

Examen 1

(P1) [2 puncte] Fie mulțimea

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 2, x_2 \geq 1, x_1 \geq -1\}.$$

- (i) Verificați că P este poliedru.
- (ii) Scrieți fețele, fațetele, fețele minimale și vârfurile lui P .

(P2) [3 puncte] Să se verifice dacă următoarele matrici sunt total unimodulare:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(P3) [4 puncte] Fie $D = (V, A)$ un digraf, $d, c : A \rightarrow \mathbb{R}$, f o circulație fezabilă în D și $k : A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cost. Demonstrați că pentru orice circuit C în graful rezidual D_f există $\gamma > 0$ astfel încât f_C^γ este o circulație fezabilă în D cu proprietatea că $\text{cost}(f_C^\gamma) = \text{cost}(f) + \gamma \text{cost}(\psi^C)$.

(Aceasta este Lema 3.6.4 din notele de curs.)

(P4) [4 puncte] Figura 1 reprezintă o rețea de flux N și un s - t flux f pentru N .

- (i) Să se reprezinte graful rezidual D_f și capacitățile reziduale c_f .
- (ii) Să se aleagă un s - t drum P de lungime minimă în D_f și să se calculeze s - t fluxul $g := f_P^\gamma$, unde $\gamma = \min_{e \in A(P)} c_f(e)$.

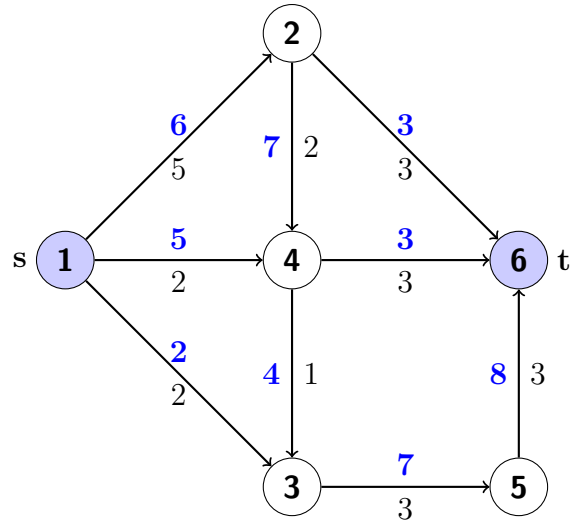


Figure 1: Rețeaua de flux N cu $s-t$ fluxul f

- (iii) Să se reprezinte graful rezidual D_g și capacitățile reziduale c_g .
- (iv) Care este valoarea maximă a unui $s-t$ flux pentru N ?
- (v) Să se dea exemplu de o $s-t$ tăietură în N de capacitate minimă.

(P5) [2 puncte] Figura 2 reprezintă o rețea de flux N . Să se detalieze două iterații ale algoritmului Ford-Fulkerson pentru N , considerând drumul de creștere $P = 126$ la prima iterație și drumul de creștere $Q = 1356$ la a doua iterație.

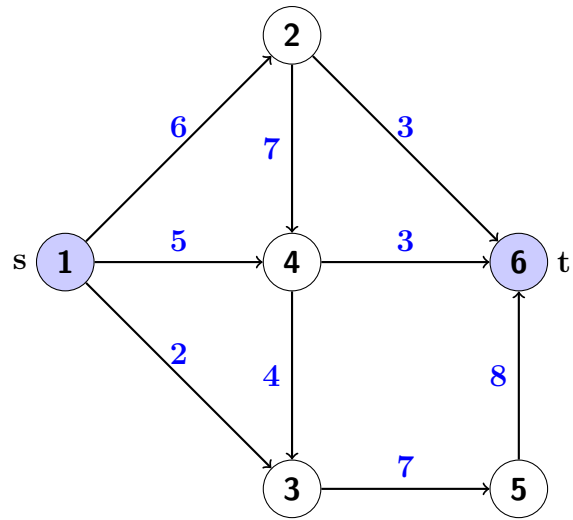


Figure 2: Rețeaua de flux N