

Raport științific sintetic
privind implementarea proiectului
PN-II-ID-PCE-2011-3-0533
în perioada
octombrie 2011 – octombrie 2013

În perioada octombrie 2011 – octombrie 2013, în cadrul grantului a fost studiat spațiul suprafețelor Alexandrov și subspații semnificative ale acestui spațiu. Importanța spațiilor Alexandrov constă în primul rând în generalitatea conceptului, care permite includerea în investigații atât a varietăților diferențiabile, cât și a spațiilor nediferențiabile. O clasă importantă de suprafețe Alexandrov este cea a suprafețelor convexe. În multe aplicații cazul nediferențiabil, și în primul rând teoria poliedrelor, inclusiv a grafurilor 3-conexe care le sunt schelete, este cel dominant; în rețele de calculatoare apar în mod esențial asemenea grafuri, și la acestea ne referim în cadrul prezentului proiect.

Au fost publicate sau acceptate spre publicare **16** articole științifice, **14** dintre ele în reviste ISI cumulând un *Factor de Impact* **FI = 6.710** și un *Scor Relativ de Influență* **SRI = 9.785** (raportat la ultimele liste disponibile). Alte **10** lucrări au fost trimise spre publicare. Toate articolele au mențiunea grantului.

Membrii echipei de cercetare au participat la **13 conferințe** și workshopuri **internaționale**, susținând un număr de **18 prezentări**. O parte dintre rezultatele obținute au fost discutate în cadrul seminariilor de *Geometrie diferențială* și de *Metode efective în analiza metrică* din instituția gazdă (IMAR), precum și într-un ciclu de prezentări la Universitatea Shijiazhuang.

O **conferință internațională** pe tematica grantului a fost **organizată** la București, de către IMAR și Facultatea de Matematică a Universității București, având 25 de participanți din 11 țări.

Detalii legate de activitatea științifică a echipei de cercetare, care nu sunt incluse în acest raport, pot fi găsite pe pagina web a grantului, „http://imar.ro/~cvilcu/Web_0533.html”. De exemplu, sunt date acolo trimiteri, pentru articole către jurnalele unde au fost publicate sau de unde pot fi descărcate, iar pentru prezentările făcute către paginile conferințelor respective.

Articole publicate sau acceptate pentru publicare

1. K. Adiprasito și T. Zamfirescu, *Large Curvature on Typical Convex Surfaces,*

***J. Convex Analysis* 19 (2012), 385-391; ISI, FI= 0.625, SRI=0.850.**

Arătăm că pe majoritatea suprafețelor convexe există puncte cu curbura inferioară arbitrar de mare în toate direcțiile tangente. În plus, pentru majoritatea suprafețelor convexe, deși mulțimea punctelor cu curbura 0 în toate direcțiile tangente este de măsură totală, ea nu conține nici o pereche de puncte opuse, i.e. puncte admițând plane suport paralele.

2. L. Yuan și T. Zamfirescu, *Acute triangulations of double planar convex bodies,*

***Publ. Math. Debrecen* 81 (2012), 121-126; ISI, FI= 0.322, SRI=0.385.**

Un corp convex (2-dimensional) dublu $2K$ este o suprafață homeomorfă cu sfera și constând în două corpuri convexe, compacte, plane și izometrice, K și K' , cu frontierele lipite în modul evident. În această notă demonstrăm că, dacă K admite două axe de simetrie perpendiculare și bdK satisface o anumită condiție asupra curburii, atunci $2K$ admite o triangulare acută cu 72 de triunghiuri. În particular, dublul oricărei elipse admite o asemenea triangulare.

3. J. Rouyer și C. Vîlcu, *Sets of tetrahedra, defined by maxima of distance functions,*

***An. St. Univ. Ovidius Constanta* 20 (2012), 197-212; ISI, FI= 0.221, SRI=0.**

În această lucrare studiem tetraedrele și mai ales spațiul tuturor tetraedrelor din $\mathbf{R}^3$ (modulo izometrii și omotetii) din punctul de vedere al maximelor locale și globale ale funcțiilor distanță intrinsecă.

4. A. D. Jumanı și T. Zamfirescu, *On Longest Paths in Triangular Lattice Graphs,*

***Utilitas Math.* 89 (2012), 269-273; ISI, FI= 0.280, SRI=0.287.**

În această notă prezentăm două grafuri scufundabile în laticia trianghiulară echilaterală, care satisfac proprietatea lui Gallai că fiecare vârf nu face parte dintr-un cel mai lung drum.

5. R. Euler și T. Zamfirescu, *On Planar Toeplitz Graphs,*

***Graphs Combin.* 29 (2013), 1311-1327; ISI, FI=0.351, SRI=0.706.**

În această lucrare sunt descrise mai multe clase de grafuri Toeplitz finite și planare și sunt prezentate rezultate despre numărul lor cromatic. Sunt numărate mulțimi independente maximale în aceste grafuri și sunt determinate ecuații de recurență și funcții generatoare pentru câteva cazuri speciale.

6. F. Nadeem, A. Shabbir și T. Zamfirescu, *Planar Lattice Graphs with Gallai's Property,*

***Graphs Combin.* 29 (2013), 1523-1529; ISI, FI=0.351, SRI=0.706.**

În această lucrare sunt construite grafuri homeomorfe cu schelete de poliedre convexe, scufundabile în latici plane și care se bucură de proprietatea lui Gallai. Această proprietate le face utile în realizarea de rețele de calculatoare, conferindu-le calitatea de *fault-tolerance*.

7. A. Shabbir și T. Zamfirescu, *Highly non-concurrent longest cycles in lattice graphs*, Discrete Math. **313** (2013), 1908-1914; **ISI**, FI=0.578, SRI=0.765.

Există grafuri planare în care oricare două vârfuri sunt ocolite de un ciclu de lungime maximă. Deși această ipoteză este foarte puternică, în această lucrare se arată că aceste grafuri pot apărea ca subgrafuri în laticile pătrată și hexagonală. Tratarea acestor latici (finite) pe tor și pe banda lui Möbius permite să se reducă ordinul exemplurilor.

8. L. Jia, L. Yuan, C. T. Zamfirescu și T. I. Zamfirescu, *Balanced triangulations*, Discrete Math. **313** (2013), 2178-2191; **ISI**, FI=0.578, SRI=0.765.

Având ca motivație aplicațiile în analiza numerică, investigăm *triangulările echilibrate* (i.e., triangulări pentru care toate unghiurile sunt strict mai mari decât $\pi/6$ și strict mai mici decât $\pi/2$) și obținem o margine inferioară optimală pentru numărul de triunghiuri în cazul triangulărilor echilibrate ale pătratului. Studiem și suprafețele platonice și determinăm pentru fiecare respectiva margine inferioară optimală. În particular, răspundem afirmativ problemei deschise asupra existenței triangulărilor ascuțitunghice cu 12 triunghiuri pentru suprafeța dodecaedrală regulată, problemă enunțată în [Itoh și Zamfirescu, *Europ. J. Combin.* 28 (2007)].

9. Y. Bashir și T. Zamfirescu, *Lattice graphs with Gallai's property*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **56** (2013), 65-71; **ISI**, FI=0.419, SRI=0.

În această lucrare studiem grafurile cu proprietatea că toate drumurile cele mai lungi, sau toți ciclulii cei mai lungi, au intersecție vidă și găsim asemenea grafuri ca subgrafuri ale laticii cubice.

10. S. Malik, A. M. Qureshi și T. Zamfirescu, *Hamiltonicity of cubic 3-connected k -Halin graphs*, Electron. J. Combin. **20** (2013) #P66; **ISI**, FI=0.532, SRI=1.040.

Studiem cât de mult se poate extinde noțiunea de graf Halin păstrând hamiltonicitatea. Fie $H = TuC$ un graf Halin, cu T arbore și C ciclul exterior. Un graf k -Halin G poate fi obținut din H adăugând muchii cu păstrarea planarității, unind vârfuri din $H - C$, astfel încât $G - C$ are cel mult k cicli. Demonstrăm că, în clasa grafurilor cubice 3-conexe, toate grafurile 14-Halin sunt hamiltoniene și toate grafurile 7-Halin sunt 1- m hamiltoniene. Aceste rezultate sunt optimale.

11. J. Rouyer, *On p -tuples of the Grassmann manifolds*,

J. Geometry **104** (2013), 165-200; **BDI**.

În această lucrare se propune un invariant matricial pentru clasele de izometrie de p -tuples de puncte în varietatea Grassmann $G_n(K^d)$ ($K = \mathbf{R}$ sau $\mathbf{C}$). Acest invariant caracterizează complet p -tuplul, și este folosit la clasificarea p -tuplurilor regulate din $G_2(\mathbf{R}^d)$, $G_3(\mathbf{R}^d)$ și $G_2(\mathbf{C}^d)$.

12. A. Shabbir, C. T. Zamfirescu și **T. Zamfirescu**, *Intersecting longest paths and longest cycles: A survey*,

Electron. J. Graph Theory Appl. **1** (2013), 56-76.

Acesta este un survey al rezultatelor obținute în ultimii 45 de ani, privitoare la intersecția tuturor celor mai lungi drumuri, sau cicli, în grafuri conexe. Grafurile planare și cele conexe de ordin mai mare primesc o atenție specială. Sunt considerate, de asemenea, grafuri scufundabile în lățile cubice de dimensiune arbitrară, precum și grafuri scufundabile în lățile trianghiulare sau hexagonale din plan. Sunt prezentate și rezultate privitoare la cazul când nu toate, ci doar unele drumuri (sau cicli) dintre cele mai lungi se intersectează, de exemplu două sau trei dintre acestea.

13. I. Bárány și **T. Zamfirescu**, *Circles holding typical convex bodies*,

Libertas Math. **33** (2013), 21-25; **BDI**.

În această notă demonstrăm că, pentru majoritatea corpurilor convexe, spațiul tuturor cercurilor de ținere are o infinitate de componente.

14. T. Zamfirescu, *Right convexity*,

J. Convex Analysis, **21** (2014), va apare; **ISI**, FI= 0.625, SRI=0.850.

O mulțime convexă este F -convexă dacă fiecare pereche de puncte din mulțime se găsește pe un triunghi dreptunghic inclus în mulțime. Caracterizăm mulțimile F -convexe, găsim clase de mulțimi F -convexe, studiem F -convexitatea pentru conuri și cilindri și arătăm că majoritatea corpurilor convexe sunt F -convexe. Pentru aceasta, descriem curbura în extremitățile diametrelor majorității corpurilor convexe.

15. T. Zamfirescu, *Typical simplicially convex bodies*,

Adv. Geom., va apare; online 1.3.2013; **ISI**, FI= 0.371, SRI=0.644.

În această notă descriem proprietăți geometrice ale majorității corpurilor simplicial convexe. Arătăm, de exemplu, că acestea formează o mulțime rară și de măsură zero. În plus, acestea arată măcar semi-dense din oricare punct al lor.

16. J. O'Rourke și **C. Vîlcu**, *Development of Curves on Polyhedra via Conical Existence*,

Comp. Geom. - Theory Appl., va apare; online 4.09.2013; **ISI**, FI= 0.545, SRI=0.840.

Arătăm că anumite clase de curbe poligonale simple închise pe suprafața unui poliedru convex pot fi desfășurate în plan fără suprapuneri. Ideea principală de demonstrație este de a arăta că aceste curbe “trăiesc pe un con”, pentru ca apoi să le desfășurăm tăind conul în lungul unei generatoare și așezându-l în plan. Rezultatele de existență conică permit o anumită desfășurare sursă pentru suprafețele poliedrale convexe, care este prezentată în altă lucrare.

17. A. Shabbir și T. Zamfirescu, *Gallai's property for graphs in lattices on the torus and the Moebius strip*, Period. Math. Hung., va apare; **ISI**, FI= 0.261, SRI=0.327.

Aici demonstrăm existența grafurilor ale căror cele mai lungi drumuri sau cicli au intersecția vidă, ca subgrafuri ale laticilor pe tor și pe banda lui Möbius.

18. I. Bárány și T. Zamfirescu, *Holding Circles and Fixing Frames*, Discrete Comput. Geom., va apare; **ISI**, FI= 0.649, SRI=1.620.

Un cerc C ține corpul convex K din $\mathbf{R}^3$ dacă K nu poate fi mișcat din poziția sa fără a intersecta C . Unul dintre rezultatele obținute spune că există un corp convex K în $\mathbf{R}^3$ pentru care mulțimea razelor tuturor cercurilor care-l țin are o infinitate de componente. Un alt rezultat arată că, într-un anumit sens bine determinat, cercul este unic.

Articole trimise spre publicare

1. K. Adiprasito și T. Zamfirescu, *Few Alexandrov surfaces are Riemann*, 2012.

Arătăm că pe majoritatea suprafețelor Alexandrov cu curbura marginită inferior, majoritatea punctelor nu sunt interioare niciunei geodezice. În consecință, aceste suprafețe nu sunt Riemanniene. Aceasta contrastează într-un anumit sens atât cu faptul că toate spațiile Alexandrov ne-Riemanniene cunoscute sunt limite de varietăți Riemanniene, cât și cu structura Riemanniană generalizată pusă în evidență de Otsu și Shioya pentru orice spațiu Alexandrov.

2. K. Adiprasito și B. Benedetti, *Metric geometry and collapsibility*, arXiv:1107.5789v4 [math.MG].

Colapsabilitatea este o noțiune introdusă de Whitehead, ca parte a teoriei sale de omotopie simplă. Aici demonstrăm mai multe rezultate care indică legătura acestora cu geometria metrică și cu convexitatea.

(1) Orice complex care este CAT(0) cu o metrică pentru care toate stelele vârfurilor sunt convexe, este colapsabil.

(2) Orice subdiviziune lineară a oricărui politop este simplicial colapsabilă după o subdiviziune baricentrică. Aceasta rezolvă, până la o subdiviziune derivată, o problemă clasică a lui Lickorish.

(3) Orice subdiviziune lineară a oricărui poliedru stelat în $\mathbf{R}^d$ este simplicial colapsabilă după cel mult d^2 subdiviziuni baricentrice. Aceasta are legătură cu o veche problemă a lui Goodrick.

În plus, propunem următoarele aplicații:

(1) Orice complex simplicial admite o metrică CAT(0) dacă și numai dacă admite triangulări colapsabile.

(2) Toate varietățile contractibile (exceptând unele 4-dimensionale) admit triangulări CAT(0) colapsabile. Aceasta este o versiune poliedrală a unui rezultat clasic al lui Ancel și Guilbault.

(3) Există exponențial de multe triangulări geometrice ale S^d . Aceasta interpolează între rezultatul cunoscut că sunt exponențial de multe frontiere de $(d+1)$ -politoape simpliciale și conjectura că există mai mult decât exponențial de multe d -sfere.

(4) Legat de numărul de fațete, există doar exponențial de multe triangulări geometrice ale formelor spațiale cu geometrie mărginită. Aceasta este o versiune discretă a teoremei de finitudine a lui Cheeger.

3. K. Adiprasito și B Benedetti, *Tight complexes in 3-space admit perfect discrete Morse functions*, arXiv:1202.3390v2 [math.GT].

În 1967, Chillingworth a demonstrat că toate 3-bilele simplicial convexe sunt colapsabile. Folosind notiunea clasică de „tightness”, generalizăm aceasta la varietățile arbitrare. Arătăm că toate 3-varietățile simpliciale tight admit funcții Morse discrete perfecte. În plus, întărim teorema lui Chillingworth arătând că toate 3-bilele simplicial convexe sunt ne-evazive. Pe de altă parte, arătăm că multe 3-bile ne-evazive nu sunt convexe.

4. K. Adiprasito și B Benedetti, *Subdivisions, shellability, and the Zeeman conjecture*, arXiv:1202.6606v3 [math.CO].

Arătăm că pentru orice triangulare rectiliniară a oricărui politop convex, a doua subdiviziune derivată este „cochiliabilă”. Arătăm și că pentru orice triangulare rectiliniară a oricărui politop convex 3-dimensional, prima subdiviziune derivată este cochiliabilă. Aceasta completează exemplul clasic al lui Mary Ellen Rudin, de triangulare rectiliniară ne-cochiliabilă a unui tetraedru. Ne folosim în principal de o nouă noțiune de cochiliabilitate relativă, ce caracterizează comportamentul la lipire pentru complexe cochiliabile.

Obținem, ca o consecință, o nouă caracterizare a proprietății PL în termeni de cochiliabilitate: o triangulare a sferei sau a bilei este PL dacă și numai dacă devine cochiliabilă după suficient de multe subdiviziuni derivate. Aceasta îmbunătățește rezultate ale lui Whitehead, Zeeman și Glaser și răspunde unei întrebări pusă de Billera și Swartz.

Arătăm, de asemenea, că orice complex contractibil poate fi făcut colapsabil prin produse repetate cu un interval. Aceasta îmbunătățește rezultate ale lui Dierker și Lickorish și rezolvă o conjectură a lui

Oliver. În sfârșit, dăm un exemplu care arată că acest comportament se extinde la ne-evaziv, răspunzând astfel unei întrebări a lui Welker.

5. K. Adiprasito, *Combinatorial stratifications and minimality of 2-arrangements*, arXiv:1211.1224v2 [math.AT].

Demonstrăm că complementul oricărui 2-aranjament afin în $\mathbf{R}^d$ este homotopic echivalent cu un complex celular cu atât de multe i -celule cât este al i -lea număr Betti. Aceasta extinde rezultate anterioare ale lui Falk, Dimca-Papadima, Hattori, Randell și Salvetti-Settepanella și alții.

6. K. Adiprasito și B Benedetti, *The Hirsch conjecture holds for normal flag complexes*, arXiv:1303.3598v2 [math.CO].

Folosind intuiția din geometria metrică, arătăm că orice complex simplicial normal de drapele satisface conjectura de ne-revizitare. Obținem, drept consecință, că diametrul grafului fațetelor-muchii corespunzător este mai mic decât numărul de vârfuri minus dimensiunea, la fel ca în conjectura lui Hirsch. Aceasta demonstrează conjectura lui Hirsch pentru toate complexe simpliciale de drapele și, mai general, pentru toate varietățile (conexe) omologice de drapele.

7. K. Adiprasito și R. Sanyal, *An Alexander-type duality for valuations*, arXiv:1303.1708 [math.CO].

Demonstrăm o dualitate de tip Alexander pentru valuări ale anumitor subcomplexe în frontiera poliedrelor. Aceasta întărește și simplifică rezultate ale lui Stanley (1974) și Miller-Reiner (2005). Dăm o generalizare a teoremei lui Brion pentru această situație și discutăm topologia posibilelor subcomplexe pentru care relația de dualitate e valabilă.

8. K. Adiprasito și A Padrol, *A universality theorem for projectively unique polytopes and a conjecture of Shephard*, arXiv:1301.2960v2 [math.MG].

Demonstrăm că orice politop rational este față a unui politop unic proiectiv. Drept corolar, obținem un politop unic proiectiv care nu este sub-politop al niciunui politop etajat. Aceasta arată că o conjectură clasică în teoria politoapelor, formulată de Shephard în anii '70, nu este adevărată.

9. J. Itoh, J. Rouyer și C. Vîlcu, *On the Theorem of the Three Perpendiculars*, arXiv:1307.1577 [math.MG].

Arătăm că teorema celor trei perpendiculare este valabilă în orice formă spațială finit-dimensională.

10. J. Itoh, J. Rouyer și C. Vîlcu, *Moderate smoothness of most Alexandrov surfaces*, arXiv:1308.3862 [math.MG].

Arătăm că majoritatea suprafețelor Alexandrov cu curbura marginită inferior de κ nu au puncte conice. Folosind acest rezultat demonstrăm că în majoritatea punctelor acestor suprafețe, curburile Gauss inferioară și superioară sunt egale cu κ și respectiv ∞ .

Prezentări la conferințe si workshopuri internaționale

1. T. Zamfirescu, *Moderation of convex bodies*,

Convexity, Topology, Combinatorics and Beyond. Workshop in honour of Luis Montejano's 60th birthday, Puerto Vallarta, Mexico, 3-7 octombrie 2011.

2. T. Zamfirescu, *The fight between the circle and the square*,

5th International Conference on Research and Education in Mathematics, Bandung, Indonesia, 22-24 octombrie 2011.

3. T. Zamfirescu, *Against the Extremism in Convex Spaces*,

An Encounter of Algebra and Geometry: A Sharing and Learning Conference; dedicated to Barbu Berceanu for his 60th birthday, Lahore, Pakistan, 19-22 noiembrie 2011.

4. T. Zamfirescu, *Acute Triangulations*,

Spring Workshop on Recent Advances in Graph Theory and Combinatorics, Lahore, Pakistan, 17-19 februarie 2012.

4. T. Zamfirescu, *Simplicial convexity*,

Szeged Workshop in Convex and Discrete Geometry, Szeged, Ungaria, 21-23 mai 2012.

6. T. Zamfirescu, *Non-concurrent longest cycles in lattice graphs*,

International Conference on the Mathematics of Distances and Applications, Varna, Bulgaria, 2-5 iulie 2012.

7. T. Zamfirescu, *Non-expanding mappings and fixed points in graph theory*,

Fixed Point Theory and its Applications, Cluj-Napoca, România, 9-15 iulie 2012.

8. T. Zamfirescu, *Few Alexandrov surfaces are Riemann*,

The Fourth Geometry Meeting, dedicated to the centenary of A. D. Alexandrov, Sankt-Petersburg, Rusia, 20-24 august 2012.

9. **J. Rouyer**, *Triangulations et approximations polyédriques des surfaces d'Alexandrov*,
10. **C. Vîlcu**, *Critical points for distance functions on surfaces*,
11. **T. Zamfirescu**, *Sur les chances de l'ordre allemand dans la réalité russe: Combien d'espaces d'Alexandrov sont-ils riemanniens?*,
Colloque de géométries, Mulhouse, Franța, 27-29 septembrie 2012.
12. **T. Zamfirescu**, *How many Alexandrov surfaces are Riemannian?*,
6th World Conference on 21st Century Mathematics 2013, Lahore, Pakistan, 6-9 martie 2013.
13. **C. Vîlcu**, *Baire categories for Alexandrov surfaces*,
International Conference. Experimental and Theoretical Methods in Algebra, Geometry and Topology,
Eforie Nord, România, 21-24 iunie 2013.
14. **T. Zamfirescu**, *Cut locus and critical points*,
15. **C. Vîlcu**, *Two results concerning cut loci on surfaces*,
Anniversary Conference Faculty of Sciences - 150 years, București, România, 29 august - 1 septembrie 2013.
16. **K. Adiprasito**, *Combinatorial theory of "smooth" polytopes*,
17. **J. Rouyer**, *Moderate smoothness of most Alexandrov surfaces*,
18. **C. Vîlcu**, *Simple closed geodesics on Alexandrov surfaces*,
12th International Conference on Discrete Mathematics: Discrete Geometry and Alexandrov surfaces,
București, România, 7-11 septembrie 2013.

Director de proiect,

Tudor Zamfirescu