SCOALA NORMALA SUPERIOARA

EXAMEN DE ADMITERE 2002, DEPARTAMENTUL DE MATEMATICA

1. Fie E un spatiu vectorial de dimensiune finita si u, v doua endomorfisme ale lui E verificand relatia $uv - vu = u$. Calculati $u^k v - vu^k$ si aratati ca u este nilpotent.

2. Consideram ecuatia:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Fie $a_1^0, ...a_n^0$ numere reale pentru care ecuatia de mai sus are n radacini reale distincte. Demonstrati ca exista o vecinatate a punctului $(a_1^0, ...a_n^0)$ in $\mathbb{R}^n$ in care ecuatia de mai sus are n solutii $x_1(a_1, ..., a_n), ..., x_n(a_1, ...a_n)$ de clasa C^∞ in parametrii $a_1, ...a_n$.

3. Pentru fiecare polinom de trei variabile reale $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$, consideram multimea zerourilor

$$Z_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0\} \in \mathbb{R}^3$$

ca spatiu topologic, cu topologia indusa de topologia lui $\mathbb{R}^3$. Clasificati pina la homeomorfism spatiile topologice Z_f, cind f parcurge multimea polinoamelor ireductibile de grad 2 in $\mathbb{R}[x, y, z]$.

[Doua spatii topologice se numesc homeomorfe daca exista intre ele o aplicatie bijectiva, continua, cu inversa continua.]

4. Gasiti, pentru fiecare numar real $\epsilon \geq 0$ o submultime masurabila de masura Lesbegue ϵ in $\mathbb{R}^2$ pentru care intersectia cu orice cerc este nevida. Demonstrati ca multimea gasita are aceste doua proprietati.

5. Fie $f(z)$ o functie continua, cu valori complexe definita pe discul unitate $|z| \leq 1$. Presupunem ca f este olomorfa pe $|z| < 1$ si ca $f(e^{i\theta}) = 0$ pentru $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Aratati ca $f \equiv 0$.

6. Gasiti o extindere galoisiana a corpului numerelor rationale $\mathbb{Q}$ de grup Galois $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Date: 30 septembrie 2002, orele 9,00-13,30.