UNE COURBE PLANE À NŒUDS ET À CUSPS OBSTRUÉE DE DEGRÉ PLUS BAS QUE LES EXEMPLES CONNUS (A PLANE CURVE WITH NODES AND CUSPS OF LOWER DEGREE THAN KNOWN EXAMPLES)

AUBRUN J. EDO

Communicated by Alexandru Dimca

J. Wahl proved the existence of a scheme H parametrizing the plane curves of fixed degree having some fixed numbers of nodes and cusps as its only singularities. Wahl builts from Mumford's example, a family of plane curves with nodes and cusps whose general member is a singular point of the scheme H but smooth in the reduced scheme H_{red}. Using the same method as Wahl, S. Guffroy builts a family of plane curves with nodes and cusps whose general member is a singular point of the scheme H and singular in the reduced scheme H_{red}. In this work, we construct, like Guffroy, from Sernesi's example, a family of plane curves with nodes and cusps of lower degree than those of Wahl or Guffroy. This result is the best known and the singularity is different from that appearing in Wahl or Guffroy.

AMS 2020 Subject Classification: 14C05, 14H50, 14H20, 14J17, 14N05.

Key words: Hilbert schemes, plane curves, singularities, projective techniques in algebraic geometry.

1. INTRODUCTION

On considère les courbes planes de degré d avec δ nœuds et κ cusps (d, δ et κ fixés) comme seules singularités (Il s'agit ici de nœuds et cusps ordinaires). J. Wahl [15] a montré que ces courbes sont représentées par un schéma $\mathcal{X}_{d,\delta,\kappa}$ qui peut être singulier. Dans ce cas on dit que ces courbes sont obstruées. En langage classique : il existe des courbes planes avec nœuds et cusps dont la série linéaire caractéristique est incomplète.

Dans [15], Wahl construit une famille de courbes planes avec nœuds et cusps dont le membre général est un point singulier du schéma $\mathcal{X}_{d,\delta,\kappa}$ mais lisse dans $(\mathcal{X}_{d,\delta,\kappa})_{red}$. Il exhibe notamment une courbe plane obstruée de degré 104, avec 3636 nœuds et 900 cusps.

En désignant par $[C]$ le point de $\mathcal{X}_{d,\delta,\kappa}$ correspondant à une courbe C, il se pose alors la question, voir [2, p.109, (6)], de l'existence d'une courbe C plane

obstruée avec comme seules singularités des nœuds et des cusps, telle que $[C]$ soit singulier dans $(\mathcal{X}_{d,\delta,\kappa})_{red}$. Ainsi dans [3], en utilisant la même méthode que Wahl, S. Guffroy construit un tel exemple. Il obtient en particulier une courbe plane obstruée de degré 216, avec 17632 nœuds et 2856 cusps, représentée par un point singulier de $(\mathcal{X}_{216,17632,2856})_{red}$.

On fait un travail analogue à celui de Wahl ou de Guffroy et on construit, à partir de l'exemple de Sernesi, une courbe plane obstruée avec comme seules singularités des nœuds et des cusps de degré plus bas que les exemples connus. Il n'y a pas de meilleur résultat connu. La singularité observée ici est différente de celle apparaissant chez Wahl ou Guffroy.

Après quelques rappels, on décrira l'exemple de Sernesi comme fait dans [6] puis on construira une famille de courbes planes intègres de degré 96, avec 3088 nœuds et 780 cusps, représentées par des points singuliers de $(\mathcal{X}_{96,3088,780})_{red}$.

2. RAPPELS ET NOTATIONS

On désigne par S l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[X_0, ..., X_n]$. Si $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ est un S-module gradué, on note $M(p)$ le module gradué décalé défini par : $M(p)_n = M_{n+p}$. Tout S-module gradué de type fini admet une résolution finie.

Soit X un schéma, on note $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural et, si X est fermé dans $\mathbb{P}^n$= Proj S, $\mathcal{I}_X$ le faisceau d'idéaux le définissant dans $\mathbb{P}^n$. Si X est lisse, K_X désigne le diviseur canonique et ω_X le faisceau canonique. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, $H^i(X, \mathcal{F})$ (ou $H^i\mathcal{F}$ en abrégé) désignera le i-ème groupe de cohomologie et $h^i(X, \mathcal{F})$ (ou $h^i\mathcal{F}$) sa dimension.

On pose $H^i_*\mathcal{F} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H^i\mathcal{F}(n)$. C'est un S-module gradué.

Une courbe de $\mathbb{P}^3$ est un sous-schéma fermé purement de dimension 1, localement Cohen-Macaulay, c'est-à-dire sans points immergés. Une courbe de $\mathbb{P}^3$ est définie par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_C$, et par un idéal saturé $I_C = H^0_*\mathcal{I}_C$ de $R = \mathbb{C}[X, Y, Z, T]$.

Une courbe C de $\mathbb{P}^3$ est dite arithmétiquement de Cohen-Macaulay, en abrégé ACM, si elle vérifie $h^1\mathcal{I}_C(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On utilisera les notions de liaison par intersection complète et de biliaison. On se reportera à [11] et [12] pour plus de détails. Nous rappelons dans cette partie les définitions et résultats nécessaires.

Liaison

Définition 2.1. Soit C une courbe de $\mathbb{P}^3$, X une courbe intersection complète de deux surfaces de degrés s et t contenant C. L'image canonique du

faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_X)$ dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X$ est un idéal $\mathcal{I}_{\Gamma/X}$ de $\mathcal{O}_X$ qui définit une courbe Γ contenue dans X. De la même manière on a un isomorphisme: $\mathcal{I}_{C/X} \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}(\mathcal{O}_\Gamma, \mathcal{O}_X)$. On dit que C et Γ sont liées (algébriquement) par X (ou par les surfaces de degrés s et t définissant X).

On parlera de liaison $s \times t$ pour une liaison par deux surfaces de degrés respectifs s et t.

Proposition 2.2. *Si C est de degré d et de genre arithmétique g, alors le degré d_Γ et le genre arithmétique g_Γ de Γ sont donnés par :*

$$\begin{aligned} d_\Gamma + d &= st \\ g_\Gamma - g &= (\tfrac{1}{2}(s+t) - 2)(d_\Gamma - d). \end{aligned}$$

Définition 2.3. Soit C une courbe de $\mathbb{P}^3$. Le module de Rao de C est le R-module gradué $M_C = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} H^1 \mathcal{I}_C(k)$.

Proposition 2.4. *On a $M_\Gamma = M_C^*(s+t-4)$ où M_C^* désigne le module gradué dual de M_C.*

Théorème 2.5. *Soit C une courbe ACM de $\mathbb{P}^3$ et*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_C \longrightarrow \mathcal{B}_C \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0$$

une résolution localement libre du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_C$ de C. On note X une courbe intersection complète de deux surfaces de degrés respectifs s et t contenant C et distincte de C. Soit Γ la courbe liée à C par X. Alors Γ est ACM et une résolution localement libre du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_\Gamma$ de Γ est donnée par :

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_C^\vee(-s-t) \longrightarrow \mathcal{A}_C^\vee(-s-t) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-t) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-s) \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma \longrightarrow 0.$$

Biliaison

Définition 2.6 (Biliaison élémentaire (s,h)). Soit C une courbe de $\mathbb{P}^3$, Q et S deux surfaces de degrés respectifs s et t contenant C et sans composante commune. On note X l'intersection complète de S et Q et Γ la courbe liée à C par X. S'il existe une surface S' de degré $t+h$, $h \in \mathbb{Z}$, contenant Γ et sans composante commune avec Q, l'intersection complète Y de Q et S' permet de lier Γ à une courbe C'. Dans ce cas, on dit que C' est obtenue à partir de C par une biliaison élémentaire de degré s et de hauteur h, ou une biliaison élémentaire (s,h).

Proposition 2.7. *Si C est de degré d et de genre arithmétique g, alors le degré d' et le genre arithmétique g' de C' sont donnés par:*

$$\begin{aligned} d' &= d + sh \\ g' &= g + hd + \tfrac{1}{2}hs(s+h-4). \end{aligned}$$

Proposition 2.8. *On a* $M_{C'} = M_C(h)$.

On note $H_{d,g}$ l'ouvert du schéma de Hilbert représentant les courbes de $\mathbb{P}^3$ de degré d et de genre arithmétique g et $\mathcal{H}_{d,g}$ l'ouvert paramétrant les courbes lisses et connexes de degré d et de genre g. On dira famille de courbes pour une famille plate de courbes sur un schéma sur $\mathbb{C}$, *i.e*, pour un morphisme plat $\mathcal{C} \to S$ (S irréductible) dont les fibres géométriques sont des courbes de même polynôme de Hilbert. La dimension d'une famille de courbes est celle du sous-schéma de $H_{d,g}$ représentant les membres de $\mathcal{C}$. Pour une courbe C, $[C]$ est le point qui la représente dans $H_{d,g}$.

3. LA MÉTHODE

On précise d'abord les différents foncteurs de déformations intervenant dans l'article de Wahl dont nous avons besoin.

On note $\mathfrak{E}ns$ la catégorie des ensembles et $\mathfrak{C}$ celle des $\mathbb{C}$-algèbres artiniennes locales et finies où les flèches sont des homomorphismes locaux d'algèbres. Les foncteurs considérés ensuite vont de $\mathcal{C}$ vers $\mathfrak{E}ns$, sont covariants et envoient $\mathbb{C}$ sur un singleton.

Pro-représentabilité, morphisme lisse de foncteurs :

• Soit R une $\mathbb{C}$-algèbre locale complète d'idéal maximal m_R telle que $R/m_R^n \in \mathfrak{C}$ pour tout entier n. On définit un foncteur h_R par $h_R(A) = Hom(R, A)$. Un foncteur G est dit pro-représentable s'il existe un isomorphisme $h_R \xrightarrow{\sim} G$.

• Un morphisme de foncteurs $F \to G$ est lisse si $A' \to A$ surjectif implique $F(A') \to F(A) \times_{G(A)} G(A')$ surjectif ; on dira alors que F et G sont liés de façon lisse. Si F et G sont pro-représentés respectivement par R_F et R_G, alors $F \to G$ est un morphisme lisse si et seulement si R_F est un anneau de séries formelles sur R_G

Les trois foncteurs d'intérêt :

• Soit X un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n$. On note H_X le foncteur de Hilbert, *i.e* des déformations de X; $H_X(A)$ est l'ensemble des $\bar{X} \subset \mathbb{P}^n \times SpecA$ tels que $\bar{X}$ est plat sur $SpecA$ et $\bar{X} \times_{SpecA} Spec\ \mathbb{C} = X$.

• Soit X une hypersurface réduite de $\mathbb{P}^n$, H'_X désigne le foncteur des déformations localement triviales de X, *i.e* qui conservent (formellement) les singularités de X.

• Soit X un schéma normal, Y une variété projective lisse et $f : X \to Y$ un morphisme fini et plat. Une déformation de X au dessus de Y vers A est un carré

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \bar{X} \\ \downarrow f & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y_A = Y \times_{Spec\mathbb{C}} SpecA \end{array}$$

où $\bar{X} \to Y_A$ est plat et tel que l'application naturelle $X \to \bar{X} \times_{Y_A} Y$ est un isomorphisme. Deux déformations $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$ sont dites équivalentes s'il existe un Y_A-isomorphisme $\bar{X}_1 \to \bar{X}_2$ induisant un isomorphisme entre les diagrammes définissant $\bar{X}_1$ et $\bar{X}_2$. On note $F(f)$ le foncteur défini par: $F(f)(A)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de déformation de X au dessus de Y vers A.

D'après la proposition 3.2.5 de [15], H_X, H'_X et F(f) sont pro-représentés par des anneaux locaux complets que l'on note encore H_X, H'_X et $F(f)$.

On aura aussi besoin du résultat suivant

Théorème 3.1 (Wahl). *Il existe un schéma $\mathcal{X}_{d,\delta,\kappa}$ et une famille de courbes $\mathcal{E} \to \mathcal{X}_{d,\delta,\kappa}$ dont les fibres sont des courbes planes de degré d avec δ nœuds et κ cusps (d,δ et κ fixés) comme seules singularités et tels que toute autre famille de courbes du même type $\mathcal{E} \to \mathcal{X}'$ ($\mathcal{X}'$ un schéma algébrique sur $\mathbb{C}$) se factorise de façon unique par un morphisme $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}_{d,\delta,\kappa}$. De plus, $\mathcal{X}_{d,\delta,\kappa}$ est la réunion disjointe de sous schémas localement fermés de $\mathbb{P}^N$ où $N = d(d+3)/2$.*

En fait, $\mathcal{X}_{d,\delta,\kappa}$ représente le foncteur $J_{d,\delta,\kappa}$: { Schéma sur $\mathbb{C}$} $\to$ $\mathfrak{E}ns$ défini par :

$J_{d,\delta,\kappa}(T) =$ {familles plates $C \subset \mathbb{P}^2 \times T$ de courbes planes de degré d, localement triviales et dont les fibres sont des courbes irréductibles planes ayant pour singularités δ nœuds et κ cusps}.

Soit $[\gamma]$ un point de $\mathcal{X}_{d,\delta,\kappa}$. On s'intéresse à la lissité de $(\mathcal{X}_{d,\delta,\kappa})_{red}$ en $[\gamma]$ c'est-à-dire à la régularité de l'anneau H'_γ . De même, si C est une courbe de $\mathbb{P}^3$, $[C] \in H_{d,g}$ est un point lisse si et seulement si l'anneau H_C est régulier.

On rappelle donc la démarche:

On part d'une famille de courbes lisses et connexes de $\mathbb{P}^3$ dont les points correspondants dans le schéma de Hilbert sont singuliers. Soit C une de ces courbes.

On calcule les constantes de Wahl de la courbe C dont voici les définitions.

Définition 3.2. (Constantes de Wahl)

$$\begin{array}{rcl} r & = & min\{max\{\deg P_i\} \mid I_C = (P_1, ..., P_n)\} \\ r_0 & = & min\{n \in \mathbb{Z} \mid m \geq n \Rightarrow h^1\mathcal{I}_C(m) = 0\} \\ m_0 & = & min\{n \in \mathbb{Z} \mid m \geq n \Rightarrow h^1\mathcal{I}_C^2(m) = 0\} \end{array}$$

1. Si C n'est pas intersection complète, alors pour $n \geq 2r$, il existe une surface irréductible S avec $\deg S = n$ et $S_{Sing} = C$, chaque point de C étant un point double ordinaire ou un point pince de S [15, Th 3.5.2, p.570].

2. Si de plus, $n \geq m_0$, H'_S et H_C sont liés de façon lisse ([7]).

3. Soit Y la normalisée de S et f le morphisme composé $Y \to S \to \mathbb{P}^2$ où la seconde flèche désigne la projection générique de S sur $\mathbb{P}^2$. Alors Y est lisse, la courbe de ramification de f est une courbe γ, plane et intègre, dont les seules singularités sont des nœuds et des cusps ordinaires. Dans cette situation, le corollaire 3.2.9 de [15] entraîne l'existence d'un isomorphisme $H'_\gamma \to F(f)$.

4. Si $n \geq r_0 + 5$ et $h^2\mathcal{I}_C(n-5) = 0$, le théorème 3.4.10 de l'article de Wahl implique la lissité du morphisme $H'_S \to F(f)$.

5. On suppose C de degré d et de genre g. Les formules donnant le degré d_n de γ , δ_n son nombre de nœuds, et κ_n son nombre de cusps sont établies de manière rigoureuse dans [1, p.325]. On a :

$$\begin{array}{rcl} d_n & = & n(n-1) - 2d \\ \delta_n & = & \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3) - 2d(n^2 - 5n + 9) + 2d^2 - 4g + 4 \\ \kappa_n & = & n(n-1)(n-2) - 3d(n-2). \end{array}$$

Dès que toutes les conditions numériques sont remplies, on dispose de deux morphismes lisses de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} H'_S & \xrightarrow{\alpha} & H'_\gamma \\ \downarrow & & \\ H_C & & \end{array}$$

On conclut : H'_S est un anneau de séries formelles sur H_C, donc obstrué avec même type formel de singularité. H_C étant réduit et non régulier, il en est de même de H'_S. D'autre part, H'_γ jouit également de ces deux propriétés grâce la lissité de α, et $[\gamma]$ est un point singulier de $(\mathcal{X}_{d_n,\delta_n,\kappa_n})_{red}$.

Pour construire l'exemple recherché, on considère l'exemple de Sernesi ([14]), il s'agit d'une courbe correspondant à un point singulier du schéma de

Hilbert. Le point correspondant à la courbe de Sernesi est singulier car il vit à l'intersection de deux composantes irréductibles.

On apporte quelques précisions sur la courbe de Sernesi (Voir [14] et [6] pour plus de détails).

4. COURBE DE SERNESI

Dans [6, ex 13.2, p.96] on décrit la courbe de Sernesi comme suit:

On considère une surface quartique non singulière S de $\mathbb{P}^3$ contenant deux droites disjointes L_1, L_2. Le système linéaire $|2H + L_1 + L_2|$ n'a pas de points de base, on déduit aussitôt que le diviseur $4H + L_1 + L_2$ est très ample. Par conséquent il existe des courbes lisses et irréductibles dans le système linéaire $|4H + L_1 + L_2|$. Soit C une de ces courbes, alors C est obtenue par biliaison élémentaire $(4, 4)$ à partir de la réunion de deux droites disjointes. Ainsi C est une courbe de $\mathbb{P}^3$, de degré $d = 18$ et de genre $g = 39$ avec $h^1\mathcal{I}_C(4) = 1$.

On a $h^1\mathcal{O}_C(4) = 1$ et de la suite exacte

$$0 \longrightarrow N_{C/S} \longrightarrow N_C \longrightarrow N_S \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

on déduit que $H^1 N_C \neq 0$ et $h^0 N_C > 72$.

Considérons maintenant une courbe C de $\mathbb{P}^3$, intègre de degré 18 et de genre 39 avec $h^0\mathcal{I}_C(3) = 0$ et $h^1\mathcal{I}_C(4) = 1$. On distingue deux cas selon que C soit sur une surface quartique ou non.

Cas 1: Si $h^0\mathcal{I}_C(4) = 0$ alors on peut effectuer une liaison 5×5. La courbe D liée à C est de degré 7 et de genre 6 avec $h^1\mathcal{I}_D(2) = 1$ et $h^1\mathcal{O}_D(2) = 0$. On en déduit que $h^0\mathcal{I}_D(2) = 2$ ce qui est impossible puisqu'il n'existe pas de courbes de degré 7 et de genre 6 contenues dans deux surfaces distinctes de degré 2.

Cas 2: Si $h^0\mathcal{I}_C(4) \neq 0$, alors C est contenue dans une surface quartique irréductible S et on a $h^1\mathcal{O}_C(4) = 1$.

Par ailleurs on a la suite exacte [5, 2.10]

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(C - 4H) \longrightarrow \omega_C(-4) \longrightarrow 0$$

En utilisant la dualité de Serre sur C, on a $h^0\mathcal{O}_S(C - 4H) \neq 0$ et il existe un diviseur effectif $D \sim C - 4H$. En d'autres termes, C est obtenue par biliaison à partir de D et donc D est de degré 2 et de genre -1. Puisque la famille des courbes de degré 2 et de genre -1 est irréductible [6, ex 8.8(b), p.70] alors la famille $\mathcal{C}$, des courbes C de $\mathbb{P}^3$, intègres de degré 18 et de genre 39

avec $h^0\mathcal{I}_C(3) = 0$ et $h^1\mathcal{I}_C(4) = 1$, est irréductible de dimension 71 [6, exo 13.2(c) p. 97]. Cette famille contient bien les courbes lisses du système linéaire $|4H + L_1 + L_2|$.

Vu que $71 < 72 = 4d$, alors $\mathcal{C}$ est contenue dans une composante irréductible de dimension > 71 du schéma de Hilbert. Plus précisément $\mathcal{C}$ est contenue dans l'intersection de deux familles irréductibles, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, de courbes ACM de $\mathbb{P}^3$, de dimension 72 [6, ex 13.3 p. 98].

Apportons quelques précisions sur les familles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Soit C une courbe ACM de $\mathbb{P}^3$, de degré 18 et de genre 39, alors C n'est pas contenue dans une surface de degré ≤ 3 [6, ex 8.12.a p.73]. On distingue deux cas selon que C soit sur une surface quartique ou non.

1. La famille $\mathcal{C}_1$.

Si C est contenue dans une surface quartique alors on peut effectuer une liaison 4×6. La courbe ACM liée à C est de degré 6 et de genre 3. La famille des courbes ACM de $\mathbb{P}^3$, de degré 6 et de genre 3 est irréductible [6, ex 8.7.d, p. 70]. Il en résulte que la famille $\mathcal{C}_1$ des courbes ACM de $\mathbb{P}^3$, de degré 18 et de genre 39, contenues dans une quartique, est irréductible de dimension 72 [6, ex 8.12.b, p.73].

La courbe ACM de $\mathbb{P}^3$, de degré 6 et de genre 3 est obtenue par biliaison élémentaire $(3, 1)$ à partir d'une cubique gauche. Une résolution du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_1$ de cette courbe est donnée par:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^3 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^4 \longrightarrow \mathcal{I}_1 \longrightarrow 0.$$

On déduit donc une résolution du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{C_1}$ de la courbe générique de la famille $\mathcal{C}_1$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-7)^4 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6)^4 \longrightarrow \mathcal{I}_{C_1} \longrightarrow 0.$$

2. La famille $\mathcal{C}_2$.

Si C n'est pas contenue dans une surface quartique alors on peut effectuer une liaison 5×5. La courbe ACM liée à C est de degré 7 et de genre 6. Les courbes ACM de degré 7 et de genre 6 de $\mathbb{P}^3$ sont tracées sur une quadrique et sont de type $(3, 4)$ [6, ex 8.12.c, p.73]. Elles forment une famille irréductible de dimension 28. il en résulte que la famille $\mathcal{C}_2$ des courbes ACM de $\mathbb{P}^3$, de degré 18 et de genre 39, qui ne sont pas contenues dans une quartique, est irréductible de dimension 72 [6, ex 8.12.b p.73].

La courbe ACM de degré 7 et de genre 6 est liée à une droite par deux surfaces de degrés respectifs 2 et 4. Une résolution du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_2$ de cette courbe est donnée par :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^2 \longrightarrow \mathcal{I}_2 \longrightarrow 0.$$

On déduit donc une résolution du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_{C_2}$ de la courbe générique de la famille $\mathcal{C}_2$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-8) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)^4 \longrightarrow \mathcal{I}_{C_2} \longrightarrow 0.$$

Le schéma de Hilbert est donc singulier, réduit le long de $\mathcal{C}$ [6, p. 97] et possède deux composantes irréductibles de dimension 72.

4.1. **Résolution de la courbe de Sernesi**

Achevons cette partie par le calcul d'une résolution du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_C$ de la courbe de Sernesi.

On détermine une résolution de la courbe de Sernesi en utilisant le fait qu'elle soit obtenue par biliaison à partir de la réunion de deux droites disjointes. La méthode est décrite dans ([8], III).

Soit C une courbe de $\mathbb{P}^3$ et $\mathcal{I}_C$ son faisceau d'idéaux. On considère une résolution de $\mathcal{I}_C$ de la forme:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des fibrés avec $H^2_*\mathcal{F} = 0$. On considère de plus une surface Q de degré s contenant C.

Deux cas sont possibles :

1) $\mathcal{F}$ s'écrit sous la forme : $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-s)$ où $\mathcal{F}'$ est un fibré.

2) $\mathcal{F}$ ne s'écrit pas sous cette forme, dans ce cas on modifie la résolution donnée; on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-s) \longrightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-s) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0.$$

Si C' est obtenue par biliaison élémentaire (s, h) à partir de C alors on a la proposition suivante [8, prop 4.3, p.70]

Proposition 4.1. *On a la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(-h) \longrightarrow \mathcal{F}'(-h) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-s) \longrightarrow \mathcal{I}_{C'} \longrightarrow 0.$$

On utilise cette proposition pour déterminer une résolution du faisceau d'idéaux de la courbe de Sernesi.

Une résolution du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ de la réunion de deux droites disjointes est ([8], p.57) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^4 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^4 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0.$$

On pose $\mathcal{E} = \ker\,(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^4 \longrightarrow \mathcal{I})$ et $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^4$. On a la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \longrightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Soit C la courbe de Sernesi, comme C est obtenue par biliaison élémentaire $(4,4)$ à partir de la réunion de deux droites disjointes alors on applique la proposition 4.1 à (1) et on déduit une résolution du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_C$ de la courbe C:
(2)
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-8) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-7)^4 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-8) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6)^4 \to \mathcal{I}_C \to 0.$$

5. CONSTRUCTION

On considère la courbe de Sernesi.

Proposition 5.1. *$r = 6$ et $r_0 = 5$.*

Preuve. De la suite exacte (2) on déduit que $r = 6$.

Le module de Rao de C est $\mathbb{C}$ ([6], p.96), $h^1\mathcal{I}_C(n) = 0$ pour $n \neq 4$ et $h^1\mathcal{I}_C(4) = 1$, on conclut que $r_0 = 5$. $\square$

Le calcul de m_0 s'effectue grâce à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_C(m-4) \longrightarrow \mathcal{I}_C^2(m) \longrightarrow \mathcal{O}_S(mH - 2C) \longrightarrow 0$$

et aux résultats suivants :

Proposition 5.2 ([13, Prop 2.6, page 610]). *Soient F une surface K-3 et L un faisceau inversible sur F tel que $|L| \neq \emptyset$ et sans composante fixe. On suppose que $L^2 > 0$ alors $h^1(L) = 0$.*

Proposition 5.3 ([13, Cor 3.2, p.611]). *Soient F une surface K-3 et $|L|$ un système linéaire complet sur F. Alors $|L|$ n'a pas de points de base en dehors de ses composantes fixes.*

Proposition 5.4. *$m_0 = 12$.*

Preuve. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_C(m-4) \longrightarrow \mathcal{I}_C^2(m) \longrightarrow \mathcal{O}_S(mH - 2C) \longrightarrow 0. \tag{3}$$

Puisque $r_0 = 5$ on a pour tout $m \geq 5$

$$H^1\mathcal{I}_C(m) = 0. \tag{4}$$

La longue suite exacte en cohomologie induite par (3) couplée à l'égalité $mH - 2C = (m-8)H - 2(L_1 + L_2)$ donne:

$$0 \longrightarrow H^0\mathcal{I}_C(m-4) \longrightarrow H^0\mathcal{I}_C^2(m) \longrightarrow H^0\mathcal{O}_S((m-8)H - 2(L_1 + L_2))$$

$$\longrightarrow H^1\mathcal{I}_C(m-4) \longrightarrow H^1\mathcal{I}_C^2(m) \longrightarrow H^1\mathcal{O}_S((m-8)H - 2(L_1 + L_2)) \longrightarrow \ldots.$$

De (4) on déduit que $H^1\mathcal{I}_C(m-4)=0$ pour tout $m\geq 9$. Remarquons que le système linéaire $|2H-(L_1+L_2)|$ est sans point de base car l'idéal de la réunion de deux droites disjointes est engendré par des quadriques. Donc $|4H-2(L_1+L_2)|$ est aussi sans point de base, sans composante fixe d'après la proposition 5.3 et vu que $(4H-2(L_1+L_2))^2>0$ alors on a $H^1\mathcal{O}_S(4H-2(L_1+L_2))=0$ d'après la proposition 5.2.

On déduit que $H^1\mathcal{O}_S(mH-2C)=0$ pour tout $m\geq 12$. $\square$

De plus pour $n\geq r_0+5$ on a bien $h^2\mathcal{I}_C(n-5)=0$. En effet, on considère la suite exacte

$$0\longrightarrow\mathcal{I}_C\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}\longrightarrow\mathcal{O}_C\longrightarrow 0 \tag{5}$$

(5) tordue par $(n-5)$ s'écrit alors

$$0\longrightarrow\mathcal{I}_C(n-5)\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n-5)\longrightarrow\mathcal{O}_C(n-5)\longrightarrow 0. \tag{6}$$

La longue suite exacte induite en cohomologie par (6) comporte la séquence:

$$H^1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n-5)\longrightarrow H^1\mathcal{O}_C(n-5)\longrightarrow H^2\mathcal{I}_C(n-5)\longrightarrow H^2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n-5).$$

Or $H^1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n-5)=0$ et $H^2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n-5)=0$ alors $H^1\mathcal{O}_C(n-5)\simeq H^2\mathcal{I}_C(n-5)$. Par dualité de Serre on a $H^1\mathcal{O}_C(n-5)\simeq H^0(\omega_C(5-n))^\vee$ et puisque $\deg(\omega_C(5-n))<0$ pour tout $n\geq 12$, on obtient $h^2\mathcal{I}_C(n-5)=0$ pour tout $n\geq 12$.

On peut passer à la construction de l'exemple annoncé.

Pour cela, on considère la famille irréductible $\mathcal{C}$ des courbes lisses et intègres de $\mathbb{P}^3$, de degré 18 et de genre 39 avec $h^0(\mathcal{I}_C(3))=0$ et $h^1(\mathcal{I}_C(4))=1$. Soit $C\in\mathcal{C}$, on a $r=6$, $r_0=5$ et $m_0=12$.

1. C n'étant pas intersection complète, pour $n\geq 2r=12$, il existe une surface irréductible S avec $\deg S=n$ et $S_{Sing}=C$, chaque point de C étant un point double ordinaire ou un point pince de S ([15] Th 3.5.2, p.570).

2. $n\geq m_0$, alors H'_S et H_C sont liés de façon lisse ([7]) .

3. Soit Y la normalisée de S et f le morphisme composé $Y\to S\to\mathbb{P}^2$ où la seconde flèche désigne la projection générique de S sur $\mathbb{P}^2$. Alors Y est lisse, la courbe de ramification de f est une courbe γ, plane et intègre, dont les seules singularités sont des nœuds et des cusps ordinaires. Dans cette situation, le corollaire 3.2.9 de [15] entraîne l'existence d'un isomorphisme $H'_\gamma\to F(f)$.

4. $n\geq r_0+5$ (et $h^2\mathcal{I}_C(n-5)=0$), le théorème 3.4.10 de l'article de Wahl implique la lissité du morphisme $H'_S\to F(f)$.

Le degré d_n de γ , δ_n son nombre de nœuds, et κ_n son nombre de cusps sont obtenus par les formules:

$$\begin{array}{rcl} d_n & = & n(n-1)-36 \\ \delta_n & = & \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)-36(n^2-5n+9)+496 \\ \kappa_n & = & n(n-1)(n-2)-54(n-2). \end{array}$$

Dès que $n \geq 12$, toutes les conditions numériques sont remplies puisque $h^2\mathcal{I}_C(m) = 0$ pour $m \geq 7$. Par conséquent, on dispose de deux morphismes lisses de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} H'_S & \xrightarrow{\alpha} & H'_\gamma \\ \downarrow & & \\ H_C & & \end{array}$$

On peut désormais conclure : H'_S est un anneau de séries formelles sur H_C, donc obstrué avec même type formel de singularité. H_C étant réduit et non régulier, il en est de même de H'_S. D'autre part, H'_γ jouit également de ces deux propriétés grâce la lissité de α, et $[\gamma]$ est un point singulier de $(\mathcal{X}_{d_n,\delta_n,\kappa_n})_{red}$ comme annoncé.

On a donc établi le résultat suivant

Théorème 5.5. *Pour tout $n \geq 12$, il existe une famille plate $\mathcal{C}_n$ de courbes planes (intègres), de degré $d_n = n(n-1)-36$, ayant $\delta_n = (n(n-1)(n-2)(n-3))/2-36(n^2-5n+9)+496$ nœuds et $\kappa_n = n(n-1)(n-2)-54(n-2)$ cusps ordinaires pour seules singularités, et qui sont représentées par des points singuliers de $(\mathcal{X}_{d_n,\delta_n,\kappa_n})_{red}$.*

Par la méthode utilisée, l'exemple de plus bas degré est atteint pour $n = 12$, les courbes obtenues sont alors de degré 96 et ont 3088 nœuds et 780 cusps.

Remarque 5.6. 1. La courbe de Mumford donne naissance à une courbe plane obstruée de degré 104, avec 3636 nœuds et 900 cusps. Le point représentant la courbe de Mumford-Wahl est singulier dans $\mathcal{X}_{104,3636,900}$ mais lisse dans $(\mathcal{X}_{104,3636,900})_{red}$.

2. S. Guffroy ([3]) obtient une courbe plane obstruée de degré 216, avec 17632 nœuds et 2856 cusps. Le point représentant la courbe de Guffroy est singulier dans $\mathcal{X}_{216,17632,2856}$ et singulier dans $(\mathcal{X}_{216,17632,2856})_{red}$.
On note que les points correspondant aux courbes lisses et connexes de $\mathbb{P}^3$ considérées par Guffroy sont singuliers dans le schéma de Hilbert et ne vivent pas à l'intersection de deux composantes irréductibles. Ces points constituent une hypersurface singulière de $(\mathcal{H}_{12,15})_{red}$.

Remerciements. Je tiens à exprimer ma gratitude à mon Directeur de thèse, Monsieur Jean D'Almeida, pour sa patience, sa disponibilité et la précision de ses nombreuses explications.

RÉFÉRENCES

[1] J. D'Almeida, *Courbes planes à nœuds et à cusps.* Arch. Math. **90** (2008), 322–330.

[2] G. Greuel et U. Karras, *Families of varieties with prescribed singularities.* Compo. Math. **69** (1989), 83–110.

[3] S. Guffroy, *Sur l'incomplétude de la série linéaire caractéristique d'une famille de courbes planes à nœuds et à cusps.* Nagoya Math. J. **171** (2003), 51–83.

[4] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* GTM Vol. 52, Springer-Verlag, 1977.

[5] R. Hartshorne, *Generalized divisors on gorenstein schemes.* K-theory **8** (1994), 287–339.

[6] R. Hartshorne, *Deformation Theory.* GTM Vol. 257, Springer, 2010.

[7] K. Kodaira, *On characteristic systems of families of surfaces with ordinary singularities in projective space.* Amer. J. of Math. **87** (1965), 227–255.

[8] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, *Sur la classification des courbes gauches.* Astérisque no. 184–185, Publ. S.M.F 1990.

[9] D. Mumford, Further pathologies in algebraic geometry. Amer. J. of Math. **84** (1962), 642–648.

[10] D. Perrin, *Géométrie algébrique, Une introduction.* Interéditions, Paris, 1995.

[11] C. Peskine et L. Szpiro, *Liaison des variétés algébriques.* Invent.Math. **26** (1974), 271–302.

[12] A. P. Rao, *Liaison among curves in* $\mathbb{P}^3$. Invent.Math. **50** (1979), 205–217.

[13] B. Saint-Donat, *Projective Models of K-3 Surfaces.* Amer. J. of Math. **96**, *4*, 602–639.

[14] E. Sernesi, *Un esempio di curva ostruita in* $\mathbb{P}^3$. Seminario di variabili complesse, Bologna (1981), CNR, Università degli Studi di Bologna, 1982.

[15] J. Wahl, *Deformations of plane curves with nodes and cusps.* Amer. J. of Math. **96** (1974), *4*, 529–577.

Received July 16, 2020

Université d'Abomey-Calavi
Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques
01 B.P. 613, Porto-Novo, Bénin.
`edoaubrunjovet@gmail.com`