Raport ştiinţific

privind implementarea proiectului

Volumul varietăţilor hiperbolice şi Einstein

Perioada: august - noiembrie 2017

Volumul (re)normalizat al unei 4-varietăţi hiperbolice convex co-compacte este exprimat în funcţie de caracteristica Euler a interiorului (un întreg). Pentru varietăţi Einstein asimptotic hyperbolice, apare un termen suplimentar, anume norma L^2 a tensorului Weyl (din invarianţa conformă a tensorului Weyl, în dimensiune 4 această normă este mereu finită pe varietăţi conform compacte).

Pentru varietăţi compacte cu bord, formula Gauss-Bonnet implică şi un termen de corecţie legat de a doua formă fundamentală a frontierei, furnizat de formula Allendoerfer-Weil.

Pornind de la formula Gauss-Bonnet pentru poliedre Riemaniene, am studiat în cadrul proiectului forma de transgresie a Paffianului curburii Riemaniene aplicată la varietăţi cu frontiere fibrate cu metrici de tip "edge". Exemple de astfel de frontiere fibrate sunt furnizate de varietăţile hiperbolice cu cuspuri de rang ne-maximal (echivalent, cu subgrupuri parabolice maximale de rang inferior dimensiunii).

Formula pe care o obţine S. Moroianu (împreună cu D. Cibotariu, profesor la Universidade Federal do Ceara, Brazilia) exprimă caracteristica Euler a interiorului (stratul de dimensiune maximală) în funcţie de integrala Pfaffianului (care e convergentă), plus un termen de corecţie care implică Pfaffianul bazei şi un invariant diferenţial al fibrei.

Rezultatele noastre preliminare implică un corolar despre inexistenţa metricilor plate cu o singularitate conică modelată pe un cât netrivial al sferei S^{2k+1} pentru $k \geq 1$. Pentru mai multe singularităţi de acest tip, ordinele grupurilor fundamentale ale componentelor conexe ale frontierei trebuie să satisfacă identitatea

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{|\Gamma_j|} \in \mathbb{Z}.$$

Amintim că o varietate complexă M se numeşte Stein dacă este biolomorfă cu o subvarietate închisă din $\mathbb{C}^n$ pentru un numar natural n. Un deschis Stein Ω din M se numeste Runge in M dacă aplicaţia de restricţie $\mathcal{O}(M) \to \mathcal{O}(\Omega)$ are imagine densă. Un compact $K \subset M$ se numeste olomorf convex în M dacă pentru orice punct $x \notin K$ există o funcţie olomorfă $f \in \mathcal{O}(M)$ astfel încât $|f(x)| > \max\{|f(z)| : z \in K\}$. Este bine cunoscut că un compact este olomorf convex dacă şi numai dacă are un sistem fundamental de vecinătăţi Runge.

În dimensiune 1, deci pentru suprafeţe Riemann deschise (sau, mai general, pentru spaţii complexe de dimensiune 1 fără componente ireductibile compacte) proprietate de a fi Runge este una de natură topologică. În dimensiune mai mare decât 1, lucrurile se schimbă radical. J. Wermer a arătat că pentru $n \geq 2$ exisă deschişi din $\mathbb{C}^n$ care sunt biolomorfi cu un polidisc dar nu sunt Runge în $\mathbb{C}^n$. Este uşor de văzut că un rezultat similar are loc şi pentru deschişi biolomorfi cu bile (afirmaţia nu este tautologică deoarece bila şi polidiscul nu sunt biolomorfe).

Mai mult, dat un deschis Ω din $\mathbb{C}^n$ care este biolomorf cu o bilă, nu se ştie dacă putem găsi un domeniu Fatou-Bieberbach W cu $\Omega \subset W \subset \mathbb{C}^n$ astfel încât Ω să fie Runge în W. (W se numeşte Fatou-Bieberbach dacă $W \neq \mathbb{C}^n$ şi W este biolomorf cu $\mathbb{C}^n$. Deci existenţa unor astfel de domenii este cunoscută de multa vreme, faptul că există domenii Fatou-Bieberbach care nu sunt Runge în $\mathbb{C}^n$ a fost demonstrat relativ recent.)

În primele luni ale acestui proiect am studiat următoarea problemă: dat un deschis Runge Ω din $\mathbb{C}^n$ putem găsi o vecinătate Stein D a lui $\overline{\Omega}$ astfel încât Ω să fie Runge în D? Rezultatele preliminare pe care le-am obţinut până acum par să indice că răspunsul este negativ. Observăm că un răspuns negativ la această problemă nu exclude posibilitatea existenţei unui domeniu Fatou-Bieberbach W cu Ω Runge în W deoarece W poate să nu conţină intreaga frontieră a lui Ω. Tehnica de demonstraţie pe care vrem să o folosim este intersecţia cu o familie bine aleasă de suprafeţe Riemann scufundate în

$\mathbb{C}^n$. Remarcăm că o astfel de abordare poate demonstra existenţa contraexemplelor dar nu poate duce la un răspuns pozitiv.

Dacă reuşim să construim contraexemple, următoare întrebare naturală este regularitatea frontierei lui Ω în astfel de exemple. Mai remarcăm că în dimensiune cel puţin 2, există deschişi Runge în $\mathbb{C}^n$, relativ compacţi, cu frontieră $\mathcal{C}^\infty$ a căror închidere nu este olomorf convexă. Un astfel de fenomen nu apare în dimensiune 1.

O altă problemă deschisă în acest context este următoarea: dat un deschis Ω din $\mathbb{C}^n$, biolomorf cu o bilă şi cu frontieră de clasă $\mathcal{C}^k$, pentru ce valori ale lui k putem demonstra că $\overline{\Omega}$ are un sistem fundamental de vecinătăţi Stein $\{D_j\}$ astfel încât Ω este Runge în D_j pentru orice j.

Tineri implicaţi în proiect

În această perioada au fost angajaţi doi masteranzi: **Cipriana Anghel** şi **George-Rareş Stan**. Amândoi au absolvit ciclul de licenţa al Facultăţii de Matematică a Universităţii din Bucureşti cu media generală 10 şi au fost admişi în programul de master al aceleaşi facultăţi în sesiunea din iulie 2017, tot cu media 10. Lucrările de licenţă le-au elaborat sub îndrumarea lui Sergiu Moroianu.

Titlurile lucrărilor au fost următoarele:

Cipriana Anghel: *Identităţi privind lungimile ortogeodezicelor pe suprafeţe hiperbolice.*

George-Rareş Stan: *Spectrul lungimilor geodezicelor simple pe toruri hiperbolice punctate.*

În prezent au început lucrările de dizertaţie tot sub îndrumarea lui Sergiu Moroianu. Cei doi masteranzi urmează în acest moment un reading course pe tema proiectului.

Director de proiect,
C.S. I Dr. Sergiu Moroianu