

# Rupture ductile des films minces : application aux avalanches de neige

**Oana Lupaşcu-Stamate**

Institut de Statistique Mathématique et Mathématiques Appliquées de l'Académie Roumaine,  
Bucarest

**Joint work with Ioan R. Ionescu in the frame of a project RESCI-ECO of the L'Agence  
Universitaire de la Francophonie (AUF)**

Université Sorbonne Paris Nord, le 6 mai 2025

**L'objectif:** Modélisation du déclenchement d'une avalanche (sols, neige ou autre géo-matériaux) sur une surface avec topographie (montagnes, vallées,...) : modélisation mécanique, mathématique et numérique

1. Modélisation mécanique 3-D
2. Écoulement de faible épaisseur
3. Problème d'analyse limite et déclenchement de la rupture
4. Approche numérique et simulations

# Rupture comme déclenchement d'une avalanche

avalanche.mp4

Caractériser le déclenchement d'une avalanche dense

- quand une avalanche se produit? (charge limite)
- comment l'avalanche démarre? (le profil de la vitesse)

Démarche :

- on formule le problème asymptotique d'un film mince
- on étudie le problème de la charge limite associé
- on propose une stratégie numérique pour calculer le facteur de sûreté, la courbe de rupture, et le champ de vitesse du déclenchement

# Description géométrique de la surface basale

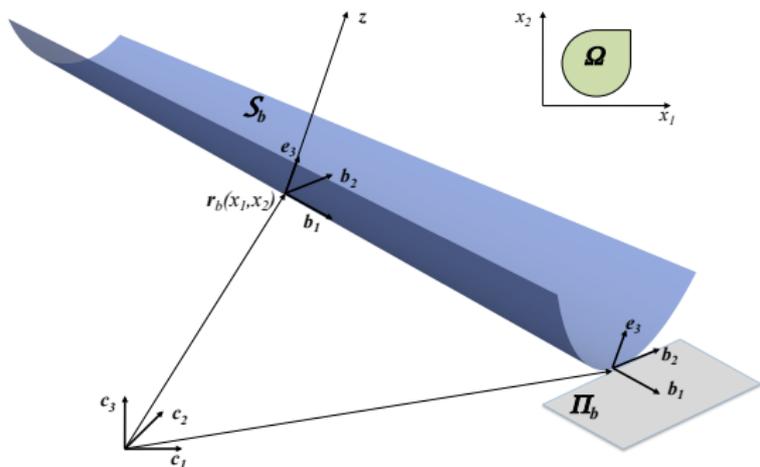
La surface basale  $\mathcal{S}_b$  : une représentation paramétrique

$\mathbf{r}_b(x_1, x_2) = B_1(\mathbf{x})\mathbf{c}_1 + B_2(\mathbf{x})\mathbf{c}_2 + B_3(\mathbf{x})\mathbf{c}_3$ , les coordonnées paramétriques  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ , la base covariante

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2}{g}.$$

Coordonnées curvilignes des surfaces parallèles :  $\mathbf{r}(\mathbf{x}, z) = \mathbf{r}_b(\mathbf{x}) + z\mathbf{e}_3(\mathbf{x})$ .

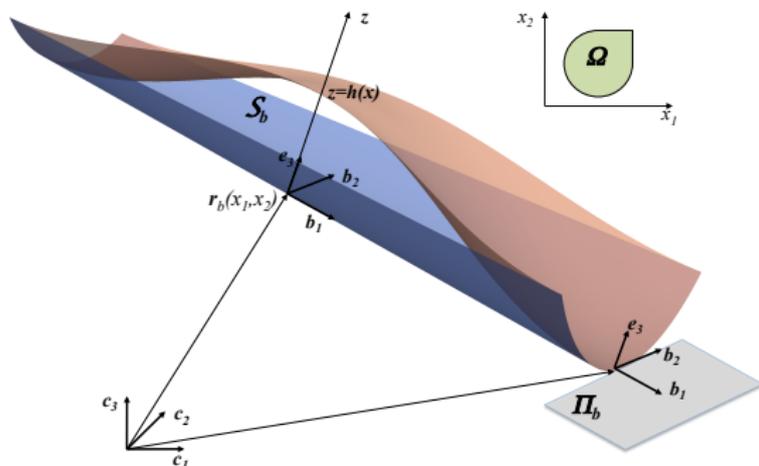
Le plan tangent:  $\Pi_b = Sp\{\mathbf{b}_1(\mathbf{x}), \mathbf{b}_2(\mathbf{x})\}$ .



# Description géométrique de'un film mince

La fonction de l'épaisseur  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \rightarrow z = h(t, \mathbf{x})$ .

$$\mathcal{D}(t) = \{\mathbf{r}(\mathbf{x}, z) ; \mathbf{x} \in \Omega, 0 \leq z \leq h_0(t, \mathbf{x})\}, \quad \frac{h_0}{L_c} \ll 1$$



$\Gamma_s(t) = \{(\mathbf{x}, z) ; \mathbf{x} \in \Omega, z = h_0(\mathbf{x}) > 0\}$  : frontière libre

$\Gamma_b(t) = \{(\mathbf{x}, 0) ; \mathbf{x} \in \Omega, h_0(\mathbf{x}) > 0\}$  : frontière basale

$\Gamma_l(t) = \{(\mathbf{x}, z) ; \mathbf{x} \in \partial\Omega, h(\mathbf{x}) > z > 0\}$  : frontière latérale

# Formulation du problème de l'analyse limite

Le model visco-plastique "reduit" des films minces [I. R Ionescu 2013]

Le solide/fluide est totalement au repos dans sa configuration initiale ssi:

$$\begin{aligned} G(\Psi) &= \int_{\Omega} h_0 \kappa_0 \sqrt{\frac{1}{2} [|D_T(\Psi)|^2 + (\operatorname{div}_T \Psi)^2]} g dx - \frac{1}{\operatorname{Fr}^2} \int_{\Omega} \rho h_0 f_N C_f |\Psi| g dx \\ &\geq \frac{1}{\operatorname{Fr}^2} \int_{\Omega} h_0 \rho [\mathbf{f}_T \cdot \Psi - \frac{f_N}{2} h_0 \operatorname{div}_T \Psi] g dx = L(\Psi), \end{aligned} \quad (*)$$

$$\Psi \in V =: \{ \Psi \in H^1(\Omega)^2 ; \Psi(x) \in \Pi_b(x) ; \Psi = 0 \text{ on } \Gamma_0 \},$$

où  $L(\Psi)$  est la puissance des forces extérieures,

$G(\Psi)$  la puissance de dissipation plastique et frictionnelle.

$\rho$  densité de masse,  $g = \sqrt{|\mathbf{b}_1|^2 |\mathbf{b}_2|^2 - (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2)^2}$  la metrique de  $\mathcal{S}_b$

$\kappa_0$  seuil de plasticité assempototique de von-Mises dans les film minces

$C_f$  coefficient de frottement sur la surface basale

$f_N$  force normale gravitationnelle

$\mathcal{F}_T$  force tangentielle gravitationnelle

$\operatorname{Fr}^2 = \frac{\Sigma_c}{\rho_c L_c \gamma_g}$  le nombre de Froude

- gradient d'un scalaire  $\Phi$

$$\nabla_T \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \mathbf{b}^k = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} g^{ki} \mathbf{b}_i,$$

- un champ de vecteurs agissant sur  $\mathcal{S}_b$ ,  
 $\Psi(x) = \Psi^i(x) \mathbf{b}_i(x) = \Psi_i(x) \mathbf{b}^i(x)$

$$\nabla_T \Psi = \left( \frac{\partial \Psi^i}{\partial x_k} + \Gamma_{jk}^i \Psi^j \right) \mathbf{b}^k \otimes \mathbf{b}_i = \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} - \Gamma_{ki}^j \Psi_j \right) \mathbf{b}^k \otimes \mathbf{b}^i$$

$$D_T(\Psi) = \frac{1}{2} (\nabla_T \Psi + \nabla_T^t \Psi),$$

$$\operatorname{div}_T \Psi = \frac{\partial \Psi^k}{\partial x_k} + \Psi^i \Gamma_{ik}^k = g^{ki} \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} - \Psi_j \Gamma_{ki}^j \right)$$

- les symboles de Christoffel :  $\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_b}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \mathbf{b}^k$ .

On introduit le **facteur de sécurité** (ou **la charge limite**) par

$$\lambda^* =: \inf_{\Psi \in V, L(\Psi)=1} G(\Psi),$$

(\*) est équivalent à

**Le solide/fluide est au repos si et seulement si  $\lambda^* \geq 1$ .**

## DVDS (Discontinuous Velocity Domain Splitting method)

DVDS : une nouvelle méthode de l'analyse limite pour calculer le coefficient de sécurité [I. R. Ionescu, E. Oudet, 2010]

Pour un écoulement anti-plan [I. R. Ionescu, Lachand-Robert 2005], l'approche DVDS se reduire au problème du Cheeger non-homogène

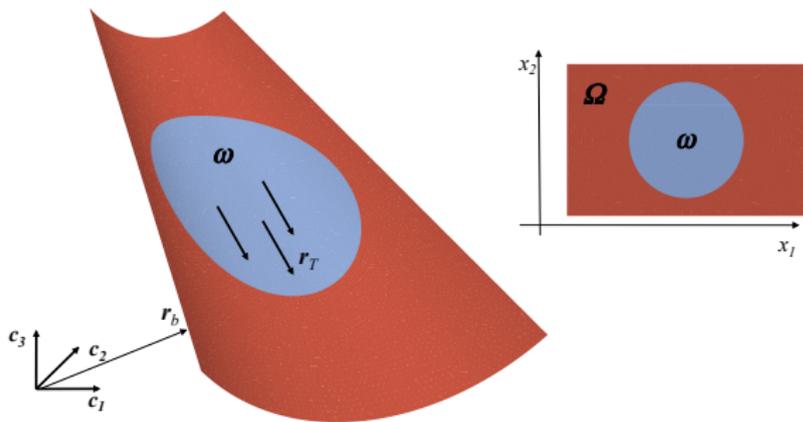
- La méthode DVDS donne la solution exacte du problème de l'analyse limite
- La surface de rupture est très lisse ( $C^2$ ) à l'intérieur du solide
- Si la surface de rupture intersecte la frontière, alors elle est tangentielle à la frontière où la vitesse est imposée, et normale à la frontière où les charges sont imposées.

# Adaptation de DVDS

On considère une classe spéciale de vitesses :

$$\mathcal{V}_{DVDS}^{shallow} = \{\mathbf{r}_T \mathbf{1}_\omega, \mathbf{r}_T \in \mathcal{R}_T, \omega \subset \Omega\} \subset BD(\Omega)$$

où  $\mathbf{r}_T$  appartient à  $\mathcal{R}_T$  et  $\mathbf{1}_\omega$  est la fonction caractéristique d'un sous-domaine  $\omega \subset \Omega$  (c'est-à-dire  $\mathbf{1}_\omega(x) = 1$  si  $x \in \omega$  et  $\mathbf{1}_\omega(x) = 0$  si  $x \notin \omega$ ).



Pour tous  $\mathbf{r}_T \in \mathcal{R}_T$  on a  $D_T(\mathbf{r}_T) = 0$ .

$\mathcal{R}_T$  est le noyau du tenseur de la vitesse des déformations tangentielles  $D_T$ .

$$\mathcal{R}_T =: \{ \mathbf{r}_T(x) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_i(x) + (\mathbf{r}_b(x) \wedge \mathbf{b}_i(x)) \cdot \mathbf{w}) \mathbf{b}^i(x) ; \mathbf{a}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \}.$$

$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_T(\mathbf{a}, \mathbf{w})$  est la projection sur le plan tangent d'un mouvement rigide 3-D.

- le corps est divisé en deux sous-domaines : sur un sous-domaine la vitesse est nulle et sur l'autre la vitesse correspond à un mouvement rigide
- le champ de vitesse discontinu est déterminé seulement par la forme d'un sous-domaine (plus précisément par son bord) et par un mouvement rigide
- la déformation est concentrée (localisée) au bord d'un sous-domaine et l'énergie plastique dépend seulement de la forme du sous-domaine et de la vitesse rigide

# Estimation DVDS de la charge limite

On obtient la fonctionnelle dépendante de forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\omega, \mathbf{a}, \mathbf{w}) &= \mathcal{J}(\omega, \mathbf{r}_T(\mathbf{a}, \mathbf{w})) := \frac{\mathcal{N}(\omega, \mathbf{r}_T(\mathbf{a}, \mathbf{w}))}{\mathcal{M}(\omega, \mathbf{r}_T(\mathbf{a}, \mathbf{w}))} = \\ &= \frac{\int_{\partial\omega} \frac{1}{2} h_0 \kappa_0 \sqrt{[|\mathbf{r}_T|^2 |\mathbf{n}_T|^2 + 3(\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{n}_T)^2]} g dS + \int_{\omega} -\frac{\rho}{\text{Fr}^2} f_N h_0 C_f |\mathbf{r}_T| g dx}{\left[ \int_{\omega} \frac{\rho}{\text{Fr}^2} h_0 \mathbf{f}_T \cdot \mathbf{r}_T g dx + \int_{\partial\omega} \frac{\rho}{2\text{Fr}^2} h_0^2 f_N \mathbf{r}_T \cdot \mathbf{n}_T g dS \right]_+}, \end{aligned}$$

où  $[s]_+ = (s + |s|)/2$  est la partie positive.

L'estimation DVDS de la charge limite :

$$\lambda_1^* =: \inf_{\omega \subset \Omega, \mathbf{r}_T \in \mathcal{R}_T} J_T(\omega, \mathbf{r}_T) \geq \lambda^* \quad (*)$$

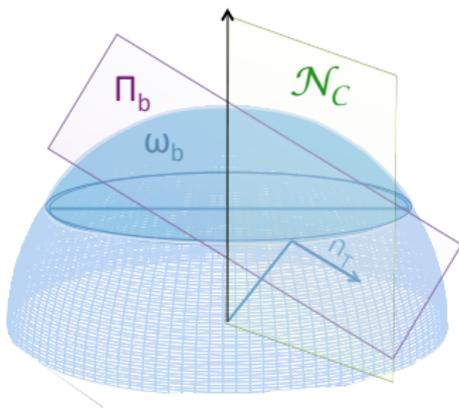
Le champ de vitesse du déclenchement calculé avec DVDS :

$$\mathbf{v}^* =: \mathbf{r}_T^* \mathbf{1}_{\omega^*}, \quad J_T(\omega^*, \mathbf{r}^*) = \lambda_1^*.$$

# Normale tangentielle sur un sous-domaine $\omega_b$

Soit  $\omega$  un sous-domaine de  $\Omega$  tel que  $\omega_b = \{\mathbf{r}_b(x) ; x \in \omega\}$ .

La normale tangentielle,  $\mathbf{n}_T$ , sur le sous-domaine  $\omega_b$  de  $\mathcal{S}_b$  est l'intersection de  $\mathcal{N}_C$ , le plan normal à  $\partial\omega_b$ , avec le plan tangent  $\Pi_b$  à la surface basale  $\mathcal{S}_b$ , c'est-à-dire  $Sp\{\mathbf{n}_T\} = \Pi_b \cap \mathcal{N}_C$ .



Représentation de la normale tangentielle  $\mathbf{n}_T$  sur une courbe de latitude  $\partial\omega_b$ .