C u p r i n s

CITEVA OBSERVATII ASUPRA MASURII CARACTERISTICE ATASATA UNUI PROCES POISSON PUNCTUAL

Vlad Bally

In Ito /1/ sînt prezentate procesele Poisson punctuale abstracte, procese care găsesc aplicaţii în teoria proceselor Markov (procesul de excursii prezentat în aceiaşi lucrare). Unui astfel de proces i se ataşează în mod unic o măsură σ- finită, care-l determină, numită măsură caracteristică. In cele ce urmează vom face cîteva observaţii simple în legătură cu măsura caracteristică, observaţii care sînt esenţialmente cuprinse în Fristedt and Taylor /2/. In această lucrare procesul Poisson punctual al excursiilor este folosit pentru construcţia unor aproximante ale timpului local al unui proces Markov, observaţiile mai sus menţionate fiind făcute în acest context. In cele ce urmează toate afirmaţiile vor fi în termeni de procese Poisson punctuale abstracte, limbajul şi rezultatele folosite fiind cele din Ito /1/, paragrafele 2, 3 şi 4.

Fie Y un proces Poisson punctual (p. p. p.), D_Y domeniul său de definiţie şi (U, B(U)) spaţiul de stări (Ito /1/ pg. 226). Amintim notaţia

(2) $$N_{[0,t]\times A}(Y) = \text{card}\{s \in D_Y \cap [0,t] : Y_s \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(U), t \geq$$

şi definiţia măsurii caracteristice (paragraful 4 din Ito /1/)

(3) $$n(A) = E(N_{[0,1]\times A}), \quad A \in \mathcal{B}(U)$$

Propozițiile care urmează urmăresc explicitarea modului în care n acționează pe funcții. Pentru $f : U \to R$ $\mathcal{B}(U)$ - măsurabilă și pozitivă definim procesul

(4) $$Z_t^f = \sum_{s \le t} f(Y_s) \quad \text{cu } s \in D_Y$$

care are următoarele proprietăți imediate.

(5) (a) $Z^{\alpha f} = \alpha Z^f$ pt $\alpha \in R_+$

(b) $Z^{f+g} = Z^f + Z^g$

(c) $f_k \uparrow f \Rightarrow Z^{f_k} \uparrow Z^f$

<u>Propoziția 1</u> $E(Z_t^f) = t \int f \, dn$

<u>Dem</u>. Pentru $f = 1_A$, $A \in \mathcal{B}(U)$ avem $Z_t^f = N_{[0,t] \times A}$

deci egalitatea de mai sus este o consecință imediată a definiției lui n și a teoremei 3.1 din Ito /1/. Proprietățile din (5) permit trecerea la o funcție $f \in \mathcal{B}(U)$ cu ajutorul unui argument de clasă monotonă.

<u>Propoziția 2</u> $E(\sum_{s \in D_Y} e^{-\alpha s} f(Y_s)) = \frac{1}{\alpha} \int f \, dn$ pr $\alpha > 0$

<u>Dem.</u> Fie $U_k \in \mathcal{B}(U)$ a.î. $U_k \uparrow U$ și $n(U_k) < \infty$.

Conform teoremei 4.3 din Ito /1/, $Y^k = Y|_r U_k$ sînt p. p. p. discrete deci conform teoremei 4.4.A.

$$E(\sum_{s \in D_{Y^k}} e^{-\alpha s} f(Y_s^k)) = \sum_{k=1}^{\infty} E(f(Y_s^k)) E(e^{-\alpha \tau_i^k}) = \frac{1}{\alpha} \int_{U_k} f \, dn$$

unde : $(\tau_i^k : i \in N) = D_{Y^k}$.

Deoarece $\sum_{s \in D_{Y^k}} e^{-\alpha s} f(Y_s^k) \uparrow \sum_{s \in D_Y} e^{-\alpha s} f(Y_s)$

propoziția este demonstrată.

Următoarea propoziție este o generalizare imediată a lemei 2.1 din Fristedt și Taylor /2/.

<u>Propoziția 3.</u> Fie $f \in \mathcal{B}_+(U)$ Dacă $\int f \wedge 1 \, dn < \infty$

atunci $Z_t^f < \infty$ or. $t > 0$ P a.s. şi Z^f este un subordinator de drift nul şi măsură Levy $n \circ f^{-1}$.

Dacă $\int f \wedge 1 \, dn = \infty$ atunci $Z_t^f = \infty$ or. t, P a.s.

Dem. Dacă $A_i^n = f^{-1}[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ atunci

$$Z_t^f = \sup_n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{n} N_{[0,t] \times A_i^n}$$

Conform teoremei 3.1 din Ito /1/, $N_{[0,t] \times A_i^n}$ sînt independente şi Poisson repartizate de parametru

$n(A_i^n) = n \circ f^{-1}[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$, deci

$$(6) \quad E(\exp(-\alpha Z_t^f)) = \lim_n \prod_i E(\exp(-\alpha \frac{i}{n} N_{[0,t] \times A_i^n}) =$$

$$= \lim_n \prod_i \exp(-t n(A_i^n))(1 - e^{-\alpha i/n}) =$$

$$= \lim_n \exp(-t \sum_i (1 - e^{-\alpha i/n}) n(A_i^n)) =$$

$$= \exp(-t \int 1 - e^{-\alpha u} \, d n \circ f^{-1}(u))$$

Deoarece

$$\int_0^\infty u \wedge 1 \, d n \circ f^{-1}(u) < \infty \Leftrightarrow \int_0^\infty 1 - e^{-\alpha u} \, d n \circ f^{-1}(u) < \infty$$

(6) demonstrează afirmaţiile de finitudine (resp. infinitudine) făcute în propoziţia 3. Rămîne de verificat faptul că, sub ipoteza de finitudine, Z^f este un subordinator (tot (6) demonstrează în acest caz afirmaţia relativă la parametrii subordinatorului).

Conform proprietăţii Markov a unui p. p. p.

$$Z_{t+u}^f - Z_t^f = Z_u^f(\theta_t Y) \quad \text{or. } t, u > 0 \quad \text{P a.s.}$$

este independent de Z_t^f şi identic repartizat Z_u^f, deci Z^f este un proces cu creşteri independente omogen. Deoarece f este pozitivă, Z^f este crescător şi demonstraţia se termină.

Obs. Fie $J_f = \inf\{s : Z_s^f = \infty\}$ Conform propoziţiei 3

$$\int f \wedge 1 \, dn < \infty \Leftrightarrow J_f = \infty \text{ P a.s. şi } \int f \wedge 1 \, dn = \infty \Leftrightarrow J_f = 0 \text{ P a.s.}$$

deci următoarea propoziţie este o reformulare a propoziţiei 2.

Propozitia 4. Dacă $\int f \wedge 1 \, dn < \infty$ atunci

$$E\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s} dZ_s^f\right) = \frac{1}{\alpha} \int f \, dn$$

Bibliografie.

/1/ K. Ito. Poisson Point Processes Attached to Markov Processes ; Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1970.

/2/ B. Fristedt and S.J. Taylor : Constructions of Local Time for a Markov Process ; Z. Warscheinlichkeits theorie verw. Gebiete. 62, 75-112 (1983).

PROCESUL EXCURSIILOR

Vlad Bally

Vrem să demonstrăm că procesul excursiilor ataşat unui proces standard este proces Poisson punctual (Ito /1/, paragraful 3, pg. 226). Toate notaţiile sînt din lucrarea citată.

Considerăm un proces standard $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ cu spaţiul de stări ($E, \mathcal{E}$), $a \in E$ punct regulat şi recurent şi L timpul local în a cu normalizarea obişnuită :

$$E^a\left(\int_0^\infty e^{-s}\, dL_s\right) = 1$$

S va fi inversa lui L, adică :

$$S_t = \inf\{s > 0 : L_s \geq t\}$$

Notăm $U = D[0,\infty)$ şi $B(U)$ borelianul dat de topologia Skorohod şi definim procesul punctual al excursiilor Y (cu spaţiul de stări U) :

$$D_Y = \{s : S_s - S_{s-} = \Delta S_s > 0\}$$

$$Y_s(t) = \begin{cases} X(S_{s-} + t) & \text{pt. } t < \Delta S_s \\ a & \text{pt } t \geq \Delta S_s \end{cases}$$

Vrem să demonstrăm că Y este proces Poisson punctual, deci că

(1) $\alpha_t Y$ şi $\theta_t Y$ sînt independente

(2) $\alpha_t Y$ este identic repartizat cu Y .

(afirmaţiile (1) şi (2) vor fi demonstrate relativ la orice P^μ, μ probabilitate pe $(E, \mathcal{E})$).

Demonstraţia propriu zisă va fi precedată de un şir de observaţii. Amintim întîi cîteva proprietăţi ale lui S :

(3) $\quad S_{t+s} = S_t + S_s \circ \theta_t \quad$ a.s. (or $t, s \geq 0$)

(4) $\quad S_t \quad$ este timp de oprire (or $t \geq 0$)

(5) $\quad S_t = T_a + S_t \circ \theta_{T_a} \quad$ a.s. (or $t \geq 0$)

(Am notat $T_a = \inf \{t > 0 : X_t = a\}$)

(6) $\quad \Delta S_{t+u} = \Delta S_u \circ \theta_{S_{t-}} \quad$ a.s. (or $t, u > 0$)

Dăm acum cîteva proprietăţi ale lui Υ :

(7) $\quad \Upsilon(\theta_{T_a}) = \Upsilon$

Dem : Conform (5)

$$D_\Upsilon(\theta_{T_a}) = \{s > 0 : \Delta S_s(\theta_{T_a}) > 0\} = \{s > 0 : \Delta S_s > 0\} = D_\Upsilon$$

Pentru $s \in D_\Upsilon = D_{\Upsilon(\theta_{T_a})}$ avem

$$\Upsilon_s(\theta_{T_a}(\omega), t) = X(S_{s-}(\theta_{T_a}(\omega)) + t, \theta_{T_a}(\omega)) \quad \text{pt } t < \Delta S_s(\theta_{T_a}) = \Delta S_s$$

$$= a \quad \text{pt } t \geq \Delta S_s(\theta_{T_a}) = \Delta S_s$$

şi tot conform (5) :

$$X(S_{s-}(\theta_{T_a}(\omega)) + t, \theta_{T_a}(\omega)) = X(T_a + S_{s-}(\theta_{T_a}(\omega)) + t, \omega) =$$
$$= X(S_{s-} + t, \omega)$$

şi astfel (7) este demonstrat.

O urmare imediată a lui (7) este

(8) $\quad E^x(N_A^{0,s}(\Upsilon)) = E^a(N_A^{0,s}(\Upsilon)) \quad$ or. $x \in E$, $A \in \mathcal{B}(U)$, $s \geq$

unde $\quad N_A^{t,s}(\Upsilon) = \text{card}\{u \in D_\Upsilon \cap (t, s] : \Upsilon_u \in A\} \quad t, s \geq 0$

Dem : $\quad E^x(N_A^{0,s}(\Upsilon)) = E^x(N_A^{0,s}(\Upsilon(\theta_{T_a}))) =$

$$= E^x(E^{X(T_a)}(N_A^{0,s}(\Upsilon))) = E^a(N_A^{0,s}(\Upsilon))$$

Să considerăm acum un cilindru :

(9) $\quad A = \bigcap_{\ell \leq k} (X_{t_\ell} \in A_\ell) \quad$ cu $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ şi $A_\ell \in E$

şi să observăm că

(10) $$N_A^{0,s}(Y)=$$

$$= \sum_{u<s} 1_{(0,\infty)}(\Delta S_u) \sum_{i=0}^{k-1} 1_{(t_i,t_{i+1}]}(\Delta S_u) \prod_{j\leq i} 1_{A_j}(X_{t_j+S_{u-}}) \prod_{j>i} 1_{E_j}(a)$$

Decoarece $\Delta S_u \in \mathcal{F}_{S_s}$ pt. $u<s$ şi $X_{t_j+S_{u-}} 1(t_j<\Delta S_u) \in \mathcal{F}_{S_{s-}}$

(căci $t_j + S_{u-} \leq S_u \leq S_{s-}$), (10) ne garantează că

$N_A^{0,s}(Y) \in \mathcal{F}_{S_s}$ pentru A cilindrică. Un argument de clasă monoton extinde afirmaţia la orice $A \in B$ (U).

O ultimă observaţie este necesară înaintea demonstraţiei propriu zise :

(11) $$N_A^{0,s}(\theta_t Y) = N_A^{0,s}(Y(\theta_{S_{t-}})) \quad \text{or. } A \in \mathcal{B}(U) \text{ şi } t\geq 0$$

Dem : Observăm întîi că un argument de clasă monotonă face suficientă demonstrarea lui (11) pentru A cilindrică (de forma (9)). In acest caz, folosind definiţia lui $\theta_t Y$ şi (10) obţinem :

$$N_A^{0,s}(\theta_t Y) = N_A^{t,t+s}(Y)=$$

$$= \sum_{u<s} 1_{(0,\infty)}(\Delta S_{u+t}) \sum_{i=0}^{k-1} 1_{[t_i,t_{i+1})}(\Delta S_{t+u}) \prod_{j\leq i} 1_{E_j}(X_{t_j+S_{(t+u)-}}) \prod_{j>i} 1_{E_j}(a)$$

Conform (6) aceasta se scrie

$$\sum_{u<s} 1_{(0,\infty)}(\Delta S_u(\theta_{S_{t-}})) \sum_{i=0}^{k-1} 1_{[t_i,t_{i+1})}(\Delta S_u(\theta_{S_{t-}})) \prod_{j\leq i} 1_{E_j}(X_{S_t+t_j+S_u(\theta_{S_{t-}})}) \prod_{j>i} 1_{E_j}(a)$$

$$= N_A^{0,s}(Y(\theta_{S_{t-}}))$$

Trecem acum la demonstraţia propriu zisă. Fixăm un $x\in E$ şi verificăm că

(12) $$E^x(N_{K_i}^{0,s_i}(\alpha_t Y)=k_i \ i\leq k,\ N_{M_j}^{0,t_j}(\theta_t Y)=m_j,\ j\leq m)=$$

$$= E^x(N_{K_i}^{0,s_i}(\alpha_t Y).\ i\leq k)\, E^x(N_{M_j}^{0,t_j}(Y)=m_j \ \ j\leq m)$$

pentru orice $s_i, t_j \in R_+$, $K_i, M_j \in \mathcal{B}(U)$ şi $k, m \in N$.

Conform măsurabilităţii stabilite după (10)

$$N_{K_i}^{0,s_i}(\alpha_t Y) = N_{K_i}^{0,t\wedge s_i}(Y) \in \mathcal{F}_{S_{t-}}$$

şi conform (11)

$$N_{M_j}^{0,t_j}(\theta_t Y) = N_{M_j}^{0,t_j}(Y(\theta_{S_{t-}}))$$

deci aplicînd proprietatea tare Markov pe timpul de oprire S_{t-}, termenul din stînga lui (12) devine

$$E^x(N_{K_i}^{0,s_i}(\alpha_t Y) = k_i \;\; i \leq k \;\; E^{X(S_{t-})}(N_{M_j}^{0,t_j}(Y) = m_j \;\; j \leq m))$$

care, conform (8) (într-o formă puţin generalizată), este egal cu termenul din dreapta lui (12).

Odată demonstrat (12), (1) şi (2) urmează banal.

Bibliografie.

/1/ K. Ito. Poisson Point Processes Attached to Markov Processes ; Proceedings of the Sixth Berkley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1970.

ASUPRA APROXIMARII FUNCTIILOR EXCESIVE

de

V.Bally, N.Boboc şi L.Stoica

Analizînd demonstraţia dată în [2 pag. 2] pentru o teoremă de aproximare a lui Hunt au rezultat următoarele fapte mult mai precise.

Fie X un proces drept cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{E})$ şi fie A o funcţională aditivă continuă cu suportul fin M=supp A. Vom nota U_A nucleul potenţial asociat lui A

$$U_A f(x)=E^x(\int_0^\infty f(X_s)dA_s) \quad , \quad f\in \mathcal{E}_+$$

şi vom face presupunerea că U_A este un nucleu propriu.

Fie $\tau=(\tau_t)$, $\tau_t=\inf(s>0 / A_s>t)$ schimbarea aleatoare de timp care este inversă lui A. Procesul cu timp schimbat va fi notat cu $Y=(Y_t)$, $Y_t=X_{\tau_t}$ şi este un proces tare Markov, continuu la dreapta ce ia valori numai în M. Rezolventa asociată acestui proces este definită pe E, în felul următor:

$$W_\lambda f(x)=E^x(\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(X_{\tau_s})ds), \quad f\in\mathcal{E}_+ , \quad x\in E .$$

Se constată că $W_o=U_A$ este nucleu propriu. Funcţiile excesive pentru Y se caracterizează astfel:

Lema 1

Fie $v:E\longrightarrow[0,\infty]$ o funcţie universal măsurabilă. Atunci v este excesivă pentru Y dacă şi numai dacă:

1°. v este excesivă pentru X şi

2°. $v=P_M v$.

Demonstraţie

Teorema de aproximare a funcţiilor excesive prin şiruri monotone de potenţiale se poate aplica pentru Y deoarece nucleul său potenţial este propriu. De aceea pentru a verifica proprietăţile 1° şi 2° vom presupune că $v=U_A f$, cu $f\in b\mathcal{E}_+^*$. Dar atunci ambele proprietăţi se verifică uşor prin calcul direct.

Reciproc să presupunem că v satisface 1° şi 2°. Rezltă imediat din 1° că

$$E^x(v(X_{\tau_t}))\leqslant v(x) .$$

Tinînd cont că τ este continuu la dreapta şi utilizînd un argument de supermartingale, obţinem:

$$\lim_{t\to 0} E^x(v(X_{\tau_t}))=E^x(v(X_{\tau_o}))=P_M v(x)=v(x) ,$$

deoarece $\tau_o=T_M$ (vezi (3.6) cap. V în [1]).

Deoarece $M^r=M$ rezultă $P_M P_M=P_M$. Deducem că pentru orice funcţie u care este excesivă faţă de X, funcţia $v=P_M u$ devine excesivă faţă de Y. Aceasta împreună cu teorema de aproximare cu potenţiale, valabilă pentru procesul Y, ne conduce la

Propoziţia 2

Fie u excesivă pentru X. Atunci există un şir $(f_n)\in b\mathcal{E}_+^*$ astfel ca $(U_A f_n)$ să fie un şir crescător de funcţii mărginite şi

$$P_M U(x)=\lim_n U_A f_n(x), \qquad x\in E .$$

Deoarece U_A este suportat de M rezultă că putem considera că $f_n=0$ pe $E\setminus M$, $n\in N$. Pentru a preciza şi mai mult suportul funcţiilor (f_n) avem nevoie de o lemă auxiliară:

<u>Lema 3</u>

Fie A, B funcţionale aditive astfel că $u(x)=E^x(A_\infty)<\infty$ şi $v(x)=E^x(B_\infty)<\infty$ pentru orice $x\in E$. Să notăm

$$w=\inf(s/s \text{ este excesivă, } s\geqslant \sup(u,v))$$

Atunci există o funcţie $f\in\mathscr{E}^*$, $0\leqslant f\leqslant 1$ astfel ca funcţionala aditivă $C=(C_t)$ definită de

$$C_t=\int_0^t f(X_s)d(A_s+B_s)$$

să aibă drept potenţial funcţia $w:w(x)=E^x(C_\infty)$.

<u>Demonstraţie</u>

Avem $\sup(u,v)=u+v-\inf(u,v)$. Din Teorema 8 de la pagina 214 în [3] rezultă că w este o funcţie excesivă şi $u+v-w$ este tot excesivă. Funcţia f este furnizată de generalizarea teoremei lui Motoo pentru situaţia fără ipoteza (L), generalizare dată în [4] şi demonstrată scurt în [5] .

<u>Propoziţia 4</u>

Să presupunem că există un şir de mulţimi (M_n), $M_n\subset M_{n+1}\subset M$ astfel ca

$$U_A(x,M\setminus\bigcup_n M_n)=0, \qquad x\in E.$$

Atunci enunţul de la Propoziţia 2 poate fi precizat alegînd şirul f_n astfel ca în plus $f_n=0$ pe $E\setminus M_n$.

Demonstrație

Fie (f_n) șirul furnizat de Propoziția 2. Deoarece

$$U_A f=\sup_n U_A(f\cdot 1_{M_n}) ,$$

pentru orice $f \in \mathcal{E}_+^*$, rezultă

$$\sup_n U_A f_n=\sup_n \sup_{i\leq n} U_A(f_i\cdot 1_{M_n}) ,$$

Tinînd cont de Lema 3 rezultă că funcțiile

$$v_n=\inf(s\ /\ s \text{ este excesivă } s\geq \sup_{i\leq n} U_A(f_i\ {}_{M_n}))$$

se pot scrie sub forma $v_n=U_A g_n$ cu $g_n=0$ pe $E\setminus M_n$. Sirul (g_n) satisface condițiile dorite.

Remarca 5. In cazul ipotezei (L) întotdeauna putem alege un șir (M_n) ca în enunțul precedent, format din mulțimi compacte.

Teorema 6

Presupunem că nucleul potențial U_o al lui X este propriu. Fie M o mulțime aproape boreliană. Următoarele afirmații sînt echivalente:

a) Pentru orice funcție excesivă u există un șir $(f_n)\subset$ $\subset b\mathcal{E}_+^*$ astfel ca $f_n=0$ pe $E\setminus M$, $U_o f_n \leq U_o f_{n+1}$ și $P_M u=\lim U_o f_n$.

b) $T_M=T_{M'}$ a.s., unde M' este suportul fin al timpului de ocupare $A_t=\int_o^t 1_M(X_s)ds$ asociat lui M.

Demonstrație

Să presupunem că este îndeplinită condiția b). Deoarece U_o este un nucleu propriu rezultă că și U_A este propriu și atunci punctul a) rezultă din Propoziția 2.

Reciproc, să presupunem îndeplinită ipoteza a). Atunci rezultă că pentru orice funcţie excesivă u avem

$$P_M u = P_{M'} P_M u \leq P_{M'} u \quad .$$

Luînd $u = U_o(1_K)$, cu K compact din E, obţinem

$$P_M u(x) = E^x\left(\int_{T_M}^{\infty} 1_K(X_s)ds\right) \leq E^x\left(\int_{T_{M'}}^{\infty} 1_K(X_s)ds\right) = P_{M'} u(x) \quad .$$

Pe de altă parte un calcul direct arată că $T_M \leq T_{M'}$ a.s. Atunci din relaţia anterioară, care are loc pentru orice K, rezultă $T_M = T_{M'}$ a.s.

Teorema 7. Dacă U_o este nucleu propriu şi M este de tip K_σ satisfăcînd b) din Teorema 6 (în particular dacă M este deschisă), atunci aproximarea de la a) din Teorema 6 are loc cu funcţii (f_n) care în plus au proprietatea că mulţimile $\overline{\{f_n \neq 0\}}$ sînt compacte şi incluse în M.

Demonstraţia rezultă aplicînd Propoziţia 4.

BIBLIOGRAFIE

[1] R.M. Blumenthal, R.K.Getoor, Mrkov processes and Potential Theory, New York-London, Academic Press, 1968.

[2] P.A.Meyer, Processus de Markov: la frontière de Martin, L.N.M. 77, 1968.

[3] G.Mokobodzki, Cônes de potentiels et noyaux subordonés, in vol. Potential Theory, Edizione Cremonese, Roma, 1970.

[4] G.Mokobodzki, Densité relative de deux potentials comparables, sans ultrafiltre rapide, Séminaire de Probabilités, IV, L.N.M. 124, 1970.

[5] A.Benveniste, J.Jacod, Systèmes de Levy des processus de Markov, Inv.Math. 21 (1973), 183-198.

REPREZENTAREA FUNCTIONALELOR ADITIVE CU AJUTORUL TIMPILOR LOCALI

de

V.Bally și L.Stoica

INTRODUCERE

In această lucrare vrem să studiem structura funcționalelor aditive continue (C.A.F) ale unui proces standard X asupra căruia facem ipoteza

$$\lim_{y \to x} \varphi_y(x) = \varphi_x(x) = 1 \qquad \text{or. } x$$

unde $\varphi_y(x)=E^x(e^{-T_{\{y\}}})$. Pentru un astfel de proces a doua egalitate de mai sus ne asigură că toate punctele sînt regulate, deci admit timp local L^x. O serie de alte proprietăți remarcabile ale procesului X aflat sub această ipoteză sînt demonstrate în paragraful 1: procesul este tare Feller, funcția $(x,y) \longrightarrow \varphi_x(y)$ este continuă, topologia fină coincide cu topologia uzuală, funcțiile excesive sînt continue și implicit orice funcțională naturală este C.A.F. (funcțională aditivă continuă).

In paragraful 2 stabilim o corespondență biunivocă între C.A.F.-uri și măsurile Radon pe E (spațiul de stări ale procesului). Mai exact, demonstrăm că pentru orice măsură Radon ν îndeplinind condiția $\int \varphi_y(x) d\nu(y) < \infty$,

$$A_t = \int L^y_t \, \nu(dy)$$

este un C.A.F. cu 1-potențial finit și reciproc, pentru orice C.A.F. cu

1-potențial finit există o măsură ν care să-l reprezinte ca mai sus.

Paragrafle 3 și 4 sînt dedicate studiului convergenței C.A.F.-urilor și a proceselor crescătoare, conținînd în acest sens rezultatele din [1]. Două tipuri de convergență sînt considerate: o convergență uniformă în L^2 (mai exact sub distanța d_2 introdusă la începutul paragrafului 2 din [1]) și convergența aproape sigură. Principalul rezultat din paragraful 3 (Teorema 3.2) afirmă că pentru un șir de C.A.F.-uri A_n cu potențiale u_n și măsuri de reprezentare ν_n, sînt echivalente afirmațiile: $A_n \xrightarrow{d_2} A$, $\nu_n \longrightarrow \nu$ slab, $u_n \longrightarrow u$ punctual.

Paragraful 4 prezintă două modele de aproximare a C.A.F.-urilor analoge celor cunoscute pentru timpul local: prima corespunde "timpului de ocupare" iar a doua "traversărilor" (downcrosings).

1. CONTINUITATEA FUNCTIEI φ

Considerăm un proces standard $X=(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ cu spațiu de stări $(E, \mathcal{E})$ local compact cu bază numărabilă, pe care îl presupunem în plus conex (această ipoteză va funcționa fără mențiune specială în tot cursul lucrării). Considerăm de asemenea funcția $\varphi_x(y)=E^y(e^{-T_x})$ $(T_x= =\inf\{t:X_t=x\})$ asupra căreia facem ipoteza

(1.1) $$\lim_{x\to a} \varphi_x(a)=\varphi_a(a)=1 \quad \text{or.} \quad a\in E.$$

A doua egalitate din (1.1) implică că orice punct este regulat deci admite timp local. Vom nota cu L^a timpul local în a normalizat astfel încît

(1.2) $$E^a\left(\int_0^\infty e^{-s}dL_s^a\right)=1$$

Prima egalitate din (1.1) implică cîteva proprietăți ale procesului pe care le descriem în următoarea propoziție

Propoziţia 1.1. Sub ipoteza (1.1)

(a) Topologia fină coincide cu topologia uzuală.

(b) Orice funcţie 1-excesivă este continuă.

(c) Orice N.A.F. (funcţională aditivă naturală) care are 1-potenţial finit este C.A.F. (funcţională aditivă continuă).

(d) Rezolventa procesului este tare Feller.

(e) Funcţia $(x,y) \longrightarrow \varphi_x(y)$ este continuă şi strict pozitivă.

(f) O funcţie 1-excesivă finită într-un punct este finită peste tot.

(1.3) Remarcă: Ipoteza "E convex" a fost introdusă pentru a ne asigura că φ este strict pozitivă.

(1.4) Remarcă: Orice proces cu creşteri independente omogen, care admite timpi locali şi are stările instantanee, îndeplineşte (1.1) (vezi [4], T.4. pg.278). Dintre procesele cu creşteri independente care admit timpi locali, doar procesele Poisson compuse au rămas în afara ipotezei (1.1) şi deci a discuţiei din această lucrare, dar în acest caz problemele pe care ni le punem au o rezolvare banală pe care o dăm în paragraful 5.a.

(1.5) Remarcă: Se poate pune întrebarea reciprocă afirmaţiei (d) din propoziţia de mai sus: dacă un proces cu rezolventă tare Feller nu îndeplineşte ipoteza (1.1) (şi deci $(x,y) \longrightarrow \varphi_x(y)$ este continuă). Exemplul din paragraful 5.b. arată că o astfel de afirmaţie este falsă, totuşi vom demonstra mai jos că $y \longrightarrow \varphi_x(y)$ este continuă sub ipoteza de rezolventă tare Feller (dacă procesul admite timpi locali în fiecare punct): φ_x este 1-excesivă deci putem găsi un şir $f_n \geq 0, n \in N$ a.î. $s_n = U_1 f_n \nearrow \varphi_x$. Avem

$$s_n(x)\varphi_x = P^1_{T_x} s_n \leq s_n \leq \varphi_x \;,$$

deci

$$\varphi_x - s_n \leq (1-s_n(x))\,\varphi_x \leq 1-s_n(x)$$

Dar $\lim\limits_{n} S_n(x)=\varphi_x(x)=1$, deci φ_x este continuă ca limită uniformă a funcţiilor s_n, care, rezolventa fiind tare Feller, sînt continue.

Trecem acum la demonstrarea propoziţiei 1.1.:

Pentru a demonstra (a) va fi suficient să demonstrăm că în orice vecinătate fin deschisă aproape boreliană D a unui punct x putem să băgăm o vecinătate deschisă a punctului x. Deoarece D este fin deschisă $T_{CD} > 0$ P^x a.s. deci $E^x(e^{-T_{CD}}) < 1$. Sub ipoteza (1.1) putem alege o vecinătate V a lui x a.î. $\varphi_y(x) > E^x(e^{-T_{CD}})$ or $y \in V$. Pentru $y \notin D$ avem $T_y \geq T_{CD}$, de unde

$$\varphi_y(x) \leq E^x(e^{-T_{CD}}) .$$

Rezultă că $V \subset D$.

Deoarece funcţiile 1-excesive sînt fin continue din (a) urmează că ele sînt continue. (c) rezultă din (b) deoarece 1-potenţialul unui N.A.F. A este o funcţie 1-excesivă, deci continuă. Urmează că ea este potenţial regulat deci A este în fapt C.A.F. (d) urmează şi el din (b) deoarece aplicînd operatorul U_1 peste o funcţie măsurabilă mărginită şi pozitivă obţinem o funcţie 1-excesivă, deci continuă.

Trecem la demonstrarea punctului (e).

Folosind egalitatea $T_y = T_x + T_y \circ \theta_{T_x}$ pe $T_x < T_y$, se deduce

$$E^z(e^{-T_x}; T_x < T_y) - E^z(e^{-T_y}; T_x < T_y) = E^z(e^{-T_x} . T_x < T_y)(1-\varphi_y(x)).$$

Utilizînd această relaţie împreună cu simetrica ei obţinem

$$(1.7) \qquad |\varphi_x(z) - \varphi_y(z)| \leq (1-\varphi_x(y)) + (1-\varphi_y(x)) \quad \text{or. } x,y,z \in E.$$

Apoi se deduce

$$|\varphi_a(b)-\varphi_x(y)|\leqslant|\varphi_a(b)-\varphi_a(y)|+(1-\varphi_a(x))+(1-\varphi_x(a)) ,$$

ceea ce împreună cu continuitatea funcției φ_a și cu relația (1.1) implică continuitatea funcției $(x,y)\longrightarrow\varphi_x(y)$.

Pentru a demonstra că φ este strict pozitivă observăm întîi că or. $a,b,c\in E$

$$T_a\leqslant T_c+T_a\circ\theta_{T_c} ,$$

deci

$$\varphi_a(b)\geqslant\varphi_a(c)\,\varphi_c(b) . \tag{1.10}$$

Fie a fixat și să notăm $C=\{\varphi_a>0\}$, $D=\{\varphi_a=0\}$. Mulțimile C și D sînt disjuncte iar C este evident deschisă. Să arătăm acum că și mulțimea D este deschisă. Dacă mulțimea D este nevidă fie $b\in D$. Conform cu (1.1) mulțimea $V=\{c/\ \varphi_c(b)>0\}$ este o vecinătate a lui b. Tinînd cont de (1.10) pentru orice punct $c\in V$ vom avea

$$0=\varphi_a(b)\geqslant\varphi_a(c)\,\varphi_c(b) ,$$

de unde se deduce că $c\in D$ și astfel avem că $V\subset D$. Deci D este deschisă. Proprietatea de conexiune a spațiului implică atunci $C=E$.

Pentru a demonstra ultimul punct să considerăm o funcție 1-excesivă s care este finită într-un punct a. Atunci vom avea pentru orice punct $b\in E$,

$$s(a)\geqslant E^a(\exp(-T_b)s(X_{T_b}))=s(b)\,\varphi_b(a) ,$$

de unde rezultă $s(b)<\infty$.

2. CORESPONDENTA DINTRE MASURI SI FUNCTIONALE ADITIVE

Ne așezăm sub ipoteza

(2.1) $\quad (x,y) \longrightarrow \varphi_x(y)$ este $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ măsurabilă,

(evident implicată de (1.1)), care, conform teoremei 1 de la pg.280 din [4], ne asigură că putem alege o versiune a timpului local normalizată astfel încît

$$E^x\left(\int_0^\infty e^{-s} dL_s^x\right)=1$$

și pentru care aplicația $(s,x,\omega) \longrightarrow L_s^x(\omega)$ definită pe $[0,t] \times E \times \Omega \longrightarrow [0,\infty)$ este $\mathcal{B}_t \times \mathcal{E} \times \mathcal{F}_t$ măsurabilă ($\mathcal{B}_t$ este σ-algebra borelienelor pe $[0,t]$). In plus, pentru fiecare (x,ω), $t \longrightarrow L_t^x(\omega)$ este crescătoare și continuă la stînga, iar pentru fiecare x fixat, $L_t^x(\omega)$ este C.A.F.

Propoziția 2.1. Fie ν măsură pe $(E,\mathcal{E})$ astfel încît pentru un x fixat

(2.2) $$\int \varphi_y(x)\, d\nu(y) < \infty$$

Atunci $A^\nu = \int L^x d\nu(x)$ este C.A.F. cu 1-potențial finit.

Demonstrație

Observăm întîi că inegalitatea $\varphi_y(x) \geqslant \varphi_y(z)\varphi_z(x)$ (vezi (1.10)) implică valabilitatea lui (2.2) pentru orice $z \in E$. Pentru un proces crescător B definim

(2.3) $$\bar{B}_t = \int_0^t e^{-s} dB_s$$

(notația a fost deja introdusă în [1]) și observăm că $E^z(\bar{L}_\infty^x) = \varphi_x(z)$, deci

$$E^z\left(\int \bar{L}^x_\infty \, d\nu(x)\right)=\int \varphi_x(z)\,d\nu(x)<\infty \qquad \text{or } z\in E.$$

Deoarece $L^x_t \leq e^{t-x} L^x_t \leq e^{t-x} L^x_\infty$ rezultă că

$$(2.4)\qquad E^z(A^\nu_t)=E^z\left(\int L^x_t d\nu(x)\right)<\infty, \qquad \text{or } t>0 \text{ şi } z\in E.$$

Putem deci scrie

$$E^z(|A^\nu_{t+s}-A^\nu_t-A^\nu_s\circ\theta_t|)\leq E^z(|L^x_{t+s}-L^x_t-L^x_s\circ\theta_t|)d\nu(x)=0$$

ceea ce demonstrează relaţia de aditivitate pentru A^ν.

Măsurabilitatea de care se bucură versiunea aleasă a timpului local şi un argument de clasă monotonă implică că A^ν este adaptat. Evident el este crescător iar continuitatea sa la stînga este o urmare imediată a continuităţii la stînga a aplicaţiilor $t\to L^x_t(\omega)$. Rămîne deci de verificat continuitatea la dreapta. A^ν fiind proces crescător opţional (de fapt previzibil) va fi suficient să verificăm că pentru orice timp de oprire T

$$(2.5)\qquad 1_{(T<\infty)}\Delta A^\nu_T=0 \qquad \text{a.s.}$$

Printr-un procedeu evident de trunchiere va fi suficient să verificăm (2.5) doar pentru $T\leq M$, unde M este o constantă pozitivă. In aceste condiţii (2.4) şi (2.2) ne asigură că putem aplica toerema lui Lebesgue şi scrie

$$E^z(\Delta A^\nu_T)=E^z(\lim_n(A^\nu_{T+1/n}-A^\nu_T))=$$
$$=\lim_n\int E^z(L^x_{T+1/n}-L^x_T)\,d\nu(x)=$$
$$=\int E^z(\lim_n(L^x_{T+1/n}-L^x_T))\,d\nu(x)=0$$

şi astfel demonstraţia Propoziţiei 2.1 este completă.

Trecem acum la teorema de reprezentare a C.A.F.-lor:

Teorema 2.2. Sîntem sub ipoteza (2.1) şi considerăm un C.A.F. A cu 1-potenţial finit şi avînd în plus proprietatea că $(x,y) \longrightarrow \varphi_x(y)$ este continuă şi strict pozitivă pentru x,y în închiderea suportului lui A. Atunci există şi este unică o măsură Radon ν_A astfel încît

(2.6) $\quad A_t = \int L_t^x d\,\nu_A(x) \qquad$ or.t a.s.

(2.7) Remarcă. Sub ipoteza (1.1) orice funcţională aditivă naturală este C.A.F. şi cade sub teorema 2.2, funcţia φ fiind continuă pe tot spaţiul (vezi propoziţia 1.1).

Demonstraţia Teoremei 2.2

Vom demonstra întîi existenţa unei măsuri ν care să îndeplinească (2.6). Observăm că printr-un procedeu de tăiere (luăm $1_H \cdot A$ în loc de A) putem considera că închiderea suportului lui A este un compact H.

Pentru $\varepsilon > 0$ fixat alegem V_i apropae boreliene şi $x_i \in H$, $i \leq n_\varepsilon = n$ aşa încît V_i să fie disjuncte, $\bigcup_i V_i = H$ şi $V_i \subset B_\varepsilon(x_i)$. Notăm $A_i = 1_{V_i} \cdot A$ $(A = \sum_i A_i)$, $\alpha_i = u_{A_i}(x_i)$ şi definim

$$\nu_\varepsilon = \sum \alpha_i \varepsilon_{x_i}$$

Fixăm $x \in H$ independent de ε. Din proprietatea de supermedianitate rezultă că

$$u_{A_i}(x) \geq \varphi_{x_i}(x) u_{A_i}(x_i)$$

ceea ce implică

$$\sum \alpha_i \leq \theta^{-1} \sum u_{A_i}(x) = \theta^{-1} u_A(x) < \infty ,$$

unde $\theta = \inf\{\varphi_y(x) : y \in H\} > 0$.

Deoarece ν_ε sînt măsuri uniform mărginite pe compactul H, un argument de compacitate ne asigură că putem găsi o măsură ν şi un şir $\varepsilon_p, p \in N$ astfel încît

(2.8) $$\nu_{\varepsilon_p} \longrightarrow \nu \quad \text{slab} .$$

Luăm $n_p = n_{\varepsilon_p}$, α_i^p, x_i^p, şi A_i^p corespunzătoare lui ε_p şi scriem

$$|u_A(z) - \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i^p \varphi_{x_i^p}(z)| \leq \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i^p |(1/\alpha_i^p) u_{A_i^p}(z) - \varphi_{x_i^p}(z)|$$

Notăm

(2.9) $$h(\varepsilon) = \sup\{1 - \varphi_x(y)\varphi_y(x) / x, y \in H, d(x,y) \leq \varepsilon\}$$

şi alegem p suficient de mare ca $h(\varepsilon_p) \leq 1/2$. Din lema 2.3 din [1] rezultă că

$$\| u_A - \sum_i \alpha_i^p \varphi_{x_i^p} \| \leq 2\, h(\varepsilon_p) \sum_i \alpha_i^p \leq 2\theta^{-1} h(\varepsilon_p) u_A(x).$$

care converge la 0 cînd $p \to \infty$.

Pe de altă parte, funcţia $y \longrightarrow \varphi_y(x)$, fiind continuă pe H x H, (2.8) ne asigură că

$$\lim_{p} \sum_{i} \alpha_i^p \varphi_{x_i^p}(z) = \int \varphi_y(z)\nu(dy) \quad , \text{ or. } z \in E.$$

Am demonstrat deci că

$$u_A(z) = \int \varphi_y(z)\nu(dy) = u_{A^\nu}(z)$$

ceea ce, conform teoremei de unicitate a C.A.F.-urilor cu potențial finit implică $A=A^\nu$.

Rezultatul de unicitate al măsurii ν îl vom reformula separat sub forma unei leme care precizează legătura dintre ν și nucleul potențial al lui A.

Lema 2.3. Dacă ν este o măsură îndeplinind (2.6) atunci:

$$U_A^1 f(x) = \int f(y)\varphi_y(x)\nu(dy) \quad , \text{ or. } f \in \mathcal{E}_+ \text{ și } x \in E, \tag{2.10}$$

$$\nu(dy) = 1/\varphi_y(x)\, U_A^1(x,dy) \quad , \text{ or. } x \in E, \tag{2.11}$$

$$U_A^1(x,dy) = \varphi_y(x)/\varphi_y(z)\, U_A^1(z,dy), \text{ or } x,z \in E. \tag{2.12}$$

Demonstrație. Relația (2.6) și un argument de clasă monotonă implică

$$\int_0^\infty g(s)\,dA_s = \int\int_0^\infty g(s)\,dL^y_s\,d\nu(y) \quad \text{or. } g \in \mathcal{E}_+$$

Putem deci scrie

$$U^1_A f(x) = \int E^x\left(\int_0^\infty e^{-s} f(X_s)\,dL^y_s\right) d\nu(y) = \int f(y)\,\varphi_y(x)\,d\nu(y).$$

Celelalte două afirmații urmează imediat.

Inainte de a trece mai departe vom mai face cîteva remarci referitoare la teorema anterioară:

(2.13) $$\int \varphi_y(x)\,\nu_A(dy) < \infty .$$

Aceasta este o urmare imediată a faptului că A are 1-potențial finit și a lui (2.11).

(2.14) In construcția măsurii ν_A am folosit un subșir extras din $\{\nu_\varepsilon / \varepsilon > 0\}$, care covergea slab la ν_A. In fapt avem chiar

$$\nu_\varepsilon \longrightarrow \nu_A \text{ slab.}$$

Aceasta deoarece dacă mulțimea $\{\nu_\varepsilon / \varepsilon > 0\}$ ar mai avea și un alt punct de acumulare , aceasta, conform aceluiași raționament ar îndeplinii (2.6), deci conform unicității ar fi egală cu ν_A .

(2.15) Ipoteza Teoremei 2.2 poate fi puțin slăbită în sensul următor: putem permite funcției φ să fie discontinuă într-o mulțime de puncte Λ cu condiția că $\Lambda' = \{x / \text{ex. } y \text{ a.î. } (x,y) \in \Lambda\}$ să fie formată din puncte izolate.

Demonstrație. Printr-un procedeu de tăiere putem să considerăm că $\Lambda' \cap$ supp A este formată dintr- un singur punct a. Notînd $B_n=\{x \,/\, 1/_{n+1} \leq d(x,a) < 1/n\}$ și $C=\{x \,/\, d(a,x) \geq 1\}$ vom putea scrie $A= 1_{\{a\}}\cdot A + \sum 1_{B_n}\cdot A + 1_C\cdot A$.

Pentru $1_{B_n}\cdot A$ și $1_C\cdot A$ se aplică direct teorema 2.2. Din egalitatea

$$E^x\left(\int_0^\infty e^{-s}\, 1_{\{a\}}(X_s)\,dA_s\right)=\varphi_a(x)E^a\left(\int_0^\infty e^{-s}\, 1_{\{a\}}(X_s)\,dA_s\right)$$

rezultă că $1_{\{a\}}\cdot A$ are același 1-potențial cu αL^a, deci se reprezintă cu măsura $\alpha\,\varepsilon_a$, unde

$$\alpha = E^a\left(\int_0^\infty e^{-s}\, 1_{\{a\}}(X_s)\,dA_s\right).$$

(2.16) Menționăm cîteva proprietăți algebrice ale corespondenței dintre funcționalele aditive și măsurile Radon:

(a) $\nu_{A^\nu} = \nu \;,\quad A^{\nu_A} = A$

(b) $\nu_{A+B} = \nu_A + \nu_B \;,\quad A^{\nu+\mu} = A^\nu + A^\mu$

(c) $\nu_{f\cdot A} = f\cdot\nu_A \;,\quad A^{f\nu} = f\cdot A^\nu$, pentru $f \in \mathcal{E}_+$.

Demonstrația este o aplicație ușoară a teoremei de unicitate a funcționalelor aditive continue.

(2.17) $\quad \operatorname{supp} \nu_A = \operatorname{supp} A$.

Deoarece topologia fină coincide cu topologia uzuală, supp A este închis deci coincide cu suportul măsurii $U_A(x,dy)$ (vezi Blumenthal și Geteor [2]). Din (2.11) rezultă (2.17).

3. CONVERGENȚA

Un prim rezultat din acest paragraf se referă la convergența unui şir de procese crescătoare la o funcțională aditivă continuă. El reprezintă forma pe care o ia teorema 2.2 din [1] dacă supunem procesul la ipoteza (1.1). Va trebui deci să ne referim la parametrii care caracterizau acolo un proces crescător: $\bar{\Gamma}$ (vezi (2.6) în [1]) şi $\bar{\Delta}$ (vezi (2.11) în [1]). De asemenea convergența va fi dată sub distanța d_2 introdusă în [1]. Vom spune încă că un proces crescător B se concentrează pe o mulțime K dacă

$$(3.1) \qquad E^x\left(\int_0^\infty 1_{CK}(X_s)e^{-s}\,dB_s\right) = 0 \text{ or } x.$$

Teorema 3.1. Fie A^n $n\in N$ procese crescătoare şi A funcțională aditivă continuă, toate cu 1-potențiale finite şi concentrîndu-se pe un compact K. Sînt echivalente:

(i) $u_n \to u$ punctual, $\bar{\Gamma}_n \to 0$, $\bar{\Delta}_n \to 0$;
(ii) $d_2(\bar{A}^n,\bar{A}) \to 0$.

Demonstrație

Dacă demonstrăm că (i) $\Rightarrow$ $\|u_n-u\| \xrightarrow{n} 0$, teorema 3.1 se reduce la Teorema 2.2 din [1]. In acest scop să observăm întîi că în fapt va fi suficient să vedem că

$$(3.2) \qquad \|u_n - u\|_K =: \sup_{x\in K} |u_n(x) - u(x)| \longrightarrow 0$$

Scriem

$$u_n(x) = E^x(\bar{A}^n_\infty - \bar{A}^n_{T_K}) + E^x(\bar{A}^n_{T_K} - \bar{A}^n_{T_K-}) =$$

$$= E^x(e^{-T_K} u_n(X_{T_K})) + E^x(\Gamma_{T_K}) + E^x(\Delta_{T_K})$$

$$u(x) = E^x(e^{-T_K} u(X_{T_K})),$$

ceea ce, ținînd seama că $X_{T_K} \in K$ a.s. ne asigură

$$\|u_n - u\| \leq \|u_n - u\|_K + \bar{\Gamma}_n + \bar{\Delta}_n$$

și demonstrează observația de mai sus.

Trecem deci să verificăm (i) $\Rightarrow$ (3.2). In acest scop să verificăm mai întîi că dacă B este un proces crescător de potențial v și parametru de aditivitate $\bar{\Gamma}$,

$$(3.3) \quad |v(x) - v(y)| \leq (\gamma(x,y)\, v(x) + 2\bar{\Gamma}) / \varphi_y(x)$$

cu $\gamma(x,y) = 1 - \varphi_x(y)\, \varphi_y(x)$.

Scriem relația

$$v(x) = E^x(\bar{A}_{T_y}) + E^x(\Gamma_{T_y}) + \varphi_y(x)\, v(y)$$

și simetrica ei, de unde rezultă

$$v(x) \geq E^x(\Gamma_{T_y}) + \varphi_y(x)\, v(y)$$

$$v(y) \geq E^y(\Gamma_{T_x}) + \varphi_x(y)\, v(x)$$

ceea ce implică

$$E^x(\Gamma_{T_x})/v(x) + \varphi_x(y) \leq v(y)/v(x) \leq 1/\varphi_y(x)\,\left(1 - E^x(\Gamma_{T_y})/v(x)\right)$$

Mai departe obținem

$$-\overline{\Gamma}/v(x) + \varphi_x(y) \le v(y)/v(x) \le 1/\varphi_y(x)\,\left(1+\overline{\Gamma}/v(x)\right)$$

ceea ce conduce la (3.3). Din (3.3) aplicat lui A^n și A rezultă

$$|u_n(y)-u(y)| \le |u_n(x)-u(x)| + \left[2\overline{\Gamma}_n + \gamma(x,y)\left(u_n(x)+u(x)\right)\right]/\varphi_y(x)$$

Deoarece $\overline{\Gamma}_n \to 0$, $u_n(x) \to u(x)$ și $(x,y) \longrightarrow \gamma(x,y)$ este continuă și nulă pe diagonală, urmează că pentru orice $\varepsilon>0$ putem alege o vecinătate V a lui x și $n_\varepsilon \in N$ a.î.

$$|u_n(y)-u(y)| \le \varepsilon \quad \text{or } y\in V \text{ și } n \ge n_\varepsilon .$$

Dintr-un argument de compacitate rezultă că $\|u_n - u\|_K \to 0$

Remarcăm. Dacă u este o funcție 1-excesivă arbitrară, calculul de mai sus făcut pentru această funcție arată că, analog cu (3.3), avem

$$|v(x)-v(y)| \le \gamma(x,y)\, v(x)/\varphi_y(x)$$

De aici rezultă că pentru un șir de funcții excesive finite convergența punctuală implică convergența uniformă pe compacți

Formulăm acum teorema care exprimă proprietatea topologică a corespondenței dintre funcționalele aditive și măsuri:

Teorema 3.2. Fie A_n și A C.A.F.-uri cu suporturile incluse într-un compact K. Sînt echivalente

(a) $\nu_{A_n} \to \nu_A$ slab

(b) pentru orice punct $x \in E$ $U^1_{A_n}(x,dy) \to U^1_A(x,dy)$ slab

(c) există $x \in E$ astfel ca $U^1_{A_n}(x,dy) \to U^1_A(x,dy)$ slab

(d) $u_{A_n} \to u_A$ punctual

(e) $d_2(\overline{fA_n}, \overline{fA}) \to 0$ or. $f \in C_b(E)$

(f) $d_2(\overline{A}_n, \overline{A}) \to 0$

Observaţie. (a)$\Leftrightarrow$(f) dă o ideee despre naturaleţea definiţiei distanţei dintre două C.A.F-uri cu ajutorul lui d_2 aplicat lui $\overline{A}$.

Observaţie. (d) înseamnă că $\nu_{A_n}(\varphi_\cdot(x)) \to \nu_A(\varphi_\cdot(x))$ or. $x \in E$. Faptul că de aici rezultă (a), deci convergenţa pe toate funcţiile din $C_b(E)$ ne arată că familia $\{\varphi_\cdot(x) : x \in E\}$ este extrem de bogată.

Demonstraţie. $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c$ este o urmare imediată a Lemei 2.3. şi a continuităţii funcţiei $y \to \varphi_y(x)$.

$b \Rightarrow e$: $U^1_{A_n} f \to U^1_A f$ or $x \in E$ şi $f \in C_b \Rightarrow u_{fA_n} \to u_{fA}$ or $f \in C_b$, deci din teorema 3.1., $d_2(\overline{fA}_n, \overline{fA}) \to 0$.

$e \Rightarrow f$ şi $b \Rightarrow d$ sînt banale iar $d \Leftrightarrow f$ urmează din teorema 3.1.

Rămîne de verificat $d \Rightarrow a$. Deoarece

$$u_n(x) = \int \varphi_y(x)\, d\nu_{A_n}(y) \geq \theta^{-1} \nu_{A_n}(K)$$

($\theta = \inf\{\varphi_y(x) : y \in K\}$), (d) implică că familia $\{\nu_{A_n} : n \in N\}$ este uniform mărginită, deci are cel puţin un punct de acumulare μ. Fie n_p $p \in N$ a.î. $\nu_{n_p} \to \mu$ slab. Conform $d \Rightarrow f$ avem $d_2(A_{n_p}, \overline{A}^\mu) \to 0$ ceea ce implică $A^\mu = A$ şi din unicitatea măsurii de reprezentare rezultă $\mu = \nu$.

(3.4.) Remarcă. Este evident că dacă timpul local L^x_t admite o versiune continuă în (t,x), în condiţiile teoremei 3.2. (Vezi (a)) rezultă

$$\lim_n |A_n(t) - A(t)| = 0 \quad \text{a.s. or. } t \geq 0.$$

Corolar 3.3 Fie A_n $n \in N$ C.A.F-uri cu $u_{A_n}(x) = 1$ şi $\lim_n d(\text{supp } A_n, x) = 0$. Atunci

(i) $\lim_n d_2(\overline{A}_n, \overline{L}^x) = 0$

(ii) Dacă în plus L admite versiune continuă în (t,x), atunci

$$\lim_n |A_n(t)-L^x(t)|=0 \quad a.s.$$

Demonstraţie Fie ν_n măsurile asociate funcţionalelor A_n. Conform (2.17), supp ν_n= supp A_n deci lim d(suppA_{n},x)=0. Din (2.11) rezultă că măsura $U_{A_n}(x,dy)$ se concentrează pe S_n şi conform normalizării lui A_n ea este de masă 1. Tot (2.11) implică

$$\nu_n(E) = \int_{S_n} \frac{1}{\varphi_y(\varphi)} U_{A_n}(x,dy)$$

unde S_n = suppν_n.

Ţinînd seama de continuitatea lui φ avem $\lim_n \nu_n(E)=1$. De aici rezultă că $\nu_n \to \varepsilon_x$ slab. (i) urmează acum din Teorema 3.2. iar (ii) din remarca (3.4.)

(3-5-) Remarcă. O altă demonstraţie pentru punctul (i) al corolarului anterior figurează în Teorema 4 din [1] .

(3.6.) Remarcă. In corolarul de mai sus se înscriu modelele de aproximare prezentate în paragraful 4 din [1]: timpul de ocupare, aria şi aria reziduală. Dăm în acest fel un răspuns parţial întrebării de la pg.110 din Fristed şi Taylor 1983 [3].

In lucrarea lui Getoar şi Kesten [4] sînt date condiţii suficiente pentru existenţa unei versiuni continue în (t,x) pentru L.

4. Aproximări pentru funcţionale aditive continue

Există mai multe scheme de aproximare ale timpului local. In prezenţa teoremei de reprezentare a C.A.F-urilor cu ajutorul timpului local este natural să presupunem că fiecare schemă de aproximare pentru timpul local se poate adapta pentru a da o schemă de aproximare pentru C.A.F-uri. In acest paragraf vom da două astfel de scheme cu un conţinut intuitiv puternic: cele corespunzătoare timpului de ocupare şi traversărilor ("downerosings"). Partea interesantă din punct de vedere intuitiv a acestor teoreme de aproximare constă în punerea în evidenţă a legăturii care există între creşterea funcţionalei aditive şi comportarea procesului pe traiectorii. Vom discuta mai precis această legătură în fiecare caz în parte.

In tot cursul acestui paragraf ne situăm sub ipoteza (1.1.) şi pentru simplificare facem ipoteza că spaţiul stărilor este dreapta reală.

a. Aproximări corespunzătoare timpului de ocupare

Pentru $\varepsilon > 0$ fixat considerăm reţeaua $x_k^\varepsilon = k\varepsilon$ şi $I_k^\varepsilon = [x_k^\varepsilon, x_{k+1}^\varepsilon)$, $O_k^\varepsilon(t) = \int_0^t 1_{I_k^\varepsilon}(X_s)\,ds$.

Notăm cu ξ măsura de reprezentare a timpului obijnuit, deci măsura pentru care

$$t = \int L_t^x(\omega)\,d\xi(x) \quad \text{or. } t, \text{ a.s.}$$

şi $o_k^\varepsilon = 1/\xi(I_k^\varepsilon)$ $(\xi(I_k^\varepsilon) > 0$ deoarece timpul obijnuit, privit ca funcţională aditivă, are suportul toată dreapta, deci conform obs.(2.17) ξ are şi ea acelaşi suport).

Fie acum A un C.A.F. a.î. supp $A \subset K$ compact

Vom aproxima acest C.A.F. cu

$$A_t^\varepsilon = \sum_k o_k^\varepsilon\, O_k^\varepsilon(t)\, \nu_A(I_k^\varepsilon)$$

Teorema 4.1 Sub ipoteza (1.1)

a) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} d_2(\bar{A}^\varepsilon, \bar{A}) = 0$,

b) Dacă timpul local admite versiune continuă, atunci

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_t^\varepsilon = A \quad \text{a.s. or. } t.$$

c) Chiar în absenţa versiunii continue a timpului local, dacă alegem ε_n astfel ca $\sum_n h_K(\varepsilon_n) < \infty$

avem $\bar{A}^{\varepsilon_n} \to \bar{A}$ uniform a.s.

unde $h_K(\varepsilon) = \sup\{1 - \varphi_x(y)\varphi_y(x) \mid x, y \in K, |x-y| \le \varepsilon\}$

Comentariu. Această teoremă poate fi interpretată

după cum urmează : se consideră următoarea metodă de "cunoaşterе" a comportamentului traiectoriilor(independentă de funcţionala pe care vreau s-o aproximăm);
La momentul t măsurăm cît timp a stat traiectoria în fiecare interval I_k^ε (timp notat cu $\theta_k^\varepsilon(t)$) şi normalizăm acest timp prin înmulţire cu o_k^ε. Această "cunoaştere" are ordinul de fineţe ε; $\xi(I_k^\varepsilon) = 1/o_k^\varepsilon$ se poate interpreta ca importanţa pe care o dă procesul "locului" reprezentat de I_k^ε, deci înmulţirea cu o_k^ε se poate interpreta ca o curăţire a locului de subiectivismul procesului.

In acest moment intră în joc funcţionala aditivă: anulat fiind punctul de vedere al procesului asupra lui I_k^ε, se pune în locul lui preferinţa pe care o are funcţionala aditivă pentru I_k^ε, prin înmulţire cu $\nu_A(I_k^\varepsilon)$.

La limită se obţine A.

Cele de mai sus se pot gîndi şi astfel: dîndu-se o măsură ν pe spaţiul stărilor (deci o anumită preferinţă pentru fiecare loc din spaţiu), A^ν reprezintă funcţionala aditivă care ţine socoteala procesului pe unde a stat pînă în t, dînd mai multă sau mai puţină importanţă unui loc sau altuia, după cum hotărăşte ν.

<u>Demonstraţia teoremei 4.1.</u>

Vom demonstra întîi inegalitatea

(4.1) $\quad \|u_{A_\varepsilon} - u_A\| \leq 2h_K(\varepsilon)\,\nu_A(K)$

Observăm că $\nu_{A_\varepsilon}(I_k^\varepsilon) = \nu_A(I_k^\varepsilon)$, deci, pentru un $x\in R$

$$|u_{A_\varepsilon}(x) - u_A(x)| \leq \Big|\int \varphi_y(x)\,d\nu_{A_\varepsilon}(y) - \sum_k \varphi_{x_k^\varepsilon}(x)\,\nu_{A_\varepsilon}(I_k^\varepsilon)\Big| +$$
$$+\Big|\sum_k \varphi_{x_k^\varepsilon}(x)\nu_A(I_k^\varepsilon) - \int \varphi_y(x)\,d\nu_A(y)\Big|.$$

Fiecare din cei doi termeni de mai sus sînt majoraţi de $h_K(\varepsilon)\nu_A(K)$, deoarece sumarea de mai sus se face doar după k a.î. $I_k^\varepsilon \cap K \neq \emptyset$.
Deci inegalitatea (4.1.) este demonstrată. Conform teoremei 3.2 (4.1)implică (a) şi conform aceleiaşi teoreme $\nu_{A_\varepsilon} \longrightarrow \nu_A$

slab, de unde (b).

Conform (4.1) de mai sus şi (2.12) din [1] , rezultă

$$d_2(\bar{A}_\varepsilon, \bar{A}) \leq C\, h_K(\varepsilon)\,\nu(K)$$

unde C este o constantă universală, deci

$$\sum_n d_2(\bar{A}_{\varepsilon_n}, \bar{A}) < \infty,$$

ceea ce, cu un argument Borel Contelli, implică (c).

b. Traversări ("downcrosings")

Considerăm din nou pentru $\varepsilon > 0$ reţeaua $x_k^\varepsilon = k\varepsilon$ şi notăm cu $D_k^\varepsilon(t)$ numărul de reveniri în x_k^ε după ce a fost atins x_{k+1}^ε. Notăm de asemenea

$$d_k^\varepsilon = 1 - \varphi_{x_k^\varepsilon}(x_{k+1}^\varepsilon)\varphi_{x_{k+1}^\varepsilon}(x_k^\varepsilon)$$

Observăm că $u_{D_k^\varepsilon}(z) = \varphi_{x_k^\varepsilon}(z)/d_k^\varepsilon$ şi $\bar{\Delta}_{D_k^\varepsilon}, \bar{\Gamma}_{D_k^\varepsilon} \leq 1$.

Considerăm acum un C.A.F. A cu supp $A \subset K = [-M, M]$ şi definim

(4.2) $$D_t^\varepsilon = \sum_k d_k^\varepsilon D_k^\varepsilon(t)\,\nu(I_k^\varepsilon)$$

Teorema 4.2 Sub ipoteza (1.1)

(a) $\lim_{\varepsilon\to 0} d_2(\bar{D}^\varepsilon, \bar{A}) = 0$

(b) Dacă $\sum_k h_K(\varepsilon_k) < \infty$, atunci $\bar{D}^{\varepsilon_k} \to \bar{A}$ uniform a.s.

Demonstraţie

Observăm că deoarece ν se concentrează pe K, pentru k a.î. $k\varepsilon \notin K$, termenii din suma din (4.2) sînt nuli. Pentru k a.î. $x_k^\varepsilon \in K$, $d_k^\varepsilon \leq 2h_K(\varepsilon)$. Deci

(4.3) $$\bar{\Gamma}_{D^\varepsilon} \leq \sum_k d_k^\varepsilon \bar{\Gamma}_{D_k^\varepsilon}\,\nu(I_k^\varepsilon) \leq 2h_K(\varepsilon)\,\nu(K),$$

(4.4) $$\bar{\Delta}_{D^\varepsilon} \leq \sum_k d_k^\varepsilon \bar{\Delta}_{D_k^\varepsilon}\,\nu(I_k^\varepsilon) \leq 2h_K(\varepsilon)\,\nu(K),$$

$$u_{D^\varepsilon}(z) = \sum_k d_k^\varepsilon u_{D_k^\varepsilon}(z)\,\nu(I_k^\varepsilon) = \sum_k \varphi_{x_k^\varepsilon}(z)\,\nu(I_k^\varepsilon)$$

deci

(4.5) $$|u_{D^\varepsilon}(z) - u_A(z)| = \left|u_{D^\varepsilon}(z) - \int \varphi_x(z)\,\nu(dx)\right| \leq h_K(\varepsilon)\,\nu(K).$$

Din (4.3), (4.4.), (4.5) de mai sus și (2.12) din[1] rezultă

(4.6). $d_2(\mathbb{D}^\varepsilon, \bar{A}) \leq 5c\,\nu(K)\,h_K(\varepsilon)$

și deci (a) este rezolvat.

(b) cade din (4.6) și un argument Borel Contelli.

5. Complemente

a. Procesul Poisson compus

Vom demonstra că pentru orice proces Poisson compus funcționalele aditive raționale se exprimă cu ajutorul unei densități (deci implicit sînt continue). Dintre ele vor admite măsură de reprezentare relativ la timpul local exact acelea pentru care densitatea se anulează în afara unei mulțimi cel mult numărabile de puncte.

Notăm cu τ primul timp de salt al procesului și cu τ_k timpii ~~necesari~~ succesivi de salt (obținuți prin iterarea lui τ). Reamintim că $\tau_1 = \tau,\ \tau_2 - \tau_1,\ \tau_3 - \tau_2 \ldots$ sînt independenți exponențial repartizați de medie q în raport cu orice P^x. De asemenea $\sigma(\tau_k / k \in N)$ și $\sigma(X_{\tau_k} / k \in N)$ sînt independente relativ la orice P^x, și $E^x(e^{-\tau}) = 1/(1+q) =: c(q)$.

Pentru o funcțională aditivă naturală A notăm

$$\alpha_A(x) = E^x\left(\int_0^\tau e^{-s}\, dA_s\right)$$

<u>Propoziția 5.1.</u>

$$A_t = 1/qc(q) \int_0^t \alpha_A(X_s)\, ds \quad \text{a.s.}$$

<u>Demonstrație</u> Va fi suficient să demonstrăm că cele două funcționale naturale care apar mai sus au același 1 potențial:

$$E^x\left(\frac{1}{qc(q)} \int_0^\infty e^{-s} \alpha_A(X_s)\, ds\right) = \frac{1}{qc(q)} \sum_k E^x\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{-s} \alpha_A(X_s)\, ds\right) =$$

$$= \frac{1}{qc(q)} \sum E^x\left(e^{-\tau_k} E^{X_{\tau_k}}\left(\int_0^\tau e^{-s} \alpha_A(X_s)\, ds\right)\right) = 1/qc(q) \sum E^x\left(e^{-\tau_k} \alpha_A(X_{\tau_k})\right)\left(1 - E^{X_{\tau_k}}(e^{-\tau}\ldots\right.$$

Deoarece $1 - E^y(e^{-\tau}) = qc(q)$, expresia de mai sus devine

$$\sum E^x\left(e^{-\tau_k} \alpha_A(X_{\tau_k})\right) = \sum E^x\left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{-s}\, dA_s\right) = u_A(x),$$

Propoziţia 5.2 Pentru orice măsură Rodon ν

(5.1) $\int L_t^y \nu(dy) = c \int_0^t \nu(\{X_s\}) ds$

unde c este o constantă pozitivă.

Demonstraţie Să notăm cu A funcţionala din stînga lui (5.1). Ii calculăm densitatea :

(5.2) $\alpha_A(x) = E^x(\int_0^\zeta e^{-s} d(\int L_t^y d\nu(y)) = \nu(\{x\}) E^x(\int_0^\zeta e^{-s} dL_s^x)$

Din proprietatea de invarianţă la translaţii a proceselor cu creşteri independente rezultă că $E^x(\int_0^\zeta e^{-s} dL_s^x)$ este o constantă c (nu depinde de x) şi deci (5.1) rezultă din propoziţia 5.1.

Remarcă. Conform (5.2), dacă o funcţională aditivă naturală se reprezintă cu ajutorul unei măsuri Rodon ν , densitatea ei va fi x $\longrightarrow \nu(\{x\})$, deci concentrată pe o mulţime cel mult numărabilă de puncte.

b. Un exemplu. In acest paragraf vom considera mişcarea browniană unidimensională, notată X. Construim un proces $\bar{X}$ (toate notaţiile legate de el vor moşteni această bară) stopînd procesul X într-un punct a. Deci

$$\bar{X}_t = \begin{cases} X_t, & \text{pt. } t \leq T_a, \\ a, & \text{pt. } t \geq T_a. \end{cases}$$

Acest nou proces are următoarele proprietăţi :

(a) Este un proces Hunt cu rezolventă tare Feller.

(b) Funcţia (x,Y) $\longrightarrow \varphi_x(y)$ este continuă or. (x,y) cu $x \neq a$ şi discontinuă în (a ,a).

(c) Orice funcţională aditivă continuă admite reprezentare cu ajutorul timpului local.

(d) In afara timpului local mai există două funcţionale aditive naturale nenule care se anulează în afara lui $\{a\}$.
(In sensul că $E^x(\int_0^\infty e^{-s} 1_{C\{a\}}(X_s) dA_s) = 0$ $\forall$ x $\in$ E)

Prima observaţie urmează din

$$\overline{U}^1 f(x) = U^1 f(x) + \varphi_a(x)\big(f(a) - U^1 f(a)\big)$$

pentru orice funcţie măsurabilă pozitivă.

Pentru a demonstra (b) observăm că

$$\overline{\varphi}_x(a) = 1_{\{a\}}(x)$$

şi pentru y ≠ a $\quad \overline{\varphi}_x(y) = 0$ dacă $x \le a < y$ sau $y \le a < x$ şi

$\overline{\varphi}_x(y) = \varphi_x(y)$ dacă $y \le x < a$ sau $y > x > a$; şi

$$\overline{\varphi}_x(y) = \frac{\varphi_x(y) - \varphi_a(x)\varphi_a(y)}{1 - \varphi_a(x)\varphi_x(a)} \quad \text{dacă } x \le y < a \text{ sau } a < y < x .$$

Afirmaţia (c) urmează din (b) conform (2.15).

Pentru a demonstra (d) observăm că

$$\varphi_1(y) = \lim_{x \to a} \overline{\varphi}_x(y) = 1_{(-\infty,a)}(y)\,\varphi_a(y)$$

$$\varphi_1(y) = \lim_{x \to a} \overline{\varphi}_x(y) = 1_{(a,\infty)}(y)\,\varphi_a(y)$$

sînt potenţiale naturale corespunzătoare funcţionalelor

$A_t^1 = 1_{[T_1,\infty)}(t)$ cu $T_1 = T_a \cdot 1_{(X_0 < a)}$

$A_t^2 = 1_{[T_2,\infty)}(t)$ cu $T_2 = T_a \cdot 1_{(X_0 > a)}$

Remarcă. Orice funcţională aditivă naturală A, care se anulează în afara lui $\{a\}$ se scrie ca o combinaţie liniară cu coeficienţi pozitivi de L^a, A^1 şi A^2.

Demonstraţie. Fie $x<b<a$. Deoarece A se anulează în afara lui a rezultă

$$u_A(x) = E^x\big[e^{-T_b}\, u_A(X_{T_b})\big] = u_A(b)\,\varphi_b(x)$$

Din relaţia de mai sus şi din faptul că există $\lim_{b \to a} \varphi_b(x)$, rezultă că există $\lim_{b \nearrow a} u_A(b) = \alpha$ şi apoi se deduce

$$u_A(x) = \alpha\,\varphi_a(x) \quad , \text{ pentru } x<a.$$

La fel se deduce că există $\lim_{b \searrow a} u_A(b) = \beta$ şi

$$u_A(x) = \beta\,\varphi_a(x) \quad , \text{ pentru } x>a.$$

Rezultă că $u_A = (\alpha - u_A(a))\varphi_1 + (\beta - u_A(a))\varphi_2 + u_A(a)\varphi_a$.

Din teorema de unicitate a funcţionalelor naturale asociate unui potenţial natural rezultă $A = (\alpha - u_A(a))A^1 + (\beta - u_A(a))A^2 + u_A(a)\,L^a$.

Deoarece $A_{Ta+\varepsilon}$ este pozitivă pentru orice $\varepsilon > 0$ iar $L^a_{Ta+\varepsilon}$ este mic, $A^1_{Ta+\varepsilon} = 1$ şi $A^2_{Ta+\varepsilon} = 0$, P^x-apt. pentru $x<a$, înseamnă că $\alpha - u_A(a) \geqslant 0$. La fel se deduce că $\beta - u_A(a) \geqslant 0$.

Bibliografie

1 Bally V. : Approximation Theorems for the Local Time of a Markow Process. To appear.

2 Brumenthal, R.M., Getoor R.K. : Markow Processes and Potential Theory. New York Academie Press 1968.

3 Fristed,B., Taylor S.I.: Constructions of local Time for a Markow Process. 2. Wahr. Verw. Gebite 34.73-112 (1983).

4 Getoor R.K., Kesten, H. Continuity of Local Time for Markow Processes. Compositio Mathematica, Vol.24, Fasc.3, 1972, pg.277-3o3.

DUALITATE PENTRU O CLASA DE PROCESE MARKOV CARE ADMIT TIMPI LOCALI

V. Bally şi L. Stoica

INTRODUCERE

In lucrarea /1/ autorii au studiat o clasă de procese care admit timpi locali în orice punct al spaţiului de stări şi care au o anumită regularitate. In prezenta lucrare vom arăta cît de largă este această clasă. In primul rînd Teorema 4 din /3/ împreună cu Propoziţia 1.3 de mai jos arată că toate procesele cu creşteri independente care admit timpi locali sînt în clasă. Tot din Propoziţia 1.3 se vede că prin trecere la u - proces rămînem în clasă. In paragraful 3 al lucrării se arată că schimbarea aleatoare de timp şi trecerea la subproces de asemenea lasă invariantă clasa. Dar cea mai interesantă transformare care lasă invariantă clasa considerată este trecerea la dual.

Principalul rezultat al lucrării care este Teorema 2.2 arată că pentru un proces de tipul în discuţie rezolvanta asociată admite rezolvante duale sub-Markoviene, aceste rezolvante admit procese de acelaşi tip care se obţin unul din altul prin operaţia de u-proces.

Pentru notaţii şi rezultate privitoare la u-procese trimitem la paragraful 4 din capitolul 1 din /4/.

1. Funcţia Green

Fie η măsura de reprezentare a timpului obişnuit. Ea este determinată de relaţia

$$U_1 f(x) = E^x \left(\int_0^{\zeta} e^{-s} f(x_s)\, ds \right) =$$

$$\int f(y) \varphi_y (x)\, d\eta(y) \quad \text{or. } f \in \mathcal{E}_+$$

Se observă imediat că η încarcă deschişii. In raport cu această măsură vom construi funcţia Green care va produce dualitatea:

(1.1) $\qquad g_1(x,y) = \varphi_y(x)$

$$g_p(x,y) = g_1(x,y) + (1-p)\, U_p\, g_1^y(x) \quad \text{pt. } p > 0$$

unde $g_1^y(.) = g_1(. , y)$.

Să notăm $u_p(x,y) = E^x \left(\int_0^\infty \exp(-ps)\, d\, L_s^y \right)$ şi $\varphi_y^p(x) = E^x\,(\exp(-pT_y))$. Un calcul simplu arată că u_p satisface de asemenea relaţiile (1.1.), deci $u_p = g_p$. Din proprietatea tare Markov şi egalitatea stabilită rezultă

(1.2) $\qquad g_p(x,y) = u_p(x,y) = \varphi_y^p(x)\, g_p(y,y).$

Pentru a studia proprietăţile lui g_p vom avea nevoie de următoarea lemă :

<u>Lema 1.1</u> (a). Pentru orice $a \in E$, $\lim_{y \to a} T_y = 0$ în P^a probabilitate.

(b). Pentru orice $p > 0$, funcţia $(x,y) \to \varphi_x^p(y)$ este continuă şi strict pozitivă.

(c). Pentru orice funcţie p - excesivă s, avem

$$|s(x) - s(y)| \leqslant \mu_p(x,y)\, s(x)/\varphi_y^p(x)$$

unde $\mu_p(x,y) = 1 - \varphi_x^p(y)\varphi_y^p(x)$.

<u>Demonstraţie</u>. Pentru un $\varepsilon > 0$ fixat scriem

$$\varphi_x^p(a) \leqslant e^{-p\varepsilon}\, P^a\,(T_x > \varepsilon) + P^a(T_x \leqslant \varepsilon).$$

ceea ce implică

$$(1 - e^{-p\varepsilon})P^a\,(T_x > \varepsilon) \leqslant 1 - \varphi_x^p\,(a)\,,$$

şi deci ipoteza (0.1) implică convergenţa în P^a probabilitate. Aceasta la rîndul ei implică convergenţa în repartiţie, deci $\lim_{x \to a} \varphi_x^p(a) = 1$. Deoarece a este regulat pentru el însuşi, $\varphi_a^p(a)=1$ deci ipoteza (0.1) este îndeplinită pentru φ^p. Prin acelaşi raţionament ca cel din /1/ Propoziţia 1.1. punctul (e) rezultă (b) din lema de mai sus. Punctul (c) are aceiaşi demonstraţie ca remarca ce urmează teoremei 3.1 din /1/.

Propoziţia 1.2

(a) $0 < g_p \leqslant \frac{1}{p}$

(b) $x \to g_p(x,y)$ este p - excesivă or. y.

(c) $(x,y) \to g_p(x,y)$ este continuă.

(d) $U_p f(x) = \int g_p(x,y) f(y) d\eta(y)$ or. $f \in \mathcal{E}_+$

(e) $(g_p(x,y) - g_q(x,y))/(q-p) = \int g_p(x,z) g_q(z,y) d\eta(z) =$

$= \int g_q(x,z) g_p(z,y) d\eta(z).$

Demonstraţie. (a) Deoarece φ^p este strict pozitivă şi $u^p(y,y) > 0$, din (1.2) rezultă că $g_p > 0$. Să demonstrăm că $g_p \leqslant \frac{1}{p}$: pentru p = 1 această inegalitate este evidentă, iar pentru $p \neq 1$ scriem

$$\| p U_p g_1^y \| \leqslant \| g_1^y \| \leqslant 1 \text{ , deci } g_p(x,y) \leqslant 1 + \frac{(1-p)}{p} \leqslant \frac{1}{p}$$

Punctul (b) urmează imediat din prima egalitate din (1.2).

Folosind punctul (c) al lemei (1.1), funcţiile g_p^y, $y \in K$ sînt egal continue pentru orice compact K. Continuitatea în y rezultă din (1.1) şi astfel (c) este demonstrat.

Din ecuaţia rezolventei şi (1.1) rezultă (d).

Din ecuaţia rezolventei relaţia (e) rezultă $\eta(dy)$ aproape sigur. Deoarece funcţiile care apar în această relaţie sînt continue şi η încarcă deschişii, această relaţie este adevărată peste tot.

Următorul rezultat permite recunoaşterea proceselor care îndeplinesc condiţia (0.1), prin intermediul rezolventei.

Propoziţia 1.3. Fie Y un proces Hunt cu rezolventă (W_p). Presupunem că pentru un $p > 0$ fixat

$$W_p f(x) = \int h_p(x,y) f(y) \mu(dy) \text{ pentru } f \in \mathcal{E}_+,$$

unde μ este o măsură radon şi $h_p \in \mathcal{E}_+ \times \mathcal{E}_+$.

(i) Dacă h_p este ~~[illegible]~~ local mărginită şi continuă în fiecare argument separat, atunci $h_p(x,y) = \varphi_y^p(x)\, h_p(y,y)$.

(ii) Dacă h_p este strict pozitivă şi continuă ca funcţie de două variabile, atunci φ^p este continuă, deci Y îndeplineşte (0.1).

Propoziția 1.2

(a) $0 < g_p \leqslant \frac{1}{p}$

(b) $x \to g_p(x,y)$ este p - excesivă or. y.

(c) $(x,y) \to g_p(x,y)$ este continuă.

(d) $U_p f(x) = \int g_p(x,y) f(y) d\eta(y)$ or. $f \in \mathcal{E}_+$

(e) $(g_p(x,y) - g_q(x,y))/(q-p) = \int g_p(x,z) g_q(z,y) d\eta(z) =$

$$= \int g_q(x,z) g_p(z,y) d\eta(z).$$

Demonstrație. (a) Deoarece φ^p este strict pozitivă și $u^p(y,y) > 0$, din (1.2) rezultă că $g_p > 0$. Să demonstrăm că $g_p \leqslant \frac{1}{p}$: pentru p = 1 această inegalitate este evidentă, iar pentru $p \neq 1$ scriem

$$\| p U_p g_1^y \| \leqslant \| g_1^y \| \leqslant 1 \text{ , deci } g_p(x,y) \leqslant 1 + \frac{(1-p)}{p} \leqslant \frac{1}{p}$$

Punctul (b) urmează imediat din prima egalitate din (1.2).

Folosind punctul (c) al lemei (1.1), funcțiile g_p^y, $y \in K$ sînt egal continue pentru orice compact K. Continuitatea în y rezultă din (1.1) și astfel (c) este demonstrat.

Din ecuația rezolventei și (1.1) rezultă (d).

Din ecuația rezolventei relația (e) rezultă $\eta(dy)$ aproape sigur. Deoarece funcțiile care apar în această relație sînt continue și η încarcă deschișii, această relație este adevărată peste tot.

Următorul rezultat permite recunoașterea proceselor care îndeplinesc condiția (0.1), prin intermediul rezolventei.

Propoziția 1.3. Fie Y un proces Hunt cu rezolventă (W_p). Presupunem că pentru un $p > 0$ fixat

$$W_p f(x) = \int h_p(x,y) f(y) \mu(dy) \text{ pentru } f \in \mathcal{E}_+,$$

unde μ este o măsură radon și $h_p \in \mathcal{E}_+ \times \mathcal{E}_+$.

(i) Dacă h_p este ~~[illegible]~~ local mărginită și continuă în fiecare argument separat, atunci $h_p(x,y) = \varphi_y^p(x) h_p(y,y)$.

(ii) Dacă h_p este strict pozitivă și continuă ca funcție de două variabile, atunci φ^p este continuă, deci Y îndeplinește (0.1).

Demonstrație

Fie y fixat și V_n, $n \in N$ deschise relativ compacte a.î. $\overline{V}_{n+1} \subseteq V_n$ și $\bigcap_m V_n = \{y\}$. Fie $f_m = \mu(V_n)^{-1} 1_{V_n}$.

Funcția h_p fiind continuă în y vom avea $\lim_n W_p f_n(x) = h_p(x,y)$. Aplicînd proprietatea tare Markov obținem

(1.3) $\qquad P^p_{V_n}(W_p f_m)(x) = W_p f_m(x)$ pentru $m \geqslant n$.

Deoarece $W_p f_m(x) \leqslant \sup\{h_p(x,z) : z \in \overline{V}_1\}$, folosind (1.3) rezultă $W_p f_m \leqslant \sup\{h_p(x,z) : x, z \in \overline{V}_1\}$, ceea ce ne permite să trecem la limită cu $m \to \infty$ în (1.3) și să obținem :

$$P^p_{V_n} h^y_p(x) = h_p(x,y) \text{ pentru orice } n \in N \text{ cu}$$

$h^y_p(.) = h_p(x,y)$.

Dar $P^p_{V_n} h^y_p(x) = E^x(\exp(-p\, T_{V_n})\, h_p(X_{T_{V_n}}, y)) \xrightarrow{n}$

$$\xrightarrow{n} E^x(\exp(-pT_y))\, h_p(y,y) = \varphi^p_y(x)\, h_p(y,y)$$

și demonstrația punctului (i) se încheie. Afirmația (ii) urmează banal din (i).

Remarcă 1.4. Sub ipoteza (0.1) procesul X este un proces Hunt : aceasta deoarece Propoziția 1.1 din /1/ ne garantează că sînt îndeplinite condițiile Teoremei 4.3 din /5/ ((3.1') din această teoremă este îndeplinită dacă rezolventa cu care se lucrează admite proces standard). Propoziția 1.3 de mai sus apare deci ca o condiție echivalentă cu (0.1), exprimată în termeni de rezolventă.

Remarcă 1.5. Fie X un proces care îndeplinește ipoteza (0.1), u o funcție o-excesivă și W u-rezolventa asociată ei. Această rezolventă va avea densitatea în raport cu η egală cu $g_p(x,y)\, u(y)/u(x)$ (unde g_p a fost densitatea relativ la η pentru rezolventa lui X) care este continuă, strict pozitivă și finită. Conform propoziției 1.3, procesul asociat lui W (în /4/ Cap. 1, paragr. 4) va îndeplini ipoteza (0.1).

2. Rezolvente duale

O primă rezolventă duală care se impune natural este

$$f\,\hat{U}_p(y) = \int g_p(x,y)\, f(x)\, d\eta(x) \quad \text{pentru} \quad f\in \mathcal{E}_+ \text{ şi } p>0.$$

Notaţia de conuclee folosită mai sus pentru $\hat{U}$, este consecventă cu cea din /2/ şi /4/ dar va fi abandonată relativ la alte rezolvente duale pe care le construim mai tîrziu.

Relaţia (e) din propoziţia 1.2 ne garantează că $(\hat{U}_p)$ este o rezolventă. Evident $\hat{U}$ este în dualitate cu U relativ la η în sensul că

$$\langle f\,\hat{U}, g\rangle_\eta = \langle f, U g\rangle_\eta \qquad \text{or } f, g\in \mathcal{E}_+$$

Dăm cîteva proprietăţi imediate ale acestei rezolvente :

Propoziţia 2.1. (a) Pentru $f\in b\mathcal{E}$ cu suport compact, avem $f\,\hat{U}_p \in C_b\,(E)$.

(b) $y \to g_q\,(x,y)$ este q - $\hat{U}$ - excesivă.

Notaţie : Deoarece în continuare vor apărea mai multe rezolvente (în dualitate cu (U_p)), vom folosi următoarea notaţie : pentru o rezolventă $W = (W_p)$, spunem că o funcţie este q-W-excesivă dacă este q-excesivă în raport cu W.

Demonstraţia propoziţiei 2.1

Punctul (a) rezultă din definiţia lui $f\,\hat{U}_p$ şi continuitatea funcţiei g_p. Pentru a demonstra (b) observăm că relaţia (e) din propoziţia 1.2 ne dă

$$(p-q)\;{}^x g_q\,\hat{U}_p\,(y) = (p-q)\; U_p\, g_q^y\,(x)$$

unde ${}^x g_q\,(.) = g_q\,(x, .)$. Funcţia g_q^y fiind q-U-excesivă, ${}^x g_q$ rezultă q-U-excesivă.

Rezolventa U nu este în general sub-Markoviană. De asemenea în general capul său (nucleul potenţial) nu este propriu. Totuşi din propoziţia anterioară şi din punctul (d) al teoremei de mai jos rezultă că $\hat{U}$ este foarte aproape de condiţiile Kunita-Watanabe. Teorema principală a lucrării, pe care o dăm mai jos, se ocupă cu construirea şi descrierea rezolventelor sub-Markoviene ce sînt dualitate cu U :

Teorema 2.2

(a) Orice funcţie 0-$\hat{U}$-excesivă care diferă de cele două funcţii constante 0 şi $+\infty$, este neapărat strict pozitivă, finită şi continuă. Există cel puţin o astfel de funcţie.

(b) Fie v o funcţie o-$\hat{U}$-excesivă astfel ca $o < v < \infty$ şi să notăm cu $V = (V_p)$ rezolventa următoare

(2.1) $V_p(x, dy) = (1/v(x))\ \hat{U}_p\ (v(y)\, dy, x)$

Atunci rezolventa V este în dualitate cu U relativ la măsura $v\cdot\eta$. Rezolventei V i se asociază un proces Hunt verificînd proprietatea (0.1),

(c) Fie $W = (W_p)$ o rezolventă sub-Markoviană care se află în dualitate cu U relativ la o măsură ν. Presupunem că $W_1\ 1 > 0$. Atunci există o funcţie w care este o-$\hat{U}$-excesivă şi

(2.1') $W_p(x, dy) = 1/w(x)\ \hat{U}\ (w(y)dy, x)$, $\eta(dx)$ aproape sigur.

Dacă în plus $W_p f$ este continuă pentru $f \in C_c(E)$, atunci (2.1') are loc peste tot.

(d) Rezolventa $\hat{U}$ satisface relaţia

$$\lim_{p \to \infty} p\ (f\ \hat{U})(x) = f(x)\ , \quad f \in C_c\ , \quad x \in E.$$

Notaţie : pentru o rezolventă $W = (W_p)_{p>0}$ şi $q > 0$ notăm cu W^q rezolventa dată de $W_p^q = W_{q+p}$.

Demonstraţia teoremei va fi făcută în două etape : într-o primă etapă (propoziţiile 2.3 - 2.5) vom demonstra rezultate analoge celor din teoremă, relativ la U^q.

Avînd aceste rezultate pentru orice $q > 0$, le vom putea deduce pentru $q = 0$.

Lema 2.3. Fie $q > 0$. Există o funcţie w q - $\hat{U}$ - excesivă, continuă, strict pozitivă şi finită astfel încît

(2.2) $\lim_{x \to \Delta} g_q\ (y, x)/w(x) = 0$ or. $y \in E$

unde Δ este punctul lui Alexandrov.

Demonstraţie

Alegem (K_n) un şir de compacţi astfel încît $K_n \subseteq \mathrm{Int}\ K_{n+1}$ şi $\bigcup_n K_n = E$. Notăm $T_n = T_{C_{K_n}}$. Rezultă că $\sup_n T_n \geq \zeta$

Fie $a \in E$ fixat. Definim

$$w_n(x) = E^a\left(e^{-T_n q} g_q(X_{T_n}, x)\right) = E^a\left(\int_{T_n}^{\infty} e^{-sq}\, dL_s^x\right) \xrightarrow{n} 0$$

Fixăm $z \in E$. Trecînd la un subşir putem presupune că $w_n(z) \leq 1/2^n$. Folosind inegalitatea (1.10) din /1/ sub forma $\varphi_z^q(u) \geq \varphi_z^q(x)\varphi_x^q(u)$, din (1.2) obţinem

(2.3) $\quad g_q(u,z)\, g_q(x,x) \geq g_q(x,z) \cdot g_q(u,x)$

Atunci deducem $w_n(x) \leq w_n(z)\, g_q(x,x)\, g_q(x,z)^{-1} \leq$ $\leq 2^{-n} g_q(x,x)\, g_q(x,z)^{-1}$ şi definim funcţia $w = \sum w_n$ care va fi continuă, strict pozitivă, finită şi $q - \hat{U}$ - excesivă (ultima proprietate urmează din faptul că $y \to g_q(x,y)$ este $q - \hat{U}$ - excesivă deci w_n sînt la fel). Observăm acum că $w_n(x) =$ $= g_q(a, x)$ pe C_{K_n} deci $g_q(a,x)/w(x) \leq 1/n$ pe C_{K_n} ceea ce asigură (2.2) pentru $y = a$. Folosind (2.3) obţinem (2.2) pentru orice $y \in E$ şi demonstraţia se încheie.

Fie $q > 0$ fixat. Construim următoarea rezolventă :

$$W_p(x, dy) = w(x)^{-1}\, \hat{U}_p(w(y)\, dy, x)$$

unde w este funcţia din lema anterioară.

Rezolventa $W = (W_p)$ nu este în general sub-Markoviană, dar $W^q = (W_{p+q})$ este sub-Markoviană şi în plus :

Propoziţia 2.4. Rezolventa W^q este Felleniană, deci i se asociază un proces Hunt. Acest proces satisface ipoteza (0.1).

Demonstraţie

Vom nota $M = W_o^q(C_o)$, care este un spaţiu vectorial.

Din relaţia (2.2) rezultă $M \subseteq C_o$. Vom arăta că închiderea uniformă a lui M este C_o. Pentru aceasta vom utiliza teorema Hahn-Banach în felul următor. Să presupunem că M nu este dens în C_o. Atunci există F o funcţională liniară şi continuă pe C_o, care se anulează pe M dar care nu este identic nulă. Dar orice funcţională liniară şi continuă pe C_o se reprezintă cu ajutorul unei măsuri cu variaţie mărginită :

(2.3) $\quad F(f) = \int f(y)\, \nu(dy)\ , \quad f \in C_o.$

Fie ν_+ şi ν_- partea pozitivă şi respectiv partea negativă ale măsurii ν. Acestea sînt două măsuri Radon pozitive şi mărginite pe E astfel ca $\nu = \nu_+ - \nu_-$. Definim

$$s_+(x) = \int g_q(x, y)\, w(y)^{-1}\, \nu_+(dy)$$

$$s_-(x) = \int g_q(x, y)\, w(y)^{-1}\, \nu_-(dy)$$

Funcţiile s_- şi s_+ sînt finite, deoarece $g_q(x, .)\, w^{-1}(.) \in C_o$ şi chiar continue deoarece g_q este continuă în ansamblul celor două variabile (se foloseşte şi (2.3) pentru a utiliza teorema lui Lebesgue). Pentru orice $f \in C_o$ avem

$$0 = F(W_o^q f) = \iint w(y)\, f(y)\, g_q(y,x)\, w(x)^{-1} \eta(dy)\, \nu(dx) =$$
$$= \int f(y)\, w(y)\, (s_+(y) - s_-(y))\, \eta(dy) \,,$$

De unde deducem $s_+ = s_-$. Fie $A_+ = \int L^x\, \nu_+(dx)$ şi $A_- = \int L^x\, \nu_-(dx)$ funcţionalele aditive asociate măsurilor ν_+ şi ν_-. Se constată că q - potenţialele acestora sînt s_+ şi s_-, deci $A_+ = A_-$ şi mai departe $\nu_+ = \nu_-$.

Rezultă $F = 0$ ceea ce contrazice ipoteza că M nu este dens. W^q este deci rezolventă Feller. Aplicînd Propoziţia 1.3(ii) rezultă (0.1).

Lema 2.5. Există o funcţie v , o - $\hat{U}$ - excesivă, finită, strict pozitivă şi continuă.

Demonstraţie : Fie $a \in E$ fixat şi $h_p(y) = g_p(a,y)/g_p(a,a)$

Vom demonstra mai întîi că $\{h_p\,,\ 0 < p \leq 1\}$ este o familie de funcţii egal continue pe compacţi. Fie w_1 funcţia construită în lema 2.3 pentru $q = 1$ şi W^1 rezolventa din Propoziţia 2.4. Funcţiile $g_p(a, .)$ sînt 2-$\hat{U}$-excesive deci $g_p(a, .)/w_1(.)$ sînt 1-W^1-excesive.

$h_p(a)/w_1(a) = 1/w_1(a)$ pentru orice p deci h_p/w_1, $0 < p \leq 1$ sînt funcţii 1 - W^1 - excesive, egal mărginite în a. Lema 1.1 (c) ne garantează că ele sînt egal continue pe compacţi. Putem deci extrage un subşir $p_n \to 0$ aşa încît $h_{p_n} \to v$ uniform pe compacţi, unde v este o funcţie continuă şi finită. Deoarece $h_{p_n}/w_1 \to v/w_1$, funcţia v/w_1 este 1 - W^1 excesivă şi $v(a) = 1$, rezultă că v/w_1 este strict pozitivă. Deci v este şi ea strict pozitivă. Pentru un $\varepsilon > 0$ fixat funcţiile h_p cu $p < \varepsilon$ sînt ε - $\hat{U}$ - excesive deci v va fi la fel. Deoarece ε este arbitrar rezultă că v este 0 - $\hat{U}$ - excesivă, ceea ce încheie demonstraţia.

Demonstraţia Teoremei 2.2. Vom demonstra întîi punctul (b).

Fie v o funcţie $o - \hat{U}$ - excesivă, continuă, finită şi strict pozitivă şi rezolventa V dată de (2.1). Fixăm $q > 0$ şi notăm w funcţia dată de Lema 2.3. Atunci

$$V^q_p (x, dy) = w(x)\, v(x)^{-1}\; W^q_p (x, v(y) w(y)^{-1} dy)$$

Conform Propoziţiei 2.4 rezolventei W^q i se asociază un proces Hunt, funcţia v/w_q este $0 - W^q$ - excesivă, deci, conform /4/ Cap. 4 paragraful 4, lui V^q i se asociază un proces Hunt.

Teorema 4.3 din /5/ garantează că şi lui V i se asociază un proces Hunt. Conform Propoziţiei 1.3 acest proces va îndeplini (0.1).

Trecem la demonstrarea punctului (a). Din lema 2.5 ştim că există cel puţin o funcţie v $0 - \hat{U}$ - excesivă continuă strict pozitivă şi finită. Funcţiile $o - \hat{U}$ - excesive se obţin din $o - V$ - excesive prin înmulţire cu v. Despre acestea ştim, conform (b), că sînt continue, finite şi strict pozitive şi astfel demonstraţia punctului (a) se încheie.

Trecem la demonstrarea punctului (c). Să demonstrăm întîi că η şi ν sînt echivalente. Fie $A \in \mathcal{E}$ aşa încît $\nu(A) = 0$. Avem

(2.4) $\quad 0 = \langle W_1 1, 1_A \rangle_\nu = \langle 1, U_1 1_A \rangle_\nu$

deci $U_1 1_A = 0$ ν a.s. Rezultă că pentru cel puţin un $x \in E$ avem

$$o = U_1 1_A(x) = \int_A g_1 (x,y)\, d\eta(y)$$

Deoarece g_1 este strict pozitivă, rezultă că $\eta(A) = 0$.

Dacă $\eta(A) = 0$, atunci $U_1 1_A = 0$, deci, ţinînd seama că $W_1 1 > 0$ (2.4) implică $\nu(A) = 0$.

Fie $w' \in \mathcal{E}_+$ aşa încît $\nu = w' \cdot \eta$. Pentru $f, h \in \mathcal{E}_+$

$$\langle f, W_p h \rangle_\nu = \langle U_p f, h \rangle_\nu = \langle U_p f, w'h \rangle_\eta = \langle f, 1/w'(w'h \hat{U}_p) \rangle_\nu$$

Deoarece funcţia f este arbitrară rezultă

(2.5) $\quad W_p h(x) = 1/w'(x)\, (w'h\, U_p)(x), \quad \eta(dx)$ a.s.

Folosind egalitatea (2.5) pentru $h = 1$, sub Markovianitatea rezolventei W ne asigură că w' este $0 - \hat{U}$ - supermediană aproape sigur. Aceasta ne permite să construim regularizate ei excesivă $w = \lim_{p \to \infty} p(w' U_p)$. Deoarece $w' = w$ η a.s. putem să-l înlocuim pe w^{l} cu w în (2.5). Ţinînd cont de faptul că $\mathcal{E}$ este numărabil generat, mulţimea de excepţie din (2.5) poate fi aleasă independentă de h, deci (2.1') este demonstrat.

Dacă $W_p(C_c(E)) \subset C_o(E)$, pentru $h \in C_c(E)$, funcţiile care apar în (2.5) (cu w în loc de w^{l}) sînt continue şi astfel, deoarece η încarcă deschişii, egalitatea se extinde peste tot.

Rezolventa V definită la punctul (b), avînd proces, are proprietatea (d). Relaţia (2.1) arată că această proprietate este moştenită de $\hat{U}$.

3. Schimbare aleatoare de timp şi subprocese

a. Schimbare aleatoare de timp

Considerăm o funcţională aditivă continuă A finită pe $[0,\zeta)$ şi $\tilde{X}_t = X_{\tau_t}$ cu $\tau_t = \inf\{s>0 : A_s = t\}$ procesul obţinut prin schimbarea aleatoare de timp dată de A (vom adăuga un $\sim$ la toate notaţiile referitoare la $\tilde{X}$).

Fie $\tilde{E}$ suportul fin al funcţionalei A. Deoarece topologia fină coincide cu topologia uzuală, $\tilde{E}$ este închis deci, conform remarcii de la pagina 2.33 din /2/, $\tilde{X}$ este un proces standard.

<u>Propoziţia 3.1.</u> $\tilde{X}$ îndeplineşte ipoteza (o.1).

<u>Remarkă</u> : în /1/ am presupus că spaţiul de stări al procesului discutat este conex, presupunere pe care nu o mai facem pentru E. Aceasta deoarece ipoteza de conexiune era folosită doar pentru a demonstra că funcţia φ este strict pozitivă, lucru pe care îl vom demonstra direct în cazul de faţă. Odată demonstrată aceasta, toate rezultatele din /1/ şi din articolul de faţă sînt valabile pentru X.

<u>Demonstraţie</u>. Să verificăm întîi că $\tilde{T}_x = A_{T_x}$ a.s. pentru orice $x \in E$, unde $\tilde{T}_x = \inf\{s>0 : \tilde{X}_s = x\} = \inf\{s>0 : X_{\tau_s} = x\}$

Să fixăm un $t \geqslant 0$ şi să presupunem că $\tilde{T}_x < t$. Vom găsi deci un $s<t$ aşa încît $X_{\tau_s} = x$. Urmează că $\tau_s \leqslant \tau_t$ deci $T_x \leqslant \tau_t$ şi astfel $A(T_x) \leqslant A(\tau_t) = t$. Am demonstrat că $A(T_x) \leqslant \tilde{T}_x$. Pentru a demonstra inegalitatea inversă observăm că $\tau(A(T_x)) = T_x$ a.s. pentru $x \in \operatorname{Supp} A$, deci $\tilde{X}(A(T_x)) = X(\tau(A(T_x))) = x$ a.s. ceea ce implică $A(T_x) \geqslant \tilde{T}_x$ a.s.

Trecem acum la demonstrația propriuzisă. Avem

$$\tilde{\varphi}_y(x) = \tilde{E}^x\,(e^{-\tilde{T}_y}) = E^x\,(e^{-A(T_y)})$$

Conform lemei 1.1.(a), $\lim\limits_{y \to x} T_y = 0$ în P^x probabilitate.

Din orice șir $y_n \to x$ se poate deci extrage un subșir pe care convergența de mai sus are loc P^x a.s., ceea ce implică convergența funcției $\varphi_{\cdot}(x)$ către 1 pe acest subșir, ceea ce încheie demonstrația formulei (o.1). Rămîne de verificat că $\tilde{\varphi} > 0$. Deoarece $\varphi > 0$, pentru orice $x, y \in E$ avem $P^y(T_x < \zeta) > 0$, deci, ținînd cont de ipoteza făcută asupra lui A, $P^y(A(T_x) < \infty) > 0$, ceea ce încheie demonstrația.

b. Subprocese

Fie M o funcțională multiplicativă tare Markov, pentru care toate punctele sînt permanente și $M_t \in F^o{}_t$. Considerăm $\hat{X}$ subprocesul asociat acestei funcționale (vezi Corolarul 3.16 pg. 111 din /2/ ; toate notațiile și definițiile relativ la M sînt cele din această lucrare). Pentru $(\omega, \lambda) \in \Omega \times R_t$ și $x \in E$

$\hat{T}_x(\omega,\lambda)$ va fi egal cu $T_x(\omega)$ dacă $T_x(\omega) < \lambda$ și infinit în caz contrar. Putem deci calcula

$$\hat{\varphi}_y(x) = \hat{E}^y\,(\exp(-\hat{T}_x)) = E^y\,(e^{-T_x} M_{T_x})$$

Folosind din nou faptul că $T_y \to 0$ în P^x probabilitate cînd $y \to x$, un raționament similar celui din propoziția 3.1 arată că $\lim\limits_{y \to x} \hat{\varphi}_y(x) = 1$ or. $x \in E$. Am demonstrat deci

Propoziția 3.2. $\hat{X}$ îndeplinește condiția (o.1).

Bibliografie

/1/ V. Bally și L. Stoica: Reprezentarea funcționalelor aditive cu ajutorul timpilor locali (apare în același volum).

/2/ R.M. Blumenthal, R.K. Getoor : Markov Processes and Potential Theory. Academic Press New York, London, 1968.

/3/ R.K. Getoor, H. Kesten : Continuity of Local Times for Markov Processes. Compositio Mathematica, Vol. 24, Fasc. 3, 1972, pag. 277 - 303.

/4/ P.A. Meyer : Processees de Markov : le frontière de Martin
Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag 1968.

/5/ L. Stoica : On the Cpnstruction of Hunt Processes from
Resolvents. Z. Warsch. verm. Gebiete. 64. 167 - 179
(1983).

u - PROCESE

de Lucian BEZNEA

Scopul acestei lucrări este de a explicita paragraful 4, cap.I, referitor la u-procese, din [5].Explicitarea este necesară deoarece completările de corpuri ce apar în formula de la sfîrşitul nr.22 nu sînt cele "obişnuite" pentru procese Markov (vezi teorema 7 şi notaţiile ce o preced).

Fie E un spaţiu local compact cu bază numărabilă şi (P_t) un semigrup sub-markovian pe E satisfăcînd "ipotezele drepte":

- admite o realizare cu traiectoriile continue la dreapta şi astfel încît funcţiile p-excesive ($p \geq 0$) sînt aproape boreliene şi a.s. continue la dreapta pe traiectorii. Presupunem în plus existenţa limitelor la stînga în E pe $(0,\zeta)$.

Definiţia 1. Fie u o funcţie excesivă (nulă în δ prin convenţie şi fie

$$E_u = [0 < u < \infty].$$

Definim nucleul sub-markovian P_t^u pe E prin:

$$P_t^u f(x) = \begin{cases} \dfrac{P_t(x, uf)}{u(x)}, & x \in E_u \\ 0, & x \notin E_u \end{cases}$$

unde f este universal măsurabilă şi pozitivă.

Teorema 2.

a) Nucleele (P_t^u) formează un semigrup sub-markovian pe E a cărui rezolventă (U_p^u) este dată de:

$$U_p^u f(x) = \begin{cases} \dfrac{U_p(x,uf)}{u(x)} & , x \in E_u \\ 0 & , x \notin E_u \end{cases}$$

b) Fie w o funcţie universal măsurabilă, pozitivă. Sînt echivalente afirmaţiile:

i) w este excesivă în raport cu (U_p^u);

ii) $w=0$ pe $E \setminus E_u$ şi există o funcţie excesivă v a.î.: $uw=v$ pe E_u.

Punctul b) al teoremei este valabil cu aceeaşi demonstraţie pentru funcţii p-excesive.

<u>Notaţie.</u> O funcţie excesivă, supermediană în raport cu rezolventa (U_p^u) se va numi excesivă/u, supermediană/u.

<u>Demonstraţie.</u> Pentru $x \in E_u$ măsura $P_t^u(x, .)$ este purtată de $E_u \cup \{\delta\}$. Intr-adevăr, $P_t^u(x,.)$ nu încarcă nici $[u=\infty]$ (deoarece $P_t^u(x,.)$ este absolut continuă în raport cu $P_t(x,.)$, măsură ce nu încarcă $[u=\infty]$ deoarece $P_t u(x) \leq u(x) < \infty$) nici $[u=0] \cap E$ prin definiţie.

a) Relaţia $P_t^u P_s^u = P_{t+s}^u$ este evidentă pe $E \setminus E_u$. Pentru $x \in E_u$ avem:

$$P_s^u P_t^u f(x) = \int_{E_u} P_s^u(x,dy) P_t^u f(y) = \frac{1}{u(x)} \int_{E_u} P_s(x,dy) u(y) \frac{1}{u(y)} P_t(y,uf) =$$

$$= \frac{1}{u(x)} \int P_s(x,dy) 1_{E_u}(y) P_t(y,uf) \overset{(*)}{=} \frac{1}{u(x)} \int P_s(x,dy) P_t(y,uf) =$$

$$= \frac{1}{u(x)} P_s(x, P_t(uf)) = \frac{1}{u(x)} P_{s+t}(x,uf) = P_{s+t}^u f(x) ,$$

egalitatea $(*)$ avînd loc deoarece $P_s(x,dy)$ nu încarcă $[u=\infty]$, iar $P_t(y,uf)=0$ pentru $y \in [u=0]$.

Afirmaţia referitoare la rezolventă este evidentă.

b) "i) ⟹ ii)" Fie w o funcţie excesivă/u. Definim funcţia ϕ prin:

$$\phi = \begin{cases} u.w & \text{pe } E_u \\ 0\,(=uw) & \text{pe } [u=0] \\ \infty & \text{pe } [u=\infty] \end{cases}$$

Funcţia ϕ este supermediană. Intr-adevăr pentru $x\in E_u$ avem: $P_t^u(x,w)=\frac{1}{u(x)}P_t(x,uw)=\frac{1}{u(x)}P_t(x,\phi)$, căci $P_t(x,.)$ nu încarcă $[u=\infty]$. w fiind supermediană/u rezultă: $\frac{1}{u(x)}P_t(x,\phi)\leq w(x)$ deci $P_t(x,\phi)\leq\phi(x)$ Aceeaşi inegalitate are loc evident pe $[u=\infty]$. Dacă $x\in[u=0]$ rezultă $P_t(x,u)=0$ deci măsura $P_t(x,.)$ este suportată de $[u=0]$, mulţime pe care ϕ este nulă. In concluzie $P_t(x,\phi)=0=\phi(x)$.

Fie $v=\lim\limits_{t\searrow 0} P_t(\phi)$ (regularizata excesivă a funcţiei ϕ).

$v=\phi$ pe E_u (căci pentru $x\in E_u$, w fiind excesivă/u avem:

$$P_t^u(x,w)\to w(x) \Leftrightarrow \frac{1}{u(x)}P_t(x,\phi)\to\frac{1}{u(x)}\phi(x) \Leftrightarrow P_t(x,\phi)\longrightarrow\phi(x))$$

Deoarece $\phi=0$ pe $[u=0]$ iar $0\leq v\leq\phi$ avem $v=\phi$ şi pe $[u=0]$. Există deci v, funcţie excesivă, astfel încît $uw=v$ pe E_u şi în plus $v=0$ pe $[u=0]$.

"ii) $\Rightarrow$ i)" Fie w satisfăcînd condiţia ii).

w este supermediană/u. Intr-adevăr, dacă $x\notin E_u$ avem $P_t^u(x,w)=0=$ $=w(x)$. Dacă $x\in E_u$ măsura $P_t(x,.)$ este suportată de E_u şi avem: $P_t^u(x,w)=\frac{1}{u(x)}P_t(x,uw)=\frac{1}{u(x)}P_t(x,v)\ \frac{1}{u(x)}v(x)=w(x)$, funcţia v fiind supermediană.

Pentru a încheia demonstraţia teoremei mai trebuie arătat că pentru $x\in E_u$, avem:

$$P_t^u(x,w)\xrightarrow[t\searrow 0]{}w(x) \quad \Leftrightarrow$$

(1) $$P_t(x,1_{E_u}v)\xrightarrow[t\searrow 0]{}v(x)$$

Mulţimea E_u fiind fin deschisă, avem: $x\notin\overline{CE_u}^{fin}$ deci x este neregulat faţă de CE_u. Rezultă:

(2) $P^x(T_{CE_u} > 0) = 1$

Deoarece $(v(X_t))$ este un supermartingal avem $E^x[v(X_{t_o})/\mathcal{F}_t] \leq v(X_t)$, $t \leq t_o$. Rezultă:

(3) $E^x[v(X_{t_o}),\ T_{CE_u} > t] \leq E^x[v(X_t),\ T_{CE_u} > t]$.

Funcţia v fiind supermediană obţinem pentru $t \leq t_o$:

$$v(x) \geqslant E^x[v(X_t) \cdot 1_{E_u}(X_t)] \geqslant E^x[v(X_t), T_{CE_u} > t] \overset{(3)}{\geqslant} E^x[v(X_{t_o}),\ T_{CE_u} > t].$$

Trecînd cu t la limită inferioară în acest şir de inegalităţi, rezultă:

$$v(x) \geqslant \underline{\lim}_{t \searrow 0}\ E^x[v(X_t), 1_{E_u}(X_t)] \geqslant \underline{\lim}_{t \searrow 0}\ E^x[v(X_{t_o}),\ T_{CE_u} > t] =$$

$$= \lim_{t \searrow 0}\ E^x[v(X_{t_o}), T_{CE_u} > t] = E^x[v(X_{t_o}),\ T_{CE_u} > 0] \overset{(2)}{=} E^x[v(X_{t_o})] \xrightarrow[t_o \searrow 0]{} v(x).$$

Deci:

$$\underline{\lim}_{t \searrow 0}\ E^x[v(X_t)\ , 1_{E_u}(X_t)] = v(x)$$

Evident:

$$\overline{\lim}_{t \to 0}\ E^x[v(X_t),\ 1_{E_u}(X_t)] \leqslant v(x).$$

Din ultimele două relaţii rezultă că:

$$E^x[v(X_t),\ 1_{E_u}(X_t)] \xrightarrow[t \searrow 0]{} v(x)$$

şi deci $P_t(x, 1_{E_u} v) \xrightarrow[t \searrow 0]{} v(x)$. In concluzie areloc (1).

CONSTRUCTIA u-PROCESELOR

Fie $W = \{w : \mathbb{R}_+ \to E \cup \{\delta\} \,/\, s<t,\, w(s)=\delta \Rightarrow w(t)=\delta\}$,

$$X_t^o(w)=w(t),\quad \underline{\underline{F}}^o=\sigma(X_s^o/s \geq 0),\quad \underline{\underline{F}}_t^o=\sigma(X_s^o/s \leq t).$$

Fie μ probabilitate pe E. Conform [4], XII,21. (restrîngerea la traiectorii cu "timp de viaţă") există două măsuri P^{μ} şi $P^{\mu/u}$ pe $(W,\underline{\underline{F}}^o)$ a.î. procesul(X_t^o) este Markov şi admite legea de intrare (μP_t), respectiv (μP_t^u).

Pe W definim variabila aleatoare ζ prin:

$$\zeta(\omega)=\inf\{t/X_t^o(\omega)=\delta\}$$

numită <u>durata de viaţă</u> a procesului.

<u>Lema 3</u>. Cu notaţiile stabilite, mulţimea $[\zeta=t,\ X_t^o \in E]$ este P^x şi $P^{x/u}$ neglijabilă pentru orice $x \in E$.

<u>Demonstraţie.</u> Să observăm mai întîi că din existenţa unei realizări cu traiectorii continue la dreapta avem:

$$(4)\qquad \lim_{s \searrow t} P_s(x,1_E)=P_t(x,1_E)$$

Fie $x \in E$. Deoarece ne-am restrîns la traiectorii cu timp de viaţă rezultă că: $[\zeta=t,X_t^o \in E]=\bigcap_{s>t}[X_s^o=\delta,X_t^o \in E]$ şi deci este suficient să arătăm că:

$$(5)\qquad E^x[X_s^o=\delta,X_t^o \in E] \xrightarrow[s \searrow t]{} 0\ .$$

$$E^x[X_s^o=\delta,X_t^o \in E] = E^x[\ 1_{\{\delta\}} \circ X_{(s-t)+t}\ ,\ X_t^o \in E]=$$

$= E^x\left[P_{s-t}(X_t^o, 1_{\{\delta\}}),\ 1_E(X_t^o)\right] = P_t(x, 1_E P_{s-t}(\cdot, 1_{\{\delta\}})) =$

$= P_t(x,\ 1_E P_{s-t}(\cdot,\ 1_{E_u \cup \{\delta\}})) - P_t(x, 1_E P_{s-t}(\cdot, 1_E)) =$

$= P_t(x,\ 1_E) - P_s(x, 1_E).$

Am obţinut deci relaţia:

$$(6) \qquad E^x\left[X_s^o = \delta, X_t^o \in E\right] = P_t(x, 1_E) - P_s(x, 1_E)$$

Din (4) şi (6) rezultă (5).

Fie acum $x \in E_u$. Folosind (6) scrisă pentru semigrupul (P_t^u) obţinem

$$E^{x/u}\left[X_s^o = \delta,\ X_t^o \in E\right] = P_t^u(x, 1_E) - P_s^u(x, 1_E) = \frac{1}{u(x)}\ P_t(x,u) - P_s(x,u) =$$

$$= \frac{1}{u(x)} P_t(x, u - P_{s-t}(\cdot, u)) \xrightarrow[s \searrow t]{} 0.$$

Convergenţa la zero rezultă din excesivitatea funcţiei u şi din faptul că u este $P(x,.)$ integrabilă $(P(x,u) \leq u(x) < \infty)$. Raţionamentul continuă ca în prima parte.

Pentru $x \in E \setminus E_u$ ţinînd cont de (6) şi definiţia lui P_t^u obţinem direct: $E^x\left[\ X_s^o = \delta,\ X_t^o \in E\right] = 0.$

Corolarul 4. Avem egalitatea

$$(7) \qquad [t < \zeta] = [X_t^o \in E],$$

P^x şi $P^{x/u}$ a.s. pentru orice $x \in E$.

Teorema 5 a) Pentru orice $t \geq 0$ avem $P^{\mu/u}(X_t^o \notin E_u,\ t < \zeta) = 0$

b) Fie $t \geq 0$, $H \in \underline{\underline{F}}_t^o$, $H \geq 0$. Atunci:

$$(8) \quad E^{\mu/u}\left[H . 1_{[t<\zeta]}\right] = \int_{E_u} \mu(dx) \frac{1}{u(x)} E^x\left[H . 1_{[t<\zeta]} \cdot u \circ X_t^o\right]$$

c) Fie D o mulţime numărabilă, densă în $\mathbb{R}_+$ şi

$B=\{w/s\longmapsto X^o_s(w)$ are limită la dreapta $X^o_{t+}(w)\in E$ pe D în orice $t\in[0,\zeta(w))$ şi limită la stînga $X^o_{t-}(w)\in E$ pe D în orice $t\in(0,\zeta(w))\}$.

Atunci: $B\in \underline{\underline{F}}^o$ şi $P^{\mu/u}(B)=1$.

d) 1) Pentru orice $t\geq 0$, $P^{\mu/u}(X^o_t=X^o_{t+})=1$.

2) Pentru orice $x\in E_u$, $P^{x/u}(X^o_{0+}=x)=1$

3) Pentru $x\notin E_u$, $P^{x/u}(X^o_{0+}=\delta)=1$.

Demonstraţie. a) Este suficient să demonstrăm pentru $\mu=\varepsilon x$, $x\in E$. Ţinînd cont de (7) obţinem:

$$P^{x/u}(X^o_t\notin E_u,\ t<\zeta)=P^{x/u}(X^o_t\notin E_u,\ X^o_t\in E)=P^{x/u}(X^o_t\in E\setminus E_u)=P^u_t(x,E\setminus E_u)=0.$$

b) Este suficient să demonstrăm (8) pentru $\mu=\varepsilon x$, $x\in E_u$ adică; ţinînd cont de (7):

$$(9)\quad E^{x/u}\left[H.1_E\circ X^o_t\right]=\frac{1}{u(x)}E^x\left[H\cdot(1_E\circ X^o_t).u\circ X^o_t\right],\ x\in E_u,\ t\geq 0$$

Cu argumente de clasă monotonă, putem presupune: $H=f_1\circ X^o_{s_1},\dots,f_n\circ X^o_{s_n}$ unde $f_1,\dots,f_n$ sînt funcţii boreliene nule în δ; $s_1<s_2\dots<s_n=t$. Verificarea relaţiei (9) se face acum prin inducţie după n.

c) Fie $t\in\mathbb{Q}$. Definim:

$B_t=[t<\zeta$ /există $u<t$ a.î. X^o_{u+} nu există în E sau există $u\in(0,t)$ a.î. X^o_{u-} nu există în E$]$,

limitele fiind calculate pe D. Deoarece $CB=\bigcup_{t\in\mathbb{Q}}B_t$ este suficient să arătăm că: $P^{\mu/u}(B_t)=0$. Deoarece B_t se poate exprima cu ajutorul funcţiei "traveră ascendente" pe $D\cap[0,t]$ care este $\underline{\underline{F}}^o_t$ măsurabilă (vezi [3], IV 22, 23) avem:

$B_t \in \underline{\underline{F}}^o_t$. Evident $B_t = B_t \cap [t<\zeta]$ şi deci conform punctului b) este suficient ca: $P^\mu(B_t)=0$, condiţie îndeplinită din ipotezele asupra semigrupului.

d) 1) Fie $t \geq 0$. Deoarece, ţinînd cont de lema 3 avem $P^{\mu/u}$ a.s.:

$$[X^o_t \neq X^o_{t+}] = [X^o_t \neq X^o_{t+},\ t<\zeta] =$$

$$= \bigcup_{k\in \mathbb{N}} [X^o_t \neq X^o_{t+},\ t+\frac{1}{k}<\zeta]$$ este suficient să arătăm că:

$$P^{\mu/u}[X^o_t \neq X^o_{t+}\ ,\ t+\frac{1}{k}<\zeta]=0, \text{ pentru orice } k\in\mathbb{N}.$$

Deoarece $[X^o_t \neq X^o_{t+}] \in \underline{\underline{F}}^o_{t+\frac{1}{k}}$ pentru orice $k\in N$ putem aplica (8) pentru $H = 1_{[X^o_t \neq X^o_{t+}]}$ şi obţinem:

$$P^{\mu/u}[X^o_t \neq X^o_{t+},\ t+\frac{1}{k}<\zeta] = \int_{E_u} \mu(dx)\frac{1}{u(x)}E^x[u(X^o_{t+\frac{1}{k}}),$$

$$X^o_t \neq X^o_{t+}\ ,\ t+\frac{1}{k}<\zeta]=0,$$

ultima egalitate avînd loc deoarece $P^x[X^o_t \neq X^o_{t+}]=0$ din "ipotezele drepte".

2) Ţinînd cont de 1), pentru $x\in E_u$ avem: $P^{x/u}(X_{0+}=x)=P^{x/u}[X^o_0=x] =$
$= P^u_o(x,\{x\}) = \frac{1}{u(x)}P_o(x,u.1_{\{x\}})=P_o(x,1_{\{x\}})=1.$

3) Dacă $x\in E\setminus E_u$ din 1) rezultă: $P^{x/u}[X^o_{0+}=\delta]=P^{x/u}[X^o_0=\delta]=P^u_o(x,1_{\{\delta\}})=1$

Dacă $x=\delta$: $P^{x/u}[X_{0+}=\delta]=P^{\delta/u}[X^o_0=\delta]=P^u_o(\delta,1_{\{\delta\}})=1.$

Vom specifica acum notaţiile:

Fie $\Omega=\{w:\mathbb{R}_+ \longmapsto E\cup\{\delta\}/$ continuă la dreapta, cu timp de viaţă, avînd limită la stînga în E în orice punct din $(0,\zeta)\}$.

Fie X_t coordonatele şi $\underline{\underline{F}}^o_t$, $\underline{\underline{F}}^o$ corpurile uzuale (necompletate).

Fie $G:(B,\underline{\underline{F}}^o_{/B}) \longrightarrow (\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$ definită prin $G(w)=\tilde{w}$, unde $\tilde{w}(t)= =X^o_{t+}(w)$, $t\geq 0$, limita fiind calculată pe D. Mulţimea D fiind numărabilă, G este măsurabilă.

Notăm tot cu $P^{\mu/u}$ măsura pe Ω obţinută ca imagine prin G a restricţiei la B a măsurii $P^{\mu/u}$ definită pe W. Obţinem rezultatul următor:

Teorema 6. Pentru orice lege μ pe E există o măsură $P^{\mu/u}$ pe Ω unică, pentru care procesul (X_t) este markovian admite ca semigrup de tranziţie (P_t^u) şi legea de intrare (μP_t^u).

Se observă că distribuţia lui X_o $(P^{\mu/u} \circ X_o^{-1})$ nu este μ, ci: $1_{E_u} \cdot \mu + \mu(CE_u) \cdot \varepsilon_\delta$.

Vom nota cu $\underline{\underline{F}}_t'^{\mu}$ (respectiv $\underline{\underline{F}}'^{\mu/u}$) completatul corpului $\underline{\underline{F}}_t^o$ în raport cu măsura P^μ (respectiv $P^{\mu/u}$), iar cu $\underline{\underline{F}}^\mu$, $\underline{\underline{F}}_t^\mu$ (respectiv $\underline{\underline{F}}^{\mu/u}$, $\underline{\underline{F}}_t^{\mu/u}$) completatele în $\underline{\underline{F}}^o$ ale corpurilor $\underline{\underline{F}}^o$, $\underline{\underline{F}}_t^o$, în raport cu P^μ (respectiv $P^{\mu/u}$).

Teorema 7. Fie $t \geq 0$ şi $H \in \underline{\underline{F}}_t'^{\mu}$, $H \geq 0$. Atunci:

a) $H \cdot 1_{[t<\zeta]} \in \underline{\underline{F}}_t'^{\mu/u}$

b) (10) $E^{\mu/u}[H.1_{[t<\zeta]}] = \int_{E_u} \mu(dx) \frac{1}{u(x)} E^x[H.1_{[t<\zeta]} . u \circ X_t]$.

Demonstraţie. a) Fie $H \in \underline{\underline{F}}_t'^{\mu}$, $H \geq 0$. Rezultă că există H', $H'' \geq 0$, $H', H'' \in \underline{\underline{F}}_t^o$ a.î. $H' \leq H \leq H''$ şi

(11) $P^\mu(H' \neq H'') = 0$.

Fie $F' = H'.1_{[t<\zeta]}$,

$F'' = H''.1_{[t<\zeta]}$.

Evident: $F', F'' \in \underline{\underline{F}}_t^o$ şi $F' \leq H \cdot 1_{[t<\zeta]} \leq F''$.

In plus: $1_{[F' \neq F'']} = 1_{[H' \neq H'']} \; 1_{[t<\zeta]}$.

Aplicînd (8) pentru funcţia $1_{[H' \neq H'']}$ şi ţinînd cont de (11) obţinem: $P^{\mu/u}[F' \neq F''] = 0$.

b) Formula (10) se obţine aplicînd (8) pentru H′ şi H″.

Teorema 8. Fie T un $(\underline{\underline{F}}'^{\mu}_t)$ t.s. (timp de stopare) şi $H \in \underline{\underline{F}}'^{\mu}_T$, $H \geq 0$. Atunci:

a) $T \wedge \zeta$ este un $(\underline{\underline{F}}'^{\mu/u}_t)$ t.s.

b) $H.1_{[T<\zeta]} \in \underline{\underline{F}}'^{\mu/u}_{T\wedge\zeta}$

c) $E^{\mu/u}\left[H.1_{[T<\zeta]}\right] = \int_{E_u} \mu(dx) \frac{1}{u(x)} E^x\left[H.1_{[T<\zeta]} \cdot u \circ X_T\right]$

Demonstraţie.

a) Avem evident $[T\wedge\zeta > r] = [r<T] \cap [r<\zeta]$. Dar $[r<T] \in \underline{\underline{F}}'^{\mu}_r$ pentru că T este $(\underline{\underline{F}}'^{\mu}_t)$ t.s. Aplicînd teorema 7 a) pentru $1_{[r<T]}$ obţinem $[r<T] \cap [r<\zeta] \in \underline{\underline{F}}'^{\mu/u}_r$, pentru orice $r \geq 0$.

b) Fie $t \geq 0$. Deoarece:

$$H.1_{[T<\zeta]} \cdot 1_{[T\wedge\zeta \leq t]} = H.1_{[T<\zeta,\ T\leq t]} =$$

$$= \sup_{\substack{r\in\mathbb{Q} \\ r\leq t \\ r=t}} H.1_{[r<\zeta,\ T\leq r]}\ ,$$ este suficient să arătăm că:

$$(12) \quad H.1_{[r<\zeta,\ T\leq r]} \in \underline{\underline{F}}'^{\mu/u}_t \ , \text{ pentru } r \leq t.$$

Dar $H.1_{[T\leq r]} \in \underline{\underline{F}}'^{\mu}_r$ pentru că $H \in \underline{\underline{F}}'^{\mu}_T$ şi aplicînd teorema 7 a) pentru $H.1_{[T\leq r]}$ obţinem (12).

c) Demonstraţia se face aproximînd T cu timpi de stopare etajaţi şi aplicînd (10).

Lema 9 ([4], XIV.10). Funcţiile p-excesive/u sînt a.s. continue la dreapta pe traiectoriile u-procesului.

Demonstraţie. I) Să arătăm că f fiind o funcţie excesivă, $t \geq 0$ şi notînd $G^f_t = \{\omega / s \longmapsto f \circ X_s(\omega)$ nu e continuă la dreapta pe $[0,t)\}$ avem:

(13) $G_t^f \in \underline{\underline{F}}_t'^{\mu}$

Deoarece f este aproape boreliană este suficient să demonstrăm (13) pentru funcţii boreliene. Funcţia f fiind excesivă, procesul $(f \circ X_s)$, $s<t$ este un supermartingal. Din [3], VI T.3(2) rezultă că există limita:

$$h_{t_o}(\omega) = \lim_{\substack{s \to t_o \\ s > t_o \\ s \in Q}} f \circ X_s(\omega), \text{ pentru orice } t_o \in [0,t) \text{ şi } \omega \notin H,$$

unde $H = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ a,b \in Q \\ a<b}} H_{n,a,b}$, iar $H_{n,a,b} = \left[U\left(f \circ X_s,\ Q \cap [0, t - \frac{1}{n}], [a,b]\right) = \infty \right]$

In plus $P^{\mu}(H)=0$. Mulţimea pe care se calculează fiind numărabilă, funcţia traversării ascendente rezultă $\underline{\underline{F}}_t^o$ măsurabilă şi deci: $H_{n,a,b} \in \underline{\underline{F}}_t^o$. Rezultă că: $H \in \underline{\underline{F}}_t^o$. Punînd deci $h_s(\omega)=0$, pentru $\omega \in H$, obţinem un proces $\underline{\underline{F}}_t^o$ numărabil (h_s), $0 \leq s<t$. (X_t) avînd traiectorii continue la dreapta, procesul $(f \circ X_s)$, $0 \leq s<t$ este de asemenea măsurabil. Notînd:

$B_t = \{(s,\omega) / f \circ X_s(\omega) \neq h_s(\omega),\ s<t\}$, obţinem:

$B_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \underline{\underline{F}}_t$. Aplicînd acum "teorema de măsurabilitate a debutului ([2], III. 44) obţinem: $D_{B_t} \in \underline{\underline{F}}_t'^{\mu}$ şi notînd $A_t = [D_{B_t} < \infty]$ avem $A_t \in \underline{\underline{F}}_t'^{\mu}$. Avem însă evident: $A_t = \{\omega / \exists\ s<t \text{ a.î. } f \circ X_s(\omega) \neq h_s(\omega)\}$ şi deci: $A_t \subseteq G_t^f \subset A_t \cup H$, $P^{\mu}(H)=0$. Rezultă: (13).

II) Supermartingalul $(u \circ X_t)$ fiind continuu la dreapta rezultă ([2], VI T.15):

(14) $u \circ X_t = 0 \Rightarrow u \circ X_s = 0$, pentru orice $s \geq t$, P^x a.s. $\forall\ x \in E$. Continuitatea la dreapta a traiectoriilor implică:

(15) $D_{[u=\infty]}=\infty$ P^x a.s., pentru orice $x\in E_u$.

Din teorema de măsurabilitate a debutului rezultă că pentru $A\subset E_u\cup\{\delta\}$ boreliană, debutul D_A este un $(\underline{\underline{F}}_t'^{\mu})$ t.s. Rezultatul se păstrează pentru A aproape boreliană.

III) Fie w o funcție p-excesivă/u. Rezultă că:

$w=\frac{v}{u}$ pe E_u, unde v este p-excesivă.

Din continuitatea la dreapta a traiectoriilor avem:

$$\{\omega/s\longmapsto w\,X_s(\omega) \text{ nu e continuă la dreapta}\}=\bigcup_{t\in Q}G_t^w\cap[t<\zeta]\quad .$$

Deoarece $[t<\zeta]=[D_{CE_u}\leq t<\zeta]\cup[t<D_{CE_u}\wedge\zeta]$, pentru a încheia demonstrația este suficient să arătăm că următoarele mulțimi sînt $P^{\mu/u}$ neglijabile:

$$G_1=G_t^w\cap[t<D_{CE_u}\wedge\zeta]$$
$$G_2=G_t^w\cap[D_{CE_u}\leq t<\zeta]$$

Pe mulțimea $[t<D_{CE_u}\wedge\zeta]$ avem: $X_s\in E_u$, pentru orice s<t și deci $w\circ X_s=\frac{v}{u}\circ X_s$. Rezultă că $G_1\subset(G_t^v\cup G_t^v)\cap[t<\zeta]$.

Funcțiile p-excesive fiind a.s. continue la dreapta pe traiectorii și ținînd cont de (13) putem aplica (10) și obținem: $P^{\mu/u}\left[(G_t^v\cup G_t^u)\cap[t<\zeta]\right]=0$. Din (15) avem P^x a.s. pentru orice $x\in E_u$: $D_{CE_u}=D_{[u=0]}\wedge D_{[u=\infty]}=D_{[u=0]}$. In plus $[D_{CE_u}\leq t<\zeta]=\bigcup_{\substack{r\in Q\\ r>t}}\left([D_{CE_u}\leq t]\cap\right.$ $\left.\cap[r<\zeta]\right)$, iar din (14) rezultă acum:

$[D_{CE_u}\leq t]\cap[r<\zeta]\subset[X_r\in[u=0]]$, P^x a.s. pentru orice $x\in E_u$. Ținînd cont de (10) ($[D_{CE_u}\leq t]\cap[r<\zeta]\in\underline{\underline{F}}_r'^{u}$, iar integrarea în raport cu măsura μ se face pe E_u) rezultă că:

$P^{\mu/u}[D_{CE_u}\leq t, r<\zeta]=0$, pentru orice r>t, deci și $[D_{CE_u}\leq t<\zeta]$ este $P^{\mu/u}$ neglijabilă. G_2 rezultă $P^{\mu/u}$ neglijabilă.

Lema 10. Funcţiile p-excesive/u sînt aproape boreliene/u.

Demonstraţie. Deoarece orice funcţie p-excesivă/u se exprimă ca un cît de funcţii p-excesive (care sînt aproape boreliene) pe E_u, este suficient să demonstrăm că: funcţiile aproape boreliene sînt aproape boreliene/u.

Fie f aproape boreliană. Există deci $f_1, f_2 \in \mathcal{B}(E)$ a.î. $f_1 \leq f \leq f_2$ şi $P^{\mu}[\exists s, f_1(X_s) \neq f_2(X_s)] = 0$. Arătăm că:

$$P^{\mu/u}[\exists s, f_1(X_s) \neq f_2(X_s)] = 0.$$

Din continuitatea la dreapta a traiectoriilor, ca în demonstraţia lemei 9, şi ţinînd cont de (10) este suficient să demonstrăm că:

$$(16) \qquad [\exists s<t,\ X_t \in E,\ f_1(X_s) \neq f_2(X_s)] \in \underline{\underline{F}}_t'^{\mu}$$

Notînd cu A_t' această mulţime şi cu $B_t' = \{(s,\omega) / f_1 \circ X_s(\omega) \neq f_2 \circ X_s(\omega)\}$ avem: $A_t' = [D_{B_t'} < \infty]$. Din [2], III, 44 rezultă că $D_{B_t'} \in \underline{\underline{F}}_t'^{\mu}$ şi deci are loc (16).

Din lemele 9 şi 10 rezultă ([4], XIV, T.11) că u-procesele sînt tare Markov pentru familia $(\underline{\underline{F}}_{t+}^{\mu/u})$ şi deci familia $(\underline{\underline{F}}_t^{\mu/u})$ este continuă la dreapta (conform [4], XIII, T.13).

Lema 11. u-Procesele sînt quasi-continue la stînga dacă procesul iniţial este aşa.

Demonstraţie. Din [1] teorema 7.3, cap.I rezultă că este suficient să considerăm $(\underline{\underline{F}}_{t+}^{o})$ t.s. Fie deci $T_n, n \geq 1$ $(\underline{\underline{F}}_{t+}^{o})$ t.s., $T_n \nearrow T$. Notînd $A_n = \left[\lim_{n\to\infty} X_{T_n} \neq X_T,\ T + \frac{1}{n} < \zeta\right]$ avem:

$$\left[\lim_{n\to\infty} X_{T_n} \neq X_T,\ T < \zeta\right] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Prin ipoteză $P^x(A_n)=0$ pentru orice $x\in E$, iar $A_n\in \underline{F}^o_{T+\frac{1}{n}}$. Din teorema 8.c) rezultă: $P^{\mu/u}(A_n)=0$, deci cvasi-continuitatea la stînga pentru u-proces.

Cumulînd rezultatele lemelor 9, 10 şi 11 obţinem următorul rezultat:

Teorema 12. Dacă semigrupul (P_t) este standard atunci semigrupul (P^u_t) are toate proprietăţile unui semigrup standard mai puţin proprietatea: $X_{0+}=x$, $P^{x/u}$ a.s. (care nu este satisfăcută dacă $x\notin E_u$, conform teoremei 5. d.3)).

Vom demonstra acum un rezultat ce va permite să "restrîngem" spaţiul stărilor la E_u, obţinînd astfel un proces standard (pentru care spaţiul stărilor E_u nu este total compact):

Teorema 13. Pentru $x\in E_u$ avem $P^{x/u}$ a.s.:

$$X_t(\omega)\in E_u \text{ şi } X_{t-}(\omega)\in E_u \text{ pentru orice } t\in(0,\zeta(\omega)).$$

Demonstraţie.

Pentru $A\subset E\cup\{\delta\}$ aproape boreliană definim ([4], XV, T.7):

$$S_A(\omega)=\inf\{t\geq 0/X_{t-}(\omega)\in A\}$$

şi avem $S_A\geq D_A$ P^x a.s.

Cu teorema de măsurabilitate a debutului se obţine uşor că S_A este un $(\underline{F}^{\varepsilon x}_{t+})$ t.s., cu A boreliană, iar ţinînd cont de inegalitatea $S_A\geq D_A$, se obţine acelaşi rezultat pentru A aproape boreliană.

Fie $r\in Q$. Definim:

$$N_1=\{r<\zeta/\exists t<r,\ X_t\in[u=\infty] \text{ sau } X_{t-}\in[u=\infty]\}$$
$$N_2=\{r<\zeta/\exists t<r,\ X_t\in[u=0] \text{ sau } X_{t-}\in[u=0]\}$$

Avem evident: $N_1=[r<\zeta]\cap([D_{[u=\infty]}\leq r]\cup[S_{[u=\infty]}\leq r])$ şi $N_2=[r<\zeta]\cap([D_{[u=0]}<r]\cup[S_{[u=0]}<r])$.

Cu observaţiile făcute rezultă: $N_1, N_2\in \underline{\underline{F}}_r^{'\mathcal{E}x}$, în plus: $N_1=[r<\zeta]\cap [D_{[u=\infty]}\leq r]$ şi $N_2=[r<\zeta]\cap[D_{[u=0]}<r]$, P^x a.s.

Deoarece putem aplica (10) pentru N_1 şi N_2, este suficient să arătăm că:

$$\int_{N_1} u\circ X_r \, dP^x=0 \tag{17}$$

$$\int_{N_2} u\circ X_r \, dP^x=0 \tag{18}$$

pentru orice $x\in E_u$.

Din (15) rezultă $P^x(N_1)=0$, deci are loc (17).

(14) implică $N_2\subset[u\circ X_r=0]$ P^x a.s. şi obţinem (18).

Bibliografie

[1] R.M.Blumenthal and R.K.Getoor: Markov processes and potential theory. New York: Academic Press, 1968.

[2] C.Dellacherie, P.A.Meyer: Probabilities and Potential. Amsterdam - New York - Oxford: North-Holland, 1978.

[3] P.A.Meyer: Probability and potentials. Waltham-Toronto-London: Blaisdell, 1966.

[4] P.A.Meyer: Processus de Markov. Lectures Notes in Math.26, Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.

[5] P.A.Meyer: Processus de Markov: la frontière de Martin. Lectures Notes in Math.77, Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1968.

I.Cuculescu
Faculty of Mathematics
University of Bucarest

Hitting probabilities for multidimensional brownian motion

(69 p.)

. . .

This is a seminar,having as main purpose to expose,with complete proofs,the "Lebesgue thorn".More generally,it had as purpose to give significant examples concerning the topics in 5,7 . It is written in such a way that a probabilist,which had no interest in potential theory before facing the problem of studying the hitting probabilities for the multidimensional brownian motion,may read it without any difficulty.As appears also from the title of 4,it does not require any knowledge in(Newton) potential theory.

It requires some knowledge in probability theory.In its initial form,the manuscript was integrated in a course in probability.Since this course is not published,we eliminated all the corresponding quotations and changed the numbers of the sections. It was not supposed that the manuscript will be reproduced as it is;it contained " xxx 's " which were erased.These are the explanations of its curious graphical aspect and of the pages nr.14-15 and 16-17.

Sections 1c and 1d (p.11-14) are not related to the main topic and not used in the sequel.

Hitting probabilities for multidimensional brownian motion.

1. Introduction.

An n-dimensional brownian motion is a R^n-valued process $(x_t)_{t\in[0,\infty)}$, with independent increments, with $x_0=0$, with the distribution of x_t-x_s equal to $\gamma_{0,(t-s)1}$ for $s<t$ and with continuous sample paths.

If $x_t=(x_t^{(1)},\dots,x_t^{(n)})$ then $(x_t^{(i)})_{t\in[0,\infty)}$ are onedimensional brownian motions, independent in the sense that $(\mathcal{B}(x_t^{(i)}|t\in[0,\infty))_{1\le i\le n}$ is an independent family. The simplest way to prove this fact is to consider n independent onedimensional brownian motions $(y_t^{(i)})_{t\in[0,\infty)}$ and to remark, as an easy application of the associativity, desassociativity, that, if $y_t=(y_t^{(1)},\dots,y_t^{(n)})$, (y_t) is an n-dimensional brownian motion.

We may consider the n-dimensional brownian motion as a $(Q_t^{(n)})$-process, where $(Q_t^{(n)})$ is the transition semigroup on R^n defined by $Q_t^{(n)}(x,\ )=\gamma_{x,t.1_n}$. This enables us to speak about n-dimensional brownian motion starting from a $x\in R^n$, as a $(Q_t^{(n)})$-process with continuous paths (y_t) with $y_0=x$. It is $(x+x_t)_{t\in[0,\infty)}$, where (x_t) is a n-dimensional brownian motion, etc.

$(Q_t^{(n)})$ is a strong Markov continuous transition semigroup.

Let C_n be the set of all continuous $f:[0,\infty)\to R^n$, $y_t^{(n)}:C_n\to R^n$ be defined by $y_t^{(n)}(f)=f(t)$, $\mathcal{F}_t^{(n)}=\mathcal{B}(y_s^{(n)}|s\le t)$, $\theta_t^{(n)}:C_n\to C_n$ be defined by $(\theta_t^{(n)}f)(s)=f(s+t)$.

Let $P_x^{(n)}$ be the distribution, on $\{C_n,\mathcal{F}_\infty^{(n)}\}$, of the n-dimensional brownian motion starting from x. Then $x\to P_x^{(n)}$ is a transition probability $P^{(n)}$.

According to the strong Markov property, we have, for every probability μ on R^n, every $(\mathcal{F}_t^{(n)})$-stopping time τ and every $\mathcal{F}_\infty^{(n)}$-measurable g, ≥ 0 or bounded, $M_{\mu P^{(n)}}(g\circ\theta_\tau^{(n)}|\mathcal{F}_{\tau+0}^{(n)})$

$= \int g dP^{(n)}_{y^{(n)}_{\tau}}$ where each member is considered null on $(\tau = \infty)$.

a. Invariance properties.

Proposition. Let (x_t) be an n-dimensional brownian motion.

1. If $a \in R, a \neq 0$ then $(ax_{ta^{-2}})$ is also a brownian motion(n-dimensional

2. The probability of $(\lim_{t \to +\infty} t^{-1} x_t = 0)$ is 1. The process $(tx_{t^{-1}})$, defined on the mentioned set, considered as 0 for $t=0$, is also an n-dimensional brownian motion.

3. If $U: R^n \to R^n$ is an isometric linear operator, then (Ux_t) is also a n-dimensional brownian motion.

b. Hitting probabilities.

Definition. Let (Q_t) be a continuous transition semigroup on the metrisable space S. For every $x \in S$ and closed $A \subset S$ we define $\tilde{H}^Q_A(x, \ )$ as the distribution of x_{τ_A} in a (Q_t)-process with continuous sample paths (x_t), with $x_0 = x$, where $\tau_A(\omega) = \min\{t \mid x_t \in A\}$

$\tilde{H}^Q_A$ is a transition measure, generally not a transition probability, since τ_A may be infinite with positive probability.

Due to the continuity of paths, $\tilde{H}^Q_A(x, \ )$ is concentrated on the intersection of A and of the closure of the connected component of $\complement A$ containing x, in the case $x \notin A$; for $x \in A$, $\tilde{H}^Q_A(x, \ ) = \varepsilon_x$.

Proposition. If (Q_t) is strong Markov(continuous, on a metrisable space) then for $A \supset B$ we have $\tilde{H}^Q_B = \tilde{H}^Q_A \tilde{H}^Q_B$.

This is a consequence of the strong Markov property with τ_A.

of $\tau_B = \tau_A + \tau_B \circ \theta_{\tau_A}$, etc.

The hitting probabilities for the one dimensional brownian motion are the following : If $x \notin A$, where $A \subset R$ is closed, then the connected component of $\complement A$ containing x is an interval. If it is an infinite interval with one end in a, then $\widetilde{H}_A(x, \ ) = \varepsilon_a$ since the τ_a is a.s. finite. If it is a finite interval (a,b) then

$$\widetilde{H}_A(x, \ ) = \frac{b-x}{b-a}\,\varepsilon_a + \frac{x-a}{b-a}\,\varepsilon_b .$$

But for $n \geq 2$ there is a great variety of connected open subsets (domains) of R^n and the problem of studying the hitting probabilities for the n-dimensional brownian motion is a more complicated one; this paragraph is devoted to it.

b_1. Examples of hitting probabilities for the n-dimensional brownian motion.

A known result, in terms of hitting probabilities, states that, if $A = (-\infty, 0] \times R$, then for the two dimensional brownian motion we have, for $a > 0$, $\widetilde{H}_A((a,b), \ ) = \varepsilon_0 \otimes (\varepsilon_b * (f_a \cdot m))$, where $f_a(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2 + x^2}$.

The method works also if we intend to determine $\widetilde{H}_A((a,b), \ )$ for a n-dimensional brownian motion, $n \geq 2$, $A = (-\infty, 0] \times R^{n-1}$, giving $\varepsilon_0 \otimes (\varepsilon_b * F^a_{n-1})$, where F^a_k is the probability on R^k having as characteristic function $e^{-a\|\tau\|}$. This probability appears as a k-dimensional stable distribution, with parameter 1, invariant under every linear isometric mapping(invariance following also from a.3 above).

F^a_k is absolutely continuous, due to the k-dimensional analogue of the inversion formula . An attempt to obtain an explicite formula for its density leads to the calculation of

$(2\pi)^{-k}\int e^{-i\langle\tau, x\rangle - a\|\tau\|}\, dm_k(\tau) \dots$.

But we may determine directly F^a_k as the distribution of x_τ , where (x_t) is a k-dimensional brownian motion and τ is a positive random variable, independent of $\mathcal{B}(x_t | t\in[0,\infty))$, having as distribution an absolutely continuous one, with density $\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\, t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$ (as a function of t)

Hence $P(x_\tau\in A)=\int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\, t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{2t}} (2\pi t)^{-\frac{k}{2}} \int_A e^{-\frac{\|x\|^2}{2t}} dm_k(x)\,dt$

If we write it as $\int \chi_A(\quad) dm_k$, then under the paranthesis is an integral with respect to t, in which the substitution to be performed is $t=s(a^2+\|x\|^2)$ and then $s=u^{-1}$. We obtain

$$P(x_\tau\in A)=(2\pi)^{-\frac{k+1}{2}}\int_A a(a^2+\|x\|^2)^{-\frac{k+1}{2}}\int_0^\infty u^{\frac{k-1}{2}} e^{-\frac{u}{2}}\,du\, dm_k(x).$$

The inner integral equals $2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma(\frac{k+1}{2})$, where $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. Let us recall that, integrating by parts, we get, for $\alpha>0$, $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ and that $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ hence $\Gamma(n)=(n-1)!$ for an integer n and $\Gamma(\frac{n}{2})=\frac{(n-1)!}{2^{n-1}(\frac{n-1}{2})!}\sqrt{\pi}$ for an odd integer n (induction); in both cases $n>0$.

We have proved:

Proposition. Let $A=(-\infty,0]\times R^{k-1}$. Then the hitting distribution for the k dimensional brownian motion is, for a 0, $\widetilde{H}_A((a,b),\quad)=\varepsilon_0\otimes(\varepsilon_b * F^a_{k-1})$, where $F^a_n=f_{a,n}\cdot m_n$, $f_{a,n}(x)=$

$$\pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\tfrac{n+1}{2})a(a^2+\|x\|^2)^{-\frac{n+1}{2}},$$ the necessary values of Γ being indicated above.

The characteristic function of F_n is $e^{-a\|\tau\|}$; it is a n-dimensional stable distribution, of parameter 1, invariant with respect to all linear isometries of R^n.

$\S_2$. Definition of the hitting distributions.

If $x\in A$, then obviously $\widetilde{H}_A(x,\quad)=\varepsilon_x$, hence it contains in it no information. This is the reason of:

Definition. If (Q_t) is a continuous transition semigroup on the metrisable space S, if $x \in S$, if $A \subset S$ is closed, if (x_t) is a (Q_t)-process with continuous sample paths starting from x and if $\tau'_A(\omega) = \inf\{t \mid t>0, x_t(\omega) \in A\}$, then we define $H^Q_A(x, \ )$ as the distribution of $x_{\tau'_A}$.

The necessary quotations figure in 𝒷 above. $H^Q_A(x, \ ) = \tilde{H}^Q_A(x, \ )$ for $x \notin A$; H^Q_A is also a transition measure.

The proposition in 𝒷 is not generally true for the H's. If $Q_t(x, \ ) = \varepsilon_{x+t}$, $A = \{a,b\}$, $a<b$, $B=\{a\}$ then, for $x<a$, $H^Q_A(x, \ ) = \varepsilon_a = H^Q_B(x, \ )$, but $H^Q_B(a, \ )=0$, etc.

However, $H^Q_B = H^Q_A H^Q_B$ for $A \supset B$ is true if $B \subset \overset{\circ}{A}$, since $\tau'_B = \tau'_A + \tau'_B \circ \theta_{\tau'_A}$ is true: if $\tau'_B > 0$ then the sample path is in A in a whole neighborhood of τ'_B, hence $\tau'_A < \tau'_B$, etc., while if $\tau'_B = 0$ we have $\tau'_A = 0$, etc.

Now a known result may be stated as:

Proposition. $H_{\{a\}}(x, \ ) = 0$ for all a, x, for the n-dimensional brownian motion with $n \geq 2$; $H_A(x, \ ) \neq 0$ for every A with nonvoid interior, its total mass being 1 for $n=2$ and strictly less than 1 if $n \geq 3$, $x \notin A$ and A is a sphere. $H_A(x, \ )$ has total mass 1 when $n \geq 3$ and $\complement A$ is bounded.

Corollary. 1. If $n \geq 3$ and $A \subset R^n$ is a $(n-2)$-dimensional linear variety, then $H_A(x, \ )=0$ for the n-dimensional brownian motion (using the invariance property in c we reduce to the case $A = \{a\} \times R^{n-2}$, $a \in R^2$; the n-dimensional brownian motion composed with $pr_{\{1,2\}}$ is a 2-dimensional one, etc.).

2. If $\complement A$ is bounded then $H_A(x, \ )$ has total mass 1 for the n-dimensional brownian motion, whatever be $n \geq 2$ and x (of course $A \subset R^n$).

$𝒷_3$. Another example of a hitting distribution for the n-dimensional brownian motion.

Let $n \geq 2$ and let us consider $H_A(0, \cdot)$ where $A = \{x \mid \|x\| \geq 1\}$.

According to the invariance property in a.3 and to corollary 2 in b_2, $H_A(0,\ )$ is a probability, invariant under every linear isometry, concentrated on $\{x \mid \|x\|=1\}$.

We are going to show that there is only one such probability μ; it will follow that $H_A(0,\ )=\sigma$.

Let G be the group of all linear isometries of R^n. It is a compact group (with the topology defined by the euclidean one on the set of all n n-matrices; the group operations, $U \to U^{-1}$ included, are continuous. It is also metrisable.

We shall use the existence, on every compact metrisable topological group G, of a probability ν (the Haar measure), invariant under all $x \to xy$, $x \to yx$ with $y \in G$. We shall show this fact in b_4 below.

Let f be bounded measurable on $\{x \mid \|x\|=1\}$. Let us calculate $\int f(Ux)d\mu(x)d\nu(U)$. On one hand it equals $\int(\int f(Ux)d\mu(x))d\nu(U)=$ $=\int f d\mu$ due to the invariance property of μ and on other hand it equals $\int(\int f(Ux)d\nu(U))d\mu(x)$. If we fix x_0 then for every x there exists $V \in G$ with $x=Vx_0$, hence the last integral equals, due to the invariance property of ν, $\int f(Ux_0)d\nu(U)$, i.e. is the same for all possible μ.

We have proved:

Proposition. For every n, there is only one probability σ_{n-1} on $\{x \mid x \in R^n, \|x\|=1\}$ which is invariant under all linear isometries.

For every $x \in R^n$, $\varepsilon > 0$ the hitting distribution $H_{\complement S(x,\varepsilon)}(x,\ )$, where $S(x,\varepsilon)$ is the open sphere of center x and radius ε, for the n-dimensional brownian motion is σ_{n-1} transported via the mapping $y \to x+\varepsilon y$.

Of course, we have to rely, for a complete proof, also on a.1.

b_4. Haar measure on compact metrisable topological groups.

We give a proof of its existence, and uniqueness.

Let G be the group. The idea is to approximate the desired measure by probabilities of the type $\mu=\frac{1}{n}(\varepsilon_{a_1}+\dots+\varepsilon_{a_n})$, with $a_i \in G$. Let us denote $t_x(y)=xy$, $s_x(y)=yx$. We have $\int fd(\mu\circ t_x^{-1})=\frac{1}{n}\sum f(xa_i)$, $\int fd(\mu\circ s_x^{-1})=\frac{1}{n}\sum f(a_i x)$. We denote the first one, as a function of x, by $L(A,f)$ and the second one by $R(f,A)$, where $A=(a_1,\ldots,a_n)$, where we accept the possibility that $a_i=a_j$ for $i\neq j$ and consider that the order of the a_i's doesnot matter (i.e. $(a,a,b)=(a,b,a)\neq(a,b,b)$, etc.).

The idea is to make these functions "as constant as possible".

Let us remark first that $L(B,L(A,f))=L(BA,f)$, $R(R(f,A),B)=R(f,AB)$, where $AB=\{ab \mid a\in A, b\in B\}$; the aspect of these relations shows the reason for the notations of L,R. We have also $R(L(A,f),B)=L(A,R(f,B))$.

For every $f:G\to R$ let us define its oscillation $\omega(f)=\max f-\min f$. We have $\omega(L(A,f))\leq\omega(f)$, $\omega(R(f,A))\leq\omega(f)$.

In the rest of our proof we limit ourselves to continuous f's.

Whatever be f with $\omega(f)>0$, there exists A such that $\omega(L(A,f))<\omega(f)$. In fact, for every $\varepsilon>0$ there exists an open set $V\subset G$ containing the unity e of G such that, if $x,y\in Vz$ then $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ (usual proof of the uniform continuity of continuous functions on compacts).

Let $f(z)=\inf f$, $\varepsilon<\omega(f)$. We cover G with a finite family of Vza^{-1}, $a\in A$. Then in the sum defining $(L(A,f))(x)$, for every given x, the term $f(xa)$ for which $x\in Vza^{-1}$ has a contribution smaller than $f(z)+\varepsilon<\sup f$, hence $\sup L(A,f)<\sup f$, etc.

We prove now that for every f we have $\inf\limits_A\omega(L(A,f))=0$. Let A_n be such that $\omega(L(A_n,f))\to\inf\limits_A\omega(L(A,f))$. Let us remark that $\{L(A,f)\mid A\subset G, A \text{ finite}\}$ is an equicontinuous family, hence (Arzela theorem) we may suppose that $L(A_n,f)$ conferges uniformly to a continuous function g. It follows that $\omega(g)=\inf\limits_A\omega(L(A,f))$. If $\omega(g)>0$, we may find B with $\omega(L(B,g))<\omega(g)$. But $L(B,g)=\lim L(B,L(A_n,f))$ uniformly (immediate verification), i.e. $L(B,g)=\lim L(BA_n,f)$ uniformly, hence $\lim\omega(L(BA_n,f))=\omega(L(B,g))<\omega(g)$ contradicting the meaning of $\omega(g)$. Let us remark that g follows constant.

We have in fact proved the existence, for every given f, of a sequence A_n such that $L(A_n, f)$ converges uniformly to a constant c. Considering G with the operation $(x,y) \to yx$, we deduce the existence of a B_n for which $R(f,B_n) \to d$, uniformly. But it follows that $R(L(A_n,f),B_n) \to c$, $L(A_n,R(f,B_n)) \to d$, both uniformly (easy verification). Since the sequences are the same, as was remarked, we get c=d and the unicity of c,d is proved.

We define now $I(f)$ as the common value of c,d in the reasonment above. It is easy to see that $I(\alpha f)=\alpha I(f)$ for $\alpha \in R$ and that $I(fot_x)=I(for_x)=I(f)$ (since $fot_x=R(f,(x))$, etc.). Also $I(f) \geqslant 0$ for $f \geqslant 0$.

An application of the Riesz theorem would finish the proof. We have to show before it that $I(f+g)=I(f)+I(g)$.

In order to do it, let us begin with the obvious remarks $\omega(f+g) \leq \omega(f)+\omega(g)$, $L(A,f+g)=L(A,f)+L(A,g)$. Let $\varepsilon_n \to 0$. Let us define by induction $C_o=(e)$, $D_n=A_nC_n$ such that $\omega(L(D_n,g))= \omega(L(A_n,L(C_n,g))) < \varepsilon_n$, $C_{n+1}=B_nD_n$ such that $\omega(L(C_{n+1},f))= \omega(L(B_n,L(D_n,f))) < \varepsilon_{n+1}$ (the above results applied to $L(C_n,g)$, $L(D_n,f)$). We deduce also $\omega(L(C_{n+1},g))= \omega(L(B_n,L(D_n,g))) \leq \omega(L(D_n,g)) < \varepsilon_n$. Hence $\omega(L(C_n,f)) \to 0$, $\omega(L(C_n,g)) \to 0$. It follows that $\omega(L(C_n,f+g)) \to 0$ hence $I(f+g)=\lim L(C_n,f+g)=\lim L(C_n,f)+\lim L(C_n,g)=I(f)+I(g)$ (uniformly).

The existence of the Haar measure on metrisable cómpact topological groups is completely proved.

$\mathscr{C}_5$. $H_A(x, \ )$ for $x \in A$ in brownian motions.

The result in $\mathscr{C}_2$ above shows that for $n \geqslant 2$, $H_A(x, \ )= \varepsilon_x$ for a n-dimensional brownian motion is equivalent to $\tau'_A=0$ a.e. for such a process starting from x (for n=1 we have $\tau'_A=0$ a.e. when starting from a $x \in A$

The equivalence above is not true for an arbitrary transition semigroup, as is seen considering the "uniform movement on a circle" and $A=\{a\}$.

Moreover, the 0-1 law

show that the probability of $\tau'_A=0$ in a brownian motion(or, more generally, in a strong Markov process) starting from a $x\in A$ is 0 or 1. Hence in the n-dimensional brownian motion with $n\geq 2$, if $x\in A$, then $H_A(x,\{x\})$ is 0 or 1.

We could define H_A for every F_σ-set A; a known result can then be stated as $H_{(0,\infty)}(0,\ )=\varepsilon_0$ for the unidimensional brownian motion.

We establish two analogue results for multidimensional brownian motions. Since a given point is not visited at positive moments, we must not take it off from the set and our definition of H_A is sufficient.

Proposition. For the n-dimensional brownian motion with $n\geq 2$ we have $H_A(x,\ )=\varepsilon_x$, for $x\in A$, in the following situations:

1. $A=\{x+ty \mid t\geq 0, y\in B\}$, where $B\subset\{y \mid \|y\|=1\}$ is a closed set with $\sigma(B)>0$, σ being invariant to all linear isometries.

2. $A=\{(y,f(y)) \mid y\in B\}$, where $B\subset R^{n-1}$ is closed, $f:B\to R$ is continuous, $x=(x_1,x_2), x_1\in R^{n-1}, x_2\in R, x_1\in \overset{\circ}{B}, f(x_1)=x_2$, f is differentiable in x_1.

Proof. We may consider $x=0$. Let (x_t) be the n-dimensional brownian.

1. $P(A$ is visited in $(0,a])=P(\tau'_A\leq a)$ is the same for all $a\in(0,\infty)$, due to c.l. Hence $P(\tau'_A=0)=P(A$ is visited in $(0,\infty))\geq P(x_t\in A)$ for every $t>0$. But $P(x_t\in A)=$

$$(2\pi t)^{-\frac{n}{2}}\sigma(B).c\int_0^\infty \rho^{n-1}e^{-(2t)^{-1}\rho^2}d\rho>0.$$

Since we saw that $P(\tau'_A=0)$ may be only 0 or 1, the statement follows.

2. A is obviously closed. We have $f(y)=\varphi(y)+\varepsilon(y)\|y\|$ where φ is linear and $\varepsilon(y)\to 0$ for $y\to 0$. Hence there is a $\eta>0$ such that for $\|y\|<\eta$, $y\in R^{n-1}$ we have $y\in B$ and $|f(y)|\le c\|y\|$ with a constant c

Let $d>c$ and let B_1, B_2 be the subsets of $\{z\mid z\in R^n, \|z\|=1\}$ defined by (if $z=(y_1,y_2), y_1\in R^{n-1}, y_2\in R$) $y_2\geq d\|y_1\|$, $y_2\leq -d\|y_1\|$ respectively. Let $A_1=\{tz\mid t\geq 0, z\in B_1\}$, $A_2=\{tz\mid t\geq 0, z\in B_2\}$. They have nonvoid interiors (for example $(0,1)\in \overset{o}{A}_1$, $(0,-1)\in \overset{o}{A}_2$) hence their n_x's are positive i.e. $\sigma(B_1)>0$, $\sigma(B_2)>0$.

Intuitively A_1 and A_2 are two cones which touch the surface A in 0, situated on different sides of the surface.

According to the result in 1, for almost all ω there exists a sequence $t_k\downarrow 0$ such that $\|pr_{R^{n-1}} x_t(\omega)\|<\eta$ for $t\leq t_1$, $x_{t_k}(\omega)\in A_1$ for even k and $x_{t_k}(\omega)\in A_2$ for odd k. The function, defined for $t\in(0,t_1]$, $t\to pr_R x_t(\omega)-f(pr_{R^{n-1}}x_t(\omega))$ is continuous, has nonnegative values for $t=t_k$ with an even k and nonpositive values for $t=t_k$ with an odd k. Hence it is null for a sequence of values tending to 0, different of zero; for every such t we have $x_t(\omega)\in A$, q.e.d.

Remark. In the situation in 1 above, if the interior of B as a subset of $\{y\mid \|y\|=1\}$ is non void, then $\sigma(B)>0$

C. The law of the iterated logarithm.

If (x_t) is a n-dimensional brownain motion and $v\in R^n$, $\|v\|=1$ then $(\langle v, x_t\rangle)$ is a one dimensional brownian motion. According to the law of iterated logarithm, for almost all ω, the set of limit points, for $t\to\infty$, of $\langle v, x_t(\omega)\rangle(2t\ln\ln t)^{-1/2}$ is included in $[-1,1]$ and contains 1 and -1.

Applying the above fact to a denumerable set of v's, dense in $\{v\mid \|v\|=1\}$, and remarking that $|\langle x,v\rangle|\leq 1$ for all such v's implies $\|x\|\leq 1$, we deduce first that, denoting by $L(\omega)$ the set of limit points for $t\to\infty$ of $x_t(\omega)(2t\ln\ln t)^{-1/2}$, we have for almost all ω $L(\omega)\subset\{x\mid \|x\|\leq 1\}$ and then that ($L(\omega)$ being closed) for almost all ω $L(\omega)\supset\{x\mid \|x\|=1\}$.

It is an unexpected fact that the following simple trick succeeds in eliminating the above indeterminacy of $L(\omega)$. Namely, we apply the above result to the $(n+1)$-dimensional brownian motion and project it on R^n. We deduce that $L(\omega)=\{x \mid \|x\| \leq 1\}$ a.e.

Let us use also the invariance property in c.2 above in order to complete the proof of:

Proposition. If (x_t) is a n-dimensional brownian motion, then for almost all ω the sets of limit points of $\frac{x_t(\omega)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}$ for $t \to \infty$ and of $\frac{x_t(\omega)}{\sqrt{2t\ln\ln t^{-1}}}$ for $t \downarrow 0$ coincide with $\{x \mid \|x\| \leq 1\}$.

Remark. Using the same method, we deduce from the one dimensional law of the iterated logarithm the truth of the following statement:

If $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ are R^k-valued independent random variables, all having the distribution F, if $\int \|x\|^2 dF(x) < \infty$, $MF=0$ and DF is non singular then for almost all ω the set of limit points of the sequence $\frac{f_1(\omega)+\ldots+f_n(\omega)}{\sqrt{2n\ln\ln n}}$ is $\{x \mid \langle (DF)x, x \rangle \leq 1\}$.

In its proof it is better to work with the scalar product $\langle (DF)x, y \rangle$, etc.

If DF is singular then there exists a nonsingular linear $B: R^k \to R^k$ such that, in a suitable writing $R^k = R^p \times R^q$, $F \circ B^{-1} = G \otimes \varepsilon_0$, DG is nonsingular. Relying on the above result for G, we deduce a result valid for a general DF.

d. .Grouping the states.

The following appears as useful:

Remark. If $(Q_t^{(n)})$ is the transition semigroup of the n dimensional brownian motion, if $U: R^n \to R^n$ is linear isometric, if $a \in R^n$ and $T(x)=a+Ux$, then $Q_t^{(n)}(x,A)=Q_t^{(n)}(T(x),T(A))$ (the first equals $\gamma_{0,t.1_n}(A-x)$, the second $\gamma_{0,t.1_n}(T(A)-T(x))=\gamma_{0,t.1_n}(U(A-x))$, etc.- see also a.2 above).

Let us give two examples.

Consider first the two dimensional brownian motion, the angle C defined in polar coordinates (r,θ) by $r \geq 0, 0 \leq \theta < \frac{2\pi}{k}$ and $f: R^2 \to C$ defined by $f((r,\theta))=(r,\theta-\frac{2\pi n}{k})$ for $\frac{2\pi n}{k} \leq \theta < \frac{2\pi(n+1)}{k}$. The relation $f(x)=f(y)$ is equivalent to the existence of a rotation U around 0 of an angle $\frac{2\pi n}{k}$, $n=0,1,\ldots,k-1$, such that $Ux=y$.

We see that we may group the states in the two dimensional brownian motion using f. We get a "brownian motion" on C, where $(r,\frac{2\pi}{k})$ is identified with $(r,0)$, i.e. in fact a "brownian motion on the surface of a cone".

For the second example, let us replace C by the angle D defined by $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{k}$ and f by $g: R^2 \longrightarrow D$ defined by $g(r,\theta)=(r,\theta-\frac{2m\pi}{k})$ for $\frac{2m\pi}{k} < \theta \leq \frac{(2m+1)\pi}{k}$, $g(r,\theta)=(r,\frac{2m\pi}{k}-\theta)$ for $\frac{2m-1}{k}\pi < \theta < \frac{2m}{k}\pi$.

Reasoning as above, U being now a rotation around 0 of angle $\frac{2\pi n}{k}$ or a symmetry with respect to a line passing by 0 and making an angle $\frac{m\pi}{k}$ with the axis $\theta=0$, we deduce that the grouping of states is possible also using g. We get a "brownian motion on D, reflected at the frontier of D".

We do not go further since it appears more as a geometrical problem to determine what we can obtain in this way (brownian motions on what varieties, reflected brownian motions on what polyhedra, etc.). Some of these processes appear as "direct products" of brownian motions on circumferences , radial brownian motions , reflected brownian motions on $[a,b]$ or $[a,\infty)$.

2. Harmonic functions.

We concentrate our attention on the hitting probabilities H_A for the n-dimensional brownian motion.

We begin with the remark that, if $A \subset R^n$ is closed, $x \notin A$ and D is connected component of $\complement A$ containing x, then $H_A(x, \ )=H_{\complement D}(x, \ )$ and is concentrated on $\bar{D}\cap A$. Hence it is reasonable, in the case $x \notin A$, to limit ourselves to $H_{\complement D}(x, \ )$ for $x \in D$, where D is a domain, and even to $H_{\bar{D}\setminus D}(x, \ )$.

a. Let $D \subset R^n$ be a domain, f be a measurable function on $\bar{D}\setminus D$, nonnegative or bounded. $H_{\bar{D}\setminus D} f$ has a sense and appears as a measurable function on D.

According to 1.e_2 ($H_B=H_A H_B$ for $B \subset \overset{o}{A}$) and d_3 we have, if the closed sphere $S(x,a)$ is included in D :

$$(H_{\bar D \setminus D} f)(x) = \int (H_{\bar D \setminus D} f)(x+ay)\, d\,\sigma(y)$$

where σ is the probability on $S^{n-1} = \{x \mid x \in R^n, \|x\| = 1\}$ for which $\sigma \circ U^{-1} = \sigma$ for all linear isometrical $U: R^n \to R^n$.

a_1. Multiplying the relation in a by a^{n-1} and integrating with respect to a from 0 to b we get also :

$$(H_{\bar D \setminus D} f)(x) = (m_n(S(0,b)))^{-1} \int (H_{\bar D \setminus D} f) \chi_{S(x,b)}\, dm_n \quad , \text{for } S(x,b) \subset D .$$

b. The result in a_1 enables us to prove:

If $f \geq 0$ is measurable on $\bar D \setminus D$, where $D \subset R^n$ is a domain, then either $H_{\bar D \setminus D} f$ is finite in every $x \in D$, or it is $+\infty$ in every $x \in D$.

Proof. The fact that $(H_{\bar D \setminus D} f < +\infty)$ is open is an immediate consequence of a_1.

If $(H_{\bar D \setminus D} f)(x) = +\infty$ then we choose b with $S(x,b) \subset D$, we deduce that f is not lebesgue integrable on $S(x, \frac{b}{3})$ and then, since for $\|x-y\| < \frac{b}{3}$ we have $S(x, \frac{b}{3}) \subset S(y, \frac{2b}{3}) \subset S(x,b) \subset D$, that $(H_{\bar D \setminus D} f)(y) = +\infty$ for every such y, according to a_1. Hence $(H_{\bar D \setminus D} f = +\infty)$ is also open and the connectedness of D finishes the proof (we considered $H_{\bar D \setminus D} f$ to be defined only on D).

c. Corollary. If $D \subset R^n$ is a domain, then all $H_{\bar D \setminus D}(x, \ )$ with $x \in D$ are absolutely continuous one with respect to other and

every of the corresponding densities is bounded.

Proof. Let $H_{\bar D \setminus D}(x,A) = 0$, hence $(H_{\bar D \setminus D}(+\infty . \chi_A))(x) = 0$.

It follows that $(H_{\bar D \setminus D}(+\infty . \chi_A))(y) < +\infty$, hence $H_{\bar D \setminus D}(y,A) = 0$.

In what concerns the densities, we have to consider a measure space $\{E, \mathcal{X}, \mu\}$, a measurable $f \geq 0$ such that the support of its distribution is unbounded and to find a measurable $g \geq 0$ with the properties $\int g d\mu < \infty$, $\int fg d\mu = +\infty$. In order to do it, we consider a sequence $d_n \uparrow +\infty$ in the support of $\mu \circ f^{-1}$, the sets $A_n = (d_n - \varepsilon < f < d_n + \varepsilon$ (which may be supposed, by an appropriate choice of d_n, to be disjoint) and take $g=\sum(\mu(A_n))^{-1}d_n^{-1/2}\chi_{A_n}$. We have $\mu(A_n)>0$ for all n and $\int fg\,d\mu\geq\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2}d_n^{1/2}=+\infty$, while $\int g\,d\mu=\sum d_n^{-1/2}$; the last is finite if we choose d_n such that $d_n\geq n^4$, say, choice which is possible.

d. If $D\subset R^n$ is a domain, if $f\geq 0$ is measurable on $\bar{D}\setminus D$ and if $H_{\bar{D}\setminus D}f$ is not identically $+\infty$ on D, then $H_{\bar{D}\setminus D}f$ is continuous on D.

Proof. Applying a_1 we deduce first that $g=H_{\bar{D}\setminus D}f$, defined on D, is "locally Lebesgue integrable". Also a_1, but with "smaller spheres" shows then that g is locally bounded.

Choose now $0<b<c$, sufficiently small and integrate the formula in a, multiplied by a^{n-1}, from b to c with respect to a. Let $A=S(0,c)\setminus S(0,b)$. We get

$g(x)=d\int g(y)\chi_A(y-x)\,dm_n(y)$, with a constant $d>0$.

The mapping $x\to h(x+\ )$ is continuous from R^n to $L^2(m_n)$ if $h\in L^2(m_n)$; our statement then follows easily.

e. Now we are in the position to give the main definition.

Definition. If $D\subset R^n$ is an open set then by a harmonic, in D, functio we mean a continuous $f:D\to R$ such that $f(x)=\int f(x+ay)\,d\sigma(y)$ for all $x\in D$ and $a>0$ for which $S(x,a)\subset D$, σ being the ~~xxxxx~~ probability on $(\|x\|=1)$ invariant with respect to all linear isometries.

Hence, if D is a domain and g is measurable on $\bar{D}\setminus D$, then $H_{\bar{D}\setminus D}g$ considered on D, either has nowhere sense, or is identically $+\infty$, or is a harmonic function.

f. Proposition. If f is a harmonic function on $D\subset R^n$ and if $f(x_n)\to\sup_D f$, then the sequence (x_n) has no limit points in D (i.e. if we choose a convergent (x_n) its limit will be in $\bar{D}\setminus D$), except possibly the case when f is constant on a connected component of D.

Proof. If $x_n\to x\in D$ then $f(x)=\sup_D f$. Since the support of σ in e above is $(\|x\|=1)$, it follows that $f(y)=\sup_D f$ for all $y\in S(x,\varepsilon)$, if $S(x,\varepsilon)\subset D$. Hence $(f=\sup_D f)$ is open. It is also closed, due to the continuity of f, q.e.d.

Remark. The set of all functions harmonic in a given D is a linear space. Hence the proposition may be applied to $-f$, giving an analogue statement for $\inf_D f$.

g_1. If $D\subset R^n$ is a domain then either $H_{\bar D\setminus D}(x,\ )$ has total mass 1 for all $x\in D$ (i.e. $\bar D\setminus D$ is a.s. visited by every n-dimensional brownian motion starting from a $x\in D$) or it has total mass strictly less than 1 for all $x\in D$ (when D is bounded, we know from corollary 2 in $f.\ell_2$ that the first alternative is valid).

g_2. If $A\subset R^n$ is closed, then either $H_A(x,\ )=0$ for all x, or $H_A(x,\ )\neq 0$ for all x.

Proof. g_1 and "g_2 on a connected component of $\complement A$" follow from f applied to $H_A 1$.

Suppose now that $H_A(x,\ )=0$ for an x, i.e. the probability that A is visited at a $t\in(0,\infty)$ by a brownian motion starting from x is null. Since $H_A(x,A)\geq \gamma_{x,t.1_n}(A)$, we deduce $m_n(A)=0$. Moreover, $H_A(x,A)\geq\int H_A(y,A)d\gamma_{x,t.1_n}(y)$ (Markov property), hence there will exist also a $y\in A$ for which $H_A(y,A)=0$, in every open set.

It follows now that $H_A(y,\ )=0$ for all $y\notin A$, from the first sentence in our proof.

For $y\in A$ we have $H_A(x,A)=\lim_{t\downarrow 0}\int H_A(y,A)d\tilde\gamma_{x,t.1_n}(y)$ (recall the definition in $f.\ell_2$) and it follows null.

g_3. If $A\subset R^2$ is closed then either $H_A(x,\ )=0$ for all x or the total mass of $H_A(x,\ )$ is 1 for all x.

Proof. According to g_2 we have to show that, if $H_A(x,\ )\neq 0$ for all x then $H_A(x,\ )$ has total mass 1 for all x.

Let $S(y,a)\subset\complement A$ and $C_a=\{z\,|\,\|z-y\|=a\}$. For $x\in\complement A$, since $\tilde H_A=\tilde H_{C_a}\cup_A \tilde H$

and $\tilde{H}_A(z, \ ) = \varepsilon_z$ for $z \in A$, we get $H_A(x,A) \geq \tilde{H}_{C_a \cup A}(x,A) + \tilde{H}_{C_a \cup A}(x,C) \inf_{z \in C_a} H_A(z,A)$.

We are in the case n=2 hence (1.ℓ_2-proposition) $\tilde{H}_{C_a \cup A}(x, C_a \cup A) = 1$ and it follows that $H_A(x,A) \geq \inf_{z \in C_a} H_A(z,A)$. The infimum is reached on C_a (continuity of H_A 1-see d above) and the result in g shows that $H_A(x,A)$ is constant on every connected component of $\complement A$ (if there are at least two such connected components, $H_A(x,A)$ follows equal to 1 for all $x \notin A$ from the result in the proposition in 1.ℓ_2 quoted above).

If that constant is smaller than 1, we deduce from the inequality at the beginning of our reasonment that $\tilde{H}_{C_a \cup A}(x,A) = 0$ for all x in the corresponding connected component. It means that, in a 2-dimensional brownian motion starting from x, the probability of reaching A before C_a is null.

Consider a brownian path starting from x, nonvisiting y and reaching A at the moment τ_A. Its set of values, for $t \in [0, \tau_A]$ is closed, hence it will not intersect C_a for a sufficiently small. We deduce $H_A(x,A) = \lim_{a \downarrow 0} H_{C_a \cup A}(x,A)$; we supposed that the left member is not null, consequently the fact that the constant above is smaller than 1 leads to a contradiction.

We have proved that $H_A(x,A) = 1$ for $x \notin A$. For $x \in A$, $t > 0$ we have $H_A(x,A) \geq \gamma_{x,t.1_2}(x,A) + \int \chi_{\complement A}(y) H_A(y,A) d\gamma_{x,t.1_2}(y) = 1$, q.e.d.

h. Proposition. If $f: D \longrightarrow R$ is continuous together with all its first and second derivatives on the open set $D \subset R^n$ and if $\Delta f = 0$, where $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_i}$, then f is a harmonic function on D.

Proof. It will be sufficient to show that, if $S(x,a) \subset D$ and $B = \{ y \mid \|y-x\| = a \}$, we have $f(x) = (H_B g)(x)$ for a function g, equal to f on a $S(x, a+\varepsilon)$ with $\varepsilon > 0$, continuous and bounded together with all $g'_{x_i}, g''_{x_i x_j}$ on R^n (see 1.ℓ_3 - g may be taken as the product of f and of a $h(\| \cdot - x \|)$, h=0 on $[a+\varepsilon, \infty)$, h=1 on $[0,a]$, h', h" existing and continuous, etc.).

The function g constructed above has also compact support hence it belongs to the domain of the infinitesimal operator A of the n-dimensional brownian motion and $Ag=\frac{1}{2}\Delta g$ is null on $S(x,a)$.

It follows that $g=R_\lambda s$ where $\lambda>0$, (R_λ) is the resolvent of the n-dimensional brownian motion and s is a bounded, uniformly continuous function on R^n and also that $Ag=\lambda R_\lambda s-s$.

Let (x_t) be a brownian motion starting from x. If we apply Dynkin's lemma to s and τ_B we obtain $g(x)=M(g\circ x_{\tau_B})=(H_B g)(x)$, i.e. the desired fact. But we have to be sure that τ_B is integrable.

The quickest way to obtain the integrability of τ_B is to „project" on one axis and to remark that $\tau_B\le\tau_{\{-a,a\}}$ for a certain one dimensional brownian motion.

i. It is known that:

Proposition. Let $0<a<b<\infty$ and denote $C_d=\{z\mid z\in R^n, \|z\|=d\}$. Then, for $a<x<b$, $(H_{C_a\cup C_b}\chi_{C_a})(x)$ equals $(\ln\frac{b}{\|x\|})(\ln\frac{b}{a})^{-1}$ for n=2 and $(\|x\|^{-(n-2)}-b^{-(n-2)})(a^{-(n-2)}-b^{-(n-2)})^{-1}$ for $n>2$.

Since, if f is harmonic, $f(\ +x_0)$ and $cf+d$ are also, it follows that:

Corollary. For every $x_0\in R^n$, the function $f:R^n\setminus\{x_0\}\to R$ defined by $f(x)=\ln\|x-x_0\|$ for n=2 and by $f(x)=\|x-x_0\|^{-(n-2)}$ for $n>2$ is harmonic.

Of course, this corollary could be deduced also from h, via the computations, for $f(x)=g(\|x\|)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$; $f'_{x_i}(x)=\frac{x_i}{\|x\|}g'(\|x\|)$,

$f''_{x_i x_i}(x)=\left(\frac{1}{\|x\|}-\frac{x_i^2}{\|x\|^3}\right)g'(\|x\|)+\frac{x_i^2}{\|x\|^2}g''(\|x\|)$, where $\|x\|=(\sum x_i^2)^{1/2}$,

$(\Delta f)(x)=g''(\|x\|)+\frac{n-1}{\|x\|}g'(\|x\|)$, etc.

Remark. For $n=1$, every $f:R \to R$ defined as $f(x)=cx+d$ is harmonic.

j. Comment. The reasonments before e above suggest that we could obtain an equivalent definition of the harmonic functions by imposing weaker conditions; we do not insist on this topic.

3. Boundary behaviour of hitting probabilities.

From the proposition in 2.f we deduce that, if two harmonic functions u_1, u_2 on the same open set D have the property that $\lim(u_1(y)-u_2(y))=0$ when $y \to x$, $y \in D$, for all $x \in \bar{D}\setminus D$, $x=\infty$ included if D is unbounded, then $u_1=u_2$. Hence we shall arrive to characterise (at least for bounded D) the functions $H_{\bar{D}\setminus D}f$, defined on D, if we prove a result of the type $\lim(H_{\bar{D}\setminus D}f)(y)=f(x)$, when $y \to x$, $y \in D$, for $x \in \bar{D}\setminus D$. Such a result is to be expected for continuous f's (recall 2.c and take f to be nonidentically null, but null a.e. with respect to every $H_{\bar{D}\setminus D}(y, \ )$ with $y \in D$, etc.). But even for a continuous f this result is false in general. Consider, as an example, ~~Exmk~~ $D=\{y \mid 0<\|y-x\|<a\}$. We have $\bar{D}\setminus D=\{x\}\cup\{z \mid \|z-x\|=a\}$, $H_{\bar{D}\setminus D}(y,\{x\})=0$ for $y \in D$, $H_{\bar{D}\setminus D}\chi_{\{x\}}=0$ and it doesnot tend to 1 when its argument tends to x.

a. Proposition. If $D \subset R^n$ is an open set, if $x \in \bar{D}\setminus D$ and if $H_{\complement D}(x, \ )=\varepsilon_x$ then, for every $f:\bar{D}\setminus D \to R$, measurable, bounded and continuous in x, we have $\lim(H_{\bar{D}\setminus D}f)(y)=f(x)$ when $y \to x$, $y \in D$.

Proof. We have to show that $H_{\bar{D}\setminus D}(y, \ ) \to \varepsilon_x$ when $y \to x$, $y \in D$.

Let C be the set of all continuous $g:[0,\infty) \to R^n$ and P be the distribution, on C, of the n-dimensional brownian motion starting from 0. Let $\tau_y(g)=\inf\{t \mid y+g(t) \in \complement D\}$.

We have to prove that, with respect to P, the distribution of $y+g(\tau_y(g))$, as a function of $g \in C$, tends to ε_x, when $y \to x$, $y \in D$, i.e. it will be sufficient to prove that $\tau_y \to 0$ a.e. or even in probability (every $y_n \to x$, $y_n \in D$ will contain a subsequence..., the topology on the space of measures is metrisable...).

Our purpose is hence to show that, for every $c>0, P(\tau_y>c)\to 0$ when $y\to x, y\in D$.

Let $A_c^y=\{g \mid g\in G, y+g(t)\in \complement D$ for some $t\in(0,c]\}$ and $A_{c,\varepsilon}^y=\{g \mid g\in G, y+g(t)\in \complement D$ for some $t\in(\varepsilon,c]\}$. We have $A_{c,\varepsilon}^y\uparrow A_c^y$ when $\varepsilon\downarrow 0$ and $P(A_{c,\varepsilon}^y)=(Q_\varepsilon h_{c,\varepsilon})(y)$ due to the Markov property, where $h_{c,\varepsilon}(z)=P(A_{c-\varepsilon}^z)$ and (Q_t) is the transition semigroup of the n-dimensional brownian motion.

Now we come to the crucial point of our proof. $Q_\varepsilon h_{c,\varepsilon}$ is a continuous function, hence $P(A_c^y)$ is inferior semicontinuous as a function of y.

But $H_{\complement D}(x,\ )=\varepsilon_x$, assumed in the hypothesis, implies $P(A_c^x)=1$. This together with $P(A_c^y)\leq 1$ and with the inferior semicontinuity enables us to infer, for $y\in D$, $P(\tau_y>c)=P(\complement A_c^y)\to 0$ when $y\to x$.

Corollary. Let $D\subset R^n$ be a (bounded) open set and suppose that $H_{\complement D}(x,\ )=\varepsilon_x$ for all $x\in\bar{D}\setminus D$. Then, for every continuous $f:\bar{D}\setminus D\to R$, $H_{\bar{D}\setminus D}f$ is the unique harmonic on D function h which, when extended on $\bar{D}$ by $h(x)=f(x)$ for $x\in\bar{D}\setminus D$, is continuous.

This determines uniquely every $H_{\bar{D}\setminus D}(y,\ )$ with $y\in D$.

Remarks. 1. According to 1 in the proposition in 1.6$_5$, every sphere $D=\{y \mid \|y-x\|<a\}$ and every bounded polyhedral domain D (for which $D=\mathring{\bar{D}}$) satisfy the condition in the above corollary.

2. Let $D\subset R^n$ be an arbitrary domain. We may find $D_k\subset D_{k+1}, \bigcup D_k=D$ satisfying the condition in the above corollary. For example, we take D_k as the interior of the union of all cubes $\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{r_i}{2^k},\frac{r_i+1}{2^k}\right]\subset D$, with integer r_i, $|r_i|\leq k.2^k$.

Let us suppose that $D \neq R^n$, i.e. that $\overline{D} \setminus D \neq \emptyset$. Let $f: \overline{D} \setminus D \to R$ be bounded continuous. Let, if $n \geq 3$, and $\overline{D} \setminus D$ is unbounded, $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x)=0$. and, if $n=2$, $H_{\complement D}(x, \complement D)=1$ for all $x \in D$ (see 2.S_3). Extend f to a bounded continuous $f: R^n \to R$ such that, if $n \geq 3$, $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x)=0$.

Then, since $\tau_{\complement D_k} \uparrow \tau_{\complement D}$ (continuity of sample paths of the n-dimensional brownian motion), we get $(H_{\overline{D} \setminus D} f)(x)=\lim\limits_{k} (H_{\overline{D}_k \setminus D_k} f)(x)$ for all $x \in D$. This characterises all $H_{\overline{D} \setminus D}(x, \ )$ with $x \in D$, once all $H_{\overline{D}_k \setminus D_k}(x, \ )$ were characterised by the above corollary.

b. In order to generalise the result in the corollary in a to unbounded domains, we establish:

Proposition. Let $D \subset R^n$, $n \geq 3$, be an unbounded domain. Let $f: \overline{D} \setminus D \to R$ be measurable, bounded, with $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x)=0$. Then $(H_{\overline{D} \setminus D} f)(y) \to 0$ when $y \in D$, $\|y\| \to \infty$.

Proof. $|(H_{\overline{D} \setminus D} f)(y)| \leq H_{\overline{D} \setminus D}(y, \complement D \cap \complement S(0,N)) \sup\limits_{\|x\|>N} |f(x)| +$ $H_{\overline{D} \setminus D}(y, \complement D \cap S(0,N)) \sup |f|$.

But $H_{\overline{D} \setminus D}(y, \complement D \cap S(0,N)) \leq H_{S(0,N)}(y, S(0,N))$ - the probability of visiting $S(0,N)$ for a n-dimensional brownian motion starting from y.

According to the proposition in 2.i (in which "we make $b \to \infty$") $H_{S(0,N)}(y, S(0,N))=\|y\|^{-(n-2)} N^{n-2}$ and it tends to 0 for $\|y\| \to \infty$.

We get, for $y \in D$, $\|y\| \to \infty$, $\overline{\lim} |(H_{\overline{D} \setminus D} f)(y)| \leq \sup\limits_{\|x\|>N} |f(x)|$ and now $N \to \infty$ gives the desired result.

c. In the case $n=2$ we generalise the proposition in 2.f. It is remarkable that in the proof of a statement involving only harmonic functions we use the brownian motion.

Proposition. Let $D \subset R^2$ be an unbounded domain such that $H_{\complement D}(y, \complement D)=1$ for all $y \in D$ (see 2.S_3). Let h be a harmonic in D function, bounded, such that for every $x \in \overline{D} \setminus D$ we have $\overline{\lim}\, h(y) \leq c$ when $y \in D$, $y \to x$. Then $h \leq c$ on D.

Proof. Consider the situation in the remark 2 in a above. We may arrange it such that $D_k \subset D$. From the corollary in a it follows that

$h(y)=(H_{\overline{D}_k\setminus D_k}h)(y)$ for $y\in D_k$, i.e. $h(y)=M(h(x_{\tau_{\overline{D}_k\setminus D_k}}))$, where (x_t) is a 2-dimensional brownian motion starting from y. We already remarked in a that $\tau_{\overline{D}_k\setminus D_k}$ increases to the almost everywhere finite $\tau_{\overline{D}\setminus D}$, hence $x_{\tau_{\overline{D}_k\setminus D_k}}$ tends to $x_{\tau_{\overline{D}\setminus D}}$. Writing $h(y)=M(g_k)$, the g_k are uniformly bounded and $\overline{\lim}\, g_k \leq c$ a.e.. Now the statement of the proposition follows from the Fatou lemma ($h(y)\leq M(\sup\limits_{i\geq k} g_i)$, $\sup\limits_{i\geq k} g_i \downarrow \overline{\lim}\, g_k \leq c$).

c_1. We do not state explicitely the results, analogue to the corollary in a, what follow from the propositions in a, b, c.

d. We establish now a converse to the proposition in a.

Proposition. Let $D\subset R^n$ be a domain and $x\in\overline{D}\setminus D$ be such that $H_{\complement D}(x,\ )\neq\varepsilon_x$. Then there exists a bounded continuous function f on $\overline{D}\setminus D$ for which $\lim\,(H_{\overline{D}\setminus D}f)(y)=f(x)$, when $y\in D$, $y\to x$, is false.

Proof. Let f be a bounded continuous function on $\overline{D}\setminus D$, attaining its maximum in x and only in x.

Let (x_t) be a n-dimensional brownian motion starting from x and $\tau=\inf\{t \mid t>0, x_t\notin D\}$. As was shown in 1.$b_5$, $\tau>0$ a.e..

Also in 1.b_5 we saw that $H_{\complement D}(x,\{x\})=P(x_\tau=x)=0$, hence $f(x)>M(f\circ x_\tau)=\lim\limits_{t\downarrow 0} M((f\circ x_\tau)\chi_{(\tau>t)})$. If $\tau>t$ then $\tau=t+\inf\{s \mid s>0, x_{t+s}\in D\}$, hence the Markov property implies $M((f\circ x_\tau)\chi_{(\tau>t)})=M(\chi_{(\tau>t)}(H_{\complement D}f)(x_t))$. Since for $\tau>t$ we have $x_t\in D$, $(H_{\complement D}f)\circ x_t=(H_{\overline{D}\setminus D}f)\circ x_t$ on $(\tau>t)$.

We deduce $f(x)>\lim\limits_{t\downarrow 0} M(\chi_{(\tau>t)}(H_{\overline{D}\setminus D}f)\circ x_t)$ and this, together with the boundedness of $H_{\overline{D}\setminus D}f$, contradicts " $\lim(H_{\overline{D}\setminus D}f)(y)=f(x)$ when $y\in D$, $y\to x$ ", q.e.d.

Remark. The examples in 1 b_2, b_5 of A and $x\in A$ for which $H_A(x,\ )=\varepsilon_x$ or $H_A(x,\ )\neq\varepsilon_x$ concern only cases which are somehow "extremal". We have not yet more refined examples in order to be able to answer the question "does $H_{\complement D}(x,\ )=\varepsilon_x$ imply $H_{\overline{D}\setminus D}(x,\ )=\varepsilon_x$?".

4. Formula for the hitting probabilities of a sphere.

According to 3.a and 2.h, given a sphere $S(x,a)\subset R^n$ and a continuous $f:\{y \mid \|y-x\|=a\}\to R$, we try to find a continuous $u:S(x,a)\to R$ such that $u(y)=f(y)$ for $\|y-x\|=a$ and, on $\{y \mid \|y-x\|<a\}$, u has continuous derivatives $u'_{x_i}, u''_{x_i x_j}$ and $\Delta u=0$.

a. We intend to use the Ostrogradski formula, involving "surface integrals". We begin by identifying the probability σ_n on $S^n=\{x \mid x\in R^{n+1}, \|x\|=1\}$ with a constant multiple of the "surface measure" on S^n.

Our first purpose will be to determine the measure $\mu_n=(\chi_{(pr_{n+1}>0)}\sigma_n)\circ \overset{-1}{pr}_{\{1,\dots,n\}}$. It remains the same if we replace $(pr_{n+1}>0)$ by $(pr_{n+1}\geq 0)$, doesnot charge $\{0\}$ and is concentrated on $S(0,1)\subset R^n$.

We shall identify $R^n\setminus\{0\}$ with $(0,\infty)\times S^{n-1}$; $S(0,1)$ corresponds to $(0,1]\times S^{n-1}$.

Since σ_n is invariant with respect to every linear isometry U of R^{n+1}, if we take U to depend only on $pr_{\{1,\dots,n\}}$ we deduce that defining for $B\subset(0,\infty)$, $A\subset S^{n-1}$, etc., $\nu_B(A)=\mu_n(B\times A)$ we get a measure ν_B on S^{n-1} which is invariant with respect to every linear isometry of R^n. Hence (1.ℓ_3), $\mu_n(B\times A)$ $\lambda(B)\,\sigma_{n-1}(A)$.

It is immediate that λ is a measure on $(0,1]$. In order to determine it, we shall calculate $\lambda((0,a])=\mu_n((0,a]\times S^{n-1})=\sigma_n((pr_{n+1}>0)\cap \overset{-1}{pr}_{\{1,\dots,n\}}(S(0,a)))$.

If we consider $R^{n+1}=R^n\times R$, then the set under σ_n may be written as $\{(x,\sqrt{1-\|x\|^2}), x\in R^n, \|x\|\leq a\}$.

Corresponding to the identification $R^{n+1}\setminus\{0\}\leftrightarrow(0,\infty)\times S^n$ we have $m_{n+1}=(f_{n+1}m)\times\sigma_n$, $f_{n+1}(x)=c_{n+1}x^n$, hence $\sigma_n(A)=\frac{n+1}{c_{n+1}}m_{n+1}((0,1]\times A)$

If $A=\{(x,\sqrt{1-\|x\|^2}), x\in R^n, \|x\|\leq a\}\subset S^n$, then $(0,1]\times A$ corresponds,

when witing $R^{n+1}=R^n\times R$, to $\{(x,y)\mid \sqrt{1-a^2}\le y\le 1, \|x\|\le\sqrt{1-y^2}\}\cup$
$\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{1-a^2}, \|x\|\le ay(1-a^2)^{-1/2}\}$ (the most natural way to see it is to draw the picture for $n=2$).

We apply now Fubini, by remarking that $m_n(S(0,b))=n^{-1}c_n b^n$:

$$\lambda((0,a])=\frac{n+1}{n}\,\frac{c_n}{c_{n+1}}\left(\int_0^d a^n(1-a^2)^{-n/2}\,y^n dy+\int_d^1 (1-y^2)^{n/2}dy\right), \text{where } d=\sqrt{1-a^2}$$

In the second integral the change of variable $y=\sqrt{1-u^2}$ leads to $\int_0^a u^{n+1}(1-u^2)^{-1/2}du$, while the first equals $(n+1)^{-1}a^n(1-a^2)^{1/2}$, i.e. the integral from 0 to a of $(n+1)^{-1}(nu^{n-1}(1-u^2)^{1/2}-u^{n+1}(1-u^2)^{-1/2})$. The sum of the two integrands is $(n+1)^{-1}(1-u^2)^{-1/2}u^{n-1}$ multiplied by $(n+1)u^2+n(1-u^2)-u^2=n$.

The result is $\lambda=h_n.m$, where $h_n(x)=\chi_{(0,1)}(x)\cdot\frac{c_n}{c_{n+1}}x^{n-1}(1-x^2)^{-1/2}$.

In the writing $R^n\longleftrightarrow(0,\infty)\times S^{n-1}$ the measure μ_n above appears as $\lambda\times\sigma_{n-1}$; we have $\mu_n=c_{n+1}^{-1}g_n.m_n$, where $g_n(x)=\chi_{S(0,1)}(x)(1-\|x\|^2)^{-1/2}$.

Let us remark also that $(1-\|x\|^2)^{1/2}$ is the cosine of the angle between $e_{n+1}=(0,\dots,0,1)$ and $n=(x,(1-\|x\|^2)^{1/2})$ - the "exterior normal to S^n in the corresponding point" (this exterior normal being an unit vector".

It is easier to state the result by consider(ing) the "inverse transport":

Lemma. Let $S(0,1)\subset R^n$ and consider the mapping $S(0,1)\longrightarrow S^n=\{y\mid y\in R^{n+1}, \|y\|=1\}$ defined by $x\longrightarrow(x,(1-\|x\|^2)^{1/2})$. Then the image of the lebesgue measure $\chi_{S(0,1)}m_n$ via this mapping is $g.\sigma$, where $g(y)=\cos(n(y),e_{n+1})$, $e_{n+1}=(0,1)$ being the unit vector normal to the "hyperplane R^n" in the direction "of the mapping", $n(y)=y$ being "the unit vector in the direction of the exterior normal to S^n in y" and σ being the measure on S^n, invariant under all linear isometries of R^{n+1}, of total mass $2\pi^{(n+1)/2}(\Gamma(\frac{n+1}{2}))^{-1}$ - "the surface measure on S^n".

The Lemma generalise easily to a sphere of arbitrary center and radius r, the total mass of the surface measure being the above multiplied by r^n

and also to an arbitrary n-dimensional hyperplane passing by the center (we use the invariance of σ with respect to linear isometries). We do not state explicitely the results.

b. Heuristical considerations.

b_1. We start with the Ostrogradski formula $\int_D \operatorname{div} a \, dm_n = \int_{\bar{D}\setminus D} (a,n) d\sigma$ in which $D \subset R^n$ is a domain, $\bar{D}\setminus D$ is supposed to be a "hypersurface", σ is the "surface measure" on $\bar{D}\setminus D$, $a : \bar{D} \to R^n$ is continuous and has continuous derivatives a'_{x_i}, $\operatorname{div} a = \sum_{i=1}^{n} (a'_{x_i})_i$ and $n : \bar{D}\setminus D \to R^n$ is the unit vector in the direction of the "exterior normal" to the surface $\bar{D}\setminus D$.

We do not insist on the precise definition of the above concepts. However, we remark that the proof of the formula begins with $\int_b^c (a'_{x_n})_n (y_1,\dots,y_n) dy_n = a_n(y_1,\dots,y_{n-1},c) - a_n(y_1,\dots,y_{n-1},b)$, where $(y_1,\dots,y_{n-1},y) \in D$ for all $y \in (b,c)$ and $\notin D$ for $y=b$ and $y=c$. When $\bar{D}\setminus D$ is the surface of a sphere or a union of such surfaces, σ is the measure deduced easily from the results in a above and the proof of the Ostrogradski formula follows rigurously by applying the lemma in a.

Now let us define, for $f : \bar{D} \to R$, $\operatorname{grad} f = (f'_{x_1},\dots,f'_{x_n})$. We remark that $\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f$.

If $a = u.\operatorname{grad} v$ (where u, v are R-valued) then $a = (u.v'_{x_i})_{i=1,\dots,n}$ and $\operatorname{div} a = \sum_{i=1}^{n} (u.v'_{x_i})'_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} (u'_{x_i} v'_{x_i} + u v''_{x_i x_i}) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v$. Changing the roles of u, v we get $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) = u\Delta v - v\Delta u$, by substracting.

Before writing the Ostrogradski formula let us remark that $(\operatorname{grad} u, n) = \sum_{i=1}^{n} u'_{x_i} n_i = u'_n$ - the derivative of u in the direction n.

The result is $\int_D (u\Delta v - v\Delta u) dm_n = \int_{\bar{D}\setminus D} (uv'_n - vu'_n) d\sigma$.

b_2. Suppose now that u is harmonic on D and that v is one of the

Harmonic functions in 2.i, more precisely $v(x)=\|x-x_0\|^{-(n-2)}$ for $n\geq 3$, $v(x)=-\ln\|x-x_0\|$ for $n=2$, where $x_0\in D$. The formula at the end of b_1 may be applied not on D but on $D\setminus S(x_0,\alpha)$. The integral with respect to m_n vanishes and we get, if $C(x_0,\alpha)=\{x \mid \|x-x_0\|=\alpha\}$:

$$\int_{C(x_0,\alpha)} (uv'_n-vu'_n)\,d\sigma_\alpha = \int_{\bar{D}\setminus D} (uv'_n-vu'_n)\,d\sigma$$

, where in both members n is exterior normal to the corresponding surface.

We make now $\alpha\to 0$. $\left|\int_{C(x_0,\alpha)} vu'_n\,d\sigma_\alpha\right| \leq c\left(\sup_{C(x_0,\alpha)} v\right)\sigma_\alpha(C(x_0,\alpha)) \leq c_1\left(\sup_{C(x_0,\alpha)} v\right)\alpha^{n-1}$, with constant c, c_1 (see a). For $n\geq 3$ we get $c_1\alpha$, for $n=2$ we get $c_1\alpha\ln\alpha$, in both cases $\int_{C(x_0,\alpha)} vu'_n\,d\sigma_\alpha \to 0$.

$v'_n(x)=-a_n\|x-x_0\|^{-(n-1)}$, where $a_n=\max(1,n-2)$, hence it is constant equal to $-a_n\alpha^{-(n-1)}$ on $C(x_0,\alpha)$. We get $\lim_{\alpha\downarrow 0}\int_{C(x_0,\alpha)} uv'_n\,d\sigma_\alpha = -a_n c_n u(x_0)$

since $\alpha^{-(n-1)}\sigma_\alpha \to c_n\varepsilon_{x_0}$ according to a, the constant c_n having the significance there.

The result is $u(x_0)=\int_{\bar{D}\setminus D}(vu'_n-uv'_n)\,d\sigma$, where $v(x)=-\frac{1}{2\pi}\ln\|x-x_0\|$ for $n=2$, $v(x)=\Gamma(\frac{n}{2})(2(n-2))^{-1}\pi^{-n/2}\|x-x_0\|^{-(n-2)}$ for $n\geq 3$.

b_3. The formula at the end of b_2 does not solve the problem at the beginning of 4, since in its right member figures not only u but also u'_n. It is possible to destroy the term vu'_n if we find a function w, harmonic in the whole D, with $w|_{\bar{D}\setminus D}=v|_{\bar{D}\setminus D}$. Namely, we write the formula at the end of b_1 for u,w, substract it from that at the end of b_2 (with u,v) and we get $u(x_0)=\int_{\bar{D}\setminus D}(w-v)'_n u\,d\sigma$.

b_4. We consider the contents of b_1-b_3 as heuristical in what concerns the problem at the beginning of this section (4), because we do not know about the solution of that problem that its derivatives may be extended to continuous functions on $\bar{D}$.

c. The reasonments in b_1-b_3 above seem to have led to little achievements. Namely, if we have a domain $D\subset R^n$, a continuous function

$f:\bar{D}\setminus D \to R$ and a $x_o \in D$ then in order to find the value in x_o of a function u, continuous on $\bar{D}$, with $u|_{\bar{D}\setminus D} = f$ and satisfying $\Delta u=0$ in D we have to find the values in all points (or, at least, in a neighborhood of $\bar{D}\setminus D$) of such a function in the particular case $f=v|_{\bar{D}\setminus D}$, where $v(x)=\|x-x_o\|^{-(n-2)}$ for $n\geq 3$, $v(x)=-\ln\|x-x_o\|$ for $n=2$.

However, in the particular case when D is a sphere, there is an idea which gives the solution for this special f. Namely, let us recall the elementary geometrical fact that the set of all points in the plane for which the ratio of the distances to two given points of that plane equals a given constant ($\neq 1$) is a circle.

We may reason on the corresponding figure but we prefer to do it analytically, since it will constitute a part of the computations leading to the explicite formula.

c_1. Consider a sphere $S(x_o,a)\subset R^n$ and $x,y\in R^n$ with $\|x-x_o\|<a$, $\|y-x_o\|=a$. Let us introduce the angle θ between $x-x_o$ and $y-x_o$: $\cos\theta=(x-x_o,y-x_o)a^{-1}\|x-x_o\|^{-1}$. We have $\|y-x\|^2=a^2+\|x-x_o\|^2-2a\|x-x_o\|\cos\theta$. If we choose x_1 such that the rays $x-x_o$, x_1-x_o coincide, we get $\|y-x_1\|^2=a^2+\|x_1-x_o\|^2-2a\|x_1-x_o\|\cos\theta$.

If, moreover, $\dfrac{a}{\|x_1-x_o\|}=\dfrac{\|x-x_o\|}{a}$ then $\|y-x\|$ and $\|y-x_1\|$, as functions of y, are proportional: $\|y-x_1\|^2=a^2+a^4\|x-x_o\|^{-2}-2a^3\|x-x_o\|^{-1}\cos\theta =$ $a^2\|x-x_o\|^{-2}\|y-x\|^2$. I.e. $a^{-1}\|x-x_o\|\|y-x_1\|=\|y-x\|$ for $\|y-x_o\|=a$.

c_2. Recalling b_2,b_3 above, we see that we have to determine the derivative, in the direction of the exterior normal of $\{y \mid \|y-x_o\|=a\}$, of the function (leaving apart a multiplicative constant) $-\|y-x\|^{-(n-2)}+\|x-x_o\|^{-(n-2)}a^{n-2}\|y-x_1\|^{-(n-2)}$ for $n\geq 3$ and of $\ln\|y-x\|-\ln\|y-x_1\|-\ln(\|x-x_o\|a^{-1})$ for $n=2$, the variable being in both cases y.

We have (now $\|y-x_o\|$ is not supposed to be a) $\|y-x\|^2=\|y-x_o\|^2+\|x-x_o\|^2-2\|y-x_o\|\|x-x_o\|\cos\theta$. The derivative under discussion is the derivative with respect to $\|y-x_o\|$, θ being considered constant. Hence the derivative of $\|y-x\|$ is $\|y-x\|^{-1}(\|y-x_o\|-\|x-x_o\|\cos\theta)$ and that of the function mentioned above is $\max(n-2,1)$ multiplied by $\|y-x\|^{-n}(\|y-x_0\|-\|x-x_0\|\cos\theta)-\|y-x_1\|^{-n}\|x-x_0\|^{-(n-2)}a^{n-2}(\|y-x_0\|-\|x_1-x_0\|\cos\theta)$.

If $\|y-x_0\|=a$ then $\|y-x_1\|=a\|x-x_0\|^{-1}\|y-x\|$ and, using also $\|x_1-x_0\|=a^2\|x-x_0\|^{-1}$, the second term transforms into

$\|y-x\|^{-n}a^{-2}\|x-x_0\|^2(a-\frac{a^2}{\|x-x_0\|}\cos\theta)=\|y-x\|^{-n}(a^{-1}\|x-x_0\|^2-\|x-x_0\|\cos\theta)$

and the entire expression into $\max(n-2,1)a^{-1}\|y-x\|^{-n}(a^2-\|x-x_0\|^2)$.

Remembering the constant factor in v at the end of b_2 above, which we kept apart during our computation here, we are led to introduce:

Notation. If $D\subset R^n$ is defined as $D=\{y\mid \|y-x_0\|<a\}$ then we denote, for $x\in D, y\in\bar{D}\setminus D$, $h_D(x,y)=\Gamma(\frac{n}{2})\pi^{-n/2}(2a)^{-1}(a^2-\|x-x_0\|^2)\|x-y\|^{-n}$.

Remark. Of course, a good deal of the computations in c_1, c_2 here are valid only for $x\neq x_0$, but $h_D(x,y)$ has a sense also for $x=x_0$.

d. Our purpose will be now to prove:

Proposition. Let σ' be the probability on $\{x\mid x\in R^n, \|x\|=1\}$ invariant with respect to all linear isometries of R^n.

Let $x_0\in R^n, a>0$ and let σ be $2\pi^{n/2}(\Gamma(\frac{n}{2}))^{-1}$ multiplied by the probability obtained by transporting σ' via $z\to x_0+az$ and multiplied also by a^{n-1}.

If $f:\bar{D}\setminus D\to R$ is continuous, where $D=\{x\mid \|x-x_0\|<a\}$, then $u(x)=\int h_D(x,y)d\sigma(y)$ has a sense for all $x\in D$, is harmonic on D and $\lim_{x\to y} u(x)=f(y)$ for all $y\in\bar{D}\setminus D$, i.e. $H_{\bar{D}\setminus D}(x,\ )=h_D(x,\ ).\sigma$ for every $x\in D$.

Proof. 1. $h_D(x,\ )$ is bounded for $x\in D$ hence $u(x)$ has a sense.

2. For every $y\in\bar{D}\setminus D$, $h_D(\ ,y)$ has continuous derivatives of all orders in D. Moreover, if $k(\ ,y)$ is one of these derivatives, ~~xx~~ then for every $x\in D$ $k(x,\ )$ is bounded, even uniformly in x when x runs over a $S(z,b)\subset D$. It follows that u has continuous derivatives of all orders.

3. $\Delta u=0$ on D will follow from $\Delta u=0$ on $D\setminus\{x_0\}$, by the continui-

ty of the derivatives of u. Moreover, the reasonment in 2 shows that $\Delta u=0$ in $D\setminus\{x_0\}$ will follow from: $\Delta h_D(\;,y)=0$ in $D\setminus\{x_0\}$ for all $y\in \bar{D}\setminus D$.

$h_D(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\varphi(x,y+\alpha n)\Big|_{\alpha=0}$, n being the exterior normal to $\bar{D}\setminus D$ and φ being, apart from a multiplicative constant, the function in c_2 above. Since "the derivative operations are commutative", it will be sufficient to show that $\varphi(x,y)$ has continuous derivatives of all orders for $x\neq x_0$, $x\in D$, $y\neq x_0$, $y\neq x$ and that $(\Delta\varphi)(\;,y)=0$ there.

There were two terms in the expression of φ. For the first the existence of the derivatives is clear and the relation involving was established in 2.i. We shall transform the second by a computation on the same lines as in c_1 above. Namely $\|y-x_1\|^2=\|y-x_0\|^2+\|x_1-x_0\|^2-2\|y-x_0\|\,\|x_1-x_0\|\cos\theta=\|x-x_0\|^{-2}(\|y-x_0\|^2\|x-x_0\|^2+a^4-2a^2\|y-x_0\|\,\|x-x_0\|\cos\theta)=\|x-x_0\|^{-2}\|y-x_0\|^2\|x-y_1\|^2$, where y_1 is related to y in the same way in which x_1 was related to x in c_1. Hence $\|y-x_1\|\,\|x-x_0\|=\|y-x_0\|\,\|x-y_1\|$ and this enables us to transform the second term in the expression of φ in c_1 such that, as a function of x, it appears as a constant multiplied by $\|x-y_1\|^{-(n-2)}$, added to $\ln\|x-y_1\|$, respectively, thus its Δ with respect to x is null.

4. If we examine the reasonments in b above, we see that they imply the truth of our proposition for f=1, with u=1 (since u has continuous derivatives everywhere, etc.). Hence the total mass of $h_D(x,\;).\sigma$ is 1.

5. Let now $x\in D$, $x\to y$, $y\in\bar{D}\setminus D$. For every $\eta>0$ we have $\sup\{h_D(x,z)\mid z\in\bar{D}\setminus D, \|z-y\|\geq\eta\}\to 0$ hence the limit of every convergent subsequence of $h_D(x,\;).\sigma$ is null on $(\bar{D}\setminus D)\setminus\{y\}$. The set of all probabilities on $\bar{D}\setminus D$ is compact and the result in 4 allows us to deduce that $h_D(x,\;).\sigma\longrightarrow\varepsilon_y$, finishing the proof.

Remark. On the same lines as in a above, we could verify the truth of 4 in our proof by a direct computation.

d_1. In point 2 of the proof of the proposition in d above we saw that the function u there had continuous derivatives of all orders and that $\Delta u=0$ (we used in fact 2.h there). We get, applying the "unicity result" in 2.f:

Corollary. If u is a harmonic function on the open set $D\subset R^n$ then u has continuous derivatives of all orders in D and $\Delta u=0$ (we take $S(x,a)\subset D$, f equal to the restriction of u to $\{y \mid \|y-x\|=a\}$ and show that in $S(x,a)$ u equals the function constructed as in d above with this f, etc.)

d_2. Corollary. If u is harmonic on D_i, $i\in I$, then u is harmonic on $\bigcup_{i\in I} D_i$ (we use also 2.h).

e. The contents of c_1, c_2, d suggests:

Proposition. Let $x_0\in R^n$, $a>0$ and σ be the measure on $\overline{D}\setminus D$ described in the statement of the proposition in d, where now $D=\{y \mid \|y-x_0\|>a\}$.

For $x\in D$, $y\in\overline{D}\setminus D$, let $h_D(x,y)=\Gamma(\frac{n}{2})\pi^{-n/2}(2a)^{-1}(\|x-x_0\|^2-a^2)\|x-y\|^{-n}$.

Then, if $f:\overline{D}\setminus D$ is continuous, the function u on D defined by $u(x)=\int h_D(x,y)f(y)d\sigma(y)$ has a sense for all x, is harmonic on D and $\lim_{x\to y} u(x)=f(y)$ for all $y\in\overline{D}\setminus D$. If $n\geq 3$ then $\lim_{\|y\|\to\infty} u(y)=0$; if $n=2$ then u is bounded.

The proof is on the same lines as that in d above. The last properties are easily verified. There is, however, a difference in what concerns the total mass of $h_D(x,\ )\sigma$, which in this case is no more 1, but tends to 1 when $x\to y$ as in the statement.

$n\geq 3$

In fact, as was seen in c_1 above, $\|y-x\|=a^{-1}\|x-x_0\|\|y-x_1\|$, hence apart from the constant factor, $h_D(x,y)$ equals $(\|x-x_0\|^2-a^2)$ multiplied by $a^n\|x-x_0\|^{-n}\|y-x_1\|^{-n}$, i.e. $a^{n-2}\|x-x_0\|^{-(n-2)}\|y-x_1\|^{-n}(a^2-a^4\|x-x_0\|^{-2})=$ $a^{n-2}\|x-x_0\|^{-(n-2)}\|y-x_1\|^{-n}(a^2-\|x_1-x_0\|^2)$. The result is $h_D(x,y)=$ $=a^{n-2}\|x-x_0\|^{-(n-2)}h_{D'}(x_1,y)$, where $D'=\{x \mid \|x-x_0\|<a\}$ and the total mass of $h_D(x,\ )\cdot\sigma$ is, according to 4 in d above, $a^{n-2}\|x-x_0\|^{-(n-2)}$

It tends to 1 when $x \to y \in \bar{D} \setminus D$ and the proof in point 5 in d above works, q.e.d.

e_1. Let us recall the unicity results, consequences of 3.b,c (but not stated in 3.c_1); they show that there is only one function u with the properties in the statement of e above (with given f, etc.). In the case n=2 it is immediate that $\lim_{\|y\| \to \infty} u(y)$ exists (and equals $\int f d\sigma'$, where σ' is the probability proportional to σ). we arrive to:

Corollary. If u is a bounded harmonic function on $R^2 \setminus S(x_0, a)$ then $\lim_{\|y\| \to \infty} u(y)$ exists.

Remark. The same problem may be put for $n \geq 3$ but it appears more dificult to treat it (see 7.c_1 below).

f. Remark. The heuristical method exposed in b_1-b_3 above, which led us to find $H_{\complement D}(x, \ )$ for $D = \{x \mid \|x - x_0\| < a\} \subset R^n$, works also for the case $D = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in R, x_n > 0\}$, allowing us to reestablish the result in 4.ℓ_1 above, for the case $D = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_{n-1} > 0, x_n > 0\}$ for domains which have as boundary an union of (portions of) surfaces of orthogonal spheres... .

g. In the case n=2 we may calculate many $H_{\complement D}(x, \ )$ using the following facts. Consider $R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ as the set of all complex x+iy. If $f: D_1 \to R^2$ is analytic, D_1 being an open set, then $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ and $\Delta u = v''_{yx} - v''_{xy} = 0$, i.e. Re f is harmonic in D_1. Since the superposition of two analytic functions is analytic, we arrive to:

Remark. If $f: D_1 \to D_2$ is analytic, $D_1, D_2 \subset R^2$ being open sets, and w is harmonic on D_2 then wof is harmonic on D_1.

A direct proof consists in $(wof)'_x = (w'_x of)u'_x + (w'_y of)v'_x$, $(wof)''_{x^2} =$
$(w''_{x^2} of)(u'_x)^2 + (w''_{xy} of)u'_x v'_x + (w'_x of)u''_{x^2} + (w''_{xy} of)u'_x v'_x + (w''_{y^2} of)(v'_x)^2 + (w'_y of)v''_{x^2}$
= hence $\Delta(wof) = (w''_{x^2} of)((u'_x)^2 + (u'_y)^2) + 2(w''_{xy} of)(u'_x v'_x + u'_y v'_y) +$

$(w''_{y^2} \circ f)((v'_x)^2+(v'_y)^2)+(w'_x \circ f)\Delta u+(w'_y \circ f)\Delta v$ and the Cauchy-Riemann conditions above lead to $((\Delta w)\circ f)((u'_x)^2+(u'_y)^2)$, etc.

h. For $n \geq 3$ there is only a very particular result ~~of~~ analogue to that in g ; we do not try to prove that there are no other such results.

Proposition. Let $x_0 \in R^n, a>0$. For $x \neq x_0$ let us denote by $\varphi(x)$ the x_1 in c_1 above, i.e. $\varphi(x)=x_0+a^2\|x-x_0\|^{-2}(x-x_0)$.

Let f be harmonic on $D \subset R^n, x_0 \notin D$. Then the function $f(\varphi(x))\|x-x_0\|^{-(n-2)}$ is harmonic in $\varphi(D)$.

Proof. To be shorter, we consider $x_0=0$.

Let us remark that $\varphi \circ \varphi$ is the identity (see c_1) hence $\varphi(D)=\varphi^{-1}(D)$.

If $n=2$ the proposition is a consequence of g above, since $\varphi(z)$ is the complex conjugate of a^2z^{-1}, etc. Let hence $n \geq 3$.

The proposition is true for $f(x)=\|x-y\|^{-(n-2)}$, with a fixed y, according to 2.1 and to the relation $\|x_1-y\|\|x\|=\|x-y_1\|\|y\|$, established in d.3 above.

As in d.3 above, it follows true for $f(x)=(g(y)\|x-h(y)\|^{-(n-2)})'_{n_y}$ with a fixed y, if g, h have continuous partial derivatives of all orders... .

Let now $S(y_0,b) \subset D$. We saw in d, d_1 above, especially d.3 and c_2, that (for the f in the statement) $f(x)=-\int(\|x-y\|^{-(n-2)})'_{n_y}\,d\sigma_1(y)+\int(\|y-y_0\|^{-(n-2)}\|x-y_1\|^{-(n-2)})'_{n_y}\,d\sigma_2(y)$, where $y_1=y_0+b^2\|y-y_0\|^{-2}(y-y_0)$, $\|x-y_0\|<b$, σ_1 and σ_2 are measures on $\{y \mid \|y-y_0\|=b\}$, etc.

A reasonnement as in d.2 above finishes the proof.

h_1. Remark. The image via the φ in the statement of the proposition in h above of the surface S of a sphere is a surface of a sphere when $x_0 \notin S$ and a plane when $x_0 \in S$.

Proof. Let $x_0=0$.

Let $S=\{y \mid \|y-y_0\|=b\}$. If $y_0=0$ then the result follows easily: $\varphi(S)$ is the surface of the sphere of center 0 and radius a^2b^{-1}.

If $y_0\neq 0$ then, according to d.3 above, $\|\varphi(y)-\varphi(y_0)\|\,\|y_0\|=\|y-y_0\|\,\|\varphi(y)\|=b\,\|\varphi(y)\|$. Introducing the angle θ between $\varphi(y_0)$ and $\varphi(y)$, equal to that between y_0 and y (we considered the corresponding vectors...) we obtain $(\|\varphi(y)\|^2+\|\varphi(y_0)\|^2-2\|\varphi(y)\|\,\|\varphi(y_0)\|\cdot\cos\theta)\|y_0\|^2=b^2\|\varphi(y)\|^2$.

If $b=\|y_0\|$ we deduce that $\|\varphi(y)\|\cos\theta$ is constant nonnull hence the projection of $\varphi(y)$ on the ray Oy_0 is constant, etc.

If $b\neq\|y_0\|$ then we arrange the above relation as $\|\varphi(y)\|^2-c_1\|\varphi(y)\|\cos\theta=c_2$ and $\varphi(S)$ will be the surface of the sphere with center $c_1\|y_0\|^{-1}y_0$ and radius $(c_2+c_1^2)^{1/2}$.

i. When $n=2$ there is another way of arriving to the formula in c_2 above for $h_D(x,y)$, $D=\{x \mid \|x-x_0\|<a\}$. Namely, let $x_0=0$, consider a function u continuous on $\bar{D}$ and harmonic on u. Let us write the condition $\Delta u=0$ in D in polar coordinates (r,θ). The computation begins exactly as in the remark in g above.

We have $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ hence $r'_x=xr^{-1}$, $r''_{x^2}=r^{-1}-x^2r^{-3}$; $\theta=\mathrm{arctg}(yx^{-1})$; $\theta'_x=-yr^{-2}$, $\theta'_y=xr^{-2}$, $\theta''_{x^2}=2xyr^{-4}$, $\theta''_{y^2}=-2xyr^{-4}$. The relation $\Delta_{(x,y)}u=0$ becomes $u''_{r^2}+r^{-2}u''_{\theta^2}+r^{-1}u'_r=0$.

We look now for solutions of the type $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ and we arrive to $(r^2R''(r)+rR'(r))\Theta(\theta)+R(r)\Theta''(\theta)=0$; dividing by $R\Theta$ we deduce $\Theta''+c\Theta=0$ for a constant c and $r^2R''(r)+rR'(r)=cR(r)$.

But Θ must have period 2π hence the possible values are $c=n^2$, $n=0,1,\ldots$; for $c=0$ we have $\Theta=1$ and for $c=n^2\neq 0$ $\Theta(\theta)=\cos n\theta$ or $\sin n\theta$.

The corresponding equation in $R(r)$, for $n=0$, has the solutions 1 and $\ln r$. For $n\neq 0$ it suggests to try $R(r)=r^k$ and we obtain $k=\pm n$.

Keeping the bounded solutions and considering an infinite linear combination, we arrive to $u(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1} r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$.

For $r=a$, denoting $u(a,\alpha)$ by $f(\alpha)$, we arrive to an equality which expresses the development of $f(\alpha)$ into a trigonometric series. We deduce in the usual way (multiplying by $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$, integrating ...) $a_0=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha$, $a_n=\pi^{-1}a^{-n}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha$, $b_n=\pi^{-1}a^{-n}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha$.

Substituting in the formula for u, we obtain $u(r,\theta)=\int_0^{2\pi} h(r,\theta,\alpha)f(\alpha)\,d\alpha$, where $h(r,\theta,\alpha)=\pi^{-1}(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} s^n\cos n\beta)$, $s=\frac{r}{a}$, $\beta=\theta-\alpha$.

Apart from π^{-1}, $h(r,\theta,\alpha)$ equals $\mathrm{Re}(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} s^n e^{in\beta})=$
$\mathrm{Re}(\frac{1}{2}+se^{i\beta}(1-se^{i\beta})^{-1})=\mathrm{Re}(2^{-1}(1-se^{i\beta})^{-1}(1+se^{i\beta}))=$
$\mathrm{Re}(2^{-1}(1+s^2-2s\cos\beta)^{-1}(1-s^2+2is\sin\beta))=2^{-1}(a^2-r^2)(a^2+r^2-2ar\cos\beta)^{-1}$, etc.. Of course, not every continuous function f is the sum of a trigonometric series (but it would be sufficient to consider only f's for which this is true), we did not study what happens in $r=0$, etc.

5. Sets non visited by the brownian motion.

Let $A\subset R^n$ be a closed set. The probability that A is visited, at a strictly positive time, by the n-dimensional brownian motion starting from x is, according to the definition in 1.ℓ_2, $H_A(x,A)$.

We saw in 2.ε_2 that either this probability is null for all $x\in R^n$, case in which we say that A is not visited, or this probability is positive for all $x\in R^n$ (for n=2 it follows in this case - 2.ε_3 - that the above probability is 1 for all $x\in R^n$).

The result in 1.ℓ_1 shows that if A is included in a (n-1)-dimensional hyperplane (for example $A\subset\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_n=0\}$) and if the corresponding $m_{n-1}(A)$ is positive, then A is visited.

Using Fubini, we get as a consequence that every $A\subset R^n$ with $m_n(A)>0$, particularily every A with a non void interior, is visited.

Another example of a visited set appears in point 2 of the proposition in $1 b_5$.

On the other hand, according to corollary 1 in $1 b_2$, every closed set $A \subset R^n$ which is a countable union of subsets of linear $(n-2)$-dimensional varieties is not visited.

There is a certain "gap" between the above examples; in this section we try to "diminish" it.

a. Proposition. If $D \subset R^n$ is a domain then the common support of all $H_{\bar D \setminus D}(x, \ )$ with $x \in D$ (see 2.c) contains $(\bar D \setminus D) \setminus \mathring{\bar D} = \bar D \setminus \mathring{\bar D}$.

Proof. Let $y \in \bar D \setminus \mathring{\bar D}$ and $V \ni y$ be an open set. We find $x \in V \cap D$, $z \in \complement \bar D \cap V$, sufficiently near to y such that $S(x, \|z-x\|) \subset V$. Let $B = \{u \mid \|u-x\| = \|z-x\|\}$. According to $1 b_3$ there is a positive probability that the brownian motion starting from x meets B for the first time in $\complement \bar D \cap B \ni z$. But on its way from $x \in D$ to $\complement \bar D$ it will meet $\bar D \setminus D$, i.e. $H_{\bar D \setminus D}(x, V \cap (\bar D \setminus D)) > 0$. remaining in V

Remark. If we consider $D = \{x \mid \|x\| < 2a\} \setminus (S(0,a) \times \{0\})$, where $S(0,a) \subset R^{n-1}$, $D \subset R^n$, we see that the support of $H_{\bar D \setminus D}(x, \ )$, for $x \in D$, may be strictly greater than $\bar D \setminus \mathring{\bar D}$; a complete proof of this fact uses the strong Markov property for τ_n, where τ_1 is the first visit in $\{x \mid \|x\| = \frac{3}{2}a\} = C$ and $\tau_{n+1} = \tau_n + \sigma \circ \theta_{\tau_n}$, σ being the first visit in C after the first visit in $\{x \mid \|x\| = 2a\}$, etc.

2 and If we consider $D = \{x \mid \|x\| \leq a\} \setminus \{0\}$ we see that the support under discussion may equal $\bar D \setminus \mathring{\bar D}$.

a_1. Corollary. If $A \subset R^n$ is a closed set for which there exists a domain $D \subset R^n$ such that $D \setminus A$ has at least two connected components then A is visited.

Proof. Let U be one of the connected components of $D \setminus A$ and V be the union of the others.

. If $\mathring{A} = \emptyset$ (otherwise the statement is already known to be true) then $\bar U \cup \bar V \supset D$ and the connectedness of D shows the existence of a $x\in\bar{U}\cap\bar{V}\cap D$. This x belongs to $\bar{U}$ but not to $\overset{o}{U}$ since $\bar{U}\cap D\subset U\cup A$, $x\in U$ is incompatible with $x\in\bar{V}$ hence $x\in A\cap\bar{V}$ and every open set containing x intersects V i.e. is not contained in $U\cup A$. Now the proposition in a applies: the n dimensional browian motion starting from $y\in U$ visits with positive probability the neighborhood $D\cap(\bar{U}\setminus U)\subseteq A$ of x in ~~a~~ $\bar{U}\setminus U$.

a_2. Proposition. If $A\subset R^2$ is closed and not visited then for every $x\in A$ and $\varepsilon>0$ there exists an open set $D\subset\{z/\|z-x\|<\varepsilon\}$ containing x such that $A\cap(\bar{D}\setminus D)=\emptyset$.

Proof. Suppose for simplicity x=0.

A cannot contain a segment, hence we may find $(0,y_1),(0,y_2)\notin A$ with $-\varepsilon<y_1<0<y_2<\varepsilon$ and then a $\eta>0$ with $[-\eta,\eta]\times\{y_1\}$, $[-\eta,\eta]\times\{y_2\}\subset\complement A\cap\{z/\|z\|<\varepsilon\}$.

Let $D_1=\{z/\|z\|<\varepsilon, pr_1 z>0\}$, $D_2=\{z/\|z\|<\varepsilon, pr_2 z<0\}$. $D_1\setminus A$ and $D_2\setminus A$ are connected (according to a_1), hence there are two simple (i.e. non self intersecting) polygonal lines P_1, P_2, contained in D_1, D_2 respectively, with $P_1\cap A=P_2\cap A=\emptyset$ and uniting (η,y_1) with (η,y_2), $(-\eta,y_1)$ with $(-\eta,y_2)$ respectively.

We construct easily two polygonal simple lines Q_1, Q_2, having $(0,y_1),(0,y_2)$ as ends, which without these ends are contained in D_1, D_2 respectively and for which $Q_1\cap A=Q_2\cap A=\emptyset$ (Q_1 is a part of $P_1\cup([0,\eta]\times\{y_1,y_2\})$, etc.).

Q_1 together with Q_2 constitute a simple closed polygonal line; its interior is good as D.

Remark. We have used only the fact that A disconnects no domain.

There is ~~a~~ generalisation of this proposition for R^n; A follows ~~as~~ "of dimension at most n-2".

b. Proposition. If $A\subset R^n, n\geq 3$ is a closed set such that the infimum of $\sum_{i\in I} a_i^{n-2}$ over all coverings $A\subset\bigcup_{i\in I} S(x_i,a_i)$ is null then A is not visited.

Proof. It is sufficient to consider the case of a bounded A, $A\subset S(0$

Let $\|y\| > c > b$. We know from 2.i (making there $b \to \infty$) that the probability that a brownian motion starting from y visits $S(x_i, a_i)$ y is $a_i^{n-2}\|y-x_i\|^{-(n-2)}$.

The infimum in the statement remains null if we limit ourselves to $a_i \leq \varepsilon$, $S(x_i, a_i) \cap A \neq \emptyset$. For $\varepsilon = \frac{1}{2}(c-b)$ this implies $x_i \in S(0,c)$, $S(x_i, a_i) \subset S(0,c)$, hence $\|y-x_i\| > \|y\| - c$ and the above probability is not greater than $(\|y\|-c)^{-(n-2)} a_i^{n-2}$.

It follows that the probability of visiting A in the brownian motion starting from y does not exceed a constant multiplied by $\sum_{i \in I} a_i^{n-2}$, etc.

Remark. The above result is not a strong one, since it does not give the possibility to deduce the fact that $R \times \{(0,0)\} \subset R^3$ is not visited by the 3-dimensional brownian motion.

c. In the case n=2 the method in b does not work, since the probability of visiting a closed set, for the two dimensional brownian motion, is 0 or 1. But we have the result in 4.g.

Let us consider, for $a > 0$, the function $f(z) = \frac{z-a}{z+a}$, analytic in $R^2 \setminus \{-a\}$. It transforms the imaginary axis ($\operatorname{Re} z = 0$) in the unit circle ($|z| = 1$) and the circle ($\frac{|z-a|}{|z+a|} = c$) in the circle ($|z| = c$), for $c \neq 1$.

Hence, according to the above quoted result, if $0 < c < 1$ the function $u(z) = (-\ln c)^{-1}\left(\ln \frac{|z-a|}{|z+a|}\right)$ is harmonic on $(\operatorname{Re} z > 0) \cap \left(\frac{|z-a|}{|z+a|} > c\right)$, tends to 0 when $\operatorname{Re} z \to 0$ and to 1 when $\frac{|z-a|}{|z+a|} \to c$ (see also 2.i). Recalling the unicity result (corollary) in 3.a (and the proposition in 1.ℓ_5) we deduce that the probability that the brownian motion starting from a z with $\operatorname{Re} z > 0$, $\frac{|z-a|}{|z+a|} > c$ visits the circle $\left(\frac{|z-a|}{|z+a|} = c\right)$ before the axis ($\operatorname{Re} z = 0$) is $u(z)$.

In the above situation, let us fix $0 < b < 2b < d$ and suppose that the circle $\left(\frac{|z-a|}{|z+a|} = c\right)$ is contained in the strip ($2b \leq \operatorname{Re} z \leq d$). Let m, n be ($m < n$) the points of intersection of the circle with ($\operatorname{Im} z = 0$). Then $2b \leq m < a < n \leq d$ and $\frac{a-m}{a+m} = c$, $\frac{n-a}{a+n} = c$,

$m=a\frac{1-c}{1+c}$, $n=a\frac{1+c}{1-c}$, the radius of the circle is $r=\frac{1}{2}(n-m)=a\frac{2c}{1-c^2}$ and it is greater than a positive constant multiplied by c, i.e. $c \leq kr$ with a constant k(depending on b,d). We obtain $(-\ln c)^{-1} \leq (-\ln r-\ln k)^{-1} \leq$ $\leq k_1(-\ln r)^{-1}$ for $r \leq \varepsilon$, where k_1, ε are constants, $\varepsilon < \min(1,k^{-1})$. If, moreover, $\operatorname{Re} z=b$ then $\left(\frac{|z-a|}{|z+a|}\right)^2=((b-a)^2+(\operatorname{Im} z)^2)((b+a)^2+(\operatorname{Im} z)^2)^{-1} \geq$ $(b-a)^2(b+a)^{-2} \geq b^2(b+d)^{-2}$. We arrive to the result $u(z) \leq k_2(-\ln r)^{-1}$ for $r \leq \varepsilon$, $\operatorname{Re} z=b$, where ε and k_2 are constants depending on b,d...

Now we are able to prove a result analogue to that in b above, for n=2, with some extra effort.

Proposition. Let $A \subset R^2$ be a closed set such that the infimum of ~~all~~ $\sum_{i\in I}(-\ln a_i)^{-1}$ over all coverings $A \subset \bigcup_{i\in I} S(x_i, a_i)$ with $a_i < 1$ is null. Then A is not visited.

Proof. It will be sufficient to consider a bounded A, $A \subset S(0,a)$. Consider the line $B=(pr_1 = -3a)$ and $y \in R^2$ with $pr_1 y = -\frac{5}{2}a$. The infimum in the statement remains null if we require $a_i \leq \eta$, $S(x_i,a_i) \cap A \neq \emptyset$; this implies $pr_1 S(x_i,a_i) \subset [-2a,2a]$ for a sufficiently small η.

~~xxx~~ We are in the situation to apply the above result and to deduce that, for a sufficiently small η (depending only on a), the probability that the brownian motion starting from y visits $S(x_i,a_i)$ before B is not greater than $k(-\ln a_i)^{-1}$. It follows now easily that the probability that the brownian motion visits A before B is null.

Let now $C=(pr_1 = -\frac{5}{2}a)$. On the probability space of the above brownian motion let $\sigma_0=0$, τ_{n+1} be the first visit in B after σ_n, σ_n be the first visit in C after τ_n.

Obviously σ_n, τ_n tend to $+\infty$ for $n \to \infty$. A is clearly nonvisited on each $[\tau_n, \sigma_n]$, while on each $[\sigma_n, \tau_{n+1}]$ it is a.s. nonvisited according to the strong Markov property and the result in the first part of our proof.

d. The difference between the cases $n \geq 3$, $n=2$ in what concerns the topic of this section is the following.

Let $A\subset R^n$ be a closed set supposed, for simplicity, bounded. If we intend to see if A is visited or not, then we have to take an x and to see if $H_A(x,A)$ is not null or null.

We choose bounded closed sets A_k such that $A_k \supset A_{k+1}$, $\bigcap A_k = A$ and $H_{A_k}(y,\ )=\varepsilon_y$ for all $y\in A_k\setminus \overset{\circ}{A}_k = \overline{\complement A_k}\setminus\complement A_k$; for example A_k is the union of all cubes $\prod\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{r_i}{2^k},\frac{r_i+1}{2^k}\right]$, with integer r_i, having nonvoid intersections with A (see remark 2 in $\S$3.a).

If $n\geqslant 3$ we have to find the harmonic functions u_k on $\complement A_k$ for which $\lim\limits_{y\to z} u_k(y)=1$ for every $z\in A_k\setminus\overset{\circ}{A}_k$ and $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} u_k(y)=0$ (see $\S$3.a,b). According to the remark 2 in $\S$3.a, we have $H_A(x,A)=\lim\limits_{k} u_k(x)$ for $x\notin A$.

But in the case $n=2$ this method fails, since the condition $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} u_k(y)=0$ cannot be imposed and we get $u_k=1$, etc. (see $\S$3.c).

We may use a more involved method in the case $n=2$. We choose a bounded domain $D\supset A$ such that $H_{\complement D}(z,\ )=\varepsilon_z$ for all $z\in\overline{D}\setminus D$ then (A_k may be chosen included in D) we find the harmonic functions u_k on $D\setminus A_k$ for which $\lim\limits_{y\to z} u_k(y)=1$ for every $z\in A_k\setminus\overset{\circ}{A}_k$ and $\lim\limits_{y\to z} u_k(y)=0$ for every $z\in\overline{D}\setminus D$. As above, $H_{A\cup\complement D}(x,A)=\lim\limits_{k} u_k(x)$ for $x\in D\setminus A$. If $H_{A\cup\complement D}(x,A)$, for an x ($D\setminus A$ may be not connected, but see a_1 above), is positive it is clear that A is visited, while if $H_{A\cup\complement D}(x,A)=0$ for all x then the reasonment at the end of the proof of the proposition in c above shows that A is not visited.

The presence of D may complicate the task of finding u_k. In point e below we develop a method of "eliminating D". Its idea starts with $1-u_k$ instead of u_k above.

e. The Robin constant of a bounded closed set $A\subset R^2$.

In the case $n=2$ the harmonic function $\ln\|x\|$ in 2.i is unbounded in the neighborhood of ∞ (i.e. outside every $S(x_0,a)$)

e_1. Let $A\subset R^2$ be closed, bounded, with $\overset{\circ}{A}\neq\emptyset$ and such that $H_A(x,\ )=\varepsilon_x$ for all $x\in A$. Consider the function $h(x)=\ln\|x-x_0\|-(H_A v)(x)$, defined for $x\in\complement A$, where $x_0\in\mathring{A}$ and $v(y)=\ln\|y-x_0\|$ for $y\in A\setminus\mathring{A}$; v is bounded continuous.

The function h has the properties: h is harmonic on $\complement A$, $\lim\limits_{x\to z} h(x)=0$ for every $z\in A\setminus\mathring{A}$ (according to 3.a), particularily h is bounded on every $S(0,a)\setminus A$, and $h(x)-\ln\|x\|$ is bounded on a certain $\complement S(0,a)$. The result in 3.c shows that there is only one function h with the above properties (hence it does not depend on x_0). We denote this function by u^A.

If $u\geqslant 0$ is harmonic on $\complement A$, bounded on every $S(0,a)\setminus A$ and $u(x)-\ln\|x\|$ is bounded on a $\complement S(0,a)$ then the result in 3.c (applied to u^A-u) shows that $u\geqslant u^A$. Hence u^A may be also characterised as the minimal harmonic function $u\geqslant 0$ on $\complement A$, bounded on every $S(0,a)\setminus A$ and with a bounded $u(x)-\ln\|x\|$ on a certain $\complement S(0,a)$ (depending on u).

e_2. Let now $A\subset R^2$ be an arbitrary bounded closed set. Let us consider, as in d above, bounded closed sets A_k, with the properties of A in e_1 above, such that $A_k\supset A_{k+1}$, $\bigcap A_k=A$.

We deduce first, from e_1 above, that $u^{A_{k+1}}\big|_{\complement A_k}\geqslant u^{A_k}$.

Let $u=\lim\limits_k u^{A_k}$. It is a measurable function on $\complement A$ such that, if $S(x,\varepsilon)\subset\complement A$ (hence-compactness, $S(x,\varepsilon)\subset\complement A_k$ for a k), we have $u(x)=\int u(x+\varepsilon y)\,d\sigma(y)$, σ being the probability on $\{z\mid\|z\|=1\}$ invarient with respect to all linear isometries of R^2. Reasoning as in 2.a-d we see that either $u=+\infty$ on the whole unbounded component of $\complement A$, or $u\geqslant 0$ is a harmonic function on $\complement A$.

Let us choose a such that $A_1\subset S(0,a')$, $a'<a$. Then (6.140.c) we have $0\leqslant u^{A_k}(x)\leqslant\sup\limits_{\|y\|=a} u^{A_k}(y)\leqslant\sup\limits_{\|y\|=a} u(y)$ for $x\in S(0,a)\setminus A_k$ and

$$\sup\left|u^{A_k}(x)-\ln x\right|\leqslant\sup_{\|y\|=a}\left(\left|u^{A_k}(y)-\ln\|y\|\right|\right)\leqslant\max\left(\sup_{\|y\|=a}\left(\left|u(y)-\ln\|y\|\right|\right),\ \sup_{\|y\|=a}\left(\left|u^{A_1}(y)-\ln\|y\|\right|\right)\right).$$

These inequalities prove that, if u is harmonic on $\complement A$ then it is bounded on every $S(0,a)\setminus A$ and $u(x)-\ln\|x\|$ is bounded on a certain $\complement S(0,a)$.

Finally, if $w \geqslant 0$ is harmonic on $\complement A$, bounded on every $S(0,a)\setminus A$ and if $w(x)-\ln\|x\|$ is bounded on a $\complement S(0,a)$ then $w|_{\complement A_k} \geqslant u^{A_k}$ according to e_1. Hence $w \geqslant u$.

e_3. The result of e_1, e_2 may be stated as:

Proposition. Let $A \subset R^2$ be closed and bounded. Then either there is no harmonic function $u \geqslant 0$ on $\complement A$, bounded on every $S(0,a)\setminus A$, such that $u(x)-\ln\|x\|$ is bounded on a $\complement S(0,a)$, case in which we define $u^A(x)=+\infty$ for all $x \in \complement A$, or there is a minimal such function u^A.

Moreover:

1. If $A \subset B$ then $u^A|_{\complement B} \geqslant u^B$.
2. If $A=\bigcap A_k, A_k \supset A_{k+1}$ then $u^A=\lim u^{A_k}$ (pointwise).
3. If $A \neq \emptyset, x_0 \in \overset{\circ}{A}$, if $H_A(z, \ )=\varepsilon_z$ for all $z \in A$ then $\lim\limits_{x\to z} u^A(x)=0$

for all $z \in A\setminus\overset{\circ}{A}$. This fact, together with $u^A \geqslant 0, u^A$ harmonic on $\complement A$, $u^A(x)-\ln\|x\|$ bounded on a $\complement S(0,a)$ characterise completely u^A in this case, in which $u^A(x)=\ln\|x\|-(H_A v)(x), v(y)=\ln\|y-x_0\|$ for $y \in A\setminus\overset{\circ}{A}$.

e_4. Applying the result in the corollary in §4.e_1 we obtain:

Proposition. If $A \subset R^2$ is bounded and closed and if u^A is finite then $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}(u^A(x)-\ln\|x\|)$ exists and is finite. This limit is named the Robin constant of A and denoted by $\gamma(A)$. If $u^A=+\infty$ ... then we define $\gamma(A)=+\infty$.

e_5. Proposition. Let $A \subset R^2$ be closed and bounded. Then A is visited if and only if u^A is everywhere finite i.e. if its Robin constant $\gamma(A)$ is finite.

Proof. Suppose that u^A is everywhere finite. Consider a "sufficiently large a and a fixed $x \in \complement A, \|x\|<a$. The result in §3.c may be applied, for a sufficiently large c, to $H_{\complement D \cup A_k}(\ ,\complement D)$- $u^{A_k}(\inf\limits_{\|y\|=a} u^{A_k}(y))^{-1}$, where $D=\{y \mid \|y\|<a\}$, the conclusion being $H_{\complement D\cup A_k}(x,\complement D) \leq u^{A_k}(x)(\inf\limits_{\|y\|=a} u^{A_k}(y))^{-1}$. For $k\to\infty$ we obtain, according to remark 2 in §3.a and to the Dini theorem on $\{y \mid \|y\|=a\}$ applied to $u^{A_k}\uparrow u^A$, $H_{\complement D\cup A}(x,\complement D) \leq u^A(x)(\inf\limits_{\|y\|=a} u^A(y))^{-1}$. For a sufficiently large a the right member is smaller than 1, since $u^A(y)$ tends to ∞ when

$\|y\|$ tends to ∞, hence $H_{\complement D \cup A}(x,A)>0$ and A is visited.

If $u^A=+\infty$ then, as above, we obtain $H_{\complement D \cup A_k}(x,\complement D) \geq u^{A_k}(x)(\sup_{\|y\|=a} u^{A_k}(y))^{-1}$ and, for a sufficiently large $b \leq a$,

$\sup_{\|x\|=b} H_{\complement D \cup A_k}(x,\complement D) \geq (\sup_{\|x\|=b} u^{A_k}(x))(\sup_{\|y\|=a} u^{A_k}(y))^{-1} = (\ln b+\sup_{\|x\|=b} v_k(x))(\ln a+\sup_{\|y\|=a} v_k(y))^{-1}$, where $v_k(x)=u^{A_k}(x)-\ln\|x\|$ is bounded on $\{x \mid \|x\|\geq b\}$.

Once more the result in 3.c shows that $\sup_{\|x\|=b} v_k(x) \geq \sup_{\|y\|=a} v_k(y)$. As $v_k \uparrow +\infty$, we deduce $\sup_{\|x\|=b} H_{\complement D \cup A_k}(x,\complement D)\uparrow 1$ and this, together with $H_{\complement D \cup A_k}(x,\complement D)\uparrow H_{\complement D \cup A}(x,\complement D)$ and the Dini theorem show the existence of a x with $\|x\|=b$ and $H_{\complement D \cup A}(x,\complement D)=1$. It means $H_{\complement D \cup A}(x,A)=0$ and it was seen in d that it implies the fact that A is not visited (it implies first the same relation for all x with $\|x\|=$

e_6. We remove the condition $\mathring{A}\neq\emptyset$ form the first part of 3 in e_3 above.

Proposition. If $A\subset R^2$ is closed and bounded and if $H_A(y, \ )=\varepsilon_y$ for a $y\in A\setminus\mathring{A}$ then $\lim_{x\to y} u^A(x)=0$.

Proof. It follows that A is visited hence (e_5 above) u^A is finite.

Let $y_0\in A, y_0\neq y$ and S be the surface of a sphere with center in y_0 and noncontaining y. Let A_k be sets with the properties in e_2 above, relative to A.

Let $x\in \complement A$, outside the sphere S. Then for a sufficiently large k we have $u^{A_k}(x)=\ln\|x-y_0\|-(\tilde{H}_{A_k}\ln\| \ -y_0\|)(x)=\ln\|x-y_0\|-(\tilde{H}_{A_k\cup S}\ln\| \ -y_0\|)(x)+(\tilde{H}_{A_k\cup S}(\ln\| \ -y_0\|-\tilde{H}_{A_k}\ln\| \ -y_0\|))(x)=\ln\|x-y_0\|-(\tilde{H}_{A_k\cup S}\ln\| \ -y_0\|)(x)+(\tilde{H}_{A_k\cup S}u^{A_k})(x)$, where $u^{A_k}=0$ on A_k; see 1 b.

Let (x_t) be a brownian motion starting from x, τ_k its first visit in $A_k\cup S$, τ its first visit in $A\cup S$. We may write $(\tilde{H}_{A_k\cup S}u^{A_k})(x)=M(u^{A_k}(x_{\tau_k}))$, the integrand being uniformly bounded, since u is bounded on $S(0,a)\setminus A$ and dominates it. If $x_{\tau_k}\in S\setminus A$ then $\tau_k=\tau_{k+1}=\dots=\tau$ for all k then $u^{A_k}(x_{\tau_k})=0, x_\tau\in A$, while if $x_{\tau_k}\notin S$ (i.e. $x_{\tau_k}\in A_k$)

as $\tau_k \uparrow \tau$. For $k \to \infty$ we obtain $(\tilde{H}_{A_k \cup S} u^{A_k})(x) \to H((u^A \chi_{S\setminus A}) \circ x_\tau) = (\tilde{H}_{A\cup S}(u^A \chi_{S\setminus A}))(x)$.

From the first formula in our proof, for $k \to \infty$, we deduce $u^A(x) = \ln\|x-y_0\| - (\tilde{H}_{A\cup S}(\ln\| \ \ -y_0\| + u^A \chi_{S\setminus A}))(x)$ and now the result in ξ.a finishes the proof.

Remark. $u^A(x) = \ln\|x-x_0\| - (H_A v)(x)$, for $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ and $v(y) = \ln\|y-x_0\|$ for $y \in A \setminus \overset{\circ}{A}$, for every A with a nonvoid $\overset{\circ}{A}$.

e_7. There are difficulties for generalising the formula in the above remark in the case when $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, since near x_0 $\ln\|x-x_0\|$ is unbounded in x, etc.

We imagine an indirect approach. Let $z \in \complement A$, $S_\varepsilon = S(z,\varepsilon)$; suppose it disjoint of A. We have $u^{A\cup S_\varepsilon}(x) = \ln\|x-z\| - (H_{A\cup S_\varepsilon} \ln\| \ \ -z\|)(x) = \ln\|x-z\| - (H_{A\cup S_\varepsilon}(\chi_A \ln\| \ \ -z\|))(x) - \ln\varepsilon \, H_{A\cup S_\varepsilon}(x, S_\varepsilon)$. For $\varepsilon \to 0$ we get, since $\{z\}$ is not visited (considering a brownian motion starting from x, etc.) $u^A(x) - \ln\|x-z\| + (H_A \ln\| \ \ -z\|)(x) = -\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\varepsilon \, H_{A\cup S_\varepsilon}(x, S_\varepsilon)) \geq 0$ (the fact that $u^A = u^{A\cup\{z\}}$ is clear from the formula in the remark at the end of e_6 if $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ and for a general A we apply 2 in e_3 above).

Denote the left member in the obtained formula by $g(x,z)$. It is a harmonic function in x, on $\complement A \setminus \{z\}$, for every fixed z. It is also harmonic in z on $\complement A \setminus \{x\}$ for every fixed x since $(H_A \ln\| \ \ -z\|)(x) = \int \ln\|y-z\| dH_A(x,y)$, $\|y- \ \ \|$ is harmonic on $\complement A$ for $y \in A$ and a reasonment as in 4.d.2,3 works.

In order to eliminate the singularities, we consider $h(x,z) = g(x,z) - g(z,x) = u^A(x) + (H_A \ln\| \ \ -z\|)(x) - u^A(z) - (H_A \ln\| \ \ -x\|)(z)$. According to the above, $h(\ ,z)$ is harmonic on $\complement A$ for every fixed $z \in \complement A$.

$(H_A \ln\| \ \ -x\|)(z)$, for a given $z \in \complement A$, (as a function of x,) is bounded above on every $S(0,a) \setminus A$ and it is bounded below on every $S(0,a) \setminus (A \cup S(z,\varepsilon))$ since it is nonsmaller than $\ln\|z-x\| - u^A(z)$, according to $g(z,x) \geq 0$.

Moreover, $(H_A \ln\| \ \ -x\|)(z) - \ln\|x\| = \int \ln\frac{\|y-x\|}{\|x\|} dH_A(z,y)$ and is bounded on $\complement S(0,a)$, as a function of x, for every fixed $z \in \complement A$.

The properties of the last term in $h(x,z)$, together with those of $u^A(x)$, show that for every fixed $z \in \complement A$, $h(\ ,z)$ is a bounded harmonic function on $\complement A$. Since for $y \in A \setminus \overset{o}{A}$ we have, supposing that $H_A(y,\ ) = \varepsilon_y$ for all such y, $\overline{\lim_{x\to y}}\, h(x,z) \leq \overline{\lim_{x\to y}}\, g(x,z) = 0$, according to 3.a and 3 in e_3 above, we deduce from 3.c that $h(x,z) \leq 0$ for all $x,z \in \complement A$.

But $h(x,z) = -h(z,x) \geq 0$, i.e. $h(x,z) = 0$ for all $x,z \in \complement A$.

Now let us make $x \to \infty$ in the formula $h(x,z)=0$. The reasonment showing the boundedness on a $S(0,a)$ of $(H_A \ln\|\ -x\|)(z)$ shows also $\lim_{\|x\|\to\infty} ((H_A \ln\|\ -x\|)(z) - \ln\|x\|) = 0$.

We get, for a A with $\overset{o}{A} \neq \emptyset$ (or, see e_5 above), with $H_A(y,\ ) = \varepsilon_y$ for all $y \in A$:
$u^A(z) = \gamma(A) + \lim_{\|x\|\to\infty} (H_A \ln\|\ -z\|)(x)$.

The restriction on A may be removed by writing the formula $h(x,z)=0$ for a sequence A_n as in e_2 above, making $n \to \infty$ and reasoning as above. Hence:

Proposition. If $A \subset R^2$ is bounded and closed then $u^A(x) = \gamma(A) + \lim_{\|z\|\to\infty} (H_A \ln\|\ -x\|)(z)$ (see the corollary in 4.c_1).

e_8. Properties of the Robin constant.

1. $A \subset B$ implies $\gamma(A) \geq \gamma(B)$.

Obvious from e_3.1 above.

2. If $A_k \supset A_{k+1}$, $A = \bigcap A_k$ then $\gamma(A_k) \uparrow \gamma(A)$.

Proof. If follows from e_3.2 above: $\gamma(A) - \gamma(A_k) \leq \sup_{\|x\|=a} (u^A(x) - u^{A_k}(x))$ according to 3.c. The Dini theorem also is used.

3. If $a > 0$ and $h_a : R^2 \to R^2$ is defined as $h_a(x) = ax$ then $\gamma(h_a(A)) = \gamma(A) - \ln a$.

Proof. If $u \geq 0$ is harmonic on $\complement(h_a(A)) = h_a(\complement A)$, u is bounded on every $S(0,b) \setminus h_a(\complement A)$ and $u(x) - \ln\|x\|$ is bounded on a $\complement S(0,b)$ then (remark 4.g say) $u \circ h_a$ is harmonic on $\complement A$, bounded on every $S(0,b) \setminus A$ and $u(ax) - \ln\|ax\| = u(ax) - \ln\|x\| - \ln a$ is bounded on a $\complement S(0,b)$,

$u \circ h \text{---} 0$,

$u \circ h_a \geq 0$. Hence $u^{h_a(A)} = u^A \circ h_a^{-1}$ and $\gamma(h_a(A)) = \lim_{\|x\| \to \infty} (u^{h_a(A)}(x) - \ln\|x\|) = \lim_{\|x\| \to \infty} (u^A(xa^{-1}) - \ln\|xa^{-1}\| + \ln a^{-1})$ etc.

4. If $A \cap B = \emptyset$ then $\frac{1}{2}\min(\gamma(A), \gamma(B)) \geq \ln\max\{\|x-y\| \mid x \in A, y \in B\} \leq$
$\gamma(A \cup B) \leq \frac{1}{2}\max(\gamma(A), \gamma(B)) \geq \ln\min\{\|x-y\| \mid x \in A, y \in B\}$.

Proof. It will be sufficient to consider the case when $\mathring{A}, \mathring{B} \neq \emptyset$, $H_A(x, \ ) = \varepsilon_x$ for all $x \in A$, $H_B(x, \ ) = \varepsilon_x$ for all $x \in B$, according to 2 above, etc.

Let us consider the function $\frac{1}{2}(u^A + u^B)$ on $\complement(A \cup B)$. Let $c_A = \min_B u^A$, $d_A = \max_B u^A$ and, analoguo, $c_B = \min_A u^B$, $d_B = \max_A u^B$.

The function $v = u^{A \cup B} - \frac{1}{2}(u^A + u^B)$ is bounded on $\complement(A \cup B)$. For every $y \in A \setminus \mathring{A}$ we have $\lim_{x \to y} v(x) = -\frac{1}{2}u^B(y)$ and for $y \in B \setminus \mathring{B}$ the limit is $-\frac{1}{2}u^A(y)$. From the result in 3.e we deduce $v \geq -\frac{1}{2}\max(d_A, d_B)$, $v \leq -\frac{1}{2}\min(c_A, c_B)$. Hence $-\frac{1}{2}\max(d_A, d_B) + \frac{1}{2}(u^A + u^B) \leq u^{A \cup B} \leq -\frac{1}{2}\min(c_A, c_B) + \frac{1}{2}(u^A + u^B)$.

Substracting $\ln\|x\|$, making $\|x\| \to \infty$, etc. we obtain $-\frac{1}{2}\max(d_A, d_B) + \frac{1}{2}(\gamma(A) + \gamma(B)) \leq \gamma(A \cup B) \leq -\frac{1}{2}\min(c_A, c_B) + \frac{1}{2}(\gamma(A) + \gamma(B))$.

It remains now to estimate the c's and d's. We use the formula in the proposition in c_7 above. We deduce from it $\gamma(A) + \ln\min_{y \in A}\|y-x\| \leq u^A(x) \leq \gamma(A) + \ln\max_{y \in A}\|y-x\|$, hence $\gamma(A) + \ln\min\{\|y-x\| \mid y \in A, x \in B\} \leq c_A \leq d_A \leq \gamma(A) + \ln\max\{\|y-x\| \mid y \in A, x \in B\}$, etc.

5. If B is an isometric image of A then $\gamma(B) = \gamma(A)$.

Proof similar to that of 3.

f. More refined examples of visited and nonvisited sets $A \subset R^2$.

The examples will be Cantor type subsets of the line $R \times \{0\} \subset R^2$.

Definition. Let $A \subset R$ be a finite union of closed intervals, $A = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i - b_i, a_i + b_i]$, $a_i + b_i < a_{i+1} - b_{i+1}$ and $r \in (0,1)$. We define

$c_r(A) = \bigcup_{i=1}^{n} ([a_i - b_i, a_i - (1-r)b_i] \cup [a_i + (1-r)b_i, a_i + b_i])$.

We denote $C = [0,1]$, $C_{r_1,\ldots,r_n} = c_{r_n}(C_{r_1,\ldots,r_{n-1}})$, $C_{r_1,\ldots,r_n,\ldots} = \bigcap_n C_{r_1,\ldots,r_n}$ (the last are Cantor type sets).

Remarks. 1. $c_r(f(A)) = f(c_r(A))$ if $f: R \to R$ is defined by $f(x) = ax + b$

2. $m(c_r(A))=r\,m(A)$. Hence $m(C_{r_1,\ldots,r_n,\ldots})$ is null if and only if $\sum(1-r_n)=\infty$.

3. $C_{r_1,\ldots,r_n}=f_{r_1}(C_{r_2,\ldots,r_n})\cup g_{r_1}(C_{r_2,\ldots,r_n})$ where $f_r(x)=\frac{1}{2}rx$, $g_r(x)=1-\frac{1}{2}r(1-x)$ (it is true for n=1 then induction according to 1).

4. $\inf\{|x-y|\mid x\in f_{r_1}(C_{r_2,\ldots,r_n}),y\in g_{r_1}(C_{r_2,\ldots,r_n})\}=1-r_1$, and the corresponding sup is 1 .

5. We consider the sets defined above as subsets of $R\times\{0\}\subset R^2$. We deduce from 3,5 in e_8 above that $\gamma(f_{r_1}(C_{r_2,\ldots,r_n}))=\gamma(g_{r_1}(C_{r_2,\ldots,r_n}))=\gamma(C_{r_2,\ldots,r_n})-\ln(r_1/2)$ and then from 4 in e_8 $\frac{1}{2}(\gamma(C_{r_2,\ldots,r_n})-\ln(r_1/2))\leq\gamma(C_{r_1,\ldots,r_n})\leq\frac{1}{2}(\gamma(C_{r_2,\ldots,r_n})-\ln(r_1/2)-\ln(1-r_1))$.

Hence $2^{-n}\gamma(C)-\sum_{k=1}^{n}2^{-k}\ln(r_k/2)\leq\gamma(C_{r_1,\ldots,r_n})\leq 2^{-n}\gamma(C)-\sum_{k=1}^{n}2^{-k}\ln(r_k/2)-\sum_{k=1}^{n}2^{-k}\ln(1-r_k)$.

One of the results ~~uf~~ quoted at the beginning of this section(5) shows that $\gamma(C)<\infty$ .Moreover, another result there shows that if $m(A)>0$ then $\gamma(A)<\infty$,hence we are

interested(see 2

above)only in the case $\sum(1-r_n)=\infty$ .Unfortunately this does not imply the finiteness of the last sum in the relation estimating $\gamma(C_{r_1,\ldots,r_n,\ldots})$ deduced from the above for $n\to\infty$(take $r_{2k}=r$ in order to ensure the divergence of $\sum(1-r_n)$, then "small" $1-r_{2k+1}$ in order to ensure the divergence of the sum under discussion...). So we have to require, say $\sup r_n<1$ in order to obtain:

Proposition. Let $r_n\in(0,1)$, $\sup r_n<1$. Then the set $\{(x,0)\mid x\in C_{r_1,\ldots,r_n,\ldots}\}\subset R^2$ is visited if and only if $\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\ln(1/r_k)<\infty$

Examples. 1. If $r_n=r\in(0,1)$ then we obtain an example of a visited subset of $(pr_2=0)$, of Lebesgue measure 0 (onedimensional), completing a result at the beginning of 5.

2. We intend to construct an example of a $A\subset R^2$ with $\gamma(A)=\infty$, i.e. nonvisited, but nonsatisfying the sufficient condition in the proposition in c above, this meaning that $\mu(A)=\inf\sum_{i\in I}\varphi(a_i)>0$, the infimum being over all coverings $A\subset\bigcup_{i\in I}S(x_i,a_i)$ with $a_i<1$ and $\varphi(x)=(\ln x^{-1})^{-1}$.

Let us study first $\varphi(x)$. It is continuous, increasing, $\varphi(0)=0$. $\varphi'(x)=(\ln x^{-1})^{-2}x^{-1}=(x^{1/2}\ln x^{-1})^{-2}$. Since $(x^{1/2}\ln x^{-1})'=x^{-1/2}(-1+\frac{1}{2}\ln x^{-1})$ is positive in a $(0,c)$, φ' decreases on $(0,c)$ and, for $a+b\le c, a>0, b>$ we have $\varphi(a+b)\le\varphi(a)+\varphi(b)$, because it is true for $a=0$ and $\varphi'(a+b)<\varphi'(a)$.

It will be convenient to replace $\varphi(x)$ by $\psi(x)=\varphi(cx)$. Their ratio has as limit for $x\to 0$ (Hopital) $\lim_{x\to 0}(c\varphi'(cx)(\varphi'(x))^{-1})=1$ hence the replacement "does not change the question".

The fact that ψ is increasing shows first that for a $A\subset R$ considered as $A\subset R\times\{0\}\subset R^2$ the values of $\mu(A)$ "calculated in R^2 and in R" are the same, hence we may use for such a A only coverings of the type $A\subset\bigcup_{i\in I}[x_i-a_i,x_i+a_i]$, and then that we may restrict furthe, if $A\subset[0,1]$, to such coverings with $0\le x_i-a_i, x_i+a_i\le$

According to the continuity of ψ, $\mu(A)$ remains the same if we consider coverings $\bigcup_{i\in I}(x_i-a_i,x_i+a_i)$ hence—compactness, etc.—it remains the same if we consider finite coverings $\bigcup_{i\in I}[x_i-a_i,x_i+a_i]$.

If $A\subset[0,1]$ then, due to $\psi(a+b)\le\psi(a)+\psi(b)$ for $a,b>0, a+b\le 1$, $\mu(A)=\inf\bigcup_{i\in I}\psi(a_i/2)$ over all coverings $A\subset\bigcup_{i\in I}[x_i,x_i+a_i]$ with finite I, disjoint $[x_i,x_i+a_i]\subset[0,1]$.

2a. We shall try to find an example, satisfying the conditions at the beginning of 2 above among the sets $C_{r_1,\dots,r_n,\dots}=\bigcap_n C_{r_1,\dots,r_n}$ (the intersection is descending).

$C_{r_1,\dots,r_n}$ is composed of 2^n disjoint closed intervals, each having $2^{-n}r_1\dots r_n$ as length. Let B_n be the set of all ends of these 2^n intervals. $B=\bigcup_n B_n$, where the union is ascending, is the set of all points in $C_{r_1,\ldots,r_n,\ldots}$ isolated at the left or at the right.

In order to obtain a minoration for $\mu(C_{r_1,\ldots,r_n,\ldots})$, suppose $C_{r_1,\ldots,r_n,\ldots} \subset \bigcup_{i=1}^{k} [x_i, x_i+a_i]$ with $x_1=0, x_i+a_i < x_{i+1}, x_k+a_k=1$ (0 and 1 belong to $C_{\ldots}$). By diminishing the $[x_i, x_i+a_i]$ we arrive in a situation in which $x_i, x_i+a_i \in C_{r_1,\ldots,r_n,\ldots}$ hence, since they follow isolated, etc., with $x_i, x_i+a_i \in B_n$ for a certain n, for all $i=1,\ldots,k$.

For every i let s_i be the smallest s for which $[x_i, x_i+a_i]$ contains an interval composing $C_{r_1,\ldots,r_s}$. We get $\sum_{i=1}^{k} \psi(a_i/2) \geq \sum_{i=1}^{k} \psi(u_{s_i})$, where $u_n = 2^{-(n+1)} r_1 \ldots r_n$.

We denote now by t_i the number of intervals constituting $C_{r_1,\ldots,r_n}$ contained in $[x_i, x_i+a_i]$, remark that $\sum_{i=1}^{k} t_i = 2^n$ and try to relate this sum to the previous one, more precisely to majorise t_i.

Every interval composing $C_{r_1,\ldots,r_s}$ has a "neighbor" in the set of all these intervals, such that the smallest interval containing these two is one composing $C_{r_1,\ldots,r_{s-1}}$. This shows that $[x_i, x_i+a_i]$ contains at most two intervals composing $C_{r_1,\ldots,r_{s_i}}$ hence $[x_i, x_i+a_i]$ is contained in the union of at most four such intervals. We deduce that $t_i \leq 4.2^{n-s_i}$ (every interval composing $C_{r_1,\ldots,r_s}$ contains two composing $C_{r_1,\ldots,r_{s+1}}$, etc.). Hence $1 = \sum_{i=1}^{k} 2^{-n} t_i \leq 4 \sum_{i=1}^{k} 2^{-s_i}$.

The desired example will be obtained if $\psi(u_s) \geq d2^{-s}$, with a positive constant d.

2b. The relation $\psi(u_n) \geq d.2^{-n}$ is transcripted as $d.2^{-n} \leq (\ln((c.2^{-(n+1)} r_1 \ldots r_n)^{-1}))^{-1}$ and this is equivalent to $e^{-d^{-1}2^n} \leq c.2^{-(n+1)} r_1 \ldots r_n$. A sufficient condition for the validity of this relation is $r_n \geq 2e^{-d^{-1}(2^{n+1}-2^n)}$, $\frac{c}{2} \geq e^{-d^{-1}}$

In order to obtain an example ~~somewhich~~ with $\mu(C_{r_1,\ldots,r_n,\ldots}) = \infty$ we have to satisfy the condition $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ln(1/r_k) = \infty$ (see the proposition above). Taking r_n equal to the above lower bounds the series will be divergent because its term has a positive limit (so there is sufficient room for other such examples).

6. The probability of visiting an ellipsoid, for $n \geq 3$.

The interest of this topic appears from the remark at the end of § 5. Knowing only the probability of visiting a sphere in R^n and using coverings, we could not prove the fact that $\overline{pr}^{-1}_{\{1,2\}}(\{0\})$ is not visited. It appears that we have to cover the $(n-2)$-dimensional variety with sets which are similar to a sphere "in n-2 directions" but have a much smaller extend "in the other two directions". An ellipsoid appears to be simpler to handle than a cartesian product of a $(n-2)$-dimensional sphere (together with its interior) and the interior of a circle, because of the "angular boundary" of the product.

The idea of determining the probability that the brownian motion starting from a given point visits a given ellipsoid, i.e. of determining the harmonic function on the exterior of the ellipsoid, tending to 1 when the argument approaches the surface of the ellipsoid and to 0 when it approaches ∞ (see § 3.a, b), is to change the coordinates, using the idea of "homophocal conics" from the plane geometry.

Recalling the computation in § 4.g, if we have a function u expressed in two systems of coordinates $(x_1,\ldots,x_n)$ and $(y_1,\ldots,y_n)$ then $\Delta_x u = \sum_{i,j=1}^{n} (u''_{y_i y_j} \sum_{k=1}^{n} (y_i)'_{x_k} (y_j)'_{x_k}) + \sum_{i=1}^{n} u'_{y_i} \Delta_x y_i$.

a. Let us fix the real numbers $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$. Whatever be $x_1 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0$, the equation in y $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 (y-a_i)^{-1} = 1$, which is equivalent to a n degree equation, has n different real roots, since its left member is decreasing in y on every of the intervals $(-\infty, a_n), (a_n, a_{n-1}), \ldots, (a_2, a_1), (a_1, +\infty)$, tends to 0 for $y \to \pm\infty$, to $-\infty$ for $y \to a_i - 0$ and to $+\infty$ for $y \to a_i + 0$. These roots $y_1, \ldots, y_n$ may be arranged such that $a_n < y_n < a_{n-1} < \ldots < a_2 < y_2 < a_1 < y_1$ and are infinitely derivable functions of $(x_1, \ldots, x_n)$ since the derivative of the left member of the above equation is non null in every of y_i.

b. Let us prove that, equivalently, if $y_1 \in (a_1, +\infty)$, [illegible] $\in (a_2, a_1)$, ...

$y_n \in (a_n, a_{n-1})$ are given then we may find in an unique manner n positive numbers z_i satisfying $\sum_{i=1}^{n} z_i (y_j - a_i)^{-1} = 1$ for $j=1,\ldots,n$.

We have a linear system of n equations in the n unknowns z_i. If its determinant is null then we may find real numbers c_i, not all null, such that $\sum_{i=1}^{n} c_i (y_j - a_i)^{-1} = 0$ for $j=1,\ldots,n$. Let $I = \{ i \mid c_i \neq 0 \}$. The equation $\sum_{i \in I} c_i (y - a_i)^{-1}$, equivalent to one of card I-1 degree, has n distinct roots $y_1,\ldots,y_n$, hence its left member must be null, but this contradicts its behaviour near a_i, where it tends to ∞.

Hence there exists an unique solution (z_i). All z_i are nonnull; otherwise the equation $\sum_{i=1}^{n} z_i (y - a_i)^{-1} = 1$ has less than n terms, is equivalent to one of degree less than n and has n roots $y_1,\ldots,y_n$.

The equation $\sum_{i=1}^{n} z_i (y - a_i)^{-1} = 1$ is equivalent hence to one of degree n. Since it has n different roots $y_1,\ldots,y_n$, all these roots are "simple". In every (a_{i+1}, a_i), $i=0$ with $a_0 = +\infty$ included, it has exactly one root. Hence the limits of its left member at the ends of every such interval, minus 1, cannot be of the same signs. For $i \geqslant 1$ these limits are infinite, one having the sign on z_{i+1}, the other the sign opposite to z_i. Hence all z_i have the same sign. For $i=0$ the limit in a_0 is -1 and in a_1 is infinite, of the sign of z_1, i.e. $z_1 \geqslant 0$ and the desired statement is proved.

We have shown that, for every $\varepsilon_i = \pm 1$, the correspondence $(x_1,\ldots,x_n) \longleftrightarrow (y_1,\ldots,y_n)$ is a bijective one between $\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \varepsilon_i x_i > 0\}$ and $(a_1, +\infty) \times (a_2, a_1) \times \ldots \times (a_n, a_{n-1})$ and it follows easily that it is infinitely derivable, together with its inverse (see a above, the z_i are quotiens of determinants, etc.).

We shall see below in that not all the conclusions in this point b are necessary for the purpose described at the beginning of this section (6).

c. In order to express Δ_x" in "the coordinates y", we calculate the corresponding elements in the formula before a above.

Let us denote $c(y)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2(y-a_i)^{-1}$; we have to take care that c depends also on x_i.

$c(y)-1=0$ leads to $c'(y)y'_{x_i}+2x_i(y-a_i)^{-1}=0$, i.e. to $y'_{x_i}=-(c'(y))^{-1}2x_i(y-a_i)^{-1}$, where $c'(y)=-\sum_{i=1}^{n} x_i^2(y-a_i)^{-2}$ and in each relation y is one of the y_j.

We deduce $\sum_{i=1}^{n}(y'_{x_i})^2=4(c'(y))^{-2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(y-a_i)^{-2}=-4(c'(y))^{-1}$ and, for $j\neq k$, $\sum_{i=1}^{n}(y_j)'_{x_i}(y_k)'_{x_i}=4(c'(y_j)c'(y_k))^{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2((y_j-a_i)(y_k-a_i))^{-1}=$
$4(c'(y_j)c'(y_k)(y_k-y_j))^{-1}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2(y_j-a_i)^{-1}-\sum_{i=1}^{n}x_i^2(y_k-a_i)^{-1})=0$.

At this moment we see that the matrix $2^{-1}(-c'(y))^{-1/2}((y_j)'_{x_i})_{i,j}$ is unitary hence nonsingular. It implies, according to the "implicite functions theorem", that, in a neighborhood of every given (x_i^0), the mapping $(x_1,\dots,x_n)\longrightarrow(y_1,\dots,y_n)$ is a homeomorphism which is infinitely derivable together with its inverse, hence $(y_1,\dots,y_n)$ is a coordinate system in that neighborhood. In this way the use of b above is avoided.

Continuing our calculation, we obtain $y''_{x_i^2}=-2(c'(y))^{-1}(y-a_i)^{-1}+2(c'(y))^{-2}x_i(y-a_i)^{-2}y'_{x_i}+2(c'(y))^{-2}(y-a_i)^{-1}x_i(c''(y)y'_{x_i}-2x_i(y-a_i)^{-2})=$
$-2(c'(y))^{-1}(y-a_i)^{-1}-8(c'(y))^{-2}x_i^2(y-a_i)^{-3}-4(c'(y))^{-3}c''(y)x_i^2(y-a_i)^{-2}$,
where $c''(y)=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2(y-a_i)^{-3}$.

Then $\Delta_x y=-2(c'(y))^{-1}\sum_{i=1}^{n}(y-a_i)^{-1}-4(c'(y))^{-2}c''(y)+4(c'(y))^{-2}c''(y)$,
i.e. $\Delta_x y=-2(c'(y))^{-1}d(y)$, where $d(y)=\sum_{i=1}^{n}(y-a_i)^{-1}$.

Substituting in the formula before a: $\Delta_x u=-2(c'(y))^{-1}(2\Delta_y u+\sum_{i=1}^{n}u'_{y_i}d(y_i))$.

Hence the equation $\Delta_x u=0$ appears, in the system $(y_1,\dots,y_n)$,
as $\sum_{i=1}^{n}(2u''_{y_i^2}+u'_{y_i}d(y_i))=0$.

c. The remarkable fact concerning the equation $\Delta_x u=0$ written above in the coordinates $(y_1,\dots,y_n)$ is the absence of the terms containing $u''_{y_jy_k}$ with $j\neq k$ and the dependence of the coefficients [illegible]

$u''_{y_i^2}, u'_{y_i}$ only on y_i. According to this remark, we find n solutions of this equation, namely $u=v(y_i)$ for every $i=1,2,\dots,n$, where v satisfies $v''(y)+\frac{1}{2}d(y)v'(y)=0$; these solutions depend only on one of the variables y_i.

The first step in solving the equation in v is $\frac{v''}{v'}=-\frac{1}{2}d$, which leads, recalling the definition of d in c above, to $\ln v' = C+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\ln|y-a_i|$ i.e. to $v'=D(\prod_{i=1}^{n}|y-a_i|)^{-1/2}$. This can no more be integrated in elementary functions, generally.

We have obtained n harmonic functions in $\prod_{i=1}^{n}(R\setminus\{0\})$.

set which contains no exterior of an ellipsoid!

e. For $y_0>a_1$ the equation $\sum_{i=1}^{n}x_i^2(y_0-a_i)^{-1}=1$ is that of an ellipsoid. Only y_1 can take values in $(a_1,+\infty)$, so we are particularily interested in the function $v(y_1)$ in d above. But let us remark that whatever be $x_1,\dots,x_n$, not all null, we may write the equation $\sum_{i=1}^{n}x_i^2(y-a_i)^{-1}=1$. If $x_1\neq 0$ then the reasonment in a above shows that it has exactly one solution in $(a_1,+\infty)$. If $x_1=0$ this remains true if and only if $\sum_{i=2}^{n}x_i^2(a_1-a_i)^{-1}>1$. In this case, if $(x_1,\dots,x_n)$ belongs to the above ellipsoid, then $(y_0-a_i)^{-1}<(a_1-a_i)^{-1}$ and and $\sum_{i=2}^{n}x_i^2(a_1-a_i)^{-1}>\sum_{i=2}^{n}x_i^2(y_0-a_i)^{-1}=1$. Hence the function y_1 of $x_1,\dots,x_n$ is defined and infinitely derivable in $(\sum_{i=1}^{n}x_i^2(y_0-a_i)^{-1}>1)$. Since $v(y_1)$ is harmonic in $\prod_{i=1}^{n}(R\setminus\{0\})$, it follows by continuity that

it is harmonic on $(\sum_{i=1}^{n}x_i^2(y_0-a_i)^{-1}>1)$.

Before stating the result, let us remark that the conclusions here concerning y_1, etc. remain true also if $a_1\geqslant a_2\geqslant\dots\geqslant a_n$ (by continuity derivability in $a_2,\dots,a_n$, etc.). y_0 may be diminished a little, etc.. $1=\sum_{i=1}^{n}x_i^2(y_1-a_i)^{-1}\geqslant(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)(y_1-a_n)^{-1}$ hence $y_1\geqslant a_n+\|x\|^2$, shows that y_1 tends to $+\infty$ when $\|x\|\to\infty$. In the case $n\geqslant 3$ the function $\prod_{i=1}^{n}(y-a_i)^{-1/2}$ is integrable in y on a $(b,+\infty)$. We shall change a_i into $-a_i$, take $y_0=0$.

Proposition. Let $n \geq 3$, $a_1,\dots,a_n > 0$ and consider the ellipsoid $E=\{(x_1,\dots,x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_i^{-1} = 1\}$. Then the harmonic function $u(x)$ on $D=\{(x_1,\dots,x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 a_i^{-1} > 1\}$, tending to 0 at ∞ and tending to 1 when $x \to y \in E$, i.e. the probability that the brownian motion starting from $x \in D$ visits E (see 3.a,b) is, if for $x=(x_1,\dots,x_n)$ y is the unique solution of $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 (a_i+y)^{-1} = 1$ belonging to $(0,+\infty)$,

$$u(x)=\left(\int_y^{\infty} \prod_{i=1}^{n}(a_i+z)^{-1/2}dz\right)\left(\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{n}(a_i+z)^{-1/2}dz\right)^{-1}.$$

f. In order to be able to use the proposition in e above for proving that certain sets are visited or not, we estimate the expression of $u(x)$ there.

If $y \geq \max a_i$ then for $z \geq y$ we have $z \leq a_i+z \leq 2z$ hence

$$\int_y^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i+z)\right)^{-1/2}dz=\theta_1\int_y^{\infty} z^{-n/2}dz=\theta_2 y^{-\frac{n}{2}+1} \quad \text{where } \theta_2 \in [c_{n1},c_{n2}],$$

c_{n1},c_{n2} being two positive constants depending only on n.

The semiaxes of E in the proposition in e above are $\sqrt{a_i}$, its diameter is $d=2\max\sqrt{a_i}$.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y^{-1} \geq 1=\sum_{i=1}^{n} x_i^2(a_i+y)^{-1} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2(y+\max a_i)^{-1}, \text{hence } y+\max a_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$\geq y$ and $(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} \geq d$, say, implies $y \geq \max a_i$. Moreover, for $y \geq \max a_i$ we have $y+\max a_i \leq 2y$, etc. The result is:

$n\geq 3$, Corollary. If $E \subset R^n$ is an ellipsoid of semiaxes b_i, $i=1,\dots,n$ and diameter $d=2\max b_i$, then the probability of visiting E, for a brownian motion starting from a point at a distance $r \geq d$ from the center of E, is

$$\theta r^{-n+2}\left(\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{n}(b_i^2+z)^{-1/2}dz\right)^{-1}, \text{ where } \theta \in [c_{n1},c_{n2}],$$

c_{n1},c_{n2} being two positive constants depending only on n (different from those above...).

g. We estimate the "denominator" in the corollary in f above in a special case, suggested at the beginning of this section(6), namely $b_1=b_2=a<b=b_3=\ldots=b_n$.

We have $\int_0^\infty \prod_{i=1}^{n}(z+b_i^2)^{-1/2}dz=\int_0^\infty (z+a^2)^{-1}(z+b^2)^{-\frac{n}{2}+1}dz=$

$b^{-n+2}\int_0^\infty (z+(ab^{-1})^2)^{-1}(z+1)^{-\frac{n}{2}+1}dz$. The integrand is greater than $(z+1)^{-n/2}$ and smaller than $z^{-1}(z+1)^{-\frac{n}{2}+1}$, both being integrable on $[1,+\infty)$, say. On $[0,1]$ $(z+1)^{-(n/2)+1}$ has values in $[2^{-(n/2)+1},1]$;

$$\int_0^1 (z+(ab^{-1})^2)^{-1}dz=\ln(1+(ab^{-1})^2)-\ln((ab^{-1})^2)$$

the first term lying in $0,\ln 2$. We obtain:

Lemma. There exist positive constants d_{n1},d_{n2}, depending only on n, such that, if $0<a<b$, $\int_0^\infty (z+a^2)^{-1}(z+b^2)^{-(n/2)+1}dz=$

$\theta(1+\ln(ba^{-1}))b^{-n+2}$, with $\theta\in[d_{n1},d_{n2}]$.

This lemma has a corollary, obtained by coupling it with the corollary in f above.

h. Proposition. Let $f_1:P\to R$, $f_2:P\to R$, where $P=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$, be continuous, with continuous first derivatives with respect to all arguments. Then the set $A=\{(x,f_1(x),f_2(x))|x\in P\}\subset R^{n+2}$ is not visited.

Proof. Let us cover P by n-dimensional cubes with side 2ε. The number of these cubes may be chosen smaller than $c.\varepsilon^{-n}$, c being a certain constant.

Let C be one of the cubes, $y_0=(y_1,\ldots,y_n)$ its center. We intend to cover $(C\times R^2)\cap A$ by an ellipsoid, as small as possible, as in above, i.e. having n equal semiaxes and the other two also equal, but smaller than the others. ε

Let $g_1(x_1,\ldots,x_n)=f_1(y_0)+\sum_{i=1}^{n}(f_1)'_{x_i}(y_0)(x_i-y_i)$ and g_2 be defined in an analogue way.

Let L be the n-dimensional linear variety in R^{n+2} defined as $\{(x,g_1(x),g_2(x))|x\in R^n\}$. For every $u\in L\cap(C\times R^2)$ we have

$\|u-(y_o,f_1(y_o),f_2(y_o))\| \leq k\varepsilon$,where k is a constant depending on n and on $\sup\{|(f_j)'_{x_i}(x)|\,|\,x\in P, i=1,\dots,n; j=1,2\}$.

If $(x,z_1,z_2)\in A\cap(C\times R^2)$ then $\|(x,z_1,z_2)-(x,g_1(x),g_2(x))\|=$ $((f_1(x)-g_1(x))^2+(f_2(x)-g_2(x))^2)^{1/2}$ and, if $x=(x_1,\dots,x_n)$, $|f_1(x)-g_1(x)|$ $=|f_1(x)-f_1(y_o)-(g_1(x)-f_1(y_o))| = |\sum_{i=1}^{n}((f_1)'_{x_i}(\xi)-(f_1)'_{x_i}(y_o))(x_i-y_i)|$ according to Lagrange; an analogue relation is valid for $|f_2(x)-g_2(x)|$, hence $\|(x,z_1,z_2)-(x,g_1(x),g_2(x))\|\leq m\varphi(\varepsilon)\varepsilon$,where m is a constant depending on n, $\varphi(\varepsilon)=\sup\{|(f_j)'_{x_i}(v)-(f_j)'_{x_i}(w)|\,|\,\|v-w\|\leq r\varepsilon; v,w\in P;$ $i=1,\dots,n; j=1,2\}$,r is a constant depending on n. The continuity of the derivatives shows that $\varphi(\varepsilon)\to 0$ for $\varepsilon\to 0$.

The distance from a $(x,z_1,z_2)\in A\cap(C\times R^2)$ to L follows at most $m\varepsilon\varphi(\varepsilon)$ and the corresponding "perpendicular" on L will fall in a point at a distance at most $m\varepsilon\varphi(\varepsilon)+k\varepsilon$ from $(y_o,f_1(y_o),f_2(y_o))$. If $\varphi(\varepsilon)\leq km^{-1}$ (true for $\varepsilon\leq\varepsilon_o$) then an ellipsoid having the center in $(y_o,f_1(y_o),f_2(y_o))$, n semi axes of size $dk\varepsilon$ situated in L and the other two of size $dm\varepsilon\varphi(\varepsilon)$, will cover $A\cap(C\times R^2)$; d is a constant depending on n.

Let now $\varepsilon\leq\varepsilon_o$. Fix a $q\in R^{n+2}$ "sufficiently far" in order that the corollary in f above may be applied to q and the ellipsoids in our proof here. We deduce that the probability that a (n+2)-brownian motion starting from q visits A is smaller than a constant nondepending on ε multiplied by $\varepsilon^{-n}((dk\varepsilon)^{-n}(1+\ln(km^{-1}(\varphi(\varepsilon))^{-1})))^{-1}$, i.e. than a constant multiplied by $(\ln((\varphi(\varepsilon))^{-1}))^{-1}$, which tends to 0 (we have used also the lemma in g above).

7. Examples of $H_A(x,\ )\neq\varepsilon_x$, with $x\in A$ and visited A.

a. We try to find such examples in which $x=(0,0,0)\in R^3$, $A=\{(y_1,y_2,y_3)$ $|\,0\leq y_1\leq 1, (y_2^2+y_3^2)^{1/2}\leq f(y_1)\}$, $f:[0,1]\to R$ is continuous increasing with $f(0)=0$. Let us remark that, according to 1 in the proposition in 1.e5 , if $\underline{\lim}_{y\to 0}\, y^{-1}f(y)>0$ then $H_A(x,\ )=\varepsilon_x$.

We consider a sequence $a_n=c^{-n}$ with $c>1$ and the sets $A_n=$ $A\cap p_1^{-1}([a_n,a_{n-1}])$ and try to show that, if p_n is the probability that A_n is visited by a 3-dimensional brownian motion (x_t) starting from $(0,0,0)$, $\sum_n p_n < \infty$ The Cantelli lemma will imply then that $\inf\{t \mid t>0, x_t \in A\} > 0$ a.s., etc..

A_n is included in an ellipsoid having $(\frac{1}{2}(c^{-n}+c^{-(n-1)}),0,0)$ as center, one semiaxis in the direction Oy_1 of magnitude $\frac{1}{4}(c^{n}+c^{-(n-1)})$ (it is the big one, we take it so in order to apply the corollary in 6 f) and the other two semiaxes of the same length d_n, where d_n must be chosen such that $(c^{-(n-1)}, f(c^{-(n-1)}),0)$ be on the ellipsoid (f is increasing...), i.e. $(\frac{1}{2}(c^{-(n-1)}-c^{-n}))^2(\frac{1}{4}(c^{-n}+c^{-(n-1)}))^{-2}+(f(c^{-(n-1)}))^2 d_n^{-2}=1$.

The first term in the above relation is constant; the relation is possible if and only if this constant is smaller than 1, i.e. $2(c-1)(c+1)^{-1}< 1$, equivalent to $c<3$. In this situation d_n is a

d constant multiplied by $f(c^{-(n-1)})$.

An application of the results in 6 f, g shows that p_n is dominated by a constant multiplied by $(\frac{1}{2}(c^{-n}+c^{-(n-1)}))^{-1}\frac{1}{4}(c^{-(n-1)}+c^{-n})$ and by $(\ln(\frac{1}{4}(c^{-n}+c^{-(n-1)})(f(c^{-(n-1)}).d)^{-1}))^{-1}$. The first factor is constant and, if we suppose that $\lim_{y\to 0} y^{-1}f(y)=0$, the constant factors under ln come out as additive ones and do not influence, i.e. p_n appears smaller than a constant multiplied by $(\ln(c^{-(n-1)}(f(c^{-(n-1)}))^{-1}))^{-1}$.

We may compare the sum majorising $\sum_n p_n$ with an integral if we suppose also that $y^{-1}f(y)$ is increasing, hence $(\ln(y(f(y))^{-1}))^{-1}$ is also increasing.

We integrate with respect to a measure charging every $[c^{-(n-1)}, c^{-(n-2)}]$ by 1, or by a constant; or charging $(a,1]$ by $-\ln a$, i.e. x^{-1} multiplied by the lebesgue measure is good. We obtain:

Proposition. If $f:[0,1]\to R$ is continuous, increasing together with $y \to y^{-1}f(y)$, if $f(0)=0$ and $\lim_{y\to 0} y^{-1}f(y)=0$ and if

$\int_0^\varepsilon y^{-1}(\ln(y/f(y)))^{-1}dy<\infty$ for an $\varepsilon\in(0,1)$ then defining $A\subset R^3$ by $A=\{(y_1,y_2,y_3)|\ 0\le y_1\le 1, y_2^2+y_3^2\le(f(y_1))^2\}$,we have $H_A((0,0,0),\ )\ne\varepsilon_{(0,0,0)}$.

Remarks.1.Of course if $y^{-1}f(y)$ is increasing,f is also increasing.

2.It is easy to give concrete examples of such f .For $(\ln(y/f(y)))^{-1}=y^a, a>0$ we obtain $y/f(y)=e^{y^{-a}}$, $f(y)=ye^{-y^{-a}}$.

3.$D=\overset{o}{A}$ is a domain,$H_{\complement D}((0,0,0),\ )=\varepsilon_{(0,0,0)}$ but $H_{\overline{D}\setminus D}((0,0,0),\ )\ne\varepsilon_{(0,0,0)}$,answering a question in the remark at the end of 3 .

4.If D is a sphere of center $(-\frac{1}{2},0,0)$ and radius 1 from which A was substracted then $\overline{D}\setminus D$ is connected and $H_{\complement D}((0,0,0),\ )\ne\varepsilon_{(0,0,0)}$,$(0,0,0)\in\overline{D}\setminus D$; D is a domain.We shall see below in 7.f that such a situation is impossible in R^2 .

b.Let us consider the case n=2.Namely,let $A\subset S(0,1)\subset R^2$ be a closed set containing (0,0) and let us find a sufficient condition in order that $H_A((0,0),\ )\ne\varepsilon_{(0,0)}$.

If A contains, say, $[0,1]\times\{0\}$ then $H_A((0,0),\ )=\varepsilon_{(0,0)}$ because otherwise the brownian motion starting from (0,0) will not visit $[0,1]\times\{0\}$ in a(random)time interval $(0,\varepsilon)$, the same will be true for $[-1,0]\times\{0\}$ hence for $[-1,1]\times\{0\}$,contrarily to 2 in the proposition in $1.\theta_5$ This shows that examples as that in a above for n=3 do not exist for n=2.

In order to reason as near as possible to a above,let $C_a=[-a,a]\times[-a,a]$ and $A_n=A\cap(C_{c^{-(n-1)}}\setminus\overset{o}{C}_{c^{-n}})$.Let p_n be the probability that the brownian motion starting from (0,0) visits A_n before visiting $\{z|\,\|z\|=r\}$,where $r>1$.

We have $p_n=1-(H_{S\cup A_n}\chi_S)(0)$,where $S=\{z|\,\|z\|=r\}$ .As in the proof in $5\ c_5$,we obtain $(H_{S\cup A_n}\chi_S)(x)\ge u^{A_n}(x)(\sup_S u^{A_n})^{-1}$ for $x\notin A_n$,

$\|x\|<r$. The formula in the proposition at the end of 5, e_7 gives $u^{A_n}(x)=\gamma(A_n)+\lim_{\|z\|\to\infty}(H_{A_n}(\ln\|\;\;-x\|))(z)=\gamma(A_n)+\ln r+\lim_{\|z\|\to\infty}(H_{A_n}(\ln(\|\;\;-x\|r^{-1})))(z)$. For $x\in S, y\in A$ we have $\|y-x\|\in[r-1,r+1]$ hence $\sup_S u^{A_n}\leq\gamma(A_n)+d$ (the main information got from 5. e_7 is that d doesnot depend on n). On the other hand, for $x=(0,0)$ the formula for $u^{A_n}(x)$ shows that $u^{A_n}(0)\geq\gamma(A_n)+\inf\{\ln\|x\|\mid x\in A_n\}=\gamma(A_n)-n\ln c$.

From the obtained inequalities we deduce $p_n\leq 1-\dfrac{\gamma(A_n)-n\ln c}{\gamma(A_n)+d}=(d+(\ln c)n)(\gamma(A_n)+d)^{-1}$.

Let us remark that $\gamma(A_n)\to+\infty$ according to 5 e_8.1,3, hence d does not matter. The result is:

Proposition. If $A\subset R^2$ is closed, included in $S(0,1)$, if $(0,0)\in A$, if $A_n=A\cap(C_{c^{-(n-1)}}\setminus\overset{\circ}{C}_{c^{-n}})$ where C_a is the square $[-a,a]\times[-a,a]$ and $c>$ and if $\sum_n n(\gamma(A_n))^{-1}<\infty$ then $H_A((0,0),\;\;)\neq\varepsilon_{(0,0)}$.

It is easy to give examples of such A, using, for example, $\gamma(S(a,\varepsilon))=\ln(\varepsilon^{-1})$.

c. Multidimensional analogues of the Robin constant.

More precisely, they will be analogues, for $n\geq 3$, of $(\gamma(A))^{-1}$ - see 5, e_4.

The purpose of this generalisation is to enable us to establish a result as in b above in the n-dimensional case, $n\geq 3$. We follow the main steps in 5, e.

c_1. Before defining, in 5 e_4, the Robin constant, we used the result in the corollary in 4 e_1. Its multidimensional analogue is (immediate proof, based on 4 e, etc.):

Lemma. Let u be harmonic on $\complement S(0,a)\subset R^n$, $n\geq 3$, and $\lim_{\|x\|\to\infty}u(x)=0$. Then $\lim_{\|x\|\to\infty}\|x\|^{n-2}u(x)$ exists; it equals $b^{n-2}\int u\,d\sigma$, where σ is the probability on $\{x\mid\|x\|=b\}$ invariant with respect to all linear isometries and $b>a$.

This leads to:

Definition. If $A\subset R^n$ is a bounded closed set, $n\geq 3$, then by the capacity C(A) of A we mean $\lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^{n-2}(H_A 1)(x)$.

As an example, $C(S(0,a))=a^{n-2}$, according to 2.i(b there).

Remark. The expression of the limit, hence of C(A), given in the lemma shows that C(A)=0 is equivalent to the fact that A is not visited.

c_2. We pass directly to the topic in 5.c_7, which proved itself essential in e_8.4 there and in b above. We replace u^A there by 0, $\ln\|x-z\|$ by $\|x-z\|^{-(n-2)}$ and reason in the same way; we give, however, the details.

Let $A\subset R^n$, $n\geq 3$, be closed, bounded, with $H_A(y,\ )=\varepsilon_y$ for all $y\in A$.

For $x\in \complement A$ consider $v(z)=(H_A(\|\ -z\|^{-(n-2)}))(x)=\int\|z-y\|^{-(n-2)}dH_A(x,$. The function v is harmonic on $\complement A$, since $\|\ -y\|^{-(n-2)}$ are so (same reasonment as in 4.d.2,3) and $\lim_{\|z\|\to\infty} v(z)=0$. Of course $v(z,x)=(H_A(\|\ -z\|^{-(n-2)}))(x)$ has the same properties as a function of x .

Consider now $h(x,z)=v(x,z)-v(z,x)=g(z,x)-g(x,z)$ where $g(z,x)=\|z-x\|^{-(n-2)}-v(z,x)$.

$g(z,\ )$ is harmonic on $\complement A\setminus\{z\}$, tends to 0 at ∞ , to $+\infty$ at z and to 0 when its argument tends to a point in A . Hence $g\geq 0$, according to 2.f.

Now $h(\ ,z)$ is harmonic on $\complement A$, tends to 0 at ∞ and when its argument tends to a point of A its upper limit is nonpositive($g(z,\ )$ tends to 0 while $g(\ ,z)\geq 0$). Also 2.f shows $h\leq 0$ and interchanging the variables in h we deduce $h\geq 0$ hence h=0 .

We have obtained the relation $(H_A(\|\ -z\|^{-n+2}))(x)=(H_A(\|\ -x\|^{-n+2}))$ for $x,z\notin A$, where $H_A(y,\ )=\varepsilon_y$ for all $y\in A$. As in 5.d we extend it to general bounded closed A by choosing bounded closed A_k satisfying the above condition, $A_k\supset A_{k+1}$ and $\bigcap_k A_k=A$.

If we multiply the relation by $\|z\|^{-2+n}$ and make $\|z\|\to\infty$, the left member tends to $(H_A 1)(x)$. Hence:

Proposition. If $A\subset R^n, n\geq 3$, is bounded and closed then for $x\notin A$ $(H_A 1)(x)=\lim_{\|z\|\to\infty} \|z\|^{n-2}(H_A(\|\ \ -x\|^{-n+2}))(z)$. Particularily, $C(A)r_1^{-n+2}\leq$ $(H_A 1)(x)\leq C(A)r_2^{-n+2}$, where $r_1=\sup\{\|x-y\| \mid y\in A\}$, $r_2=\inf\{\|x-y\| \mid y\in A\}$.

d. Generalisation of b above to $n\geq 3$.

Proposition. If $A\subset S(0,1)\subset R^n, n\geq 3; 0\in A$, if $A_k=A\cap(C_{c^{-(k-1)}}\setminus \overset{o}{C}_{c^{-k}})$, $c>1$, $C_a=\underbrace{[-a,a]\times\ldots\times[-a,a]}_{n \text{ factors}}$ and if $\sum_k c^{k(n-2)}C(A_k)<\infty$ then $H_A(0,\ \ )\neq\varepsilon_0$.

The proof is even simpler than that in b, since $p_k\leq(c^{-k})^{-n+2}C(A_k)$ follows immediately from c_2 above.

e. A converse to the propositions in b and d.

We reason in the following way. Let (x_t) be a n-dimensional brownian motion starting from 0. Let, as above $C_a=\underbrace{[-a,a]\times\ldots\times[-a,a]}_{n \text{ factors}}$. Let us choose a sequence $a_k\downarrow 0$ and let τ_k be the first visit of (x_t) in $C_{a_k}\setminus \overset{o}{C}_{a_k}$. We have $\tau_k\downarrow 0$ a.s..

Let $B_k\subset C_{a_{k-1}}\setminus\overset{o}{C}_{a_k}$ be closed sets, $B=\{0\}\cup\bigcup_1^\infty B_k$. Let $H_k=\{\omega\mid x_t(\omega)\in B_k$ for a $t\in[\tau_k(\omega),\tau_{k-1}(\omega)]\}$.

If we succeed in proving $P(\bigcap_m\bigcup_{k\geq m}H_k)=1$ then it will follow that $H_B(0,\ \ )=\varepsilon_0$.

However, $(B_k)_{k=1,2,\ldots}$ are not independent, as could be arranged in the case $n=1$ by taking τ_k as the first visit in a_k, etc.. We need hence a generalisation of the Cantelli lemma. Remarking that $M(\chi_A|\mathcal{F})=P(A)$ if A and $\mathcal{F}$ are independent we are led to state:

Generalised Cantelli lemma. If $\{E,\mathcal{K},P\}$ is a probability space, if $\mathcal{F}_n\supset\mathcal{F}_{n+1}$ are borel subfields of $\mathcal{K}$, where $n=0,1,\ldots$, if $A_n\in\mathcal{F}_n$ and if $\sum_{n\geq 0}\inf M(\chi_{A_n}|\mathcal{F}_{n+1})=\infty$ then $P(\bigcap_n\bigcup_{k\geq n}A_k)=1$.

Proof. $P(\bigcap_{k=n}^m \complement A_k)=M(\prod_{k=n}^m\chi_{\complement A_k})=$

$$M(M(\prod_{k=n}^m\chi_{\complement A_k}|\mathcal{F}_{n+1}))=M(\prod_{k=n+1}^m\chi_{\complement A_k}M(\chi_{\complement A_n}|\mathcal{F}_{n+1}))\leq$$

$(1-c_n)M(\prod_{k=n+1}^m\chi_{\complement A_k})\leq\prod_{k=n}^m(1-c_k)$, where $c_k=\inf M(\chi_{A_k}|\mathcal{F}_{k+1})$ and the rest of the proof is identical with that of the Cantelli lemma

c_1. We shall apply the generalised Cantelli lemma to the sequence $\mathcal{F}_{\tau_k}$, where, in the notations in c above, $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(x_s \mid s \le t)$, and to $H_{k+1} \in \mathcal{F}_{\tau_k}$. According to the strong Markov property $M(\chi_{H_k} \mid \mathcal{F}_{\tau_k}) = P_{x_{\tau_k}}(H_k)$, where P_a is the probability corresponding to the n dimensional brownian motion starting from a.

For $a \in C_{a_k} \setminus \mathring{C}_{a_k}$ we have $P_a(H_k) \ge P_a(B_k \text{ is visited}) - P_a(B_k \text{ is visited after } \tau_{k-1})$. Conditioning under P_a in the last term with respect to $\mathcal{F}_{\tau_{k-1}}$ and applying the strong Markov property we obtain $P_a(H_k) \ge P_a(B_k \text{ is visited}) - M_{P_a}(P_{x_{\tau_{k-1}}}(B_k \text{ is visited}))$, for $a \in C_{a_k} \setminus \mathring{C}_{a_k}$.

In order to be able to go on with this estimate, by using c above, etc., we have to introduce (especially for the second term) a supplementary hypothesis. Namely, we consider two sequences $(b_k), (d_k)$, $a_k < b_k < d_k < a_{k-1}$ and suppose that $B_k \subset C_{d_k} \setminus \mathring{C}_{b_k}$.

Recalling a, b above, let us take $a_{n-1}/a_n = b_{n-1}/b_n = d_{n-1}/d_n = d > 1$ (constant).

Then in the case $n \ge 3$, according to c_2 above, we obtain for $a \in C_{a_k} \setminus \mathring{C}_{a_k}$ $P_a(B_k \text{ is visited}) \ge C(B_k)\, m (a_k + d_k)^{-n+2}$ where m is a positive constant depending only on n and for $b \in C_{a_{k-1}} \setminus \mathring{C}_{a_{k-1}}$ $P_b(B_k \text{ is visited}) \le C(B_k)(a_{k-1} - d_k)^{-n+2}$ hence, since $x_{\tau_{k-1}} \in C_{a_{k-1}} \setminus \mathring{C}_{a_{k-1}}$

$$P_a(H_k) \ge C(B_k)\left(m(a_k + d_k)^{-n+2} - (a_{k-1} - d_k)^{-n+2}\right)$$

$$= C(B_k)\, b_k^{-n+2}\left(m\left(\frac{a_1 + d_1}{b_1}\right)^{-n+2} - \left(\frac{da_1 - d_1}{b_1}\right)^{-n+2}\right).$$

We have to ensure that the paranthesis, which does not depend on k, is positive. Once $a_1/b_1, d_1/b_1$ chosen, this is realised by taking a sufficiently great d (of course $d > d_1/a_1$ ...); we deduce, denoting $F_a = C_a \setminus \mathring{C}_a$, that $\inf M(\chi_{H_k} \mid \mathcal{F}_{\tau_k}) \ge \inf_{a \in F_{a_k}} P_a(H_k) \ge s\, C(B_k)\, b_k^{-n+2}$, where $s > 0$ is a constant nondepending on k and on b_1.

We state now the result and complete then its proof.

Proposition. Let $A \subset R^n$ be closed $0 \in A$, $A \subset S(0, 1-\delta)$ with $\delta > 0$; Let

$C_a=\underbrace{[-a,a]\times\ldots\times[-a,a]}_{n \text{ factors}}$, $c>1$ and $A_k=A\cap(C_{c^{-(k-1)}}\setminus\mathring{C}_{c^{-k}})$. Let us suppose if $n\geq 3$ that $\sum_k c(A_k)c^{k(n-2)}=\infty$ while if $n=2$ we suppose that $\sum_k (\gamma(A_k))^{-1}=\infty$. Then $H_A(0,\ )=\varepsilon_0$.

Proof. Let first $n\geq 3$. Let us continue the reasonment above, choosing $d_1/b_1=c$, $a_1/b_1<1$ arbitrary. Then let us choose d as was explained, but of the form $d=c^p$. We try then to take $b_1=c^{-q}$ with $q>1$, hence $b_k=c^{-q-(k-1)p}$, $d_k=c^{-q-(k-1)p+1}$; we take $B_k=A_{q+(k-1)p}$ and it follows that $B\subset A$.

If we show that $H_B(0,\ )=\varepsilon_0$, i.e. that a brownian motion starting from 0 visits B in every time interval $(0,t)$ a.s., the same will follow true for A and the proposition will be proved, for $n\geq 3$.

According to the generalised Cantelli lemma (in e above) and the last inequalit before the statement of our proposition, we have to prove that q may be chosen such that $\sum_k c(B_k)b_k^{-k+2}=\sum_k c(A_{q+(k-1)p})c^{(q+(k-1)p)(n-2)}$ be infinite. But the sum with respect to q, from 1 to p, of this quantity equals the corresponding sum in the statement, ~~xxxxxxx~~ etc..

Let now $n=2$. The condition involving δ (and ζ. e$_3$.1) eliminates the possibility that $\gamma(A_n)=0$ for some n.

Let $r>1$, $S=\{x \mid \|x\|=r\}$. The reasonment is the same as for $n\geq 3$, with the following differences.

We write $P_a(H_k)\geq P_a(B_k$ is visited before $S)-P_a(B_k$ is visited after τ_{k-1} but before $S)$, etc..

Instead of c_2 above we use the method in b, but with estimates als in the opposite sense, namely $P_a(B_k$ is visited before $S)\geq 1-$

$u^{B_k}(a)(\inf_S u^{B_k})^{-1}\geq 1-(\gamma(B_k)+\sup_{x\in B_k}\ln\|x-a\|)(\gamma(B_k)+\inf\{\ln\|x-y\| \mid x\in B_k, y\in S\}$

$\geq 1-(\gamma(B_k)+\ln(m(a_k+d_k)))(\gamma(B_k)+\ln(r-1\cancel{))^{-1}\geq}$

$(\ln(r-1)-\ln(m(a_1+d_1))+(k-1)\ln d)(\gamma(B_k)+\ln(r-1))^{-1}$ for $a\in C_{a_k}\setminus\mathring{C}_{a_k}$

and, for $b\in C_{a_{k-1}}\setminus\mathring{C}_{a_{k-1}}$, $P_b(B_k$ is visited before $S)\leq$

$(\ln(r+1)-\ln(da_1-d_1)+(k-1)\ln d)(\gamma(B_k)+\ln(r+1))^{-1}$. We deduce $P_a(H_k) \geq$ $(\gamma(B_k)+\ln(r-1))^{-1}(\gamma(B_k)+\ln(r+1))^{-1}(r_1+r_2\gamma(B_k)+r_3(k-1))$, where $a \in C_{a_k} \setminus \overset{o}{C}_{a_k}$, $r_3=\ln d(\ln(r+1)-\ln(r-1))>0$, $r_2=\ln(r-1)-\ln(r+1)-\ln(m(a_1b_1^{-1}+d_1b_1^{-1}))+\ln(da_1b_1^{-1}-d_1b_1^{-1})$ may be made positive by choosing a sufficiently great d and the value of r_1 is not important (it does not depend on k). Since $\gamma(B_k)\geq\gamma(S(0,d_k))=\ln(d_k^{-1})=(k-1)\ln d+\ln d_1^{-1}$ ~~sxly~~ the terms $r_1, r_3(k-1), \ln(r-1), \ln(r+1)$ are not important and we arrive easily to the desired conclusion, without having the possibility to improve it.

Remark. In the case $n\geq 3$ we obtained a complete converse to our previous result in d (together they constitute "the Wiener's test"). This is not the case for n=2.

f. An application in the case n=2.

Lemma. $\gamma(A)$, when A runs over all ~~closed~~ connected subsets of R^2 of diameter 1, is bounded.

Proof. Considering R^2 as the set of complex numbers, we may suppose $\{-1/2,1/2\}\subset A\subset S(0,1)$. Hence (5.e$_8$.1) $\gamma(A)\geq\gamma(S(0,1))=0$.

According to 5.e$_3$, e$_4$, $\gamma(A)$ remains the same if we replace A by the complementary of the unbounded connected component of $\complement A$.

We shall construct a function $u\geq 0$, harmonic on $\complement A$, bounded on every $S(0,a)\setminus A$ and such that $u(x)-\ln\|x\|$ is bounded on a $\complement S(0,a)$. It will follow that $\gamma(A)\leq \lim\limits_{\|x\|\to\infty}(u(x)-\ln\|x\|)$; see also 5.e$_3$, e$_4$. This function will be constructed by using the method in 4.g, i.e. as $v\circ f$ with a harmonic v and an analytic f, etc..

Since A is connected and contains -1/2 and 1/2, etc., there exists a function f, analytic on $\complement A$ such that $(f(z))^2=\frac{z-1/2}{z+1/2}$, $\lim\limits_{\|z\|\to\infty} f(z)=1$ (t[...] function is defined by continuity on arcs starting "from ∞" and nonmeeting A and two such arcs constituting a simple closed curve cannot contain exactly one of the points -1/2, 1/2 in the interior of that curve, etc.). If $z_1, z_2\in\complement A$, $f(z_1)=f(z_2)$ or $f(z_1)=-f(z_2)$

then $(z_1-1/2)(z_1+1/2)^{-1}=(z_2-1/2)(z_2+1/2)^{-1}$ hence $z_1=z_2$ and the case $f(z_1)=-f(z_2)$ is impossible since $f(z)=0$ requires $z=1/2\in A$.

Let us denote $D_1=f(\complement A)$, $D_2=(-f)(\complement A)$. It follows from the above that $D_1\cap D_2=\emptyset$; D_1 and D_2 are domains. Whatever be A, D_1 contains the open set $f(\complement S(0,1))$ which contains a $S(1,b)\setminus\{1\}$ with $b>0$ and D_2 contains $-f(\complement S(0,1))$ which contains $(-S(1,b))\setminus\{-1\}$; the last set is hence entirely outside D_1.

We shall choose an $u=v\circ f$ good for all A, with $v(z)=c(\ln\left\|\frac{z+1}{z-1}\right\|-d)$, $d=\inf\left\{\left\|\frac{z+1}{z-1}\right\| \;\middle|\; \|z+1\|\geq b\right\}$ and $c>0$. All the conditions are satisfied in what concerns u except possibly that relative to its behaviour at infinite.

When $\|z\|\to\infty$, $f(z)\to 1$ and $u(z)+c\ln\|f(z)-1\|$ is bounded. Since $(\sqrt{z}-1)(z-1)^{-1}\to 1/2$ when $z\to 1$, etc., $u(z)+c\ln\left\|\frac{z-1/2}{z+1/2}-1\right\|$ is bounded when $\|z\|\to\infty$. Finally $u(z)-c\ln\|z\|$ follows bounded for $\|z\|\to\infty$, i.e. we have to take $c=1$ in order to obtain the desired u, q.e.d.

Proposition. If $A\subset R^2$ is closed, $x\in A$ and if the connected component B of A, containing x, is not reduced to $\{x\}$ then $H_A(x,\ \cdot\ )=\varepsilon_x$.

Proof. Let $x=0$, let $c>1$. $B\cap(C_{c^{-n_0}}\setminus \overset{o}{C}_{c^{-n_0}})$ will be nonvoid for a certain n_0 and it will be also nonvoid for all $n>n_0$ (instead of n_0). For $n>n_0$ $A_n=A\cap(C_{c^{-(n-1)}}\setminus\overset{o}{C}_{c^{-n}})$ will contain a closed connected set B_n of diameter greater than $c^{-(n-1)}-c^{-n}=c^{-n}(c-1)$, hence(5.e8 1 and 3) $\gamma(A_n)\leq\gamma(B_n)\leq m-\ln(c^{-n}(c-1))=m_1+n\ln c$, where m is the upper bound in the above lemma. The proposition in e_1 above, for n=2, finishes the proof since $\sum(\gamma(A_k))^{-1}\geq\sum(m_1+n\ln c)^{-1}=$.

g. More about the example in a above.

g_1. Let us consider exactly the situation in a . The set A_n there contains an ellipsoid with the Oy_1 semiaxis of size $\frac{1}{2}(c^{-(n-1)}-c^{-n})$, with the other two semiaxes equal to $f(c^{-n})$ and with the center in $(\frac{1}{2}(c^{-n}+c^{-(n-1)}),0,0)$. The capacity of this ellipsoid is, according to the proposition in 6.e, to c_1 above and to the lemma in 6.g greater than a constant multiplied by the big semiaxis $\frac{1}{2}(c^{-(n-1)}-c^{-n}$

and divided by 1 plus the logarithm of the ratio of the big and the small semiaxes(we supposed that $y^{-1}f(y)\to 0$ for $y\to 0$ hence this ratio tends to ∞ and the big semiaxis is indeed the indicated one). Preparing an application of the proposition in e_1 above, for $n=3$, we remark that $\sum_k C(A_k)c^k \geq d_1 \sum_k (\ln(dc^{-k}(f(c^{-k}))^{-1}))^{-1}$ with positive constants d, d_1.

Exactly as in the last reasonment before the proposition in a above we arrive to:

Proposition. If $f:[0,1]\to R$ is continuous, increasing together with $y\to y^{-1}f(y)$, if $f(0)=0$ and $\lim_{y\to 0} y^{-1}f(y)=0$ and if $\int_0^{\varepsilon} y^{-1}(\ln(y/f(y)))^{-1}dy=\infty$ for every $\varepsilon>0$ then $H_A(0,\ )=\varepsilon_0$ where $A=\{(y_1,y_2,y_3)\,|\,0\leq y_1\leq 1, y_2^2+y_3^2\leq (f(y_1))^2\}$.

Remark. We may prove the above proposition directly, using the reasonment in e above(and the results in 6)with the ellipsoids described here; only the constant d in e above has perhaps to be taken greater ... .

g_2. The situation in a above may be considered in R^n with $n\geq 4$. We begin with a lemma analogue to that in 6. g about an ellipsoid with one big and (n-1) small semiaxes. This means an estimation of $\int_0^\infty (z+b^2)^{-1/2}(z+a^2)^{-(n-1)/2}dz$ with $0<a<b$. The change of variable $z=b^2z'$ transforms it into $b^{-n+2}(\theta_1+\theta_2\int_0^1 (z+a^2b^{-2})^{-(n-1)/2}dz)$, where θ_1, θ_2 belong to an interval $[d_{n1}, d_{n2}]$, in which the ends are positive constants depending only on n. Performing the integration supposing $n\geq 3$

we arrive to(we state also a result implicite in the argument in g_1 above):

Lemma. 1. If $n\geq 3$ and $A\subset R^n$ is the ellipsoid $\{(x_1,\dots,x_n)\,|\,\sum_{i=1}^n x_i^2a_i^2=1\}$ then $C(A)=2(n-2)^{-1}\left(\int_0^\infty \prod_{i=1}^n (z+a_i^2)^{-1/2}dz\right)^{-1}$.

2. If $n \geq 4$, $a_1 = \ldots = a_{n-1} = a < b = a_n$ then $C(A) = \theta\, b^{n-2}(1+(b/a)^{n-3})^{-1}$ with $\theta \in [d_{n1}, d_{n2}]$, d_{n1} and d_{n2} being positive constants depending only on n.

(1 is a consequence of the proposition in 6, e; in what concerns 2 it appears at the first look that we have to substract a constant from θ_1 and the difference may be negative, but the result will be true for b/a greater then a constant r, while for b/a $\leq$ r ~~xxxxxxxxxx xxxxxxxxxx~~ $\theta_1 + \theta_2 \int_0^1 \ldots \geq \theta_1$, etc.).

We may repeat the arguments in a and in g_1 above, for $n \geq 4$, using this estimate. Since $y^{-1} f(y) \to 0$ for $y \to 0$, 1 in the paranthesis does not influence. We arrive to $\sum_k (f(c^{-k})/c^{-k})^{n-3}$ and then to an integral exactly as before the proposition in a. The result is:

Proposition. Let $f: [0,1] \to R$ be continuous, increasing together with $y \to y^{-1} f(y)$; let $f(0)=0$ and $\lim_{y\to 0} y^{-1} f(y) = 0$.

Let $n \geq 4$ and $A = \{(y_1, \ldots, y_n) \mid y_1 \in [0,1], y_2^2 + \ldots + y_n^2 \leq (f(y_1))^2\}$.

Then $H_A(0, \ \ ) = \varepsilon_0$ if and only if, for every $\delta > 0$,

$$\int_0^{\delta} (f(y)/y)^{n-3} y^{-1}\, dy = \infty .$$

Remark. The sets A in the propositions above (and those in a) are "thorn shaped".

ON HUNT's (B) HYPOTHESIS

Gheorghe Răuţu

Let X be any Hunt process on the l.c.c.b. space E, with semigroup P_t; $t \geq 0$. Hunt introduced the well known supplementary hypothesis

(B) $P_G^\alpha P_A^\alpha = P_A^\alpha$ for every $\alpha > 0$, open set G and Borel subset A of G.

It is known that (B) is equivalent with each of the following

(i) $P^x(T_G < \infty, X_{T_G} \in A) = 0$; $x \in E$ for every open G and semipolar Borel subset A of it.

(ii) $P^x(\exists t > 0, X_t \neq X_{t-}, X_t \in A) = 0$; $x \in E$, A semipolar set.

We shall prove that (B) is also equivalent with

(iii) $(T_A < \infty) \subseteq (\lim_{t \uparrow T_A} \phi_A(X_t) = 1)$ P^x-a.s.; $x \in E$ for every very thin Borel set A.

(Here $t \uparrow T_A$ means $t \to T_A$, $t < T_A$ and $\phi_A(x) = E^x(e^{-T_A})$; $x \in E$.)

Proof (ii) $\Rightarrow$ (iii) Let A and x as in (iii). It follows from (ii) that T_A is predictable on the probability filtration (Ω, F, F_t, P^x) and then consider T_n; $n \geq 1$ predicting it. Using a well known lemma due to Hunt, we obtain

$$(T_A < \infty) \subseteq (\lim_{n\to\infty} \phi_A(X_{T_n}) = 1) \quad P^x\text{-a.s.}$$

and therefore (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Let us consider the supermartingale $e^{-t}\phi_A(X_t)$ and the increasing sequence of stopping times $T_n;\ n \geq 1$ defined by

$$T_n = \inf\{t : t > 0,\ \phi_A(X_t) > 1 - 1/n\};\ n \geq 1.$$

We have from the fact that A is very thin and from (iii)

$$(T_A < \infty) \subseteq \bigcap_n (T_n < T_A) \quad P^x\text{-a.s.};\ x \in E.$$

We are now going to prove that $T_n \uparrow T_A$ on $(T_A < \infty)$ P^x-a.s.; $x \in E$

To this end fixe $x \in E$ and $S = \lim_{n\to\infty} T_n$. We have

$$\lim_{n\to\infty} e^{-T_n} \phi_A(X_{T_n}) \chi_{\bigcap_n (T_n < \infty)} = e^{-S} \chi_{\bigcap_n (T_n < \infty)}$$

because ϕ is finely continuous. But

$$\lim_{n\to\infty} E^x(e^{-T_n} \phi_A(X_{T_n}) \chi_{(T_n < \infty)}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} E^x(e^{-T_n} e^{-(T_A - T_n)} \chi_{(T_n < \infty)}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} E^x(e^{-T_A} \chi_{(T_n < \infty)})$$ and therefore

$$E^x(e^{-S} \chi_{\bigcap_n (T_n < \infty)}) = E^x(e^{-T_A} \chi_{\bigcap_n (T_n < \infty)})$$ that is $S = T_A$

P^x-a.s. Therefore T_A is predictable and using the well known Meyer's teorem on predictability, we get (ii).

Center for Math. Statistics,
str. Stirbey Voda no. 174,
77104, Bucharest.

O PROPRIETATE DE DIHOTOMIE PENTRU TRAIECTORIILE MISCARII BROWNIENE UNIDIMENSIONALE

de

L.Stoica

INTRODUCERE

Clasa mulţimilor semipolare a apărut natural ca o clasă de mulţimi neglijabile în teoria potenţialului. In cazul teoriei clasice în R^n, $n>1$, care probabilistic este descrisă prin mişcarea browniană se ştie că mulţimile semipolare coincid cu cele polare. Mulţimile semipolare care nu sînt polare apar însă în cazul procesului care are ca generator infinitesimal ecuaţia căldurii. Acest proces, denumit proces caloric, poate fi descris prin intermediul mişcării browniene astfel: fie $X=(X_t)$ mişcarea browniană în R^n, atunci procesul $\hat{X}=(t,X_t)$ cu valori în $R\times R^n$ este procesul caloric. O mulţime de forma $\{a\}\times R^n$, $a\in R$, este evident efilată pentru $\hat{X}$ si nu este polară. Rezultă că pentru orice mulţime numărabilă N inclusă în R, mulţimea $N\times R^n$ va fi semipolară şi nepolară. Se pare că în afara exemplelor de acest tip simplu, nu se ştiu alte exemple mai complicate de mulţimi semipolare şi nepolare. La o primă vedere, autorului i-s-a părut că în cazul unidimensional (n=1) mulţimile incluse în $R\times\{0\}$ ar putea fi interesante din acest punct de vedere. Dar s-a dovedit că nu este aşa. Anume în lucrarea de faţă se dovedeşte că mulţimile semipolare incluse în $R\times\{0\}$ sînt polare (Teorema 5). Metoda de demonstraţie este cea clasică, trecînd prin"principiul continuităţii". Acelaşi rezultat a fost obţinut independent şi de Ivan Netuka din Praga (comunicare personală).

Din acest fapt se deduce următoarea proprietate a mişcării browniene unidimensionale (vezi Corolarul 6 în text): fiind dată o mulţime boreliană M inclusă în axa timpilor strict pozitivi, $M \subset (0,\infty)$, atunci traiectoriile care pleacă din origine se împart în două: unele nu vizitează originea la momente de timp din M, iar altele vizitează originea la o infinitate nenumărabilă de timpi din M; cele care vizitează originea la o mulţimea nevidă dar cel mult numărabilă de timpi din M, formează o mulţime de probabilitate zero.

Rezultate principale

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ mişcarea browniană pe dreapta reală R. Cu ajutorul acestui proces construim procesul caloric în în mod canonic. Aceasta pentru ca din proprietăţile procesului caloric să tragem direct concluzii pentru mişcarea Browniană. Punem $\hat{\Omega} = R \times \Omega$, $\hat{X}_t(a,\omega) = (t+a, X_t(\omega))$, $\hat{\theta}_t(a,\omega) = (a+t, \theta_t(\omega))$ pentru $(a,\omega) \in \hat{\Omega}$ şi definim $\hat{P}^{(a,x)} = \varepsilon_a \otimes P^x$ pe $\mathcal{B}(R) \otimes \mathcal{F}$. Apoi construim $\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}_t$ prin completarea filtraţiei canonice şi luînd limitele la dreapta. Obţinem procesul Mrkov cu traiectorii continue $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}_t, \hat{X}_t, \hat{\theta}_t, P^x)$. Semigrupul asociat acestui proces este definit de

$$\hat{P}_u f(a,x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-(x-y)^2/2u} f(a+u, y)\, dy$$

Rezolventa se calculează atunic, obţinînd

$$\hat{V}_\alpha f(a,x) = \iint G^\alpha(a,x,b,y) f(b,y)\, db\, dy \quad \alpha \geq 0$$

unde $$G^\alpha(a,x,b,y) = \begin{cases} e^{-\alpha(b-a)} \frac{1}{\sqrt{2\pi(b-a)}} e^{-(y-x)^2/2(b-a)} & \text{, pentru } b>a \\ 0 & \text{, pentru } b \leq a \end{cases}$$

Prin calcul direct se verifică că rezolventa $(\hat{V}_\alpha)$ este tare Feller: anume dacă $f \in \mathcal{B}_b(R^2)$ atunci $\hat{V}_\alpha f \in \mathcal{C}_b(R^2)$, $\alpha > 0$, iar dacă în plus suportul lui f este compact atunci $\hat{V}_\alpha f \in \mathcal{C}_0(R^2)$, $\alpha \geq 0$.

Prin calcul direct se vede și faptul că funcția $(a,x) \longrightarrow G^0(a,x,b,y)$ este excesivă pentru fiecare punct (b,y). Vom nota $G^0 = G$.

Fie $\mathcal{M}^1$ familia măsurilor Radon cu suport compact și pozitive pe dreapta reală. Utilizînd identificarea lui R cu $R \times \{0\}$ și prin abuz de limbaj vom identifica $\mathcal{M}^1$ cu familia măsurilor Radon pozitive din plan, care au suportul compact și inclus în $R \times \{0\}$. Pentru o măsură $\mu \in \mathcal{M}^1$ vom defini $G_\mu : R^2 \longrightarrow [0,\infty]$ prin

$$G_\mu(a,x) = \int G(a,x,b,0)\,\mu(db).$$

Se observă imediat că dacă funcția G_μ este local mărginită, atunci măsura μ este difuză. De asemenea se constată că G_μ este excesivă.

Următoarea propoziție este cheia pentru aplicarea metodelor cunoscute în teoria clasică a potențialului.

<u>Propoziția 1</u>

Fie $\mu \in \mathcal{M}^1$ o măsură difuză și fie K o constantă astfel ca $G_\mu \leq K$ pe supp μ. Atunci $G_\mu \leq K$ peste tot.

<u>Demonstrație</u>

Din inegalitatea $G(s,x,t,0) \leq G(s,0,t,0)$ rezultă prin integrare $G_\mu(s,x) \leq G_\mu(s,0)$.

Rămîne să examinăm situația pe mulțimea $R \times \{0\}$.

Fie $s \in R$ astfel ca $(s,0) \notin$ supp μ. Considerăm atunci segmentul maximal din $R \times \{0\}$ care conține pe s și nu intersectează supp μ.

Fie $(a,b) \times \{0\}$ acest segment. Numerele a, b sînt definite de proprietățile

$(a,0),(b,0) \in \operatorname{supp}\mu$, $a < s < b$, $(a,b)\times\{0\} \cap \operatorname{supp}\mu = \phi$.

Tinînd cont de expresia funcției G și de faptul că $\mu(\{b\}) = 0$, rezultă,

$$G_\mu(s,0) = \int_{(b,\infty)} G(s,0,t,0)\,\mu(dt) .$$

Dar $G(s,0,t,0) \leq G(b,0,t,0)$ pentru orice $t > b$, de unde $G_\mu(s,0) \leq$ $\leq G_\mu(b,0) \leq K$. Si cu aceasta demonstrația este încheiată.

In continuare vom adapta unele raționamente clasice (Vezi Teoremele 1.7-1.9 în [3] sau Teormele 9.1.1, 9.2.1 din [2]).

Propoziția 2

Fie $\mu \in \mathcal{M}^1$, difuză și finită astfel ca funcția G_μ restricționată la suppμ să fie continuă. Atunci G_μ este continuă peste tot.

Demonstrație

Dacă $(a,x) \notin \operatorname{supp}\mu$ este clar din expresia lui G că funcția G este continuă într-un astfel de punct. Rămîne de studiat continuitatea în punctele lui suppμ. Fie $(a,0) \in \operatorname{supp}\mu$. Pentru $\varepsilon > 0$ notăm cu μ_ε măsura $\chi_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\times\{0\}}\cdot\mu$. Avem $G_\mu = G_{\mu_\varepsilon} + G_{(\mu-\mu_\varepsilon)}$. Fiecare din funcțiile G_{μ_ε} și $G_{(\mu-\mu_\varepsilon)}$ sînt inferior semicontinue iar suma lor are restricția la suppμ continuă din ipoteză. Rezultă că ambele funcții trebuie să aibă restricții continue. Deoarece μ este difuză rezultă că $\mu_\varepsilon \downarrow 0$ și deci $G_{\mu_\varepsilon}(x) \downarrow 0$, pentru orice $x \in R^2$ (când $\varepsilon \searrow 0$). Din teorema lui Dini rezultă că pe suppμ convergența este uniformă și din propoziția anterioară rezultă că funcțiile G_{μ_ε} tind la zero uniform pe R^2. Dar punctul (a,0) nu aparține lui supp $(\mu - \mu_\varepsilon)$ și rezultă că $G_{(\mu-\mu_\varepsilon)}$ este continuă în acest punct pentru orice $\varepsilon > 0$. Cum aceste funcții aproximează uniform pe G_μ

rezultă că această funcție este continuă în (a,0) și propoziția este demonstrată.

Propoziția 3

Fie $\mu \in \mathcal{M}^1$ astfel ca G_μ să fie mărginită. Atunci μ se poate scrie ca o serie $\mu = \sum \mu_n$, cu $\mu_n \in \mathcal{M}^1$, astfel ca G_{μ_n} să fie continuă pentru orice $n \in N$.

Demonstrație

Vom aplica mai întîi teorema lui Lusin pentru a găsi un șir de mulțimi compacte (K_n) astfel ca $K_n \subset \operatorname{supp}\mu$, $K_n \cap K_m = \phi$ pentru $m \neq n$, restricția funcției G_μ la fiecare compact K_n este continuă, și $\mu(C \bigcup_n K_n) = 0$. Definim $\mu_n = \chi_{K_n} \cdot \mu$ și vom avea imediat relația $\mu = \sum \mu_n$. Pentru n fixat vom avea $G_\mu = G_{\mu_n} + G_{\mu - \mu_n}$ și la fel ca în demonstrația propoziției anterioare din faptul că G_μ are restricția continuă pe K_n vom deduce că G_{μ_n} are de asemenea restricția continuă pe K_n. Aplicînd propoziția anterioară se deduce că G_{μ_n} este continuă peste tot și demonstrația este încheiată.

Corolar 4

Dacă $\mu \in \mathcal{M}^1$ este astfel ca funcția G_μ să fie mărginită rezultă existența unei funcționale aditive continue (A_t) pentru $\hat{X}$ astfel ca

$G_\mu(z) = \hat{E}^z[A_\infty]$, pentru orice $z \in R^2$.

Demonstrație

Aplicînd propoziția anterioară scriem $G_\mu = \sum_n G_{\mu_n}$, unde fiecare termen, G_{μ_n}, al seriei este o funcție excesivă continuă. De asemenea se poate constata că $G_{\mu_n}(t,x) = 0$ dacă $t > \max\{s \mid s \in \operatorname{supp}\mu\}$ și ceea ce are drept consecință faptul că G_{μ_n} este un potențial regulat și

atunci se reprezintă cu un CAF $A^n = (A^n_t)$: $G_{\mu_n}(z) = \hat{E}^z[A^n_\infty]$.
(Vezi Teorema 3.13 din Cap. IV [1]). Luînd $A = \sum A_n$ obținem funcționala căutată.

Teorema 5

Orice mulțime semipolară inclusă în $R \times \{0\}$ este polară.

Demonstrație

Dacă demonstrăm că toate submulțimile compacte ale lui M sînt polare rezultă și M polară. De aceea vom presupune de la început că M este compactă.

Aplicînd Teorema 9 de la pag. 66 din [4] rezultă că funcția $P_M 1$ se reprezintă cu o măsură μ avînd suportul în M.

Deci $\mu \in \mathcal{M}^1$ și $P_M 1 = G_\mu$. Din Teorema 6 de la pag.65 din [4] rezultă

$P_D G_\mu = G_\mu$ pentru orice deschis D

care conține suppμ . (Acest lucru se poate vedea și direct ținînd cont că procesul este continuu). Din corolarul anterior avem o funcțională (A_t) astfel ca $G_\mu(z) = \hat{E}^z[A_\infty]$. Din relația anterioară rezultă că suportul fin al acestei funcționale este inclus în fiecare mulțime $\overline{D}$, de unde tragem concluzia că acest suport fin este inclus în M. Dar mulțimea M fiind semipolară nu poate conține o mulțime regulată. Deci funcționala aditivă trebuie să fie nulă și atunci $P_M 1=0$, ceea ce demonstrează teorema.

Corolar 6

Dacă M este o mulțime boreliană inclusă în $(0,\infty)$, iar $(\Omega, \mathcal{F}, P^0, X_t)$ este procesul mișcării browniene care pleacă din origine, atunci

$$P^0(\{\omega \in \Omega \,/\, 0 < \#\{t \in M \,/\, X_t(\omega) = 0\} \leq \aleph_0\}) = 0$$

unde semnul $\#$ desemnează cardinalul mulțimii din dreapta, iar $\aleph_0$ este cardinalul numerelor naturale.

Demonstrație.

Vom nota $M'=M\times\{0\}$ și $T=\inf\{t>0 \,/\, \hat{X}_t\in M'\}$.

Este clar că dacă $\omega\in\Omega$ și $T(0,\omega)=\infty$ atunci mulțimea $\{t\in M \,/\, X_t(\omega)=0\}$ este vidă.

Rămîne de cercetat mulțimea $\{T<\infty\}$. Din teorema de aproximare din interior vom avea un șir crescător de compacți incluși în M' astfel ca $T_{K_n}\downarrow T$ a.s. . Pentru o mulțime compactă $K\subset R\times\{0\}$, mulțimea $K\setminus K^r$ fiind semipolară, din teorema anterioară) rezultă a fi chiar polară deci $K^{rr}=K^r$ și $T_K=T_{K^r}$. Mulțimea K^r rezultă atunci regulată și T_K coincide cu timpul de penetrație. Acum dacă $T_K(0,\omega)<\infty$, rezultă că mulțimea $\{t \,/\, \hat{X}_t(0,\omega)\in K\}$ este nenumărabilă. Din relația $\{T<\infty\}=\bigcup_n\{T_{K_n}<\infty\}$ rezultă proprietatea afirmată în enunț.

Subordinatorul asociat timpului local

In continuare vom face unele considerații cu caracter mai general, pe care le vom particulariza apoi la studiul procesului invers timpului local al mișcării browniene. Fie $Y=(W,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,Y_t,\theta_t,P^x)$ un proces standard cu spațiul stărilor E. Fie $A=(A_t)$ o funcțională aditivă continuă și F suportul fin al ei iar $R=\inf\{t\geq 0/A_t>0\}$. Vom nota cu $\tau(t)$ procesul invers lui A, definit prin $\tau(t)=\inf\{s>0/A_s>t\}$ și notăm cu $Z=(Z_t)$ procesul schimbat de timp $Z_t=Y_{\tau(t)}$. Avem $A_{\tau(t)}=t$.

Vom mai face ipoteza că F este o mulțime închisă astfel ca procesul $Z=(W,\mathcal{F},\mathcal{F}_{\tau(t)},Z_t,\theta_{\tau t},P^x)$ să fie un proces standard ([1] Propoziția 4.11 cap. V). Dacă $B\subset F$ este o mulțime aproape boreliană vom nota

$$T_B=\inf\{t>0/Y_t\in B\} \quad \text{și} \quad S_B=\inf\{t>0/Z_t\in B\}$$

Se constată imediat că $T_B\leq\tau(S_B)$. Să luăm acum un compact $K\subset B$. Atunci

$Y_{T_K} \in KCF$ pe $\{T_K < \infty\}$, de unde

$$E^x[R \circ \theta_{T_K}\, ;\, T_K < \infty] = E^x[E^{Y(T_K)}[R>0]; T_K < \infty] = 0, (\forall) K \in E.$$

Avem deci $R \circ \theta_{T_K} = 0$, ceea ce implică $\tau(A_{T_K}) = T_K$ pe $\{T_K < \infty\}$. Imediat rezultă $S_K \leq A_{T_K}$ și aplicînd τ avem $\tau(S_K) \leq T_K$. Așa cum am menționat mai sus (pentru B) inegalitatea contrară este imediată și avem $\tau(S_K) = T_K$. Deducem

$$T_B \leq \tau(S_B) \leq \tau(S_K) = T_K \quad .$$

Alegînd un șir de compacți (K_n) astfel ca $T_{K_n} \searrow T_B$, rezultă $T_B = \tau(S_B)$.

Remarcă. In calculul anterior am lucrat neriguros. Pentru corectitudine ar trebui să mai precizăm că $A_\infty = \lim_{t \to \infty} A_t$, $\tau(\infty) = \infty$, să reamintim convenția $\inf \emptyset = \infty$ și să precizăm că am lucrat aproape sigur.

Propoziția 7

a) Mulțimea B este Y-polară dacă și numai dacă este Z-polară.

b) Mulțimea B este Y-efilată în punctul x din F dacă și numai dacă este Z-efilată în x.

c) Mulțimea B este Y semipolară dacă și numai dacă este Z semipolară.

Demonstrație

Punctul a) rezultă imediat din relația $T_B = \tau(S_B)$. Pentru a demonstra punctul b) aplicăm A peste relația anterioară și obținem $A(T_B) = S_B$. Atunci avem că relația

$$E^x[S_B > 0] = 1$$

este echivalentă cu relația,

$$E^x[A_{T_B} > 0] = 1$$

și mai departe ținînd cont că x este în suportul fin al lui A aceasta este echivalnetă cu

$$E^x[T_B > 0] = 1 .$$

Punctul c) rezultă din b).

Să aplicăm acest rezultat la czaul procesului $\hat{X}$ din secțiunea anterioară. Vom considera $L=(L_t)$ timpul local al mișcării browniene X în 0 și vom construi funcționala aditivă $A=(A_t)$ pentru $\hat{X}$ în felul următor $A_t(a,\omega)=L_t(\omega)$. Se verifică imediat că A este un CAF al cărui suport fin este $R\times\{0\}$. Dacă notăm $\alpha(t)=\inf\{s/L_s > t\}$, inversul lui L, atunci inversul lui A va fi $\tau_t(a,\omega)=\alpha_t(\omega)$. Procesul cu timp schimbat va fi $\hat{X}_{\tau(t)}(a,\omega)=(\alpha_t(\omega),0)$.

Se știe că sub probabilitatea P^0 a mișcării browniene care pleacă din origine procesul (α_t) este un proces cu creșteri independente și crescător, adică un subordinator. Din Teorema 5 și propoziția anterioară rezultă următorul corolar

<u>Corolar 8</u>

Pentru subordinatorul (α_t) mulțimile semipolare sînt polare.

Acest rezultat poate fi extins la cazul unui invers de timp local pentru un proces standard mai general decît mișcarea browniană. Pentru a vedea acest lucru să considerăm că $Y=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,Y_t,\theta_t,P^x)$ este un proces standard cu spațiul stărilor E, iar $a\in E$ este un punct regulat. Fie $L=(L_t)$ timpul local în a normalizat astfel ca $E^a[\int_0^\infty e^{-t}dL_t]=1$ și să notăm prin u_λ, λ -potențialul său:

$$u_\lambda(x) = E^x[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dL_t].$$

Se verifică prin calcul direct următoarea relație (vezi [1] pag.154):

(*) $u_\lambda(x) = u_\mu(x) + (\mu-\lambda) V_\lambda(u_\mu)(x)$ pentru $\lambda, \mu > 0$,

unde $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ este rezolventa procesului.

Facem acum ipoteza că semigrupul procesului este absolut continuu față de o măsură ξ pe E iar densitățile sînt continue.

Mai precis vom presupune că există o funcție $p_t(x,y)$ definită pentru $(t,x,y) \in (0,\infty) \times E \times E$ și continuă în ansamblul celor trei variabile astfel ca

$$E^x[f(Y_t)] = \int f(y) p_t(x,y)\, \xi(dy), \; x \in E, \quad t > 0.$$

Rezultă atunci că rezolventa $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ se scrie

$$V_\lambda f(x) = \int f(y)\, D_\lambda(x,y)\, \xi(dy),$$

cu densități definite de relația

$$D_\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t(x,y)\, dt.$$

Din ecuația rezolventei rezultă

(**) $$D_\lambda(x,y) = D_\mu(x,y) + (\mu-\lambda) V_\lambda(D_\mu(\cdot,y))(x).$$

Din această relație rezultă că funcția $D_\lambda(\cdot,y)$ este λ-excesivă pentru orice y fixat. Pe de altă parte în multe cazuri se știe că funcția $D_\lambda(\cdot,y)$ are suportul "armonic" redus la mulțimea y. Apare deci natural să facem și ipoteza că $D_1(\cdot,a) = c\,u_1(\cdot)$ unde c este o constantă. Atunci comparînd relațiile (*) și (**) se deduce că $D_\lambda(\cdot,a) = c\,u_\lambda(\cdot)$

pentru orice $\lambda > 0$.

Fie acum $\alpha = (\alpha(t))$ inversul timpului local L. Există un unic proces Markov invariant la translație pe R astfel că luînd punctul Δ de terminare al său să fie $+\infty$, acest proces sub probabilitatea plecării din origine este identic în repartiție cu α sub probabilitatea P^a [1 pag. 219]. Fie U nucleul potențial al acestui proces pe dreapta reală. Pentru o funcție $f \in \mathcal{B}_+(R)$ avem:

$$Uf(0) = \int_0^\infty E^a[f(\alpha_t); \alpha_t < \infty] dt.$$

Să considerăm funcția $f(u)=\exp(-\lambda u)$ și să calculăm expresia de sus:

$$Uf(0) = E^a[\int_0^{L\infty} \exp(-\lambda \alpha_t) dt] = E^a[\int_0^\infty \exp(-\lambda u) dL_u] =$$

$$= u_\lambda(a) = (1/c) D_\lambda(a,a) = (1/c) \int_0^\infty \exp(-\lambda u) p_u(a,a) du =$$

$$= (1/c) \int_0^\infty f(u) p_u(a,a) du.$$

Din această relație rezultă că nucleul potențial U este absolut continuu față de măsura Lebesgue cu densitatea $g(s,t)$ dată de

$$g(s,t) = \begin{cases} (1/c) p_{t-s}(a,a) & , t > s \\ 0 & , t \leq s \end{cases}$$

Dacă acum se presupune că funcția $u \longrightarrow p_u(a,a)$ este descrescătoare se poate demonstra un rezultat de tipul celui din Propoziția 1 și apoi se repetă toate celelalte argumente pînă la Teorema 5, dar lucrîndu-se numai pe R cu funcția g și referitor la procesul α, obținîndu-se că pentru acest proces mulțimile semipolare sînt polare.

Exemple de mulţimi de tip Cantor

Fie $I=[0,1]$ şi δ un număr real astfel ca $0<\delta<1/2$. Vom defini mulţimile $M_1=[0,\delta]\cup[1-\delta,1]$, $M_2=[0,\delta^2]\cup[\delta-\delta^2,\delta]\cup[1-\delta,1-\delta+\delta^2]\cup$ $\cup[1-\delta^2,1]$ şi aşa mai departe, dacă mulţimea M_n se va scrie $M_n=\bigcup_{k=1}^{2^n}[a_k^n,b_k^n]$, atunci vom lua $a_{2k-1}^{n+1}=a_k^n$, $b_{2k-1}^{n+1}=a_k^n+\delta^{n+1}$ $a_{2k}^{n+1}=b_k^n-\delta^{n+1}$, $b_{2k}^{n+1}=b_k^n$ şi vom defini $M_{n+1}=\bigcup_{k=1}^{2^{n+1}}[a_k^{n+1},b_k^{n+1}]$.

Intersecţia $M=\bigcap_n M_n$ este o mulţime de tip Cantor. Vom arăta acum că dacă $\delta\leq 1/4$, atunci $M\times\{0\}$ este polară pentru procesul caloric $\hat{X}$ iar dacă $1/4<\delta<1/2$, atunci mulţimea aceasta nu mai este polară.

Să considerăm mai întîi cazul $\delta\leq 1/4$. Vom nota cu μ_n măsura de masă 1, uniform repartizată pe M_n, adică $\mu_n(dx)=\sum_{k=1}^{2^n}(1/2^n)\chi_{[a_k^n,b_k^n]}\cdot dx$ unde dx este măsura Lebesgue. Se observă uşor că există o limită slabă a şirului (μ_n), pe care o vom nota cu μ. Să evaluăm $G_\mu(s,0)$ într-un punct $s\in M$. Pentru aceasta vom analiza mai întîi situaţia cînd $s\in[a_{2k-1}^{n+1},b_{2k-1}^{n+1}]$, pentru un anumit n şi $k\leq 2^n$:

$$G_\mu(s,0)=\int_s^1\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\mu(dt)\geq\int_{a_{2k}^{n+1}}^1\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\mu(dt)\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{2\pi\delta^{n}}}+\int_{b_k^n}^1\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\mu(dt).$$

Să presupunem acum că $s \in M \setminus \{ b_k^n \,/\, n \in N,\ k \leq 2^n \}$.
Atunci mulțimea $\{ n \,/\, (\exists)\ k \leq 2^n,\ s \in [a_{2k-1}^{n+1}, b_{2k-1}^{n+1}] \}$

este infinită, iar $b_k^n \longrightarrow s$, cînd n tinde la infinit prin această mulțime (și k este corespunzător), deci ultima integrală tinde către $G_\mu(s,0)$.
Cum $\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{2\pi\delta^n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$, înseamnă că neapărat $G_\mu(s,0) = \infty$.

Rezultă din [1 Cb II Prop(3.5)] că mulțimea M este polară.

Să presupunem acum că $1/4 < \delta < 1/2$. Construim asemănător măsura μ și evaluăm G_μ. Fie din nou $s \in [a_{2k-1}^{n+1}, b_{2k-1}^{n+1}]$; atunci avem

$$\int_{a_{2k}^{n+1}}^{b_k^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\, \mu(dt) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^n(1-2\delta)}}$$

Rezultă atunci că pentru orice punct $s \in M$ avem

$$G_\mu(s,0) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^n(1-2\delta)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-2\delta)}} \frac{2\sqrt{\delta}}{2\sqrt{\delta}-1}$$

G_μ este deci o funcție mărginită și din Corolarul 4 rezultă a fi potențialul unui CAF. Din [4 Teorema 3 pag. 66] rezultă că suportul fin al acestui CAF este inclus în mulțimea M. In acest fel obținem că M nu este polară.

Probleme deschise

a) In ce raport se află clasa mulţimilor polare apărută mai sus, faţă de mulţimile de dimensiune Haussdorf Besicovich 1/2 ?

Remarcăm că dimensiunea mulţimii M de tip Cantor, analizată mai sus, este $-\ln 2/\ln\delta$ care în cazul $\delta = 1/4$ ne dă 1/2.

b) Este adevărat că dacă o mulţime $M \subset R \times \{0\}$ are proprietatea că $M \cap (0,\varepsilon) \times \{0\}$ este nepolară pentru orice $\varepsilon > 0$, atunci mulţimea M nu este efilată în (0,0) ?

c) Cum trebuie să fie o mulţime $M \subset R \times \{0\}$ pentru ca $P^{0}(\{\omega\ /\ (\exists)\ t>0,\ (t,X_t(\omega)) \in M\}) = 1$?

d) Să se dea exemplu de o mulţime semipolară "netrivială" $M \subset R \times R$ (pentru procesul $\hat{X}$) în următorul sens: 1) M nu este polară, 2) intersecţia $M \cap R \times \{a\}$ este sau vidă sau nenumărabilă, pentru orice $a \in R$.

e) Fie X- mişcarea browniană n-dimensională şi $\hat{X}$ procesul cu componente (t,X_t) cu valori în R^{n+1}. Este adevărat că mulţimile semipolare pentru $\hat{X}$, incluse în $R \times \{0\} \times R^{n-1}$ sînt de fapt polare ?

BIBLIOGRAFIE

[1] R.M. Blumenthal, R.K.Getoor: Markov Processes and Potential Theory, Academic Press, New York-London (1968).

[2] C.Constantinescu, A.Cornea: Potential Theory on Harmonic Spaces, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1972).

[3] N.S.Landkof: Foundations of Modern Potential Theory, Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1972).

[4] P.A. Meyer: Processus de Markov: la frontière de Martin. L.N.M. 77 Springer Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1968).

SIMPLIFICAREA UNEI DEMONSTRATII

de L.Stoica

Sîntem sub ipotezele Kunita-Watanabe şi cu notaţiile lui Meyer [1]. Vom da o demonstraţie mai simplă pentru teorema T.17 de la pagina 60 în [1]. Iată enunţul:

Teoremă

Fie v, v_n, $n \in N$ funcţii excesive finite η -apt. astfel ca $v_n \cdot \eta$ converge vag la $v.\eta$. Atunci v_n converge în L^1_{loc} la v.

Demonstraţie

Cunoaşterm din T.12 că $v \leq \liminf v_n$. Vrem să aplicăm T.15. Pentru aceasta trebuie arătat că

(1) $$\lim \int fv_n = \int fv ,$$

pentru orice funcţie $f \in B_b(E)$ care se anulează în afara unui compact. Ne putem restrînge la cazul cînd $0 \leq f \leq 1$ şi să alegem $g \in \mathscr{C}_c(E)$ astfel ca $g \geq 0$, $f \leq g$. Atunci $h=g-f$ satisface $h \geq 0$. Atunci

(2) $$\int fv \leq \int f(\liminf v_n) \leq \liminf \int fv_n$$

şi în mod similar

(3) $$\int hv \leq \liminf \int hv_n .$$

Mai departe obţinem

(4) $$\int gv = \int fv + \int hv \leq \liminf \int fv_n + \liminf \int hv_n \leq \liminf \int gv_n$$

Dar din ipoteza teoremei cunoaştem că $\lim \int gv_n = gv$ şi atunci din relaţiile (2), (3) şi (4) se deduce că $\int fv = \liminf \int fv_n$. Această relaţie rămîne valabilă pentru orice subşir şi atunci rezultă (1).

Referinţe

1 P.A. Meyer, Processus de Markov: la frontière de Martin, L.N.M. 77 (1968).