

## Raport științific

privind implementarea proiectului

*Volumul varietăților hiperbolice și Einstein*

**PN-III-P4-ID-PCE-2016-0330**

Perioada: 1 decembrie 2017 - 31 decembrie 2018

### Publicații:

În perioada de raportare au fost publicate următoarele articole.

- Andrei Moroianu, Sergiu Moroianu, Liviu Ornea: Locally conformally Kähler manifolds with holomorphic Lee field, *Differential Geom. Appl.* 60, 33-38 (2018).
- Cezar Joița, Mihai Tibăr, Bifurcation set of multi-parameter families of complex curves, *Journal of Topology* 11, no. 3 (2018), 739-751.
- Hervé Gaussier, Cezar Joița, On Runge neighborhoods of closures of domains biholomorphic to a ball, *Geometric function theory in higher dimension*, 63-66, Springer INdAM Ser., 26 (2017).

### Conferințe organizate:

- Sergiu Moroianu: Topology and Geometry: A conference in memory of Stefan Papadima (1953 - 2018), București, 28-31 mai 2018.

### Expuneri la Conferințe:

- Cezar Joița: Bifurcation set of multi-parameter families of complex curves, The singular side, Université de Lille, 16 - 17 mai 2018.

- Sergiu Moroianu, Lectures on Hyperbolic Geometry, UAIC Iași, octombrie 2018.
- Sergiu Moroianu, Geometry Day - 2017, UAIC Iași, 19 septembrie 2017.

#### **Expuneri invitate:**

- Sergiu Moroianu, Université de Lorraine, Nancy, 5 noiembrie 2018.

#### **Vizite științifice:**

- Cezar Joita: Université de Lille, 7 mai - 25 mai, 2018,
- Cezar Joita: Université de Lille, 10 septembrie - 21 septembrie. 2018.
- Sergiu Moroianu, UAIC Iasi, 15 - 19 octombrie, 2018.
- Sergiu Moroianu, Université de Lorraine, Metz, 5 - 9 noiembrie , 2018.

#### **Participări la conferințe și școli de vară:**

- Cipriana Anghel, Master classe "Surfaces", Marseille, 28 mai - 1 iunie, 2018.
- Rareș Stan, Master classe "Surfaces", Marseille, 28 mai - 1 iunie, 2018.
- Cipriana Anghel, 6th Heidelberg Laureate Forum, Heidelberg, 22 mai - 28 mai, 2018.
- Rareș Stan, 6th Heidelberg Laureate Forum, Heidelberg, 22 mai - 28 mai, 2018.

#### **Descrierea rezultatelor obtinute**

*A. Moroianu, S. Moroianu, L. Ornea: Locally conformally Kähler manifolds with holomorphic Lee field*

În acest articol sunt studiate varietățile care admit un câmp de vectori olomorf provenind din câmpul Lee al unei structuri local conform Kähler pe o varietate complexă  $M$  înzestrată cu o metrică Riemaniană. Aratam că dacă

acest câmp este fie de lungime constantă, fie co-închis, atunci el este paralel pe  $M$ , ceea ce implică faptul că  $(M, J, g)$  este Vaisman.

Ca prim rezultat, dacă câmpul Lee  $T$  este olomorf, rezultă că  $JT$  este și el olomorf și în același timp Killing. Considerăm apoi funcția  $|T|^2$  și calculăm  $dJd|T|^2$  în funcție de derivata covariantă a lui  $T$ . Acest calcul permite să determinăm laplacianul lui  $|T|^2$ . Teorema principală decurge ca un corolar al acestui calcul folosind principiul de maxim. Cazul de egalitate se reduce la faptul că  $T$  este paralel, adică la cazul Vaisman.

*C. Joița, M. Tibăr: Bifurcation set of multi-parameter families of complex curves:*

Locul de bifurare pentru o aplicație polinomială  $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^k$ , unde  $m \geq k$ , este cea mai mică submulțime  $B(F) \subset \mathbb{C}^k$  astfel încât în afara ei aplicația  $F$  este o fibrare  $C^\infty$  local trivială.

Suzuki și, mai târziu, Hà și Lê au demonstrat următorul rezultat: Fie  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  o aplicație polinomială și fie  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus F(\text{Sing } f)$ . Atunci  $\lambda$  nu este o valoare de bifurcație la infinit dacă și numai dacă caracteristica Euler a fibrelor  $\chi(f^{-1}(t))$  este constantă pentru  $t$  într-o vecinătate a lui  $\lambda$ .

Acest rezultat nu mai este adevărat pentru aplicații polinomiale  $F : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Întrebarea naturală, în acest context, este dacă presupunând că numerele Betti ale fibrelor sunt constante pe o vecinătate a lui  $\lambda$ , putem deduce că  $F$  este local trivială în jurul lui  $\lambda$ . Sau, mai restrictiv, dacă putem obține trivialitate locală presupunând că toate fibrele sunt izomorfe. Un exemplu din articolul nostru arată că răspunsul este negativ pentru aplicații  $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$  și deci pentru aplicații  $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$  pentru orice  $n \geq 2$ .

Rezultatul principal al articolului dă o caracterizare a locului de bifurcație într-un context mai general. Mai precis se demonstrează următoarea:

**Teoremă:** *Fie  $p : M \rightarrow B$  o aplicație olomorfă între două varietăți complexe conexe  $M$  și  $B$ , unde  $M$  este varietate Stein și  $\dim M = \dim B + 1$ . Presupunem că numerele Betti  $b_0(t)$  și  $b_1(t)$  ale fibrelor  $p^{-1}(t)$  sunt finite. Fie  $\lambda$  un punct din interiorul mulțimii  $\text{Im } p \setminus p(\text{Sing } p) \subset B$ . Atunci  $\lambda \notin B(p)$  dacă și numai dacă caracteristica Euler a fibrelor este constantă pentru  $t$  într-o vecinătate a lui  $\lambda$  și nicio componentă conexă a lui  $p^{-1}(t)$  nu dispare la infinit când  $t \rightarrow \lambda$ .*

Aici spunem că sunt componente care dispar la infinit când  $t$  tinde la  $\lambda$  dacă există un șir de puncte  $t_k \in B$ ,  $t_k \rightarrow \lambda$  astfel încât pentru orice  $k$  există o componentă conexă  $C_{t_k}$  a lui  $p^{-1}(t_k)$  astfel încât șirul  $\{C_{t_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  este local

finit (i.e., pentru orice mulțime compactă  $K \subset M$ , există un întreg  $p_K \in \mathbb{N}$  pentru care  $\forall q \geq p_K, C_{t_q} \cap K = \emptyset$ ).

Sunt prezentate exemple care arată că cele două ipoteze, finitudinea numerelor Betti și faptul că  $M$  este Stein, sunt necesare.

Articolul conține și aplicații ale acestei teoreme. De exemplu, se demonstrează următorul enunț:

**Corolar:** *Fie  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$  o aplicație polinomială și fie  $\lambda$  un punct din interiorul mulțimii  $\text{Im } F \setminus \overline{F(\text{Sing } F)} \subset \mathbb{C}^n$ . Dacă gradul închiderii fibrei  $F^{-1}(t)$  în  $\mathbb{P}^{n+1}$  (într-un sistem fixat de coordonate) și caracteristica Euler a lui  $F^{-1}(t)$  sunt constante pentru  $t$  într-o vecinătate a lui  $\lambda$ , atunci  $\lambda \notin B(F)$ .*

*H. Gaussier, C. Joița: On Runge neighborhoods of closures of domains biholomorphic to a ball.*

Următoare întrebare a fost pusă de Filippo Bracci: să presupunem că  $W$  este un domeniu din  $\mathbb{C}^n$  care este biolomorf cu o bilă euclidiană. Există atunci un domeniu Fatou-Bieberbach  $U$  (i.e. un domeniu biolomorf cu  $\mathbb{C}^n$ ) astfel încât  $W \subset U \subset \mathbb{C}^n$  și  $W$  este Runge în  $U$ ?

Pentru afirmatii echivalente cu aceasta întrebare și legăturile ei cu teoria lanțurilor Loewner se poate vedea:

Matteo Fiacchi: The embedding conjecture and the approximation conjecture in higher dimension, arXiv:1710.02087.

O întrebare naturală, din același cerc de idei ca cea de mai sus, este următoare: să presupunem că  $W$  un domeniu din  $\mathbb{C}^n$  care este biolomorf cu o bilă euclidiană. Există atunci un deschis Stein  $U$  în  $\mathbb{C}^n$  astfel încât  $\overline{W} \subset U$  și  $W$  este Runge în  $U$ ?

În articolul nostru am demonstrat că răspunsul la această ultimă întrebare este negativ. Pentru aceasta am construit un contraexemplu. Frontiera domeniului  $W$  construit de noi este  $C^\infty$  și strict pseudoconvexă cu excepția unui singur punct.

Menționăm că recent, plecând de la exemplul nostru, John Erik Fornaess și Erlend Fornaess Wold au reușit să construiască un contraexemplu la problema pusă de Filippo Bracci. Vezi:

John Erik Fornaess, Erlend Fornaess Wold: An embedding of the unit ball that does not embed into a Loewner chain, arXiv:1806.03591.

## Tineri implicați în proiect

Din echipa proiectului fac parte doi studenți masteranzi: Cipriana Anghel și Rareș Stan.

În luna mai a anului 2018 ei au participat la o școală de vară intitulată "Master Classe: Surfaces" în Marsilia, Franța. Acolo și-au consolidat cunoștințele de topologie algebrică și geometrie hiperbolică necesare Grantului "Volumes of hyperbolic and Einstein manifolds". Cursurile au fost ținute de experți în domeniu: Daniel Matignon, Frédéric Palési și Thierry Coulbois.

De asemenea, ei au participat la Heidelberg Laureate Forum, între 22 și 28 mai.

Din octombrie 2017 și în prima jumătate a anului 2018, masteranzii au aprofundat teorema de uniformizare a suprafețelor Riemann și au în curs de elaborare o lucrare în care sintetizează o demonstrație pentru această teoremă, accesibilă studenților de anul 4.

Din a doua jumătate a anului 2018 până în prezent, Cipriana Anghel și Rareș Stan își pregătesc lucrările de dizertație cu titlurile "Selberg Trace Formula" și "Atiyah-Singer Index theorem" sub îndrumarea directorului de proiect Sergiu Moroianu.

Director de proiect,  
C.S. I Dr. Sergiu Moroianu