

**Raport științific**  
privind implementarea proiectului  
*Volumul varietăților hiperbolice și Einstein*  
**PN-III-P4-ID-PCE-2016-0330**  
Pentru întreaga perioadă de derulare a proiectului

**Publicații:**

- Daniel Cibotaru, Sergiu Moroianu, *Odd Pfaffian forms*, preprint 2018.
- Cezar Joița, Mihai Tibăr, *Images of analytic map germs*, preprint 2018.
- Cezar Joița, Mihai Tibăr: *Images of analytic map germs and singular fibrations*, acceptat la European Journal of Mathematics.
- Andrei Moroianu, Sergiu Moroianu, Liviu Ornea: *Locally conformally Kähler manifolds with holomorphic Lee field*, Differential Geom. Appl. 60, 33-38 (2018).
- Cezar Joița, Mihai Tibăr, *Bifurcation set of multi-parameter families of complex curves*, Journal of Topology 11, no. 3 (2018), 739-751.
- Hervé Gaussier, Cezar Joița, *On Runge neighborhoods of closures of domains biholomorphic to a ball*, Geometric function theory in higher dimension, 63-66, Springer INdAM Ser., 26 (2017).

**Conferințe organizate:**

- Sergiu Moroianu a fost unul dintre organizatorii conferinței Topology and Geometry: A conference in memory of Stefan Papadima (1953 - 2018), București, 28-31 mai 2018.

- Sergiu Moroianu a fost unul dintre organizatorii secției *Algebraic, Complex and Differential Geometry and Topology* de la The Ninth Congress of Romanian Mathematicians, Galați, 28 iunie - 3 iulie, 2019.
- Cezar Joița a fost unul dintre organizatorii secției *Real and Complex Analysis, Potential Theory* de la The Ninth Congress of Romanian Mathematicians, Galați, 28 iunie - 3 iulie, 2019.
- Radu Popescu a fost unul dintre organizatorii sesiunii speciale *Selected Topics in Complex and Differential Geometry, Topology, and Singularities* de la The Ninth Congress of Romanian Mathematicians, Galați, 28 iunie - 3 iulie, 2019.
- Sergiu Moroianu și Cezar Joița au fost printre organizatorii conferinței Bucharest Conference on Geometry and Physics, 2-6 septembrie, 2019.
- Sergiu Moroianu a fost unul dintre organizatorii conferinței *Workshop on Riemannian and Kähler Geometry*, IMAR Bucharest, 15-19 aprilie, 2019.

#### **Expuneri la Conferințe:**

- Sergiu Moroianu, SSMR conference XXIII, Pitesti, Oct. 11–13, 2019.
- Sergiu Moroianu, IMAR 70 conference, Bucharest, Oct. 4–5, 2019.
- Sergiu Moroianu, Conference of the Mathematical Society of the Republic of Moldova dedicated to the 55th anniversary of the Institute of Mathematics and Computer Science, Chișinău, Sept. 28 – Oct. 1, 2019.
- Radu Popescu, "Resonance varieties. Definition and results", Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin 100, August 19–23, 2019, Euler Mathematical Institute, Saint Petersburg, Russia.
- Radu Popescu, "Resonance varieties. Definition and applications" The 14th Int'l Workshop on Differential Geometry and its applications, July 9 – 11, 2019, Petroleum-Gas University of Ploieti (UPG), Romania.
- Cezar Joița: "The image problem for analytic map germs", Arc spaces and geometry of singularities, Université de Lille, 15 - 16 octombrie 2019.
- Cezar Joița: "Local triviality of analytic mappings", 15th Romanian-Finnish Analysis Seminar, University of Turku, June 10-12, 2019
- Cezar Joița: Bifurcation set of multi-parameter families of complex curves, The singular side, Université de Lille, 16 - 17 mai 2018.

- Sergiu Moroianu, Lectures on Hyperbolic Geometry, UAIC Iași, oct. 2018.
- Sergiu Moroianu, Geometry Day - 2017, UAIC Iași, 19 sept. 2017.
- Daniel Matei, Aomoto-Betti numbers of matroids and finite geometries, A.M.S. Sectional Meeting, aprilie 2018, Boston, S.U.A.
- Daniel Matei, Resonance varieties and matrix tree theorems, Topology and Geometry: A conference in memory of Stefan Papadima, I.M.A.R. Bucuresti, iunie 2018.

### **Expuneri invitate:**

- Sergiu Moroianu, Université de Lorraine, Nancy, 5 noiembrie 2018.
- Cezar Joita: Coverings of 1-convex surfaces, IMAR Monthly Conference, 5 decembrie 2018
- Daniel Matei, Resonance varieties and matrix tree theorems, Topology Seminar, octombrie 2018, University of Tokyo, Japonia.
- Daniel Matei, Volumes of knot and link cone-manifolds, Graduate Topology Seminar, noiembrie 2018, University of Tokyo, Japonia.
- Daniel Matei, Real singularities and contact structures, Workshop on Topology of Singularities, noiembrie 2018, Keio University, Tokyo, Japonia.

### **Vizite științifice:**

- Sergiu Moroianu, UAIC Iasi, 15 - 19 octombrie, 2018.
- Sergiu Moroianu, Université de Lorraine, Metz, 5 - 9 noiembrie , 2018.
- Cezar Joita: Université de Lille, 10 - 24 octombrie, 2019.
- Cezar Joita: Université de Lille, 7 mai - 25 mai, 2018.
- Cezar Joita: Université de Lille, 10 septembrie - 21 septembrie. 2018.
- Daniel Matei: 18-28 apr. 2018 , Northeastern University, Boston, S.U.A.
- Daniel Matei: 1 sept. 2018 - 15 iulie 2019, University of Tokyo, Japonia.

### Participări la conferințe și școli de vară:

- Cipriana Anghel, Master classe "Surfaces", Marseille, 28 mai - 1 iunie, 2018.
- Rareș Stan, Master classe "Surfaces", Marseille, 28 mai - 1 iunie, 2018.
- Cipriana Anghel, 6th Heidelberg Laureate Forum, Heidelberg, 22 septembrie - 28 septembrie, 2018.
- Rareș Stan, 6th Heidelberg Laureate Forum, Heidelberg, 22 septembrie - 28 septembrie, 2018.
- Cipriana Anghel, The Ninth Congress of Romanian Mathematicians, Galați, 28 iunie - 3 iulie, 2019.

### Descrierea rezultatelor obtinute

*A. Moroianu, S. Moroianu, L. Ornea: Locally conformally Kähler manifolds with holomorphic Lee field*

În acest articol sunt studiate varietățile care admit un câmp de vectori olomorf provenind din câmpul Lee al unei structuri local conform Kähler pe o varietate complexă  $M$  înzestrată cu o metrică Riemaniană. Aratam că dacă acest câmp este fie de lungime constantă, fie co-închis, atunci el este paralel pe  $M$ , ceea ce implică faptul că  $(M, J, g)$  este Vaisman.

Ca prim rezultat, dacă câmpul Lee  $T$  este olomorf, rezultă că  $JT$  este și el olomorf și în același timp Killing. Considerăm apoi funcția  $|T|^2$  și calculăm  $dJd|T|^2$  în funcție de derivata covariantă a lui  $T$ . Acest calcul permite să determinăm laplacianul lui  $|T|^2$ . Teorema principală decurge ca un corolar al acestui calcul folosind principiul de maxim. Cazul de egalitate se reduce la faptul că  $T$  este paralel, adică la cazul Vaisman.

*C. Joița, M. Tibăr: Bifurcation set of multi-parameter families of complex curves:*

Locul de bifurcare pentru o aplicație polinomială  $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^k$ , unde  $m \geq k$ , este cea mai mică submulțime  $B(F) \subset \mathbb{C}^k$  astfel încât în afara ei aplicația  $F$  este o fibrare  $C^\infty$  local trivială.

Suzuki și, mai târziu, Hà și Lê au demonstrat următorul rezultat: Fie  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  o aplicație polinomială și fie  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus F(\text{Sing } f)$ . Atunci  $\lambda$  nu

este o valoare de bifurcație la infinit dacă și numai dacă caracteristica Euler a fibrelor  $\chi(f^{-1}(t))$  este constantă pentru  $t$  într-o vecinătate a lui  $\lambda$ .

Acest rezultat nu mai este adevărat pentru aplicații polinomiale  $F : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Întrebarea naturală, în acest context, este dacă presupunând că numerele Betti ale fibrelor sunt constante pe o vecinătate a lui  $\lambda$ , putem deduce că  $F$  este local trivială în jurul lui  $\lambda$ . Sau, mai restrictiv, dacă putem obține trivialitate locală presupunând că toate fibrele sunt izomorfe. Un exemplu din articolul nostru arată că răspunsul este negativ pentru aplicații  $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$  și deci pentru aplicații  $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$  pentru orice  $n \geq 2$ .

Rezultatul principal al articolului dă o caracterizare a locului de bifurcație într-un context mai general. Mai precis se demonstrează următoarea:

**Teoremă:** *Fie  $p : M \rightarrow B$  o aplicație oloomorfă între două varietăți complexe conexe  $M$  și  $B$ , unde  $M$  este varietate Stein și  $\dim M = \dim B + 1$ . Presupunem că numerele Betti  $b_0(t)$  și  $b_1(t)$  ale fibrelor  $p^{-1}(t)$  sunt finite. Fie  $\lambda$  un punct din interiorul mulțimii  $\text{Im } p \setminus p(\text{Sing } p) \subset B$ . Atunci  $\lambda \notin B(p)$  dacă și numai dacă caracteristica Euler a fibrelor este constantă pentru  $t$  într-o vecinătate a lui  $\lambda$  și nicio componentă conexă a lui  $p^{-1}(t)$  nu dispare la infinit când  $t \rightarrow \lambda$ .*

Aici spunem că sunt componente care dispar la infinit când  $t$  tinde la  $\lambda$  dacă există un șir de puncte  $t_k \in B$ ,  $t_k \rightarrow \lambda$  astfel încât pentru orice  $k$  există o componentă conexă  $C_{t_k}$  a lui  $p^{-1}(t_k)$  astfel încât șirul  $\{C_{t_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  este local finit (i.e., pentru orice mulțime compactă  $K \subset M$ , există un întreg  $p_K \in \mathbb{N}$  pentru care  $\forall q \geq p_K$ ,  $C_{t_q} \cap K = \emptyset$ ).

Sunt prezentate exemple care arată că cele două ipoteze, finitudinea numerelor Betti și faptul că  $M$  este Stein, sunt necesare.

Articolul conține și aplicații ale acestei teoreme. De exemplu, se demonstrează următorul enunț:

**Corolar:** *Fie  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$  o aplicație polinomială și fie  $\lambda$  un punct din interiorul mulțimii  $\text{Im } F \setminus \overline{F(\text{Sing } F)} \subset \mathbb{C}^n$ . Dacă gradul închiderii fibrei  $F^{-1}(t)$  în  $\mathbb{P}^{n+1}$  (într-un sistem fixat de coordonate) și caracteristica Euler a lui  $F^{-1}(t)$  sunt constante pentru  $t$  într-o vecinătate a lui  $\lambda$ , atunci  $\lambda \notin B(F)$ .*

*H. Gaussier, C. Joița: On Runge neighborhoods of closures of domains bi-holomorphic to a ball.*

Următoarea întrebare a fost pusă de Filippo Bracci: să presupunem că  $W$  este un domeniu din  $\mathbb{C}^n$  care este biolomorf cu o bilă euclidiană. Există

atunci un domeniu Fatou-Bieberbach  $U$  (i.e. un domeniu biolomorf cu  $\mathbb{C}^n$ ) astfel încât  $W \subset U \subset \mathbb{C}^n$  și  $W$  este Runge în  $U$ ?

Pentru afirmatii echivalente cu aceasta întrebare și legaturile ei cu teoria lanțurilor Loewner se poate vedea:

Matteo Fiacchi: The embedding conjecture and the approximation conjecture in higher dimension, arXiv:1710.02087.

O întrebare naturală, din același cerc de idei ca cea de mai sus, este următoare: să presupunem că  $W$  un domeniu din  $\mathbb{C}^n$  care este biolomorf cu o bilă euclidiană. Există atunci un deschis Stein  $U$  în  $\mathbb{C}^n$  astfel încât  $\overline{W} \subset U$  și  $W$  este Runge în  $U$ ?

În articolul nostru am demonstrat că răspunsul la această ultimă întrebare este negativ. Pentru aceasta am construit un contraexemplu. Frontiera domeniului  $W$  construit de noi este  $C^\infty$  și strict pseudoconvexă cu excepția unui singur punct.

Menționăm că recent, plecând de la exemplul nostru, John Erik Fornaess și Erlend Fornaess Wold au reușit să construiască un contraexemplu la problema pusă de Filippo Bracci. Vezi:

John Erik Fornaess, Erlend Fornaess Wold: An embedding of the unit ball that does not embed into a Loewner chain, arXiv:1806.03591.

*Cezar Joița, Mihai Tibăr: Images of analytic map germs and singular fibrations.*

În lucrare sunt consierați germeni de aplicații analitice  $G : (\mathbb{K}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$  cu  $p \geq 2$ , unde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  sau  $\mathbb{C}$ . Se caută condiții suficiente pentru ca o astfel de aplicație să aiba, local, o structura de fibrare trivială. Față de cazul  $p = 1$ , apar fenomene noi: imaginea lui  $G$  poate să nu fie bine definită ca germene de mulțime sau imaginea prin  $G$  a locului singular  $Sing(G)$  poate să nu fie bine definită ca germene de mulțime. Dacă atât imaginea lui  $G$  cât și imaginea prin  $G$  a lui  $Sing(G)$  sunt bine definite spunem că  $G$  este NMG (Nice Map Germ). Sunt obținute condiții suficiente pentru ca  $G$  să fie NMG. Dacă aplicația  $G$  este NMG, sunt date condiții suficiente pentru ca ea să fie fibrare trivială stratificată. Aceste condiții sunt date folosind mulțimea Milnor stratificată. Contextul este următorul:

Fie  $G : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  un germene de aplicație analitică,  $m \geq p \geq 1$  și  $U \subset \mathbb{R}^m$  o subvarietate. Notăm cu  $\rho := \|\cdot\|$  distanța Euclidiană în  $\mathbb{R}^m$  și definim  $M(G|_U) := \{x \in U \mid \rho|_U \not\ll_x G|_U\}$ . Se știe că există o stratificare semi-analtică  $\mathbb{W}_G = \{W_\alpha\}_\alpha$  pentru  $(\mathbb{R}^m, 0)$  care satisface condiția Whitney

(a) astfel încât restricția lui  $G$  la orice strat este o submersie deasupra imaginii sale. Definim  $M(G) := \sqcup_{\alpha} M(G|_{W_{\alpha}})$ . Se demonstrează următoarea teoremă:

**Teoremă:** În contextul de mai sus, dacă

$$\overline{M(G) \setminus G^{-1}(0)} \cap G^{-1}(0) \subset \{0\}$$

atunci

- a)  $G$  este NMG,
- b)  $G(W_{\alpha})$  este bine definită ca germene în origine, pentru orice strat  $W_{\alpha}$ ,
- c)  $G$  admite o fibrare local trivială stratificată la nivel de germeni.

*Cezar Joița, Mihai Tibăr, Images of analytic map germs*

Demonstrăm că dacă  $X$  și  $Y$  sunt spații complexe reduse și local ireductibile și  $F : (X, a) \rightarrow (Y, b)$  este un germene de aplicație olomorvă atunci  $(\text{Im } F, b) \neq (Y, b)$  dacă și numai dacă  $F$  omite o curbă complexă (adică există un germene de curbă complexă  $(C, b)$  astfel încât  $C \cap F(X) = \{b\}$ ). Rezolvăm astfel o problemă ridicată de A. Huckleberry. Apoi studiem bine definirea ca germene a imaginii unei aplicații olomorfe  $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  și a unei funcții mixte de tip  $f\bar{g}$ . Astfel se demonstrează următoarele două teoreme.

**Teoremă:** Fie  $(f, g) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  un germene neconstant de aplicație olomorvă. Notăm cu  $Z(f)$  și respectiv  $Z(g)$  zerourile lui  $f$  și respectiv  $g$ . Atunci:

1. Dacă  $\dim Z(f) \cap Z(g) = n - 2$ , atunci  $(\text{Im } (f, g), 0) = (\mathbb{C}^2, 0)$ .
2. Dacă  $\dim Z(f) \cap Z(g) = n - 1$ , atunci:
  - (a) dacă  $Z(g) \subset Z(f)$  sau  $Z(f) \subset Z(g)$ , imaginea  $(f, g)$  este bine definită ca germene dacă și numai dacă  $\text{Im } (f, g)$  este un germene ireductibil de curbă.
  - (b) dacă  $Z(f) \not\subset Z(g)$  și  $Z(g) \not\subset Z(f)$ , imaginea lui  $(f, g)$  este bine definită ca germene dacă și numai dacă  $(\text{Im } (f, g), 0) = (\mathbb{C}^n, 0)$ .

În cazul 2(b) este dat un criteriu necesar.

**Teoremă:** Fie  $(f, g) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  un germene neconstant de aplicație olomorvă.

1. Dacă  $f \neq ug$  pentru un germene inversabil de funcție olomorvă  $u$ , atunci  $(\text{Im } f\bar{g}, 0) = (\mathbb{C}, 0)$ .

2. Dacă  $f = ug$  pentru un germene inversabil de funcție olomorfă  $u$ , atunci  $\text{Im } f\bar{g}$  este bine definită ca germene dacă și numai dacă  $\text{Im}(f, g)$  este un germene de curba complexă.

*Daniel Cibotaru, Sergiu Moroianu: Odd Pfaffian forms.*

În lucrarea de fata este calculata contributia la frontiera a termenului geometric al formulei Gauss-Bonnet pe varietati Riemaniene cu singularitati de tip conic, edge incomplet, respectiv bord fibrat in sensul lui Mazzeo-Melrose. In toate cele trei formule apare o forma diferentiaala definita pe varietati Riemaniene de dimensiune impara, numita Pfaffian impar, care joaca un rol hotarator.

**Definition 1.** *Pe orice varietate Riemaniana  $2k - 1$ -dimensionala  $(N, h)$  definim*

$$\text{Pf}^{\text{odd}}(h) := \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k+j} (2k - 2j - 3)!! \mathcal{B}_h \left( \frac{(R^h)^j \wedge h^{2k-1-2j}}{j!(2k - 2j - 1)!} \right) \in \Lambda^{2k-1}(N).$$

unde  $\mathcal{B}_h$  este contractia cu forma volum  $dh$  in al doilea factor pe  $\Lambda^*N \otimes \Lambda^*N$ .

Spre deosebire de forma de transgresie care furnizeaza contributia bordului unei varietati Riemaniene compacte fara structura produs, Pfaffianul impar depinde doar de prima forma fundamentala a varietatii de dimensiune impara. Spre deosebire de Pfaffianul standard, acest Pfaffian impar nu este invariant la deformari ale metricii.

Fie  $M$  o varietate compacta orientata cu bord impreuna cu o structura de fibrare local triviala a bordului,  $\pi : \partial M \rightarrow B$  peste o baza compacta  $B$  cu fibra tip  $F$ . Fixam o functie neteda  $r : M \rightarrow [0, \infty)$  care defineste bordul in  $M$ . O metrica edge are forma urmatoare langa  $\partial M = \{r = 0\}$

$$g = dr^2 \oplus g(r), \quad g(r) = r^2 g^V \oplus \pi^* g^B \quad (1)$$

unde  $g^B$  este metrica pe  $B$ ,  $g^V$  este o metrica Riemanniana pe fibre si descompunerea ortogonală este definita fata de o conexiune Ehresmann.

**Teoremă.** *Fie  $(M^{2k}, g)$  o varietate Riemaniana cu o metrica cu singularitati edge  $g$  ca mai sus. Avem*



(a) Dacă  $\dim(B)$  este impară,

$$\chi(M) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_M \text{Pf}^g.$$

(b) Dacă  $\dim(B)$  este pară,

$$(2\pi)^k \chi(M) = \int_M \text{Pf}^g - \int_B \left( \text{Pf}(g^B) \int_{\partial M/B} \text{Pf}^{\text{odd}}(g^V) \right).$$

O formula similară se obține pentru varietăți cu bord fibrat, cititorul este rugat să consulte textul articolului pentru enunțul precis.

## Tineri implicați în proiect

Din echipa proiectului fac parte doi tineri: **Cipriana Anghel** și **George-Rareș Stan**. Amândoi au absolvit ciclul de licență al Facultății de Matematică a Universității din București cu media generală 10. Lucrările de licență le-au elaborat sub îndrumarea lui Sergiu Moroianu.

În perioada 2017 - 2019 au urmat cursurile de master ale Universității din București și lucrările de dizertație au fost scrise tot sub îndrumarea lui Sergiu Moroianu.

Titlurile lucrărilor de licență au fost:

Cipriana Anghel: *Identități privind lungimile ortogeodezicelor pe suprafețe hiperbolice.*

George-Rareș Stan: *Spectrul lungimilor geodezicelor simple pe toruri hiperbolice punctate.*

Titlurile lucrărilor de dizertație au fost:

Cipriana Anghel: *The Selberg Trace Formula.*

George-Rareș Stan: *The Atiyah-Singer Index theorem.*

La sfârșitul lunii septembrie au fost admiși la doctorat la Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române, sub îndrumarea directorului de proiect Sergiu Moroianu.

În luna mai a anului 2018 ei au participat la o școală de vară intitulată "Master Classe: Surfaces" în Marsilia, Franța. Acolo și-au consolidat cunoștințele de topologie algebrică și geometrie hiperbolică necesare Grantului "Volumes of hyperbolic and Einstein manifolds". Cursurile au fost ținute de experți în domeniu: Daniel Matignon, Frédéric Palési și Thierry Coulbois.

De asemenea, ei au participat la Heidelberg Laureate Forum, între 22 și 28 septembrie și la Congresul Matematicienilor Români de la Galați, 28 iunie - 3 iulie, 2019.

Director de proiect,  
C.S. I Dr. Sergiu Moroianu