2:

a) surjectivitatea cu lema II.2.4;

b) injectivitatea cu lema II.2.7.

Continuăm identificările începute, completînd diagrama $(*)$ conform cu Lema 15, în modul următor:

$$\begin{array}{ccc} [S^n_0, X'] & \xrightarrow{f^\#} & [S^n_0, X] \\ \parallel\!\mid & & \parallel\!\mid \\ [\mathcal{M}'_n, \mathcal{M}_{S^n}] & \xrightarrow{\tilde{f}^\#} & [\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{S^n}] \end{array}$$

Tinînd cont că $\mathcal{M}_{S^n}$ se obţine extinzînd modelul n-minimal construit anterior, avem:

$$\mathrm{Hom}_{AGD}(\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{S^n}) \sim \mathrm{Hom}_Q(V^n, Q)$$, pentru

orice algebră minimală $\mathcal{M} = \mathcal{L}(V)$, izomorfismul asociind lui $\varphi \in \mathrm{Hom}_{AGD}(\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{S^n})$ pe : $\varphi : V^n \longrightarrow \mathcal{M}^n_{S^n} = Q$.

Dacă $\mathcal{M}$ este simplă, rezultă din lema 12 egalitatea: $\mathrm{Hom}_{AGD}(\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{S^n}) = [\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{S^n}]$, ceea ce permite continuarea identificărilor în modul următor:

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{M}'_n, \mathcal{M}_{S^n}] & \xrightarrow{\tilde{f}^\#} & [\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{S^n}] \\ \parallel\!\!\!| & & \parallel\!\!\!| \\ \mathrm{Hom}(\pi^n \mathcal{M}_{X'}, Q) & \xrightarrow{\tilde{f}^{(\#)\#}} & \mathrm{Hom}(\pi^n \mathcal{M}_X, Q) \end{array}$$

In definitiv, am obţinut identificarea:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X') & \xrightarrow{f^\#} & \pi_n(X) \\ \parallel\!\!\!| & & \parallel\!\!\!| \\ \mathrm{Hom}(\pi^n \mathcal{M}_{X'}, Q) & \xrightarrow{\tilde{f}^{(\#)\#}} & \mathrm{Hom}(\pi^n \mathcal{M}_X, Q) \end{array}$$ adică

dualul corolarului 14.

§ 3. MODELUL MINIMAL AL SPATIULUI DE LASSOURI. O APLICATIE

Dacă X şi Y sînt spaţii, reamintim că spaţiul funcţional al aplicaţiilor continue din Y în X, $\mathrm{Map}(Y,X)$, a fost înzestrat cu topologia compact-deschisă. In continuare, vom uza, pentru aceste spaţii, de notaţia (Y,X). Vom considera aplicaţia: $(Y,X)\times Y \xrightarrow{e} X$, definită prin: $e(f,y) = f(y)$. Pentru orice spaţiu Z, avem izomorfismul de evaluare:

(1) $$(Z, (Y,X)) \underset{\sim}{\xrightarrow{ev}} (Z\times Y, X)$$, dat prin:

$ev(\varphi)(z,y) = \varphi(z)(y)$. Se observă cu uşurinţă că el induce un alt izomorfism: (2) $$[Z, (Y,X)] \underset{\sim}{\xrightarrow{[ev]}} [Z\times Y, X]$$

Dacă $f \in (Y,X)$, vom nota cu $(Y,X)_f$ componenta conexă p.a. care conţine pe f, considerînd în acelaşi timp pe f aici ca punct bază.

Revenind la chestiunea notațiilor, dacă Y și X au puncte-bază, subspațiul din (Y,X) al aplicațiilor care respectă punctele-bază <u>va fi notat</u> $(Y,X)_*$ ($(Y,X)_{*f}$ este componenta conexă a lui f).

Dacă și Z este spațiu punctat, bijecția (1) induce o bijecție:

$$(3) \quad (Z,(Y,X))_* \xrightarrow[\sim]{ev} (Z\times Y, X)_{rel\, f}, \text{ unde:}$$

f punctează (Y,X), iar notația din dreapta desemnează acele aplicații care, restrînse la $pt \times Y$, sînt egale cu f.

Dacă Z e c.p.a., (3) se poate citi ca:

$$(4) \quad (Z,(Y,X)_f)_* \xrightarrow[\sim]{ev} (Z\times Y, X)_{rel\, f}$$

Naturalitatea fiind evidentă, avem bijecția indusă:

$$(5) \quad [Z,(Y,X)_f]_* \xrightarrow[\sim]{[ev]} [Z\times Y, X]_{rel\, f}, \text{ unde :}$$

în notația din stînga se consideră clase de omotopie liberă de aplicații punctate, iar notația din dreapta sugerează clase de omotopie liberă de aplicații din $(Z\times Y, X)_{rel\, f}$. Dacă Z e CW - complex c.p.a., punctat cu o 0-celulă: $pt \times Y \xrightarrow{j} Z\times Y$ e cofibrare și avem egalitatea: (6) $[Z\times Y, X]_{rel\, f} = [Z\times Y, X]_{rel[f]}$, unde în dreapta considerăm clasele: $[\varphi] \in [Z\times Y, X]$ a.î.: $j^*[\varphi] = [f]$.

In continuare intenționăm să exploatăm corespondentul algebric al bijecțiilor (5)-(6) și pentru a o putea face vom presupune în plus că: $Z_0 \in [Q\text{-}fin]$ și în plus: $Y \in [Nilfin]$ este un CW - complex finit, c.p.a. și X este nilpotent și satisfăcînd condiția: $\pi_q(X)$ este grup finit generat, pentru $\forall\, q \geq 1$ (ipotezele I).

7. LEMA: Dacă X e nilpotent şi satisface condiţia de finitudine de mai sus, atunci $X \in [Nilfin]$.

DEM.: Cazul $q>1$ fiind evident favorabil, vom trata cazul $q=1$, apelînd abundent la tehnicile dezvoltate în [3] pentru cazul necomutativ (dar nilpotent). Considerăm extensiile centrale introduse în Cap.I ($G = \pi_1(X)$) :

$$0 \to A_{n+1} \to G^{n+1} \to G^n \to 1$$

I.2.6 indică toate grupurile prezente mai sus a fi nilpotente, iar din faptul că G^{n+1} este finit generat rezultă (cf.Th.5.7 [3] p.46): A_{n+1} (abelian) finit generat şi deci: $\dim_Q A_{n+1} < \infty$.

Considerăm în continuare: $X \xrightarrow{\ell_X} X_0$ şi: $Y \xrightarrow{\ell_Y} Y_0$ localizări. Th.3.11 ([3], p.77) indică faptul că aplicaţia indusă de $\ell_X : (Y,X)_f \to (Y,X_0)_{\ell_X f}$ "localizează", i.e.: $(Y,X_0)_{\ell_X f}$ e Q-spaţiu şi aplicaţia descrisă mai sus are proprietăţile echivalente indicate în Th.I.3.4. După ce vom arăta că, în ipotezele făcute: $(Y,X)_f \in [Nilfin]$ va rezulta evident : $(Y,X_0)_{\ell_X f} \in [Q\text{-}fin]$.

8. LEMA: $(Y,X)_f \in [Nilfin]$ (fără ipoteze de nilpotenţă ptr.Y).

DEM.: Y fiind presupus complex finit, vom face inducţie după $n=\dim Y$, cazul $n=0$ fiind rezolvat anterior în Lema 7. Vom considera, ca în demonstraţia Th.2.5, [3] p.64, mai întîi cazul punctat : $(Y,X)_{*f}$. Avem cofibrarea : $V \to Y^n \to Y^{n+1}$ (V buchet de n-sfere), care dă naştere "fibrării" : $(Y^{n+1},X)_{*f} \to (Y^n,X)_{*f} \to (V,X)_{*pt}$ (unde spaţiul din stînga reprezintă tipul de omotopie pentru o componentă conexă a fibrei, fapt ce se va observa că nu afectează). Th.I.2.11

ne permite să afirmăm că : $(Y^{n+1}, X)_{*f}$ este nilpotent şi demonstraţia - în cazul punctat - o vom încheia prin următoarea:

9. <u>SUBLEMA.</u> Fie : $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ o fibrare de spaţii nilpotente, E ,B c.p.a. şi a.î. $\pi_q(E)$ şi $\pi_q(B)$ să fie grupuri finit generate, pentru $\forall q \geq 1$. Dacă $F = \cup F_\alpha$ e scrierea componentelor conexe, atunci : $\pi_q(F_\alpha), q \geq 1$, e finit generat, $\forall \alpha$.

<u>DEM.:</u> Practic se poate considera: F c.p.a.,

şi scrie şirul exact de omotopie; avem :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} \partial \longrightarrow \pi_q(F) \longrightarrow \ker p_\# \longrightarrow 0$$

şi :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} p_\# \longrightarrow \pi_{q+1}(B) \longrightarrow \operatorname{Im} \partial \longrightarrow 0$$

din care rezultă, folosind din nou [3] p.46, afirmaţia sublemei.

Afirmaţia lemei - în cazul nepunctat - va rezulta la rîndul ei din următoarele consideraţii: cofibrarea: $pt \hookrightarrow Y$ induce fibrarea : $(Y,X)_* \hookrightarrow (Y,X) \xrightarrow{p} X$. In şirul de omotopie al ei vor apărea : $\pi_q((Y,X)_{*f}), \pi_q(X)$ (grupuri finit generate) şi, analog cu sublema, ţinînd cont de nilpotenţa spaţiului $(Y,X)_f$ ([3], p. 64), rezultă : $\pi_q((Y,X)_f)$ grupuri finit generate, deci, cu lema 7:

$$(Y,X)_f \in [Nilfin].$$

Din proprietăţile localizării, în diagramele:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "l_Y"] \arrow[dr, "l_X f"'] & Y_0 \arrow[d, dashed, "g"] \\ & X_0 \end{tikzcd} \quad \text{şi :} \quad \begin{tikzcd} (Y,X_0)_{l_X f} \times Y \arrow[r, "id \times l_Y"] \arrow[dr, "e"'] & (Y,X_0)_{l_X f} \times Y_0 \arrow[d, dashed, "e'"] \\ & X_0 \end{tikzcd}$$

există săgeţile punctate care le fac omotopic comutative.

Are loc diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
{[\varphi]\in[Z_0,(Y,X_0)_{\ell_{xf}}]_*} \arrow[r, "{[ev]}", "\sim"'] \arrow[dr] & {[Z_0\times Y,X_0]_{rel\,\ell_{xf}}} \\
 & {[Z_0\times Y_0,X_0]_{rel\,g}} \arrow[u, "s\,(id\times\ell_Y)^{\#}"']
\end{tikzcd}$$

unde săgeata aplecată lucrează prin : $[\varphi]\longrightarrow[e']\circ([\varphi]\times[id_{Y_0}])$, şi este bijectivă.

Constatăm că au fost îndeplinite condiţiile pentru a putea uza de echivalenţa de categorii stabilită anterior.

Considerăm: $\mathcal{Z}=\mathfrak{M}_{Z_0}$, $\mathcal{X}=\mathfrak{M}_{X_0}$, $\mathcal{Y}=\mathfrak{M}_{Y_0}$ şi : $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(Y,X_0)_{\ell_{xf}}$. Cu : $\mathcal{X}\xrightarrow{E}\mathfrak{M}\otimes\mathcal{Y}$ vom nota modelul minimal al aplicaţiei e' şi cu $\tilde{g}$, modelul minimal al lui g.

Rezultă deci următoarea bijecţie:

(10) $$[\mathfrak{M},\mathcal{Z}]\xrightarrow{\sim}[\mathcal{X},\mathcal{Z}\otimes\mathcal{Y}]_{rel[\tilde{g}]}$$

(unde notaţia făcută desemnează acele aplicaţii din $[\mathcal{X},\mathcal{Z}\otimes\mathcal{Y}]$ care prin săgeata: $[\mathcal{X},\mathcal{Z}\otimes\mathcal{Y}]\to[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, indusă de proiecţia pe $\mathcal{Y}$, cad peste $[\tilde{g}]$) dată prin : $[\varphi]\longrightarrow([\varphi]\otimes[id_{\mathcal{Y}}])\circ[E]$; aceasta pentru $\forall\,\mathcal{Z}\in[\mathrm{Minfin}]$. In continuare, considerăm următorul functor covariant:

$$F:[\mathrm{Minfin}]\longrightarrow \mathrm{Ens}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z} \arrow[d, "\varphi"'] & {} \arrow[r] & {} & {[\mathcal{X},\mathcal{Z}\otimes\mathcal{Y}]_{rel[\tilde{g}]}} \arrow[d, "(\varphi\otimes id)_{\#}"] \\
\mathcal{Z}' & & & {[\mathcal{X},\mathcal{Z}'\otimes\mathcal{Y}]_{rel[\tilde{g}]}}
\end{tikzcd}$$

Să observăm întîi că din triunghiurile comutative ce definesc pe g şi e' avem: $E\in[\mathcal{X},\mathfrak{M}\otimes\mathcal{Y}]_{rel[\tilde{g}]}$.

Deci perechea $(\mathcal{M}, E \in F(\mathcal{M}))$ constituie o pereche de reprezentare pentru functorul F, în sensul din [15] pg.61-63, ţinînd cont de naturalitatea în $\mathcal{Z}$ a bijecţiilor(10).

11. AFIRMATIE. Fie X şi Y, în ipotezele I. Dată: f:Y ⟶ X, se poate construi functorul F ca mai sus, perfect determinat.

Dacă: $(\overline{\mathcal{M}}, \overline{E} \in F(\overline{\mathcal{M}}))$ este o pereche de reprezentare a functorului F, rezultă: $\overline{\mathcal{M}}$ este modelul minimal pentru $(Y,X)_f$.

DEM.: Din unicitatea perechii de reprezentare rezultă: $\overline{\mathcal{M}} \sim \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ construit anterior; deoarece avem : $\mathcal{M} = \mathcal{M}(Y,X_0)_{\ell_X f}$, şi deoarece am amintit că: $(Y,X)_f \longrightarrow (Y,X_0)_{\ell_X f}$ este localizare, rezultă cele dorite.

In cele ce urmează, cu titlu de exemplificare a puterii efectiv calculatorii a metodelor teoriei raţionale a omotopiei, vom indica modul de determinare a modelului minimal pentru spatii de lassouri, de forma: (S^1, X), unde X va fi un spaţiu simplu conex şi cu grupurile de omotopie finit generate (sau, echivalent, după [1], p.509, Cor.16, cu grupurile de omologie întreagă finit generate).

Să menţionăm că, în ipotezele făcute, (S^1,X) este c.p.a. Bijecţia (2) devine:

$$[Z,(S^1,X)] \xrightarrow[\sim]{[ev]} [Z\times S^1, X], \ \forall Z \text{ c.p.a.}$$

Deci, luînd $Z_0 \in [Q\text{-fin}]$ arbitrar şi considerînd localizări pentru S^1 şi X, avem triunghiul comutativ:

$$\begin{array}{ccc} [\varphi]\in[Z_0,(S^1,X_0)] & \xrightarrow[\sim]{[ev]} & [Z_0\times S^1, X_0] \\ & \searrow & \Big\uparrow s \, (id\times \ell_{S^1})^{\#} \\ & & [Z_0\times S^1_0, X_0], \text{ unde} \end{array}$$

săgeata înclinată e dată de:

$$[\varphi] \longrightarrow [e']\circ([\varphi]\times[id_{S^1_0}]),$$

iar e' e construit ca în cazul general al spaţiilor funcţionale.

Trecînd la modele minimale: $\mathcal{Z}=\mathcal{M}_{Z_0}$, $\mathcal{X}=\mathcal{M}_X$, $\mathcal{Y}=\mathcal{M}_{S^1}$,

$\mathcal{M}=\mathcal{M}_{(S^1,X)}$ şi : $E:\mathcal{X}\to\mathcal{M}\otimes\mathcal{Y}$, rezultă bijecţia:

$$(P)\quad \begin{array}{ccc} [\mathcal{M},\mathcal{Z}] & \xrightarrow{\sim} & [\mathcal{X},\mathcal{Z}\otimes\mathcal{Y}] \\ [\varphi] & \longrightarrow & ([\varphi]\otimes[id_{\mathcal{Y}}])\circ[E] \end{array}$$

naturală în $\mathcal{Z}\in[Minfin]$.

Deci: $(\mathcal{M},E)$ constituie o pereche de reprezentare a functorului $F: F(\mathcal{Z})=[\mathcal{X},\mathcal{Z}\otimes\mathcal{Y}]$, ca în cazul general, şi deci, analog cu afirmaţia 1.1, dată orice altă pereche de reprezentare fie ea $(\overline{\mathcal{M}},\overline{E})$, $\overline{\mathcal{M}}$ va fi model minimal al spaţiului de lassouri (S^1,X).

Pentru a găsi deci modelul minimal al acestui spaţiu, va trebui să rezolvăm problema de universalitate (P), i.e.: să construim o AGD $\overline{\mathcal{M}}\in[Minfin]$ şi un AGD-morfism: $\overline{E}:\mathcal{X}\to\overline{\mathcal{M}}\otimes\mathcal{Y}$, astfel încît să fie realizată bijecţia (P), pentru orice $\mathcal{Z}\in[Minfin]$.

Vom începe prin a face cîteva precizări asupra modelelor $\mathcal{Y}$ şi $\mathcal{X}$. Deoarece X e simplu conex, rezultă: $\mathcal{X}=\mathcal{L}(V)$, cu: $V=\bigoplus_{n>1}V^n$ (vezi dicţionarul echivalenţei de categorii). Pe de altă parte, să observăm că: $\mathcal{Y}=\mathcal{L}(y)$, unde : $|y|=1$ şi : $dy=0$, reprezintă un model minimal pentru S^1 (nu avem decît să alegem $x\in Z^1\mathcal{A}(S^1)$, a.î. $[x]$ să genereze H^1S^1 şi apoi să definim: $\rho:\mathcal{Y}\to\mathcal{A}(S^1)$ prin : $\rho(y)=x$.)

Dacă V are drept bază familia elementelor omogene $\{x_i\}$, vom defini (ca AG) : $\overline{\mathcal{M}}=\mathcal{L}(\{x_i,\overline{x}_i\})$, unde : $|\overline{x}_i|=|x_i|-1$, şi apoi (ca AG- morfism): $\overline{E}:\mathcal{L}(\{x_i\})\longrightarrow\mathcal{L}(\{x_i,\overline{x}_i\})\otimes\mathcal{L}(y)$ prin : $\overline{E}x_i=x_i\otimes 1+\overline{x}_i\otimes y$.

Afirmăm că: există o unică diferenţială $\overline{d}$, pentru care $\overline{\mathcal{M}}$ devine AGD, iar $\overline{E}$ devine AGD-morfism.

Pentru aceasta, vom considera unica derivare de grad -1, $\sigma:\mathcal{X}\to\overline{\mathcal{M}}$, dată, pe generatori, prin : $\sigma x_i=\overline{x}_i$.

Condiţia ca $\bar{E}$ să fie AGD - morfism revine la:

$$\begin{cases} \bar{d}x_i = dx_i \ ; \\ \bar{d}\bar{x}_i = -\sigma dx_i \end{cases}$$

unde d desemnează diferenţiala lui $\mathcal{X}$, şi aceste condiţii determină unic diferenţiala $\bar{d}$.

Se verifică fără dificultate că avem o bijecţie:

(pentru orice AGD $\mathcal{Z}$): $\mathrm{Hom}_{AGD}(\bar{\mathcal{M}}, \mathcal{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{AGD}(\mathcal{X}, \mathcal{Z} \otimes \mathcal{Y})$

dată prin : $\varphi \longrightarrow (\varphi \otimes id_{\mathcal{Y}}) \circ \bar{E}$.

De aici putem deduce că perechea $(\bar{\mathcal{M}}, \bar{E})$ reprezintă o soluţie a problemei de universalitate (P).

Pentru a putea conchide că $\bar{\mathcal{M}}$ reprezintă modelul minimal al spaţiului de lassouri (S^1, X), rămîne de verificat faptul că $\bar{\mathcal{M}} \in [\mathrm{Minfin}]$.

De compozabilitatea diferenţialei $\bar{d}$ reiese fără dificultate din construcţia acesteia, şi din decompozabilitatea diferenţialei d. Algebra $\bar{\mathcal{M}}$ e o algebră liberă şi de tip finit, odată cu $\mathcal{X}$. Nilpotenţa algebrei $\bar{\mathcal{M}}$ reiese de asemenea uşor, inspectînd încă o dată definiţia lui $\bar{d}$ şi ţinînd cont de minimalitatea lui $\mathcal{X}$. Pe de altă parte ştim că: o algebră liberă, de tip finit şi nilpotentă şi cu diferenţiala decompozabilă, este (vezi lema II.4.10) minimală.

Am reuşit deci, avînd la dispoziţie un model minimal al spaţiului X, să descriem, în mod precis, un model al spaţiului funcţional (S^1, X). Ar trebui menţionat aici faptul că: în prezenţa unei aplicaţii: $f: Y \to X$, deîndată ce avem la dispoziţie un model minimal al acesteia : $\mathcal{M}_Y \xleftarrow{\tilde{f}} \mathcal{M}_X$, un algoritm asemănător permite construirea unei algebre nilpotente, $\mathcal{B}$, care are proprietatea că $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ este model minimal pentru spaţiul funcţional general $(Y, X)_f$ ([Watkiss]). Remarcabil este faptul că, în cazul deosebit de particular pe care l-am avut în vedere aici $(Y=S^1)$, situaţia se simplifică în mod excepţional şi algebra $\mathcal{B}=\overline{\mathcal{M}}$, obţinută prin procedeul general, este propriul ei model minimal.

Să considerăm şi cîteva exemple simple de determinare a modelului $\overline{\mathcal{M}}$:

Fie : $\mathcal{X} = \mathcal{L}(x)$, cu : $|x| = 2n-1$ $(n>1)$ şi : $dx = 0$.

(spaţii X care au un astfel de model minimal vor apare în secţiunea următoare, consacrată exemplelor). Atunci:

$$\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{L}(x,\bar{x}), \text{ cu : } dx = d\bar{x} = 0.$$

Fie : $\mathcal{X} = \mathcal{L}(x,y)$, cu : $|x| = 2n$ $(n\geq 1)$, $|y| = 2kn-1$ $(k>1)$

şi : $dx = 0$, $dy = x^k$.

(din nou, atragem atenţia asupra faptului că vom avea ocazia să întîlnim spaţii familiare, al căror model minimal este de acest tip).

In acest caz: $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{L}(x,\bar{x},y,\bar{y})$, cu : $d\bar{x} = d\bar{x} = 0$

şi : $dy = x^k$, $d\bar{y} = k\cdot x^{k-1}\bar{x}$.

Făcînd: n=1 şi k=2, regăsim exemplul II.5.15, cu ultima derivată modificată într-un mod evident neesenţial peste Q.

In [16] se arată că: (Teorema 2, pg.9):

Numerele Betti ale lui $\overline{\mathcal{M}}$ sînt nemărginite d.n.d. Algebra de coomologie $H^*\mathcal{X}$ e cu cel puţin doi generatori.

Aparenţa obscuritate a acestui enunţ, se dovedeşte extrem de luminoasă în următorul context:

Fie M o varietate compactă înzestrată cu o metrică Riemaniană. O mai veche problemă de geometrie Riemaniană era să se formuleze condiţii în care metrica are o infinitate de geodezice periodice, geometric distincte.

Renunţînd la a mai impune condiţii complicate asupra metricii, Gromoll-Mayer arată în [17] că: dacă numerele Betti sînt nemărginite (pentru spaţiul (S^1,M)), atunci există o infinitate de geodezice periodice, şi geometric distincte, cu <u>orice</u> metrică pe M.

Observînd că condiţiile lui Gromoll-Mayer ţin de teoria raţională a omotopiei, autorii din [16] au reuşit, în teorema citată, să reducă cerinţa din [17] la condiţia, evident mai palpabilă, ca: (*) "coomologia H^*M să aibă cel puţin doi generatori" (în cazul: M simplu conexă).

In cele viitoare vom observa că afirmaţia de geometrie riemaniană se menţine şi în cazul în care H^*M îndeplineşte condiţia enunţată, iar $\pi_1 M$ este un grup finit arbitrar.

Aceasta va rezulta din:

12. <u>PROPOZITIE</u>. Dacă M este un complex simplicial finit, cu grup fundamental finit, notînd: $G = \pi_1 M$, şi cu $\tilde{M}$ acoperirea universală (pe care G acţionează), atunci: dacă H^*M are proprietatea (*), atunci $H^*\tilde{M}$ are aceeaşi proprietate.

Pentru a dovedi propoziţia, vom face cîteva consideraţii puţin mai generale.

Vom introduce <u>categoria G-complexelor</u>, ca avînd drept obiecte complexe simpliciale K, pentru care G acţionează simplicial, şi drept morfisme aplicaţii simpliciale şi ech., unde G e un grup finit.

Dacă K este un G-complex, atunci $\mathcal{A}(K)$, definită în Th.III 1.14, este GAGD, cu acţiunea: $g \longrightarrow (g^{-1})^*$.

Dacă p este morfism de G-complexe, atunci p^* este morfism de G-AGD.

13. <u>Lema</u>. Fie K şi K', G-complexe (K' fiind G-trivial) şi : $p : K \longrightarrow K'$ un G-morfism a.î.: 1) p este surjectiv pe simplexe;

2) $p\sigma_1 = p\sigma_2$ implică: există $g \in G$ a.î. : $\sigma_2 = g\sigma_1$.

In acest caz: $\mathfrak{A}(K') \xrightarrow[\sim]{p^*} \mathfrak{A}(K)^G$ este izomorfism.

DEM.: Din : p^* ech. rezultă:

$p^*\mathfrak{A}(K') \subset \mathfrak{A}(K)^G$, deoarece K' este G-trivial, iar:

1) implică p^* injectivă şi 2) implică surjectivitatea.

14. COROLAR. Fie K un G-complex. Spaţiul - cît K/G capătă în mod natural structură de G-complex trivial şi a.î. proiecţia naturală: $p : K \longrightarrow K/G$ să fie morfism de G-complexe.

Atunci avem: $\mathfrak{A}(K/G) \xrightarrow[\sim]{p^*} \mathfrak{A}(K)^G$, şi de aici rezultă, ţinînd cont de Th.III 1.14 şi de II 0.3, 0.4 că:

$$H^*(|K|/G) \sim H^*(|K|)^G .$$

15. COROLAR

Dacă $M, \tilde{M}$ sînt ca în propoziţia 12, atunci:

$H^*M = (H^*\tilde{M})^G$ (cu coeficienţi Q).

DEM.: [1] pg.144, ne arată că $\tilde{M}$ se poate triangula a.î. Corolarul 14 să devină aplicabil.

Corolaul 15 termină demonstraţia propoziţiei 12.

In cazul în care $M \in [Nilfin]$ rezultă mai mult: M_o simplu conex şi deci: $\tilde{M}$ şi M au aceeaşi localizare şi deci: $H^*M = H^*\tilde{M}$, şi în particular rezultă că : $\pi_1 M = G$ acţionează trivial în $H^*(\tilde{M}; Q)$.

§ 4. EXEMPLE

Intenţionăm să prezentăm aici o serie de clase de situaţii favorabile, în care, dat spaţiul X, modelul minimal $\mathfrak{M}_X$ devine efectiv calculabil. Dacă, în plus, spaţiul în chestiune este în $[Nilfin]$, interesul prezentat de aceste clase de cazuri devine evident, în lumina rezultatelor din secţiunile 1 şi 2 ale acestui capitol: cunoaşterea lui $\mathfrak{M}_X$ implică cunoaşterea tipului de omotopie al localizării X_o, pe care îl vom mai numi, în ipoteza $X \in [Nilfin]$, tipul de omotopie raţională al lui X, şi deci controlul tutuidee va trebui să menționăm faptul că, în general, algebra de Rham $\mathcal{A}(X)$ e un obiect complicat şi greu de manipulat în calculații efective, prin contrast cu algebra de coomologie H^*X. Din acest motiv, toate tipurile de exemple ce vor apare vor fi spații formale, i.e.: spații X pentru care : $\mathcal{A}(X) \overset{c}{\simeq} H^*X$ (vezi II.5) şi pentru care, deci: $\mathfrak{M}_X = \mathfrak{M}_{H^*X}$. Corpul de caracteristică zero peste care lucrăm va fi precizat de fiecare dată ca fiind Q, R, sau C.

Prima clasă de exemple o vor constitui cazurile în care formalitatea spațiului e impusă de prezența unei extra-structuri.

Dacă M e varietate aproape complexă, vom nota:

$A_C(M) = A(M) \otimes_R C$, şi avem binecunoscuta descompunere:

$A^n_C(M) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(M)$. Notînd tot cu d diferențiala algebrei $A_C(M)$, în cazul în care M e varietate complexă, e iarăşi binecunoscută descompunerea : $d = \partial + \bar\partial$, cu ∂ derivare de bigrad (1,0) şi $\bar\partial$ de bigrad (0,1), în raport cu bigraduarea introdusă anterior. Notînd:

$d^c = i(\bar\partial - \partial)$, avem: $d^c(A(M)) \subset A(M)$ (A(M) inclusă canonic în $A_C(M)$), şi d^c induce o altă derivare de AGD (peste R) în A(M), cu proprietatea: $dd^c + d^c d = 0$.

Dacă : $f : M \to M'$ e aplicație olomorfă, atunci $f^* d^c = d^c f^*$, unde : $f^* : A(M') \to A(M)$ e AGD-morfismul natural indus. M se va zice că posedă dd^c- lema dacă:

(1) $\operatorname{Ker} d^c \cap \operatorname{Im} d \subset \operatorname{Im} dd^c$, ceea ce implică şi:

(2) $\operatorname{Ker} d \cap \operatorname{Im} d^c \subset \operatorname{Im} dd^c$.

(Pentru notații, afirmații şi explicații, trimitem la [18], p.262-270).

3. PROP.: Dacă M (varietate complexă) posedă dd^c-lema, atunci A(M) e AGD formală.

DEM.: Vom face mereu apel la relațiile (1) şi (2).

Vom nota cu : $Z_{d^c} \subset A(M)$ subalgebra ciclilor relativă la diferențiala d^c, vom observa că d invariază Z_{d^c} şi că induce în mod natural o diferențială în algebra H_{d^c} (coomologia lui A(M) relativă la d^c), notată d^*.

Considerăm AGD-morfismele naturale:

$$(A(M),d) \xleftarrow{j} (Z_{d^c}, d) \xrightarrow{\pi} (H_{d^c}, d^*)$$

Dacă $\alpha \in A(M)$: $d^c\alpha = 0$ implică:
$d\alpha = dd^c\beta$, și deci : $d^* = 0$. Dacă $d\alpha = 0$ și $\alpha = d^c\beta$, atunci : $\alpha = dd^c\gamma$,deci π^* e injecție. Dacă: $d^c\alpha = 0$ rezultă: $d\alpha = dd^c\beta$, de unde: $\pi^*[\alpha - d^c\beta] = [\alpha]$, deci π^* e surjecție.

Dacă: $d^c\alpha = 0$ și : $\alpha = d\beta$, atunci: $\alpha = dd^c\gamma$, deci j^* e injecție. In sfîrșit, dacă $d\alpha = 0$, atunci : $d^c\alpha = dd^c\beta = -d^c d\beta$, de unde : $j^*[\alpha + d\beta] = [\alpha]$, deci j^* e surjecție.

Următorul șir de echivalențe coomologice simple:

$$(4)\quad (A(M),d) \xleftarrow{j} (Z_{d^c}, d) \xrightarrow{\pi} (H_{d^c}, 0) \xleftarrow{\pi^*} (H^*(Z_{d^c}, d), 0) \xrightarrow{j^*} (H^*M, 0)$$

încheie demonstrația.

5. COROLAR: In ipotezele propoziției, M e spațiu formal (peste Q).

DEM.: Cf. cu Th.III 1.9 și cu Prop.3, putem scrie:

$$(6)\quad H^*\mathcal{U}(M)\otimes_Q R \sim H^*(M;R) \sim H^*A(M) \overset{c}{\simeq} A(M) \overset{c}{\simeq} \mathcal{U}(M)\otimes_Q R$$

de unde, deoarece formalitatea nu depinde de extinderea corpului scalarilor ([12] p.47): $H^*\mathcal{U}(M) \overset{c}{\simeq} \mathcal{U}(M)$.

7. COROLAR: Dacă M e varietate Kähleriană compactă (de exemplu varietate algebrică proiectivă) atunci M e formală. Dacă, în plus, M e spaţiu nilpotent, atunci tipul său de omotopie raţională e consecinţă formală a algebrei de coomologie $H^*(M;Q)$.

DEM.: In [18] , p.262-270 se arată că ipoteza "M Kähleriană" asigură dd^c - lema.

Dacă M e o varietate riemaniană, compactă şi orientată, vom nota (vezi Prop.II.5.17, şi mai ales [13], ultimul cap.) cu : $A(M) \xrightarrow{\Delta} A(M)$, laplacianul, cu : $\mathcal{H}^*M = \ker \Delta \subset A(M)$ subspaţiul graduat al formelor armonice, vom observa că: $\mathcal{H}^*M \subset \ker d$ şi vom reaminti că proiecţia naturală: $\mathcal{H}^*M \xrightarrow{\pi} H^*A(M)$ realizează un izomorfism.

8. PROP.: Dacă M e riemanniană simetrică, atunci A(M) e formală.

DEM.: E suficient de binecunoscut că, în ipoteza suplimentară făcută, $\mathcal{H}^*M$ e subalgebră în A(M). Nu avem atunci decît să considerăm echivalenţa coomologică:

(9) $$(A(M),d) \xleftarrow{j} (\mathcal{H}^*M,0) \xrightarrow{\pi} (H^*A(M),0)$$

10. COROLAR: Spaţiile omogene simetrice ale grupurilor Lie compacte şi conexe sînt spaţii formale.

DEM.: Vom aplica Prop.8 şi Cor.5.

Reluăm, din punctul de vedere formulat la începutul acestei secţiuni, exemplele 7 şi 8 din I.4:

Dacă X e H - spaţiu conex, cu omologia raţională de tip finit, atunci algebra $H^*(X;Q)$ e liberă şi deci, evident: X este spaţiu formal şi : $\mathcal{M}_X = (H^*X, d=0)$. Exemplu:

grupul Lie compact şi conex G. In această situaţie, afirmaţiile stau în picioare şi în cazul spaţiului clasifiant B_G:

$\mathcal{M}_{B_G} = (H^* B_G, d=0)$.

Ultimele exemple se încadrează şi într-o altă clasă de situaţii şi anume acelea în care formalitatea rezultă din structura algebrei de coomologie raţională. Practic, vom relua exemplul II.5.7:

11. <u>PROP.</u>: Dacă $H^* X$ e "simpatică", i.e., izomorfă ca AG cu o algebră $\mathcal{H}$ de tipul : $\mathcal{H} = \mathcal{L}/\mathrm{ideal}(u_1, \dots, u_m)$, unde $\mathcal{L}$ e algebră liberă şi de tip finit, iar $(u_1, \dots, u_m)$ e şir regulat în $\mathcal{L}$, cu proprietatea: $u_i \in \mathcal{L}^+ \cdot \mathcal{L}^+$, $1 \le i \le m$, atunci X este spaţiu formal.

<u>DEM.</u>: Ca în exemplul II.5.7, construim modelul minimal al algebrei $\mathcal{H}$, considerată cu $d=0$, ca fiind: $\mathcal{M} = \mathcal{L} \otimes_{\tau} \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$, $\mathcal{L}$ cu diferenţiala nulă, $|v_i| = |u_i| - 1$ şi: şi : $\tau v_i = u_i$, $1 \le i \le m$. Algebra $\mathcal{H}$ fiind intrinsec formală, $\mathcal{M}_X \sim \mathcal{M}$, şi X e spaţiu formal.

12. <u>EXEMPLE</u> concrete de această natură ar fi:

i) sfera S^{2n-1} : $\mathcal{M}_{S^{2n-1}} = \mathcal{L}(x)$, cu : $|x| = 2n-1$ şi : $dx = 0$;

ii) sfera S^{2n} : $\mathcal{M}_{S^{2n}} = \mathcal{L}(x,y)$ cu : $\begin{cases} |x| = 2n, |y| = 4n-1 \text{ şi :} \\ dx = 0, dy = x^2 \end{cases}$

iii) spaţiile proiective $P^n C$:

$$\mathcal{M}_{P^n C} = \mathcal{L}(x,y) \quad \text{cu} : \begin{cases} |x| = 2, |y| = 2n+1 \text{ şi :} \\ dx = 0, dy = x^{n+1} \end{cases}$$

O altă clasă de exemple ar fi cele construite prin proprietăţi de permanenţă. Avem:

13. <u>PROP.</u>: Fie X, X' spaţii (punctate) formale. Atunci:

i) $X \times X'$ e formal;

ii) $X \vee X'$ e formal.

DEM.: i)

$$\mathcal{A}(X\times X') \overset{c}{\simeq} \mathcal{A}(X)\otimes\mathcal{A}(X') \overset{c}{\simeq} H^*X\otimes H^*X' \sim H^*(X\times X').$$

(am folosit prop.II.5.9 şi III.1.8)

ii) $\mathcal{A}(X\vee X') \overset{c}{\simeq} \mathcal{A}(X)\vee\mathcal{A}(X') \overset{c}{\simeq} H^*X\vee H^*X' \sim H^*(X\vee X')$.

(prop.II.5.10) şi III.1.8).

In acest punct, ar fi momentul ca, avînd în vedere proprietăţi de permanenţă în interiorul categoriei $[Nilfin]$, să ne întrebăm dacă, oare, Propoziţia I.2.14 b) oferă tot ceea ce se poate oferi. Ipotezele făcute acolo, de simplă conexiune, se dovedesc totuşi necesare, după cum arată următorul:

14. EXEMPLU: $X = S^1\vee S^1$ nu e nilpotent. Dacă X ar fi nilpotent, am avea: $X\in[Nilfin]$, şi deci cf.1, $\mathcal{M}_X$ ar trebui să fie în $[Minfin]$. Pe de altă parte însă, exemplul ce precede Prop.II.4.11 arată că X admite un model 1-minimal care nu este de tip finit, ceea ce oferă contradicţia dorită. (Alternativ, se poate observa pur şi simplu că $\pi_1 X$, grup liber-necomutativ - cu 2 generatori, nu e nilpotent).

15. EXEMPLU: Proprietăţile de formalitate nu se transmit spaţiilor funcţionale. Mai precis: (S^1,S^2) nu e formal, cu toate că S^2 este. Ţinînd cont de descrierea făcută mai recent pentru $\mathcal{M}_{S^2}$, de descrierea modelului $\mathcal{M}_{(S^1,S^2)}$ făcută în §3, exemplul II.5.15, arată că : $\mathcal{M}_{(S^1,S^2)}$ nu e formal.

16. LEMA: Fie $\mathcal{A}\circ AGD$ a.î. $H^0\mathcal{A}=k$ şi : $H^1\mathcal{A}=0$. Fie n>0 cu proprietatea: $H^q\mathcal{A}=0$, pentru q>n şi fie date:

$$\mathcal{A} \xleftarrow{\rho_n} \mathcal{M}_n \xrightarrow{\varphi_n} H^*\mathcal{A}$$, cu proprietăţile:

ρ_n şi φ_n sînt modele n-minimale. In aceste condiţii, algebra $\mathcal{A}$ e formală.

DEM.: Vom presupune inductiv, pentru $p \geq n$, că ρ_n, respectiv φ_n, pot fi extinse la modele p-minimale : ρ_p, respectiv φ_p. Reluînd construcţia modelului minimal (Th.II.4.1) şi ţinînd cont de ipotezele suplimentare de simplă conexiune făcute asupra lui $\mathcal{A}$, vom avea, denumind cu $\mathcal{B}$ una din algebrele $\mathcal{A}, H^*\mathcal{A}$, cu ψ unul din morfismele ρ_p, φ_p : ψ se extinde la :

$\mathcal{M}_{p+1} = \mathcal{M}_p \otimes_\tau \Lambda_{p+1}(V^{p+1})$, cu : $V^{p+1} = \mathrm{coker}\{\psi^*: H^{p+1}\mathcal{M}_p \to H^{p+1}\mathcal{B}\}$ $\oplus \mathrm{Ker}\{\psi^*: H^{p+2}\mathcal{M}_p \to H^{p+2}\mathcal{B}\} = H^{p+2}\mathcal{M}_p$ şi : $[\tau] = id$, de unde lema.

17. COROLAR: Dacă X e CW- complex simplu conex şi dacă X^n (unde $n > 1$) desemnează n-scheletul, atunci: formalitatea lui X implică formalitatea lui X^n.

DEM.: Notăm cu j incluziunea $X^n \xrightarrow{j} X$, şi considerăm diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(X) & \mathcal{M} \arrow[l, "\rho"'] \arrow[r, "\varphi"] & H^*X \arrow[d, "j^{**}"] \\
\mathcal{A}(X^n) \arrow[from=u, "j^*"'] & \mathcal{M}_{n-1} \arrow[u] \arrow[l, "\bar\rho_{n-1}"'] \arrow[r, "\bar\varphi_{n-1}"] & H^*X^n
\end{tikzcd}$$

în care ρ şi φ sînt modele minimale, iar φ se obţine în modul următor: din ipoteza de formalitate făcută asupra lui X rezultă (cu lema II.5.3), existenţa unui: $\psi : \mathcal{M} \longrightarrow H^*\mathcal{M}$, cu proprietatea : $\psi^* = id$; punem atunci: $\varphi = \rho^* \circ \psi$. Să observăm că : $\varphi^* = \rho^*$ şi că : $\bar\rho_{n-1}$, $\bar\varphi_{n-1}$ sînt modele (n-1)-minimale.

Vom arăta că $\bar\rho_{n-1}$ respectiv $\bar\varphi_{n-1}$, se pot extinde la modele n-minimale: $\bar\rho_n : \mathcal{M}'_n \longrightarrow \mathcal{A}(X^n)$, respectiv: $\bar\varphi_n : \mathcal{M}'_n \longrightarrow H^*X^n$, în ideea de a aplica lema precedentă. Prin construcţia modelului minimal: $\bar\rho_{n-1}$ se extinde pe:

$$\mathcal{M}_{n-1} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}_n(\operatorname{coker}\{\bar\rho^*_{n-1} : H^n\mathcal{M}_{n-1} \to H^nX^n\} \oplus \ker\{\bar\rho^*_{n-1} : H^{n+1}\mathcal{M}_{n-1} \to H^{n+1}X^n\}) =$$

$$\mathcal{M}_{n-1} \underset{\tau}{\otimes} \mathcal{Z}_n([H^nX^n / j^{**}\rho^*H^n\mathcal{M}_{n-1}] \oplus H^{n+1}\mathcal{M}_{n-1}) \text{ , unde :}$$

$$\tau_{|\operatorname{coker}} = 0 \quad \text{și :} \quad [\tau_{|\ker}] = \text{incluziune} \; .$$

Considerații analoage rămîn valabile și pentru $\bar\varphi_{n-1}$.

Nu avem decît să ținem cont de egalitatea: $\rho^* = \varphi^*$

pentru a putea deduce existența unui model n-minimal comun.

<u>OBS.:</u> Ipotezele : $H^1\mathcal{A} = 0$ (lema 16) și : $\pi_1 X = 0$ (Cor.17) se pot înlătura, fără a dăuna concluziilor respective. Ipoteza $\pi_1 X = 0$ e bine a fi menținută în dorința ca X^n să rămînă în $[\mathrm{Nilfin}]$.

18. <u>LEMA:</u> Fie : $K \overset{i}{\hookrightarrow} L$ o incluziune de spații (în $[\mathrm{Nilfin}]$) a.î. (notînd cu L/K colapsarea și cu: $L \xrightarrow{c} L/K$ aplicația canonică a colapsării) L/K să fie simplu conex.

Atunci: dacă H^*K, H^*L sînt algebre libere (în particular rezultă: K și L formale), și dacă în plus: $H^*L \overset{i^*}{\twoheadrightarrow} H^*K$, rezultă: L/K formal.

<u>DEM.:</u> Fără restricții asupra lui K și L, avem: $c \circ i = pt$ (punctul-bază : $K/K \in L/K$) și: oricare ar fi spațiul X din diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & L \arrow[r, "c"] \arrow[d, "f"] & L/K \arrow[dl, dashed, "g"] \\
pt \arrow[r, hook] & X &
\end{tikzcd}$$

avem (gîndind i drept cofibrare): există g a.î. : $g \circ c \simeq f$ d.n.d. $f \circ i \simeq pt$; ultima condiție înseamnă că: există un punct $pt \in X$, astfel ca $f \circ i$ să se factorizeze (pînă la omotopie) în modul indicat în diagramă.

Deoarece : $\tilde{H}^*(L/K) \sim H^*(L,K)$, rezultă: $L/K \in [Nilfin]$ şi deci, localizînd şi uzînd de proprietăţile localizării, obţinem:

$K_0 \xrightarrow{i_0} L_0 \xrightarrow{c_0} (L/K)_0 \ni pt$, unde: $c_0 \circ i_0 \simeq pt$, şi proprietatea descrisă mai sus se menţine, pentru orice spaţiu $X \in [Q\text{-}fin]$.

Echivalenţa de categorii stabilită în§1 ne permite să transcriem această proprietate în categoria $[Minfin]$, după cum urmează:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_K & \mathcal{M}_L \arrow[l, "\tilde{i}"'] & \mathcal{M}_{L/K} \arrow[l, "\tilde{c}"'] \\ Q \arrow[u] & \mathcal{M} \arrow[l, "\varepsilon"] \arrow[u, "\tilde{f}"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

(cu : $\tilde{i} \circ \tilde{c} \simeq \varepsilon$, unde ε va desemna ambiguu augmentarea tuturor algebrelor în chestiune, şi : $\pi^1(\mathcal{M}_{L/K}) = 0$)

Există săgeata $\tilde{g}$ a.î. : $\tilde{c} \circ \tilde{g} \simeq \tilde{f}$ d.n.d. $\tilde{i} \circ \tilde{f} \simeq \varepsilon$.

Fie : $\mathcal{M} \xrightarrow{\rho} H^*\mathcal{M}_{L/K}$, model minimal. Prop.II.4.11 şi consideraţiile făcute pe parcurs ne asigură că : $\mathcal{M} \in [Minfin]$.

Să mai observăm şi că : H^*K, H^*L libere implică faptul că modelele $\mathcal{M}_K$ şi $\mathcal{M}_L$ sînt cu diferenţială nulă, şi deci : $\tilde{i}^* = \tilde{i}$, iar ipoteza : $H^*L \xrightarrow{i^*} H^*K$ implică : $H^*\mathcal{M}_{L/K} \xrightarrow{\tilde{c}^*} H^*\mathcal{M}_L$.

Vom lua : $\tilde{f} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_L = H^*\mathcal{M}_L$, dată de: $\tilde{f} = \tilde{c}^* \circ \rho$, şi avem: $\tilde{i}\tilde{f} = \tilde{i}^*\tilde{c}^*\rho = \varepsilon^*\rho = \varepsilon$, deci există săgeata $\tilde{g}$ ca mai sus.

Examinînd triunghiul comutativ:

$$\begin{tikzcd} H^*\mathcal{M}_L & H^*\mathcal{M}_{L/K} \arrow[l, "\tilde{c}^*"'] \\ H^*\mathcal{M} \arrow[u, "\tilde{f}^*"] \arrow[ur, "\tilde{g}^*"'] & \end{tikzcd}$$

rezultă $\tilde{g}$ izo în H^* şi deci : $\mathcal{M}_{L/K} \simeq H^*\mathcal{M}_{L/K}$.

19. <u>EXEMPLU:</u> Spaţiile Thom MU_n sînt spaţii formale.

Considerăm fibrarea vectorială universală:

$(\gamma^n) : C^n \hookrightarrow E_n \longrightarrow BU_n$ (compară cu [7]) şi fibrările cu discuri (respectiv sfere) asociate:

$$\begin{array}{ccccc} D^{2n} & \hookrightarrow & D(E_n) & \longrightarrow & BU_n \\ \uparrow & & \uparrow i & & \| \\ S^{2n-1} & \hookrightarrow & S(E_n) & \longrightarrow & BU_n \end{array}$$

Spaţiul Thom al lui (γ^n) se defineşte prin: $MU_n = D(E_n)/S(E_n)$.

Din [7], p.143-144, şi p.161-163, rezultă identificările:

$$\begin{array}{ccc} H^*D(E_n) & \xrightarrow{i^*} & H^*S(E_n) \\ \| \! | & & \| \! | \\ \mathcal{Y}(c_1,\dots,c_n) & \xrightarrow{h} & \mathcal{Y}(c_1,\dots,c_{n-1}) \end{array}$$ cu : $|c_i| = 2i$, $1 \le i \le n$, şi : $h(c_i) = c_i$ $(i<n)$, $h(c_n)=0$

(deci i^* surjecţie). Se aplică apoi lema 18.

Fie X şi X', spaţii formale, şi : $f : X \longrightarrow X'$, o aplicaţie. Ea se va zice <u>formală</u> dacă aplicaţia indusă: $f^* : \mathcal{A}(X') \longrightarrow \mathcal{A}(X)$ e formală (în sensul indicat în II.5). Dacă precizăm şi corpul k (ca de obicei, de caracteristică zero), X şi X' rămîn formale peste k, în sensul că avem: $\mathcal{A}(X^{(\prime)}) \otimes_{\mathbb{Q}} k \overset{c}{\simeq} H^*(X^{(\prime)}; k)$ şi atunci f se va zice <u>formală peste k</u> dacă k-AGD morfismul : $\mathcal{A}(X') \otimes_{\mathbb{Q}} k \xrightarrow{f^* \otimes id} \mathcal{A}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} k$ e formal. Vom prezenta, în strînsă legătură cu exemplele de spaţii formale date şi cîteva clase de exemple de aplicaţii formale.

20. <u>PROPOZITIE</u>. Fie M,M' varietăţi complexe ce posedă dd^c-lema.

i) Dacă $M \xrightarrow{f} M'$ e olomorfă, atunci: $A(M) \xleftarrow{f^*} A(M')$ e formală (în categoria R-AGD).

ii) Dacă un grup discret G acţionează pe M prin transformări olomorfe, atunci A(M) e G-formală i.e. (în categoria G-AGD, peste R).

<u>DEM.:</u> i) rezultă urmărind demonstraţia Prop.3 şi observînd că echivalenţa coomologică (4): $A(M) \overset{c}{\sim} H^*M$ e naturală în raport cu aplicaţiile olomorfe.

Pentru ii), să observăm întîi că A(M) devine în mod canonic G-AGD, apoi, ca la i) să remarcăm că, în condiţiile noastre, echivalenţa coomologică (4) are loc de fapt în categoria G-ACD.

21. COROLAR. Fie $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ ca în precedentă.

i) Dacă : $\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{M}'$ e olomorfă, atunci ea e formală peste $\mathbb{R}$.

ii) Dacă grupul discret G acţionează pe M prin transformări olomorfe, atunci M e spaţiu G-formal peste R (în sensul că: $\mathcal{A}(M)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ devine în mod natural G-ACD peste R şi este, în această categorie, algebră formală).

DEM.: Ambele afirmaţii rezultă imediat, observînd că echivalenţa coomologică (6) din demonstraţia Cor.5 e naturală, în raport cu aplicaţiile olomorfe.

22. PROPOZITIE: Fie M şi M' spaţii riemann simetrice, compacte şi orientate.

i) Dacă $M \xrightarrow{f} M'$ e izometrie locală, atunci: $A(M') \xrightarrow{f^*} A(M)$ e formală.

ii) Dacă grupul discret G acţionează pe M prin izometrii, atunci A(M) e G-formală.

DEM.: Identică cu cea a Prop.20, observînd de data aceasta că echivalenţa coomologică (9) e naturală, în raport cu izometriile locale.

23. COROLAR: Fie M şi M' ca mai sus.

i) Dacă $M \xrightarrow{f} M'$ e izometrie locală, ea e formală peste $\mathbb{R}$.

ii) Dacă grupul discret G acţionează pe M prin izometrii, atunci M e spaţiu G-formal peste R.

Se constată, în sfîrşit, cu uşurinţă, că are loc varianta pe morfisme a Prop.13, şi anume:

24. PROPOZITIE: Fie X, X', Y, Y' spaţii (punctate) formale şi : $X \xrightarrow{f} Y$, $X' \xrightarrow{f'} Y'$ aplicaţii (punctate) formale. Atunci

i) $X \times X' \xrightarrow{f\times f'} Y \times Y'$ e formală şi

ii) $X \vee X' \xrightarrow{f\vee f'} Y \vee Y'$ e formală.

Sîntem acum în măsură să justificăm menționarea constantă, făcută, în Cap. II, asupra prezenței unui grup G care acționează pe algebre, considerarea categoriei G-AGD și dezvoltarea teoriei modelului minimal în această categorie, în ipoteze de semisimplicitate (satisfăcute automat de îndată ce G e grup finit, cf. exemplului II.0.4.1)).

Contextul natural care impuneluarea în seamă a situațiilor de tipul acesta îl constituie categoria G-spațiilor (spații pe care G acționează și aplicații ech). E vizibil că functorul $\mathcal{A}(.)$, restrîns la această categorie de spații, ia valori în mod natural în categoria G-AGD.

Avantajul de a avea la îndemînă o teorie a modelului minimal în această categorie reiese, de exemplu, din următoarea, care reia situația din Cor.3.14:

25. <u>PROPOZITIE:</u> Fie K un G-complex și fie $\mathfrak{M}_{|K|}$ modelul minimal al algebrei $\mathcal{A}(|K|)$, în categoria G-AGD. Atunci:

$$\mathfrak{M}_{|K/G|} \sim \mathfrak{M}(\mathfrak{M}_{|K|})^G \quad \text{(în categoria AGD).}$$

<u>DEM.:</u> Fie : $\rho : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{A}(K)$ un model minimal(în G-AGD). Ținînd cont de naturalitatea echivalenței coomologice : $\mathcal{A}(K) \simeq \mathcal{A}(|K|)$ în raport cu aplicații simpliciale, menționată în Th.III 1.14, rezultă: $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}_{|K|}$ (în G-AGD).

Din II.0.3 reiese că: $\rho : \mathfrak{M}^G \longrightarrow \mathcal{A}(K)^G$, e c-echivalență, de unde, combinînd cu Cor.3.14 și din nou, cu III 1.14, rezultă:

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{M}^G} \sim \mathfrak{M}_{|K/G|} \quad \text{(în AGD)}.$$

26. <u>COROLAR:</u> $H^*(|K/G|) \sim H^*(|K|)^G$.

Reluînd distincțiile făcute odinioară, putem enunța:

27. <u>PROPOZITIE:</u> In ipotezele de mai sus, dacă $|K|$ e G-formal, atunci $|K/G|$ e spațiu formal.

<u>DEM.:</u> Fie : $\rho : \mathfrak{M} \to \mathcal{A}(K)$ ca în demonstratia Prop 25.

Avem c - echivalențe :

$H^*(\mathcal{M}^G) \xrightarrow[\sim]{i^*} (H^*\mathcal{M})^G \xleftarrow{\varphi} \mathcal{M}^G$ (i e incluziunea : $\mathcal{M}^G \xrightarrow{i} \mathcal{M}$),
iar izomorfismul : $\mathcal{M} \sim \mathcal{M}_{|K|}$ ne permite să găsim : $\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} H^*\mathcal{M}$, ech.
şi a.î. : $\varphi^* = id$. Prop.25 încheie demonstraţia.

28. <u>COROLAR</u>: Dacă G acţionează trivial în coomologia raţională a G-complexului K, atunci: $\mathcal{M}_{|K/G|} \sim \mathcal{M}_{|K|}$.

<u>DEM.</u>: Fie $\mathcal{M}$ ca în Prop.25, 27. Ipoteza suplimentară implică: $\mathcal{M}^G \xrightarrow{i} \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ c - echivalenţă, deci : $\mathcal{M} \sim \mathcal{M}_{\mathcal{M}^G}$.
In final, Prop.25. In continuare, în ideea de a obţine, plecînd de la relaţia între modelele minimale descrisă în Prop.25, informaţie raţională suplimentară despre spaţiul-cît : $|K/G| \sim |K|/G$, vom impune G-complexului K condiţii suplimentare, care să asigure faptul că spaţiile ce intervin sînt în $[Nilfin]$. Din motive ce vor fi şi mai clare pe parcurs (cît şi datorită necunoaşterii vreunui alt tip de condiţii care să asigure nilpotenţa spaţiului-cît) vom cere: spaţiului $|K|$ să fie în $[Nilfin]$ şi simplu conex, iar acţiunii îi vom cere ca elementele : $\{g \in G \mid |K|^g \neq \phi\}$ să genereze pe G (unde : $|K|^g = \{x \in |K| \mid gx = x\}$), condiţii ce implică: $|K|/G$ simplu conex (vezi [19], paragraful 2, remarcă 2.13), şi apoi, combinînd Cor.26 cu Th.I.2.19, asigură: $|K|/G \in [Nilfin]$.

29. <u>EXEMPLE</u> (G-complexe):

i) Dacă grupul finit G acţionează pe varietatea M prin aplicaţii diferenţiabile, atunci există o triangulare: $M \sim |K|$, astfel încît acţiunea indusă pe K să se realizeze prin aplicaţii simpliciale (i.e.: K să fie G-complex) ([19], paragraf 2, remarcă 2.14).

ii) Dacă un grup Lie conex acţionează diferenţiabil pe varietatea M, restrîngînd acţiunea la orice subgrup finit ne aflăm în condiţiile precedente, şi în plus este îndeplinită şi condiţia suplimentară din Cor.28.

iii) Dacă $X \in [Nilfin]$, grupul permutărilor de n elemente,

Σ_n, acţionează pe produsul : $\overbrace{X \times \dots \times X}^{n}$ prin: $\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n})$. Să observăm că, dacă X e simplu conex, elementele de forma : $(x, \dots, x)$ fiind fixate de orice $\sigma \in \Sigma_n$, sînt îndeplinite şi toate condiţiile suplimentare recent introduse.

iv) In sfîrşit, fie K un complex simplicial a.î. : $|K| \in [Nilfin]$ şi : $G = \pi_1(|K|)$ e grup finit. Fie: $\widetilde{|K|} \to |K|$, acoperirea sa universală. Ca în demonstraţia prop.3.12 , $\widetilde{|K|}$ se poate triangula, obţinînd un G-complex $\tilde{K}$ a.î.: $\widetilde{|K|} \sim |\tilde{K}|$; evident avem: $|\tilde{K}| \in [Nilfin]$, şi deci şi în această situaţie (cînd avem în plus şi: $|\tilde{K}|/G \sim |K|$), Propoziţia 25 poate fi aplicată pentru a obţine informaţie omotopică " tensor Q ".

BIBLIOGRAFIE GENERALA

1. Spanier, E.H.: Algebraic Topology, Mc Graw-Hill, 1966.
2. Lehmann, D.: Théorie homotopieque des formes différentielles, Astérisque, 45, 1977.
3. Hilton, P., Mislin, G., Roitberg, J.: Localization of nilpotent groups and spaces, North-Holland Math.Studies,15, 1975.
4. Crowell, R.H., Fox, R.H.: Introduction to Knot Theory, 1963.
5. May, J.P.: Simplicial objects in algebraic topology, 1967.
6. Verona, A.: Introducere în coomologia algebrelor Lie, Edit. Acad.,1974.
7. Milnor, J.W., Stasheff, J.: Characteristic classes, Princeton Univ.Press, 1974.
8. Lang, S.: Algebra, Addison-Wesley, 1971.
9. Burghelea, D., Albu, A.C., Raţiu, T.S.: Acţiuni diferenţiabile de grupuri Lie compacte, Monografiile matematice ale Univ. Timişoara,5,1975.
10. Halperin, S.: Lectures on minimal models, Publ.Int.de l'U.E.R. de math.pures et appl.,111,1977.
11. Greub, W.,Halperin, S., Vanstone, R.: Connections, Curvature and Cohomology (vol.III),Acad.Press, 1976.
12. Halperin, S., Stasheff, J.: Obstructions to homotopy equivalence, preprint.
13. Warner, F.: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, 1971.
14. Whitehead, G.W.: Homotopy Theory, M.I.T. Press, 1966.
15. Popescu, N., Radu, A.: Teoria categoriilor şi a fasciculelor, Edit.St.,1971.

16. Sullivan, D., Vigué-Poirrier,M.: The homology theory of the closed geodesie problem, IHES preprint, 1975.

17. Gromoll, D., Mayer, W.: Periodic geodesies on compact Riemannian manifolds, Journal of diff.geom.,Vol.3(4), 1969.

18. Deligne, P., Griffiths, P., Morgan, J.,Sullivan, D.: Real homotopy theory of Kähler manifolds, Invent.math., 29, 1975.

19. Triantafillou, G.: Äquivariante rationale homotopietheorie, preprint.

20. Husemoller, D.: Fibre Bundles, Mc. Graw-Hill, 1966.

21. Dupont, J.L.: Curvature and Characteristic Classes, Springer Lecture Notes, 640, 1978.

22. Bousfield, A.-K., Gugenheim, V.K.A.M.: On PL De Rham theory and rational homotopy type, Memoirs of the A.M.S., 179, 1976.

BIBLIOGRAFIE DE PERSPECTIVA

(Referințele următoare nu sînt folosite efectiv în textul lucrării; vezi introducerea la Cap.IV)

Sullivan, D.: Infinitesimal computations in topology, preprint, 1975.

Quillen, D.: Rational homotopy theory, Ann.Math. 90(1969), p.205-295.

Allday, C.: On the rational homotopy of fixed point sets of torus actions, Topology, Vol.17(1978),p.95-100.

Allday, C.: Rational homotopy and torus actions, preprint,1977.

Allday, C., Halperin, S.: Lie group actions on spaces of finite rank, preprint,1977.

Andrews, P., Arkowitz, M.: Sullivan's minimal models and higher order Whitehead products, Can.J.Math., Vol.XXX, No.5 (1978), p.961-982.

Barge, J.: Structures differentiables sur les types d'homotopie rationnelle simplement connexes, Thèse, Univ.de Paris Sud (Orsay), 1975.

Barge, J., Lannes, J., Latour, F., Vogel, P.: Λ- sphères, An.Sc. de l'École Normale Sup., 4^e série, t.7, fasc.4 (1974), p.463-506.

Baues, H.J., Lemaire, J.M.: Minimal models in homotopy theory, preprint, 1976.

Body, R.A., Douglas, R.R.: Homotopy types within a rational homotopy type, Topology, Vol.13(1974), p.209-214.

Bousfield, A.K., Kan, D.M.: Homotopy limits, completions and localizations, Springer Lecture Notes, 304,1972.

Bredon, G.E.: Equivariant Cohomology Theories, Springer Lecture Notes, 34, 1967.

Friedlander, J.B., Halperin, S.: An arithmetic characterization of the rational homotopy groups of certain spaces, Invent.Math., Vol.53(1979), p.117-133.

Grove, K., Halperin, S., Vigué-Poirrier, M.: The rational homotopy theory of certain path spaces with applications to geodesics, preprint.

Haefliger, A.: Sur la cohomologie de Gelfand-Fuchs, Journées différentielles de Dijon, 1974.

Halperin, S.: Rational fibrations, minimal models and fibrings of homogeneous spaces, Publ.int.de l'U.E.R. de Math.pures et appl., 101, 1976.

Halperin, S.: Finiteness in the minimal models of Sullivan, Trans. of the Amer.Math.Soc.,Vol.230(1977), p.173-199.

Kan, D.M., Miller, E.Y.: Homotopy types and Sullivan's algebras of 0-forms, Topology, Vol.16(1977),p.193-197.

Morgan, J.W.: The algebraic topology of smooth, algebraic varieties, Publ.Math.IHES, 1978.

Note anonime: Conferințele lui Dennis Sullivan despre teoria rațională a omotopiei, Orsay, 1973-1974.

Watkiss, C.: The nilpotent model for a function space, Publ. du Départ.de Math., Lyon, t.13-4(1976), p.73-85.

INDEXUL NOTATIILOR

I N D E X