

## RAPORT ȘTIINȚIFIC

Proiect PN-II-RU-TE-2014-4-0669  
Grupuri sofice și teorie ergodică  
Perioada Octombrie 2015-Decembrie 2016

### Anul 2015

În perioada octombrie-decembrie 2015, Liviu Paunescu a continuat studiul noțiunii de soficitate, început în timpul doctoratului, în jurul anului 2009. Elementele importante ale acestei perioade sunt conferința internațională de la București, co-organizată de directorul de proiect, vizita de 2 săptămâni la Universitatea din Viena și raportările financiare și științifice de etapă pentru cele două granturi (cooperare bilaterală România-Austria și TE-2014-4-0669).

În perioada 28 septembrie - 4 octombrie 2015, la IMAR, a fost organizată a doua ediție a conferinței internaționale între România- Austria cu titlul de "Group Theory and Operator Algebra", [http://www.imar.ro/~fradules/GT\\_and\\_OA.html](http://www.imar.ro/~fradules/GT_and_OA.html). Invitați, cu expuneri plenare legate de tematica proiectului: T. Ceccherini (Univ. Benevento, Italia), M. Cavaleri (Univ. Roma 2, Italia), Paul Schupp (University of Chicago, Champaign Urbana) și Florin Boca (în prezent la Universitatea Chicago Champaign Urbana). Organizatori au fost G. Arzhantseva (Univ Viena, Austria), F. Rădulescu și L. Păunescu.

A fost deschis un concurs pentru o poziție de student doctorand, cu termenul limită pentru aplicații de 15 decembrie. Acesta poziție este anunțată pe site-urile de specialitate (<http://ec.europa.eu/euraxess/index.cfm/jobs/jobDetails/34042667>).

În perioada 25 Octombrie - 7 Noiembrie, Liviu Păunescu s-a aflat la Viena, pentru o colaborare științifică cu grupul de *Teoria Geometrică a Grupurilor* de la Universitatea din Viena, condus de Profesoara Goulmara Arzhantseva. Menționăm că această colaborare este crucială pentru activitatea de cercetare a directorului de proiect, fiind menționată în categoria "Resurse și buget" din cererea de finanțare.

Au fost discutate în principal continuarea investigațiilor începute în articolul *Almost commuting permutations are near commuting permutations*, publicat în 2015 în *Journal of Functional Analysis*. Acest articol obține stabilitatea relației de comutare pentru permutări față de distanța Hamming (vezi corolarul 6.6, pagina 754 din revista). Acest rezultat a fost obținut prin investigarea proprietăților acțiunii sofice universale, scopul principal al acestui grant, așa cum a fost menționat. Ne așteptăm să îmbunătățim rezultatele din acest articol, printr-o lucrare ce va fi trimisă spre publicare în cursul anului 2016. Pe lângă partea științifică, au fost discutate și detaliile legate de participarea lui Liviu Paunescu la semestrul de *Measured Group Theory* organizat la Viena în perioada 18 Ianuarie - 18 Martie 2016, precum

și posibilitatea continuării conferințelor România-Austria organizate în București, IMAR în perioada septembrie-octombrie.

### **Echipa proiectului**

În anul 2016 echipa proiectului a fost construită :

- Radu Munteanu, cercetător post doctorand, va lucra pe toate obiectivele proiectului.

Participând la seminarul de grupuri sofice organizat de directorul de proiect la IMAR în 2013-2014, Domnul Munteanu este deja familiar cu teoria grupurilor sofice, cu problemele și tehnicile propuse de acest proiect. Expertiza în domeniul algebrelor von Neumann este necesară pentru Obiectivul C din Cererea de finanțare, legat de super-rigiditatea acestor algebre.

-Matteo Cavaleri, cercetător doctorand la Universitatea Roma1, Sapienza. Teza de doctorat a Domnului Cavaleri “Algorithms and quantifications in amenable and sofic groups” este strict legată de tematica proiectului. Cunoștințele sale despre computabilitate și teoria operatorilor vor fi utile în studiul obiectivelor A și B.

-Cosmin Nitu, cercetător doctorand la IMAR. Punctul de plecare al Domnului Nitu este articolul recent al lui Helfgott și Juschenko, “Soficity, short cycles, weak stability and the Higman group”, în care tehnici de teoria numerelor sunt folosite pentru a obține rezultate despre soficitatea grupului Higman.

### **Anul 2016**

În primăvara acestui an, a fost organizat un seminar având ca tematică reprezentările sofice ale unor subgrupuri în grupul Higman. Această problemă face parte din Obiectivul A- Studiul aplicației de restricție și Obiectivul B-Pasul 1.

În această toamnă se studiază acțiunea grupului sofic universal pe spațiul Loeb (ultraprodus de spații de probabilitate). Acest studiu este cel mai important obiectiv al proiectului așa cum este anunțat la începutul secțiunii C2. Acest studiu va continua și în prima parte a anului 2017.

În perioada 26-30 Septembrie a fost organizată a treia ediție a conferinței România-Austria, cu titlul “Sofic Groups and Operator Algebras”, [http://www.imar.ro/~fradules/SG\\_and\\_OA.html](http://www.imar.ro/~fradules/SG_and_OA.html). Tullio Ceccherini a susținut o prezentare în cadrul conferințelor lunare de la IMAR. Alți participanți, în afara membrilor echipei: Goul'nara Arzhantseva de la Universitatea Viena și Oren Becker de la Hebrew University.

A fost continuată colaborarea pe care directorul de proiect o are cu Universitatea din Viena, în special cu grupul de Teoria Geometrică a Grupurilor, condus de Goul'nara Arzhantseva. În acest sens, Liviu Paunescu și Matteo Cavaleri au participat la semestrul organizat în Viena de Measure Group Theory. Menționăm și aici vizita efectuată de Goul'nara Arzhantseva la București în perioada 26-30 septembrie. În plus, Liviu Paunescu a fost la Viena, 10-23 noiembrie, pentru susținerea tezei de doctorat a Domnului Federico Berlai, student al Goul'narei Arzhantseva. În această perioadă am discutat și cu Gabor Elek, unul dintre părinții domeniului grupurilor sofice.

În perioada 6-11 noiembrie, Mateo Cavaleri a participat la conferința “60 faces to groups”, ce a avut loc la Hebrew University of Jerusalem cu ocazia celei de-a 60-a aniversări a Profesorului

Alexander Lubotzky. Domnul Cavaleri a fost în special interesat de prezentarea lui Oren Becker, asupra lucrării în colaborare cu Lubotzky, despre local testabilitate. Aceasta noțiune prezintă stabilitatea în permutări (în sensul Glebsky-Rivera și Arzhantseva-Paunescu) dintr-un punct de vedere al informaticii. Stabilitatea în permutări este un instrument bun pentru gasirea exemplor non-sofice. De asemenea, prezentările lui Liebeck, Sarnak și Babai au fost legate de algoritmi în grupuri finite sau finit prezentate, relevante pentru studiul din articolul “Computability of Folner sets”.

### Rezultate

Articolul “Unitaries in ultraproduct of matrices” de Liviu Paunescu, acceptat la publicare în Journal of Operator Theory, prezintă condiții necesare și suficiente pentru ca un ultraproduct de matrici să fie conjugat cu un ultraproduct de permutări. În prima parte, articolul prezintă condiții combinatorice pentru acesta proprietate. În a doua parte aceste condiții sunt scrise în termeni analitici, ca proprietăți ale măsurii spectrale. Grupurile sofice sunt acele grupuri care pot fi approximate într-un anumit sens cu permutări finite. Grupurile hiperliniare sunt acele grupuri care pot fi approximate prin aceleși metode folosind matrici finit dimensionale. Cum orice permutare poate fi văzută ca o matrice, este automat faptul că orice grup sific este hiperliniar. Reciproca este o problemă majoră a teoriei, iar o mai bună înțelegere a acestei probleme este unul din obiectivele propuse. Autorul articolului menționat consideră că această lucrare este un prim pas necesar în stabilirea legăturii dintre soficitate și hiperliniaritate. Astfel, acest rezultat se încadrează în Obiectivul B - Explorarea legăturilor dintre diferitele tipuri de soficitate. În particular, articolul este parte a Pasului 4 - studiul liniar soficității versus hiperliniaritate.

În lucrarea “Computability of Folner sets”, Matteo Cavaleri demonstrează unele proprietăți de stabilitate pentru amenabilitatea efectivă. Este arătat, printr-o construcție explicită, că grupul Kharlampovich, un grup finit prezentat rezolvabil (deci amenabil), dar care nu are problema cuvântului rezolvabilă, are mulți Folner calculabile. Alte rezultate, încă nepublicate, au în vedere aspecte algoritmice și cantitative în grupuri sofice și legătura acestora cu amenabilitatea efectivă. Parte din aceste rezultate vor apărea într-o versiune revizuită a articolului “Computability of Folner sets”. Limitele cantitative pentru soficitate pot fi utile pentru investigarea sau construirea unor grupuri nesofice, parte a Obiectivului A.

În lucrarea “The natural action of the countable symmetric group on  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  is approximately transitive” elaborată de Radu Munteanu în colaborare cu B.M. Baker și T. Giordano este studiată acțiunea naturală a grupului  $S_{\infty}$  al permutărilor finite ale lui  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  pe spațiul produs  $\prod_{k=1}^{\infty} \{0, 1\}$  înzestrat cu  $\sigma$ -algebra produs și o probabilitate produs  $\nu = \otimes_{k \geq 1} \nu_k$ . În Secțiunea 2 se arată că acțiunea naturală a lui  $S_{\infty}$  este aproximativ tranzitivă în cazul în care  $\nu$  este o măsură Bernoulli. Aproximativ tranzitivitatea (AT) este o proprietate a acțiunilor ergodice introdusă de Connes și Woods în teoria algebrelor von Neumann pentru a caracteriza factorii Araki-Woods (sau ITPFI). Rezultatul din Secțiunea 2 este generalizat în Secțiunea 3 pentru măsuri care nu sunt  $S_{\infty}$ -invariante (adică sistemul dinamic  $(X, \mu, S_{\infty})$  este de tipul III).

De asemenea, pentru astfel de măsuri se demonstrează că fluxul asociat lui  $S_\infty$  este AT. În termeni de algebre von Neumann acest rezultat spune că algebra von Neumann asociată factorului Krieger corespunzător este factor Araki-Woods. Chiar dacă articolul nu se încadrează strict într-unul din obiective propuse, este o lucrare despre permutări și algebre von Neumann, două dintre conceptele fundamentale pentru acest proiect.