Raport ştiinţific

privind implementarea proiectului

Volumul varietăţilor hiperbolice şi Einstein

PN-III-P4-ID-PCE-2016-0330

Perioada: 1 Ianuarie 2019 - 31 Decembrie 2019

Publicaţii:

• Daniel Cibotaru, Sergiu Moroianu, *Odd Pfaffian forms*, preprint.

• Cezar Joiţa, Mihai Tibăr, *Images of analytic map germs*, preprint.

• Cezar Joiţa, Mihai Tibăr: *Images of analytic map germs and singular fibrations*, acceptat la European Journal of Mathematics

Conferinţe organizate:

• Sergiu Moroianu a fost unul dintre organizatorii secţiei *Algebraic, Complex and Differential Geometry and Topology* de la The Ninth Congress of Romanian Mathematicians, Galaţi, 28 iunie - 3 iulie, 2019.

• Cezar Joiţa a fost unul dintre organizatorii secţiei *Real and Complex Analysis, Potential Theory* de la The Ninth Congress of Romanian Mathematicians, Galaţi, 28 iunie - 3 iulie, 2019.

• Radu Popescu a fost unul dintre organizatorii sesiunii speciale *Selected Topics in Complex and Differential Geometry, Topology, and Singularities* de la The Ninth Congress of Romanian Mathematicians, Galaţi, 28 iunie - 3 iulie, 2019.

• Sergiu Moroianu şi Cezar Joiţa au fost printre organizatorii conferinţei *Bucharest Conference on Geometry and Physics*, 2-6 septembrie, 2019.

• Sergiu Moroianu a fost unul dintre organizatorii conferinţei *Workshop on Riemannian and Kähler Geometry*, IMAR Bucharest, 15-19 aprilie, 2019.

Expuneri la Conferinţe:

• Sergiu Moroianu, SSMR conference XXIII, Pitesti, Oct. 11–13, 2019.

• Sergiu Moroianu, IMAR 70 conference, Bucharest, Oct. 4–5, 2019.

• Sergiu Moroianu, Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 55th anniversary of the Institute of Mathematics and Computer Science, Chişinau, Sept. 28 – Oct. 1, 2019.

• Radu Popescu, "Resonance varieties. Definition and results", Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin 100, August 19–23, 2019, Euler Mathematical Institute, Saint Petersburg, Rusia.

• Radu Popescu, "Resonance varieties. Definition and applications" The 14-th Int'l Workshop on Differential Geometry and its applications, July 9 – 11, 2019, Petroleum-Gas University of Ploieti (UPG), Romania.

• Cezar Joiţa: "Local triviality of analytic mappings", 15th Romanian-Finnish Analysis Seminar, University of Turku, June 10-12, 2019

• Cezar Joiţa: "The image problem for analytic map germs", Arc spaces and geometry of singularities, Université de Lille, 15 - 16 octombrie 2019.

Descrierea rezultatelor obtinute

Daniel Cibotaru, Sergiu Moroianu: Odd Pfaffian forms.

În lucrarea de faţă este calculată contribuţia la frontieră a termenului geometric al formulei Gauss-Bonnet pe varietăţi Riemaniene cu singularităţi de tip conic, edge incomplet, respectiv bord fibrat în sensul lui Mazzeo-Melrose. În toate cele trei formule apare o formă diferenţială definită pe varietăţi Riemaniene de dimensiune impară, numită Pfaffian impar, care joacă un rol hotarator.

Definition 1. *Pe orice varietate Riemaniana* $2k-1$*-dimensională* (N,h)

definim

$$\mathrm{Pf}^{\mathrm{odd}}(h) := \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k+j}(2k-2j-3)!!\mathcal{B}_h\left(\frac{(R^h)^j \wedge h^{2k-1-2j}}{j!(2k-2j-1)!}\right) \in \Lambda^{2k-1}(N).$$

unde $\mathcal{B}_h$ *este contracţia cu forma volum* dh *în al doilea factor pe* $\Lambda^*N \otimes \Lambda^*N$.

Spre deosebire de forma de transgresie care furnizează contribuţia bordului unei varietăţi Riemaniene compacte fără structura produs, Pfaffianul impar depinde doar de prima formă fundamentală a varietăţii de dimensiune impara. Spre deosebire de Pfaffianul standard, acest Pfaffian impar nu este invariant la deformari ale metricii.

Fie M o varietate compacta orientata cu bord impreuna cu o structura de fibrare local triviala a bordului, $\pi : \partial M \to B$ peste o baza compacta B cu fibra tip F. Fixam o functie neteda $r : M \to [0, \infty)$ care defineste bordul in M. O metrica edge are forma urmatoare langa $\partial M = \{r = 0\}$

$$g = dr^2 \oplus g(r), \qquad g(r) = r^2 g^V \oplus \pi^* g^B \tag{1}$$

unde g^B este metrica pe B, g^V este o metrica Riemanniana pe fibre si descompunerea ortogonala este definita fata de o conexiune Ehresmann.

Teoremă. *Fie* (M^{2k}, g) *o varietate Riemaniana cu o metrica cu singularitati edge* g *ca mai sus. Avem*

(a) Daca $\dim(B)$ *este impara,*

$$\chi(M) = \frac{1}{(2\pi)^k}\int_M \mathrm{Pf}^g.$$

(b) Daca $\dim(B)$ *este para,*

$$(2\pi)^k\chi(M) = \int_M \mathrm{Pf}^g - \int_B\left(\mathrm{Pf}(g^B)\int_{\partial M/B}\mathrm{Pf}^{\mathrm{odd}}(g^V)\right).$$

O formula similara se obtine pentru varietati cu bord fibrat, cititorul este rugat sa consulte textul articolului pentru enuntul precis.

Cezar Joiţa, Mihai Tibăr: Images of analytic map germs and singular fibrations.

În lucrare sunt consideraţi germeni de aplicaţii analitice $G : (\mathbb{K}^m, 0) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ cu $p \geq 2$, unde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Se caută condiţii suficiente pentru ca o astfel de aplicaţie sa aiba, local, o structura de fibrare trivială. Faţă de cazul $p = 1$, apar fenomene noi: imaginea lui G poate să nu fie bine definită ca germene de mulţime sau imaginea prin G a locului singular $Sing(G)$ poate să nu fie bine definită ca germene de mulţime. Dacă atât imaginea lui G cât şi imaginea prin G a lui $Sing(G)$ sunt bine definite spunem că G este NMG (Nice Map Germ). Sunt obţinute condiţii suficiente pentru ca G sa fie NMG. Dacă aplicatţia G este NMG, sunt date condiţii suficiente pentru ca ea sa fie fibrare trivială stratificată. Aceste condiţii sunt date folosind mulţimea Milnor stratificată. Contextul este următorul:

Fie $G : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ un germene de aplicaţie analitică, $m \geq p \geq 1$ şi $U \subset \mathbb{R}^m$ o subvarietate. Notăm cu $\rho := \| \cdot \|$ distanţa Euclidiană în $\mathbb{R}^m$ şi definim $M(G_{|U}) := \left\{ x \in U \mid \rho_{|U} \not\pitchfork_x G_{|U} \right\}$. Se ştie că există a o stratificare semi-analtică $\mathbb{W}_G = \{W_\alpha\}_\alpha$ pentru $(\mathbb{R}^m, 0)$ care satisface condiţiia Whitney (a) astfel încât restricţia lui G la orice strat este o submersie deasupra imaginii sale. Definim $M(G) := \sqcup_\alpha M(G_{|W_\alpha})$. Se demonstrează următoarea teoremă:

Teoremă: În contextul de mai sus, dacă

$$\overline{M(G) \setminus G^{-1}(0)} \cap G^{-1}(0) \subset \{0\}$$

atunci

a) G este NMG,

b) $G(W_\alpha)$ este bine definită ca germene în origine, pentru orice strat W_α,

c) G admite o fibrare local trivială stratificată la nivel de germeni.

Cezar Joiţa, Mihai Tibăr, Images of analytic map germs

Demonstrăm că dacă X şi Y sunt spaţii complexe reduse şi local ireductibile şi $F : (X, a) \to (Y, b)$ este un germene de aplicaţie olomorfă atunci $(\mathrm{Im}\, F, b) \neq (Y, b)$ dacă şi numai dacă F omite o curbă complexă (adică există un germene de curbă complexă (C, b) astfel încât $C \cap F(X) = \{b\}$). Rezolvăm astfel o problemă ridicată de A. Huckleberry. Apoi studiem bine definirea ca germene a imaginii unei aplicaţii olomorfe $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ şi a unei funcţii mixte de tip $f\bar{g}$. Astfel se demonstrează următoarele două teoreme.

Teoremă: Fie $(f, g) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ un germene neconstant de aplicaţie olomorfă. Notăm cu $Z(f)$ şi respectiv $Z(g)$ zerourile lui f şi respectiv g. Atunci:

1. *Dacă* $\dim Z(f) \cap Z(g) = n - 2$, *atunci* $(\mathrm{Im}\,(f, g), 0) = (\mathbb{C}^2, 0)$.

2. *Dacă* $\dim Z(f) \cap Z(g) = n - 1$, *atunci:*

   (a) *dacă* $Z(g) \subset Z(f)$ *sau* $Z(f) \subset Z(g)$, *imaginea* (f, g) *este bine definită ca germene dacă şi numai dacă* $\mathrm{Im}\,(f, g)$ *este un germene ireductibil de curbă.*

   (b) *dacă* $Z(f) \not\subset Z(g)$ *şi* $Z(g) \not\subset Z(f)$, *imaginea lui* (f, g) *este bine definită ca germene dacă şi numai dacă* $(\mathrm{Im}\,(f, g), 0) = (\mathbb{C}^n, 0)$.

În cazul 2(b) este dat un criteriu necesar.

Teoremă: Fie $(f, g) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ un germene neconstant de aplicaţie olomorfă.

1. *Dacă* $f \neq ug$ *pentru un germene inversabil de funcţie olomorfă* u, *atunci* $(\mathrm{Im}\, f\bar{g}, 0) = (\mathbb{C}, 0)$.

2. *Dacă* $f = ug$ *pentru un germene inversabil de funcţie olomorfă* u, *atunci* $\mathrm{Im}\, f\bar{g}$ *este bine definită ca germene dacă şi numai dacă* $\mathrm{Im}\,(f, g)$ *este un germene de curba complexă.*

Tineri implicaţi în proiect

Din echipa proiectului fac parte doi tineri: **Cipriana Anghel** şi **George-Rareş Stan**.

In perioada 2017 - 2019 cei doi tineri au urmat cursurile de master ale Universităţii din Bucureşti si lucrările de dizertaţie au fost scrise sub îndrumarea lui Sergiu Moroianu.

Titlurile lucrărilor de dizertaţie au fost:

Cipriana Anghel: *The Selberg Trace Formula.*

George-Rareş Stan: *The Atiyah-Singer Index theorem.*

La sfarşitul lunii septembrie 2019 au fost admişi la doctorat la Institutul de Matematică “Simion Stoilow” al Academiei Române, sub indrumarea directorului de proiect Sergiu Moroianu.

Ei au participat la Congresul Matematicienilor Români de la Galaţi, 28 iunie - 3 iulie, 2019.

Director de proiect,
C.S. I Dr. Sergiu Moroianu